11

सरल रेखा
(Straight line)

11.01 सरल रेखा (Straight line)

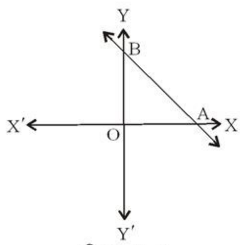
परिभाषा : सरल रेखा एक चर बिन्दु का बिन्दुपथ है जिस पर किन्हीं दो बिन्दुओं को सीधे मिलाने पर बिन्दुपथ के अन्य सभी बिन्दु भी इस पर स्थित हो।

11.02 सरल रेखा का समीकरण (Equation of straight line)

एक ऐसा समीकरण ''सरल रेखा'' का समीकरण कहलाता है जो कि सरल रेखा पर स्थित प्रत्येक बिन्दु द्वारा संतुष्ट होता है और ऐसे बिन्दु जो सरल रेखा पर नहीं होते उन्हें संतुष्ट नहीं करता।

11.03 परिभाषाएँ (Definitions)

(क) अन्तःखण्ड : यदि सरल रेखा AB, भुजाक्ष और कोटि–अक्ष को चित्र 11.01 में क्रमशः A और B बिन्दुओं पर काटती है तब



चित्र 11.01

(i) OA को सरल रेखा AB का x-अक्ष पर **अन्तःखण्ड** कहते हैं।

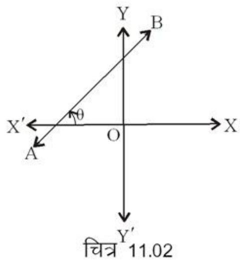
(ii) OB को सरल रेखा का y-अक्ष पर **अन्तःखण्ड** कहते हैं।

(iii) OA और OB दोनों को (इसी क्रम में) सरल रेखा AB का अक्षों पर ''**अन्तःखण्ड**'' कहते हैं।

टिप्पणीः यदि AB क्रमशः OX', OY' पर हो तो अन्तःखण्ड ऋणात्मक होते हैं।

(ख) सरल रेखा की प्रवणता : कोई सरल रेखा x-अक्ष के साथ धन दिशा में जो कोण बनाती है उस कोण की स्पर्शज्या को उस सरल रेखा की **प्रवणता** अथवा **झुकाव** (ढ़ाल) कहते हैं।

रेखा की प्रवणता को प्रायः m से प्रदर्शित किया जाता है। यदि AB सरल रेखा x-अक्ष के साथ चित्र 11.02 में धन दिशा (↶) में θ कोण बनाती है तो $m = \tan\theta$ होता है। यदि AB सरल रेखा x-अक्ष के साथ चित्र 11.03 में ऋण दिशा (↷) में θ कोण बनाती है तो $m = -\tan\theta$ होगा।

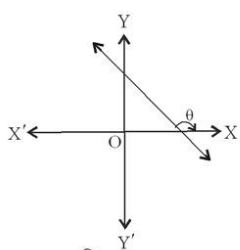


चित्र 11.02

चूँकि x-अक्ष अथवा x-अक्ष के समान्तर रेखा x-अक्ष की धन दिशा से 0° का कोण बनाती है, अतः x-अक्ष अथवा x-अक्ष के समान्तर रेखा की प्रवणता (ढ़ाल) $m = \tan 0° = 0$ होगी।

इसी प्रकार y-अक्ष अथवा y-अक्ष के समान्तर रेखा x-अक्ष की धन दिशा से 90° का कोण बनाती है। अतः y-अक्ष अथवा y-अक्ष के समान्तर रेखा की प्रवणता (ढाल) $m = \tan 90° = \infty$ होगी।

यदि रेखा अक्षों से समान कोण बनाती है अर्थात् x-अक्ष के साथ धन दिशा (↶) यानी वामावर्त दिशा में 45^0 का कोण बनाती है तो प्रवणता (ढ़ाल) m का मान $\tan 45° = 1$ होगा जब कि x-अक्ष के साथ ऋण दिशा (↷) यानी दक्षिणावर्त दिशा में 135^0 का कोण बनाती है तो रेखा की प्रवणता (m) का मान $\tan 135° = -1$ होगा।

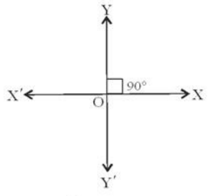


चित्र 11.03

टिप्पणी : किसी भी रेखा द्वारा x-अक्ष की धन दिशा से बनाया गया (वामावर्त दिशा में मापा गया) कोण सदैव 0° एवं 180° के मध्य होता है।

11.04 समकोणिक निर्देशाक्ष (Rectangular axes)

यदि x-अक्ष तथा y-अक्ष को निरूपित करने वाली रेखाएें एक दूसरे पर लम्ब हों तो उन्हे समकोणिक–निर्देशाक्ष कहते है। x-अक्ष या XOX' रेखा पर सदैव प्रत्येक बिन्दु पर कोटि अर्थात् y-निर्देशांक शून्य होता है। अतः x-अक्ष का समीकरण y=0 होता है। y-अक्ष या YOY' पर सदैव प्रत्येक बिन्दु पर भुज अर्थात् x –निर्देशांक शून्य होता है। अतः y-अक्ष का समीकरण $x = 0$ होता है।



चित्र 11.04

11.05 निर्देश अक्षों के समान्तर रेखा का समीकरण (Equation of a line parallel to axes)

(i) x-अक्ष के समान्तर किसी सरल रेखा का समीकरण जो उससे b दूरी पर स्थित है

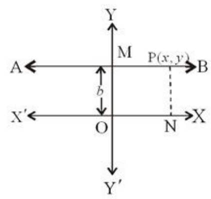
चित्र 11.05 के अनुसार माना कि x-अक्ष के समान्तर b दूरी पर स्थित कोई रेखा AB है जो कि y –अक्ष की धनात्मक दिशा में M बिन्दु पर काटती है। अतः OM = b

माना कि AB रेखा पर कोई चर बिन्दु $P(x, y)$है। P से x-अक्ष पर लम्ब PN खींचा। अर्थात् P बिन्दु के लिए कोटि $PN = y$, परंतु PN = OM.

अतः $OM = y \therefore y = b$

इसी प्रकार AB पर स्थित प्रत्येक बिन्दु के लिए y-निर्देशांक b के बराबर है।

$\therefore$ AB रेखा का समीकरण $y = b$ है।

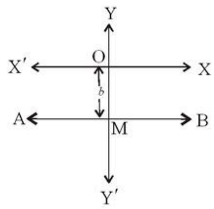


चित्र 11.05

उपप्रमेय

(i) यदि रेखा AB, x-अक्ष के नीचे की ओर b दूरी पर हो, तो उसका समीकरण $y = -b$ होगा। (चित्र 11.06)

(ii) यदि रेखा AB, x-अक्ष से संपाती है तो b =0 होगा। तब AB रेखा का समीकरण और x-अक्ष का समीकरण एक ही $y = 0$ होगा।



चित्र 11.06

(ii) y-अक्ष के समान्तर किसी सरल रेखा का समीकरण जो उससे a दूरी पर स्थित है

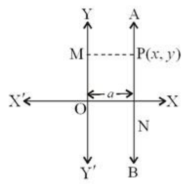
चित्र 11.07 के अनुसार माना कि y-अक्ष के समान्तर a दूरी पर स्थित कोई रेखा AB है जो कि x-अक्ष की धनात्मक दिशा में N बिन्दु पर काटती है। अतः $ON = a$.

माना कि रेखा AB पर कोई चर बिन्दु $P(x, y)$है। P से y –अक्ष पर लम्ब PM खींचा, अर्थात् P के लिए भुज $PM = x$, परन्तु PM = ON.

अतः $ON = x$

$\therefore \quad x = a$

इसी प्रकार AB रेखा पर स्थित प्रत्येक बिन्दु के लिए भुज x निर्देशांक a के बराबर है। अतः रेखा AB का समीकरण $x = a$ होगा।

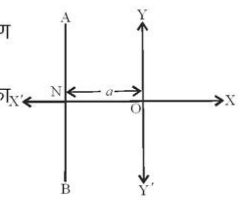


चित्र 11.07

उपप्रमेय :

(i) यदि रेखा AB, y-अक्ष की ऋण दिशा में अर्थात् y-अक्ष के बायीं ओर हो तो उसका समीकरण $x = -a$ होगा। (चित्र 11.08)

(ii) यदि रेखा AB, y-अक्ष से संपाती हो तो a = 0 होगा। अतः AB रेखा का समीकरण और y –अक्ष का समीकरण एक ही $x = 0$ होगा।



चित्र 11.08

विभिन्न प्रमाणिक रूपों में रेखा का समीकरण

11.06 अन्तः खण्ड रूप (Intercept form)

अक्षों पर क्रमशः a और b अन्तःखण्ड काटने वाली रेखा का समीकरण :

माना कि रेखा QR, x तथा y- अक्षों को क्रमशः A तथा B बिन्दुओं पर इस प्रकार काटती है कि $OA = a$ तथा $OB = b$. अब AB पर कोई बिन्दु $P(x, y)$ मान लिया। OP को मिलाया और P से x- अक्ष पर PM और y- अक्ष पर PN लम्ब खींचा।

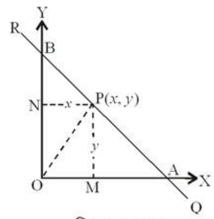
समकोण ΔOAB का क्षेत्रफल $= \Delta OPA$ का क्षेत्रफल $+ \Delta OPB$ का क्षेत्रफल

$$\frac{1}{2}\times \text{OA}\times \text{OB} = \frac{1}{2}\times \text{OA}\times \text{PM} + \frac{1}{2}\times \text{OB}\times \text{PN}$$

$$\frac{1}{2}\times a\times b = \frac{1}{2}\times a\times y \; + \; \frac{1}{2}\times b\times x$$

$\frac{1}{2}\times a\times b$ से प्रत्येक पद में भाग देने पर,

अर्थात् $\quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$



चित्र 11.09

अतः रेखा QR का अभीष्ट समीकरण $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ है जो कि अन्तःखण्ड रूप कहलाता है।

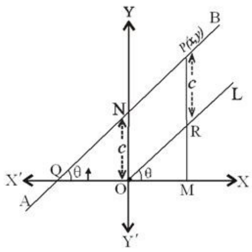
टिप्पणी : जब a का मान अनन्त की ओर अग्रसर होता है अर्थात् $a\to\infty$ तो रेखा का समीकरण $\frac{x}{\infty}+\frac{y}{b}=1$, या $\frac{y}{b}=1$ या $y=b$ होगी जो कि x-अक्ष के समान्तर रेखा है। इसी प्रकार b का मान अनन्त की ओर अग्रसर होता है अर्थात् $b\to\infty$ तो रेखा का समीकरण $\frac{x}{a}+\frac{y}{\infty}=1$, या $\frac{x}{a}=1$, या $x=a$ होगी जो कि y-अक्ष के समान्तर रेखा है।

11.07 झुकाव रूप या स्पर्शज्या रूप (Slope form)

y-अक्ष पर c लम्बाई के बराबर अन्तःखण्ड तथा x-अक्ष की धन दिशा (↶) से θ कोण बनाने वाली रेखा का समीकरण :

रेखा AB पर कोई बिन्दु $P(x, y)$ लिया। P से OX पर PM लम्ब डाला जो कि मूल बिन्दु O से AB के समान्तर खींची गयी रेखा OL को R पर काटती है।

समकोण Δ OMR में, $\quad \tan\theta = \frac{\text{RM}}{\text{OM}}$,



चित्र 11.10

या $\quad \text{RM} = \text{OM}\tan\theta$

अब $\quad \text{PM} = \text{PR} + \text{RM} \; (\text{AB}||\text{OL})$

$\quad \text{PM} = c + \text{OM}\tan\theta \;\; (\text{ON} = \text{RP} = c)$

$\therefore \quad y = x\tan\theta + c$

या $\quad y = mx + c$,

यहाँ $m=\tan\theta$, $m=$ रेखा की प्रवणता है।

यही अभीष्ट रेखा की समीकरण है।

टिप्पणी :

(i) यदि रेखा मूल बिन्दु से गुजरती है तब y-अक्ष पर कटा हुआ अन्तःखण्ड शून्य होगा। अतः मूल बिन्दु से गुजरने वाली रेखा का समीकरण $y=mx$ जिसमें c नहीं होगा।

(ii) जब रेखा y-अक्ष को OY पर काटती है तो c का मान धनात्मक एवं OY' पर काटती है तो c का मान ऋणात्मक होता है।

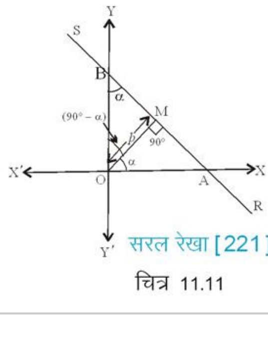
(iii) जब θ का मान अधिक कोण हो तो प्रवणता (m) अर्थात् $\tan\theta$ का मान चिह्न में ऋणात्मक होता है तथा θ का मान न्यून कोण होने पर प्रवणता (m) अर्थात् $\tan\theta$ का मान चिह्न में सदैव धनात्मक होता है। यदि रेखा अक्षों से बराबर कोण बनाती है तब $m=\pm 1$ होता है।

11.08 लम्ब रूप (Normal form)

मूल बिन्दु से रेखा पर डाले गए लम्ब की लम्बाई तथा लम्ब द्वारा x-अक्ष के साथ बना हुआ कोण दिया हो तो रेखा का समीकरण :

माना कि R S कोई रेखा x-अक्ष एवं y-अक्ष को क्रमशः बिन्दुओं A एवं B पर काटती है। मूल बिन्दु O से रेखा पर OM लम्ब खींचा जिस की लम्बाई p तथा यह x- अक्ष की धन दिशा से α कोण बनाता है। अर्थात् $\angle \text{MOA} = \alpha$. समकोण ΔOBM में,

$$\angle \text{OBM} = 90^\circ - \angle \text{BOM}$$
$$= 90^\circ - \{90^\circ - \angle \text{MOA}\}$$
$$= 90^\circ - \{90^\circ - \alpha\}$$
$$= \alpha$$



चित्र 11.11

समकोण ΔOMA में,

$$\cos\alpha = \frac{p}{OA} \quad \Rightarrow \quad OA = \frac{p}{\cos\alpha}$$

तथा समकोण Δ OBM में,

$$\sin\alpha = \frac{p}{OB} \quad \Rightarrow \quad OB = \frac{p}{\sin\alpha}$$

अतः RS रेखा x-अक्ष एवं y-अक्ष पर क्रमशः OA, OB अर्थात् $\frac{p}{\cos\alpha}, \frac{p}{\sin\alpha}$

अंतःखण्ड काटती है। इसका समीकरण $\frac{x}{p/\cos\alpha} + \frac{y}{p/\sin\alpha} = 1$

या $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$

यही लम्ब रूप में RS रेखा का समीकरण है।

टिप्पणी :

(i) मूल बिन्दु से रेखा पर डाले गये लम्ब की लम्बाई p सदैव धनात्मक लेते हैं।

(ii) मूल बिन्दु से रेखा पर डाले गये लम्ब द्वारा x-अक्ष की धनात्मक दिशा से बनाया गया कोण का मान $0°$ से $360°$ के मध्य कुछ भी सम्भव है।

(iii) किसी भी रेखा का समीकरण ज्ञात करने के लिए दो शर्तों का होना आवश्यक है।

(iv) प्रायः सरल रेखा का समीकरण लिखते समय भुज (x) को पहले तथा कोटि (y) को दूसरे पद पर लिखते हैं।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 1. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो y- अक्ष के समान्तर है तथा बिन्दु (4,3) से गुजरती है।

हल : y- अक्ष के समान्तर किसी रेखा का समीकरण है

$$x = a \qquad (1)$$

$\because$ रेखा बिन्दु (4, 3) से गुजरती है इसलिए बिन्दु के निर्देशांक रेखा के समीकरण (1) को संतुष्ट करेंगे। अतः $4 = a$

a का मान समीकरण (1) में रखने पर, अभीष्ट रेखा का समीकरण $x = 4$ होगा।

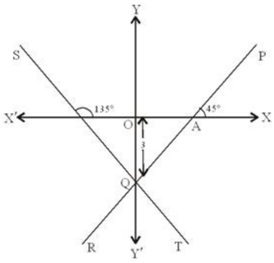
उदाहरण 2. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखाओं $y = 8$ तथा $y = -14$ से समान दूरी पर स्थित है।

हल : हमें ज्ञात है कि रेखाएँ $y = 8$ तथा $y = -14$ सदैव x-अक्ष के समान्तर रेखाएँ है। अतः इन दोनों रेखाओं से समान दूरी पर स्थित रेखा भी x-अक्ष के ही समान्तर होगी जिसकी x-अक्ष से दूरी

$$= \frac{8 + (-14)}{2} = -\frac{6}{2} = -3$$

अतः अभीष्ट रेखा का समीकरण $y = -3$ है।

उदाहरण 3. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो y-अक्ष को मूल बिन्दु से नीचे की ओर 3 इकाई का अन्तःखण्ड काटती है और दोनों अक्षों से बराबर झुकी हुई है।



चित्र 11.12

हल : अभीष्ट रेखा दोनों अक्षों से बराबर झुकी हुई है जब कि हम जानते है कि दोनों अक्षों के मध्य का कोण $90°$ होता है। अतः रेखा x-अक्ष की धन दिशा (वामावर्त दिशा) से $45°$ या $135°$ का कोण बनायेगी। प्रश्न में दी गयी दोनों स्थितियों के अनुसार माना कि रेखा का समीकरण है

$$y = mx + c \qquad (1)$$

यहाँ $c = -3$ तथा $m = \tan 45°$ या $m = \tan 135°$

$\Rightarrow$ $m = 1$

या $m = \tan(90° + 45°) = -1$

अब m, c का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$y = x - 3 \quad \text{या} \quad y = -x - 3$$

$$\Rightarrow \quad x - y - 3 = 0 \quad \text{या} \quad x + y + 3 = 0$$

अतः अभीष्ट रेखा का समीकरण $x - y - 3 = 0$ या $x + y + 3 = 0$ होगा।

उदाहरण 4. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(2,3)$ से होकर जाती है और अक्षों पर बराबर एवं विपरीत चिह्न के अन्तःखण्ड काटती है।

हल : माना कि सरल रेखा की अभीष्ट समीकरण है

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (1)$$

जब कि रेखा द्वारा x- अक्ष एवं y- अक्ष पर काटे गये अन्तःखण्ड क्रमशः a, b हैं।

प्रश्नानुसार रेखा अक्षों से बराबर एवं विपरीत चिह्न वाले अन्तःखण्ड काटती है, अतः $b = -a$, इस प्रकार रेखा का समीकरण होगा

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{-a} = 1$$

या
$$x - y = a \qquad (2)$$

यह रेखा बिन्दु $(2,3)$ से गुजरती है अतः उपर्युक्त समीकरण को संतुष्ट करेगी अर्थात् समीकरण में $x = 2, y = 3$ रखने पर, $a = -1$

समीकरण (2) में a का मान रखने पर,

$$x - y = -1$$

या
$$x - y + 1 = 0$$

अतः अभीष्ट समीकरण $x - y + 1 = 0$ होगा।

उदाहरण 5. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(-4,1)$ से होकर जाती है और यह f c Un q m I d s v [kkm d s e / ; d s v Ur [k. M d ks x-अक्ष के प्रतिच्छेद बिन्दु से 1:2 के अनुपात में विभाजित करती है।

हल : माना कि अक्षों से क्रमशः a एवं b अन्तःखण्ड काटने वाली रेखा का समीकरण है

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (1)$$

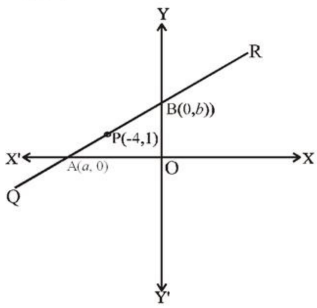
यह रेखा अक्षों को क्रमशः A एवं B बिन्दु पर काटती है जिनके निर्देशांक $(a,0)$ और $(0,b)$ हैं। अन्तः खण्ड AB को A की ओर से 1 : 2 में विभाजित करने वाले बिन्दु P के निर्देशांक (x_1, y_1) हो तो

$$x_1 = \frac{2 \times a + 1 \times 0}{2+1}, \quad y_1 = \frac{2 \times 0 + 1 \times b}{2+1}$$

या
$$x_1 = \frac{2a}{3}, \qquad y_1 = \frac{b}{3}.$$

जब कि प्रश्न के अनुसार यह बिन्दु $(-4,1)$ है।

$$\therefore \quad \frac{2a}{3} = -4 \text{ तथा } \frac{b}{3} = 1, \text{ अर्थात् } a = -6 \text{ तथा } b = 3$$



चित्र 11.13

समीकरण (1) में a, b के मान रखने पर] $\frac{x}{-6} + \frac{y}{3} = 1$

अतः अभीष्ट रेखा का समीकरण $x - 2y + 6 = 0$ है।

उदाहरण 6. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिस पर मूल बिन्दु से डाले गये लम्ब की लम्बाई 5 इकाई तथा यह लम्ब x- अक्ष के साथ 135° कोण बनाता है।

प्रश्न में दी शर्तों के अनुसार माना कि रेखा का समीकरण है

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p \qquad (1)$$

यहाँ $\alpha = 135°$ और $p = 5$ इकाई

$\therefore \quad \cos\alpha = \cos 135° = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ तथा $\sin\alpha = \sin 135° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

समीकरण (1) में मान रखने पर, $x\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 5$

$$\frac{-x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} = 5 \quad \text{या} \quad x - y + 5\sqrt{2} = 0$$

अतः अभीष्ट रेखा का समीकरण $x - y + 5\sqrt{2} = 0$ हैं।

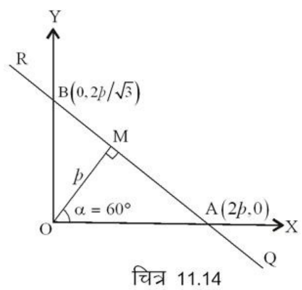
उदाहरण 7. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो अक्षों के साथ $54\sqrt{3}$ वर्ग इकाई क्षेत्रफल का त्रिभुज बनाती है तथा जिस पर मूल बिन्दु से डाला गया लम्ब x-अक्ष के साथ 60° का कोण बनाता है।

हल : माना कि मूल बिन्दु से किसी रेखा पर डाले गए लम्ब की लम्बाई p है तथा यह लम्ब x- अक्ष से 60° कोण बनाता है तब उस रेखा QR का समीकरण है

$$x\cos 60^0 + y\sin 60^0 = p$$

या $$x.\frac{1}{2} + y.\frac{\sqrt{3}}{2} = p \Rightarrow x + \sqrt{3}y = 2p \qquad (1)$$

यह रेखा x एवं y-अक्षों को क्रमशः बिन्दुओं A एवं B पर काटती है। बिन्दु A एवं B के निर्देशांक ज्ञात करने के लिए समीकरण (1) में क्रमशः $y = 0$ एवं $x = 0$ रखने पर $x = 2p, \quad y = \frac{2p}{\sqrt{3}}$



चित्र 11.14

$\therefore$ बिन्दु $A(2p, 0)$ तथा बिन्दु $B\left(0, \frac{2p}{\sqrt{3}}\right)$ होगा।

$\therefore$ अक्षों के साथ बने त्रिभुज OAB का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई

या $\quad \Delta OAB = \frac{1}{2} \times OA \times OB = \frac{1}{2}.2p.\frac{2p}{\sqrt{3}} = \frac{2p^2}{\sqrt{3}}$

प्रश्नानुसार त्रिभुज का क्षेत्रफल $= 54\sqrt{3}$ वर्ग इकाई है।

अतः $\quad \frac{2p^2}{\sqrt{3}} = 54\sqrt{3} \Rightarrow p = \pm 9$

समीकरण (1) में p का मान धनात्मक रखने पर

$x + \sqrt{3}y = 2 \times 9$ या $x + \sqrt{3}y = 18$

अतः अभीष्ट रेखा का समीकरण $x + \sqrt{3}y = 18$ है।

प्रश्नमाला 11.1

1. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो x-अक्ष के समान्तर है तथा
   (i) मूल बिन्दु से ऊपर की ओर 5 इकाई की दूरी पर है।
   (ii) मूल बिन्दु से नीचे की ओर 3 इकाई दूरी पर है।
2. उन सरल रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जो x-अक्ष के समान्तर है और इससे
   (i) $a+b$ (ii) a^2-b^2 (iii) $b\cos\theta$ दूरी पर स्थित है।
3. y-अक्ष के समान्तर उन सरल रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जो मूल बिन्दु से क्रमशः
   (i) 5 (ii) –3 (iii) $2/5$ इकाई दूरी पर है।
4. उन सरल रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जो y-अक्ष के समान्तर है तथा उनसे
   (i) $\sqrt{7}$ (ii) $-\sqrt{3}+2$ (iii) $p+q$ की दूरी पर स्थित है।
5. उन सरल रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(-3,2)$ से होकर जाती है तथा क्रमशः x-अक्ष के लम्बवत् एवं x-अक्ष के समान्तर है।
6. बिन्दु (3,4) से होकर जाने वाली अक्षों के समान्तर रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए। इन रेखाओं से 8 इकाई की दूरी पर और इनके समान्तर रेखाओं के समीकरण भी ज्ञात कीजिए।
7. $x=\pm4$, और $y=\pm3$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं के निर्देशांक लिखिए और उनसे निर्मित आयत का क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए।
8. उन रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जो मूल बिन्दु से होकर जाती है तथा
   (i) x-अक्ष से $-135°$ का कोण बनाती है।
   (ii) प्रथम चतुर्थांश में OY से $60°$ का कोण बनाती है।
   (iii) y- अक्ष की धनदिशा से 5 इकाई के बराबर अन्तःखण्ड काटती है और कोण XOY के समद्विभाजक के समान्तर है।
9. उन रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जो x-अक्ष तथा y-अक्ष पर निम्नलिखित अन्तःखण्ड काटती है
   (i) 5, 3 (ii) –2, 3
10. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(2,3)$ से गुजरती है तथा अक्षों पर बराबर अन्तःखण्ड काटती है।
11. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(1,2)$ से होकर जाती है तथा रेखा द्वारा x- अक्ष पर काटा गया अन्तःखण्ड y-अक्ष पर काटे गये अन्तःखण्ड का दुगना है।
12. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(-3,-5)$ से होकर जाती है तथा दोनों अक्षों के मध्य, रेखा का कटा हुआ अन्तःखण्ड इस बिन्दु पर समद्विभाजित करता है।
13. ऐसी दो रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(4,-3)$ से होकर जाती है तथा अक्षों से काटे हुए अन्तःखण्डों का योग 5 इकाई है।
14. सिद्ध कीजिए कि उस सरल रेखा का समीकरण जिसके अक्षों पर अन्तःखण्डों के व्युत्क्रम a और b है, $ax+by=1$ है।
15. एक सरल रेखा अक्षों से क्रमशः 5 और 3 इकाईयों का अन्तःखण्ड काटती है। इस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जब कि अन्तःखण्ड :
    (i) अक्षों की धन दिशा में हो।
    (ii) अक्षों की ऋण दिशा में हो।
    (iii) पहला अन्तःखण्ड धन दिशा में और दूसरा ऋण दिशा में हो।
16. एक सरल रेखा पर मूल बिन्दु से डाला गया लम्ब y-अक्ष से $30°$ का कोण बनाता है तथा उसकी लम्बाई 2 इकाई है। इस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।
17. रेखा $x\sin\alpha+y\cos\alpha=\sin 2\alpha$ के उस भाग की लम्बाई ज्ञात कीजिए जो अक्षों के मध्य में काटता है। इस भाग के मध्य बिन्दु के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए।
18. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके लिए $p=3$ तथा $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ है जहाँ p मूल बिन्दु से रेखा पर डाले गये लम्ब की लम्बाई तथा α इस लम्ब द्वारा x-अक्ष से बनाया गया कोण है।

11.09 सरल रेखा तथा x, y में एक घातीय समीकरण

(Staright line and linear equation in x, y)

(क) किसी समतल में प्रत्येक सरल रेखा x तथा y में एक घातीय समीकरण द्वारा निरूपित होती है।

समतल में स्थित किसी सरल रेखा द्वारा x-अक्ष के साथ न्यून कोण या समकोण या अधिक कोण बनाने के अतिरिक्त कोई सम्भावना नहीं है।

(i) यदि रेखा x-अक्ष के साथ न्यून कोण बनाती है तब उसका समीकरण $y = mx + c$ के रूप का होगा जहाँ $m = \tan\theta$.

(ii) यदि रेखा x-अक्ष के साथ समकोण बनाती है तब वह रेखा y-अक्ष के समान्तर होगी तथा रेखा का समीकरण $x = \mathrm{c}$ रूप का होगा।

(iii) यदि रेखा x-अक्ष के साथ अधिक कोण बनाती है तब भी उसका समीकरण स्थिति (i) के अनुसार $y = mx + c$ रूप का होगा।

अतः तीनों स्थितियों में सरल रेखा का समीकरण x तथा y में एक घात वाला समीकरण ही है।

(ख) x और y में एक घातीय समीकरण सर्वदा एक सरल रेखा को निरूपित करता है

यदि A, B, C तीन अचर राशि जो कि x, y रहित है तब x, y में एक घातीय समीकरण का व्यापक रूप है

$$\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C} = 0 \tag{1}$$

यहाँ प्रत्येक पद में x या y की उच्चतम घात एक एवं न्यूनतम घात शून्य है अर्थात् प्रथम पद एवं द्वितीय पद में क्रमशः x, y की घात एक है जबकि अचर तृतीय पद x, y रहित है जिसमें x, y की घात शून्य है। अतः समीकरण (1) प्रथम घात का व्यापक समीकरण है।

समीकरण (1) में A तथा B के मान दोनों शून्य नहीं हो सकते क्योंकि A और B एक साथ शून्य हो तब समीकरण का रूप $\mathrm{C} = 0$ हो जायेगा जो कि C के प्रत्येक मान के लिए सम्भव नहीं होगा तथा चर राशि नहीं होने के कारण वह अर्थविहीन होगा। अतः $Ax + By + C = 0$ में यह आवश्यक है कि $A \neq 0$ या $B \neq 0$.

प्रथम स्थिति :

जब $\mathrm{A} \neq 0$, $\mathrm{B} = 0$, तब समीकरण (1) में $\mathrm{A}x + 0 \times y + \mathrm{C} = 0$ या $\mathrm{A}x + \mathrm{C} = 0$ या $x = -\mathrm{C}/\mathrm{A}$ जो कि y अक्ष के समान्तर रेखा का समीकरण है तथा y-अक्ष से $-\mathrm{C}/\mathrm{A}$ दूरी पर स्थित है। यदि इसके साथ $\mathrm{C} = 0$ हो तब $\mathrm{A}x = 0$ या $x = 0$ जो कि y-अक्ष की समीकरण है।

द्वितीय स्थिति :

जब $\mathrm{A} = 0, \mathrm{B} \neq 0$, तब समीकरण (1) में $0 \times x + \mathrm{B}y + \mathrm{C} = 0$ या $\mathrm{B}y + \mathrm{C} = 0$ या $y = -\mathrm{C}/\mathrm{B}$ जोकि x-अक्ष के समान्तर रेखा का समीकरण तथा x-अक्ष से $-\mathrm{C}/\mathrm{B}$ दूरी पर स्थित है। यदि इसके साथ $\mathrm{C} = 0$ हो तब $\mathrm{B}y = 0$ या $y = 0$ जो कि x-अक्ष की समीकरण है।

इसी प्रकार समीकरण (1) द्वारा निरूपित बिन्दुपथ पर तीन बिन्दु $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ हो तब यह तीनों बिन्दु समीकरण (1) को संतुष्ट करेंगे।

$$\mathrm{A}x_1 + \mathrm{B}y_1 + \mathrm{C} = 0 \tag{2}$$

$$\mathrm{A}x_2 + \mathrm{B}y_2 + \mathrm{C} = 0 \tag{3}$$

$$\mathrm{A}x_3 + \mathrm{B}y_3 + \mathrm{C} = 0 \tag{4}$$

उपर्युक्त समीकरणों में से अचर A,B,C को विलुप्त करने पर,

$$x_1(y_2 - y_3) + y_1(x_3 - x_2) + 1(x_2y_3 - y_2x_3) = 0 \tag{5}$$

उपरोक्त का वाम पक्ष त्रिभुज जिसके शीर्ष दिये गये बिन्दु है को व्यक्त करता है। चूंकि यह क्षेत्रफल शून्य है अर्थात् तीनों बिन्दु एक सरल रेखा पर है। अतः समीकरण $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C} = 0$ एक सरल रेखा को निरूपित करता है जो **"व्यापक समीकरण"** कहलाता है।

टिप्पणी :

(i) सरल रेखा के व्यापक समीकरण $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C} = 0$ से प्रतीत होता है कि तीन अचर पद है जब कि वास्तव में इनमें से दो ही स्वतंत्र अचर पद है क्योंकि समीकरण के $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{C}}x + \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{C}}y + 1 = 0$ रूप में रखने पर $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{C}}$ एवं $\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{C}}$ दो ही अचर शेष रहते है।

(ii) यदि दो समीकरण $ax+by+c=0$ तथा $a'x+b'y+c'=0$ एक ही रेखा को निरूपित करते हैं तब $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ अर्थात् समान पदो के गुणाँक समानुपाती होते हैं।

11.10 सरल रेखा के व्यापक समीकरण का मानक रूपों में समानयन
(Reduction of general equation of straight line into standard forms)

1. झुकाव रूप $y=mx+c$ में व्यक्त करना : हम जानते हैं कि सरल रेखा का व्यापक समीकरण $Ax+By+C=0$ होता है।

अर्थात्, $By=-Ax-C$

$$\Rightarrow \quad y=\left(-\frac{A}{B}\right)x-\left(\frac{C}{B}\right) \qquad (\text{जब कि } B\neq 0)$$

$$\Rightarrow \quad y=\left(-\frac{A}{B}\right)x+\left(-\frac{C}{B}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y=mx+c, \qquad \text{जहाँ } m=-\frac{A}{B},\ c=-\frac{C}{B}$$

टिप्पणीः

(i) सरल रेखा $Ax+By+C=0$ का झुकाव (ढ़ाल)

$$m=\frac{-A}{B}=-\frac{x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}$$

तथा y- अक्ष पर काटा गया अन्तःखण्ड

$$c=-\frac{C}{B}=-\frac{\text{अचर पद}}{y \text{ का गुणांक}}$$

(ii) समीकरण $y=mx+c$ के बायें पक्ष में y का गुणाँक 1 होता है। अतः

(क) बायें पक्ष में y का पद रखकर शेष पदों को दायें पक्ष में ले जाते हैं।

(ख) यदि बायें पक्ष में y का कोई गुणाँक हो, तो उससे दोनों पक्षों में भाग देते हैं।

2. अन्तःखण्ड रूप $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ में व्यक्त करना : सरल रेखा का व्यापक रूप में समीकरण है

$$Ax+By+C=0$$

या

$$Ax+By=-C$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{\left(\frac{-C}{A}\right)}+\frac{y}{\left(\frac{-C}{B}\right)}=1$$

या

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \qquad \text{जहाँ} \quad a=-\frac{C}{A} \quad ; \quad b=-\frac{C}{B}$$

अतः x-अक्ष तथा y-अक्ष पर काटे गए अन्तःखण्डों की लम्बाइयाँ क्रमशः $-\frac{C}{A}, -\frac{C}{B}$ होंगी।

टिप्पणी :

(i) दिए हुए समीकरण के दाँयें पक्ष में केवल अचर पद लिखें।

(ii) अचर पद से दोनों पक्षों में भाग दें, जिससे दायाँ पक्ष 1 हो जाए।

(iii) वायें पक्ष में x और y के गुणाँको के व्युत्क्रम को उनके हर में रखें।

3. लम्ब रूप $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ में व्यक्त करना :

सरल रेखा का व्यापक समीकरण है

$$Ax + By + C = 0$$

या $$Ax + By = -C \qquad (1)$$

माना इस रेखा का लम्बरूप समीकरण

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p \quad \text{(यहाँ } p \text{ धनात्मक है)} \qquad (2)$$

समीकरण (1) एवं (2) एक ही रेखा के दो समीकरण है, अतः पदों की तुलना करने पर,

$$\frac{-C}{p} = \frac{A}{\cos\alpha} = \frac{B}{\sin\alpha} = \pm\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}},$$

या $$\frac{-C}{p} = \frac{A}{\cos\alpha} = \frac{B}{\sin\alpha} = \pm\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{1}$$

अतः $$p = \frac{-C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}},\ \cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}},\ \sin\alpha = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

समीकरण (2) में मान प्रतिस्थापित करने पर ,

$$x\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} + y\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{-C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

अर्थात् $$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y = \frac{-C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

अतः यह $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ रेखा का अभीष्ट लम्बरूप है। स्मरण रहे कि $p = -\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$ के लिए $\pm$ चिह्न में वही चिह्न लेंगे जिससे ऊपर p धनात्मक रहे।

टिप्पणी :

(i) व्यापक समीकरण $Ax + By + C = 0$ को लम्ब रूप में बदलने के लिए सर्वप्रथम C को दायीं ओर स्थानान्तरित करके धनात्मक बनाते हैं।

(ii) प्रत्येक पद में $\sqrt{A^2+B^2}$ अर्थात् x तथा y के गुणाँकों के वर्गों के योग का वर्गमूल से भाग करते हैं।

11.11 एक बिन्दु से गुजरने वाली रेखा (Straight line passing through one point)

उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करना जो दिए हुए बिन्दु (x_1, y_1) से होकर जाती है तथा x-अक्ष के साथ θ कोण बनाती है।

चूँकि अभीष्ट रेखा x-अक्ष के साथ θ कोण बनाती है अतः रेखा की प्रवणता $m = \tan\theta$ होगी। माना कि रेखा की अभीष्ट समीकरण है

$$y = mx + c \qquad (1)$$

यह रेखा बिन्दु (x_1, y_1) से गुजरती है अतः समीकरण (1) को संतुष्ट कराने पर अर्थात् $x = x_1$ तथा $y = y_1$ रखने पर

$$y_1 = mx_1 + c \qquad (2)$$

समीकरण (1) में से (2) को घटाने पर,

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

जो रेखा का अभीष्ट समीकरण है।

टिप्पणी : m का मान प्रश्न में दिए हुए किसी अन्य प्रतिबंध से ज्ञात किया जाता है, जो रेखा को संतुष्ट करती है।

11.12 दो बिन्दुओं से गुजरने वाली रेखा (Line passing through two points)

उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करना जो दिए हुए दो बिन्दुओं (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) से गुजरती है। माना कि सरल रेखा का समीकरण है

$$y = mx + c \quad (1)$$

चूँकि उपर्युक्त रेखा बिन्दु (x_1, y_1) तथा बिन्दु (x_2, y_2) से गुजरती है। अतः यह बिन्दु समीकरण (1) को संतुष्ट करेंगे।

$\therefore$
$$y_1 = mx_1 + c \quad (2)$$

तथा
$$y_2 = mx_2 + c \quad (3)$$

समीकरण (1) में से समीकरण (2) घटाने पर,

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad (4)$$

समीकरण (3) में से समीकरण (2) घटाने पर

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1) \quad \text{या} \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

m का मान समीकरण (4) में रखने पर

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad \text{या} \quad \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

यह अभीष्ट समीकरण है।

टिप्पणी : बिन्दुओं (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) को मिलाने वाली रेखा की प्रवणता (ढाल)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{\text{दोनों बिन्दुओं की कोटियों का अन्तर}}{\text{दोनों बिन्दुओं के भुजों का अन्तर}}$$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 8: समीकरण $3x + 4y = 12$ को (i) झुकाव रूप (ii) अन्तःखण्ड रूप (iii) लम्ब रूप में परिवर्तित कीजिए तथा इनके मानक रूप में प्रयुक्त अचर पदों के मान ज्ञात कीजिए।

हल : (i) दिया गया समीकरण है

$$3x + 4y = 12$$

या
$$4y = -3x + 12$$

या
$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{12}{4}$$

या
$$y = -(3/4)x + 3$$

यह $y = mx + c$ रूप का है, जहाँ $m = -3/4$ तथा $c = 3$ है।

(ii) दिया गया समीकरण है

$$3x + 4y = 12$$

उपर्युक्त समीकरण में 12 से भाग देने पर,

$$\frac{3x}{12} + \frac{4y}{12} = 1$$

या
$$\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$$

जो $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ के रूप का है जहाँ $a = 4, b = 3$ है।

(iii) दिया गया समीकरण है

$$3x + 4y = 12$$

दायाँ पक्ष धनात्मक है अतः समीकरण में

$$\sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = 5 \text{ का भाग देने पर}$$

या $$\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y = \frac{12}{5}$$

जो कि $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ के रूप का है जहाँ

$$\cos\alpha = \frac{3}{5}, \quad \sin\alpha = \frac{4}{5}, \quad p = \frac{12}{5}$$

जिससे $\tan\alpha = \frac{4}{3}$ तथा $p = \frac{12}{5}$

इस प्रकार दी हुई रेखा पर मूल बिन्दु से डाले गये लम्ब की लम्बाई $12/5$ इकाई तथा x-अक्ष के साथ झुकाव $\tan^{-1}(4/3)$ है।

उदाहरण 9: सरल रेखा $\sqrt{3}x - y + 2 = 0$ को लम्ब रूप में परिवर्तित कीजिए तथा इस रेखा पर मूल बिन्दु से डाले गए लम्ब की लम्बाई और x-अक्ष से उसका झुकाव भी ज्ञात कीजिए।

हल : दिया हुआ समीकरण $\sqrt{3}x - y + 2 = 0$ या $\sqrt{3}x - y = -2$

दायें पक्ष को धनात्मक करने पर,

$$-\sqrt{3}x + y = 2 \qquad (1)$$

दोनों पक्षों को $\sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (1)^2} = \sqrt{3+1} = 2$ से भाग देने पर

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2} - y = 1 \qquad (2)$$

यह $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ का रूप है। अतः तुलना करने पर,

$$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\alpha = \frac{1}{2}, \qquad p = 1$$

या $$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\cos 30°$$

$$= \cos(180° - 30°) \text{ या } \cos(180° + 30°)$$

$$= \cos 150° \text{ या } \cos 210°$$

अतः $$\alpha = 150° \text{ या } 210° \qquad (3)$$

इसी प्रकार $$\sin\alpha = \frac{1}{2} = \sin 30° = \sin(180° - 30°)$$

$$= \sin 30° \text{ या } \sin 150°$$

अतः $$\alpha = 30° \text{ या } 150° \qquad (4)$$

समीकरण (3) तथा (4) में α का सर्वनिष्ठ मान 150° है।

अतः लम्ब की लम्बाई = 1 इकाई तथा उसका x-अक्ष से झुकाव 150° है।

उदाहरण 10: उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(3,2)$ से गुजरती है तथा x-अक्ष के साथ $60°$ का कोण बनाती है।

हल : रेखा x-अक्ष के साथ $60°$ का कोण बनाती है। अतः अभीष्ट रेखा की प्रवणता $m = \tan 60° = \sqrt{3}$ तथा बिन्दु $(3,2)$ है

अर्थात् $x_1 = 3, y_1 = 2$

हम जानते हैं कि बिन्दु (x_1, y_1) से गुजरने वाली तथा m प्रवणता की रेखा का समीकरण है,

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

मान रखने पर,

$$y - 2 = \sqrt{3}.(x - 3) \Rightarrow \sqrt{3}x - y + 2 - 3\sqrt{3} = 0$$

उदाहरण 11: उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(4,-7),(-2,3)$ तथा बिन्दु $(-4,-7)$, $(-2,-3)$ को मिलाने वाली रेखा के मध्य बिन्दुओं से गुजरती है।

हल : बिन्दु $(4,-7)$ एवं $(-2,3)$ को मिलाने वाली रेखा के मध्य बिन्दु के निर्देशांक

$$= \left(\frac{4+(-2)}{2}, \frac{-7+3}{2}\right) = (1,-2) \qquad (1)$$

इसी प्रकार बिन्दु $(-4,-7),(-2,-3)$ को मिलाने वाली रेखा के मध्य बिन्दु के निर्देशांक

$$= \left(\frac{-4+(-2)}{2}, \frac{-7+(-3)}{2}\right) = (-3,-5) \qquad (2)$$

अतः बिन्दु $(1,-2)$ तथा $(-3,-5)$ से गुजरने वाली रेखा का समीकरण

$$y - (-2) = \frac{(-5)-(-2)}{(-3)-(1)}(x-1)$$

या $$3x - 4y - 11 = 0$$

प्रश्नमाला 11.2

1. निम्न समीकरणों को झुकाव रूप तथा अन्तःखण्ड रूप में परिवर्तित कर इनके मानक रूप में प्रयुक्त अचर पदों के मान ज्ञात कीजिए।
   (i) $7x - 13y = 15$ (ii) $5x + 6y + 8 = 0$
2. रेखा $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ की प्रवणता ज्ञात कीजिए।
3. निम्न रेखाओं के x-अक्ष की धन दिशा से बनने वाले कोण की स्पर्शज्या ज्ञात कीजिए।
   (i) $\sqrt{3}x - y + 2 = 0$ (ii) $x + \sqrt{3}y - 2\sqrt{3} = 0$
4. सिद्ध कीजिए कि रेखा $\frac{x}{2x_1} + \frac{y}{2y_1} = 1$ द्वारा अक्षों पर काटे गए भाग के मध्य बिन्दु के निर्देशांक (x_1, y_1) होंगे।
5. सरल रेखा $3x + 4y = 6$ से अक्षों के मध्य कटे हुए अन्तःखण्ड की लम्बाई और उसका मध्य बिन्दु ज्ञात कीजिए।
6. a और b के मान बताओ जब कि समीकरण $5x - 4y = 20$ और $ax - by + 1 = 0$ एक ही सरल रेखा को प्रदर्शित करे।
7. निम्न समीकरणों को $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ के रूप में परिवर्तित कीजिए।
   (i) $x + y + \sqrt{2} = 0$ (ii) $\sqrt{3}x - y + 2 = 0$
8. सरल रेखा $3x - 4y - 11 = 0$ को लम्ब रूप में परिवर्तित कीजिए तथा इस रेखा पर मूल बिन्दु से डाले गए लम्ब की लम्बाई और x-अक्ष से उसकी प्रवणता ज्ञात कीजिए।
9. सरल $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ तथा $2x - 3y = 5$ एक ही रेखा निरूपित करते हैं, तो a व b का मान ज्ञात कीजिए।

10. सरल रेखा $y = mx + c$ एवं $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ एक ही रेखा को निरूपित करे तो रेखा का $x-$अक्ष से झुकाव कोण तथा $y-$अक्ष से काटे गए अन्तः रूप की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

11. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(2,3)$ से होकर जाती है और x-अक्ष से $45°$ का कोण बनाती है।

12. निम्न दो बिन्दुओ से गुजरने वाली रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए :

(i) $(3,4)$ और $(5,6)$ (ii) $(0,-a)$ और $(b,0)$

(iii) (a,b) और $(a+b,a-b)$ (iv) $(\mathrm{at}_1, a/t_1)$ और $(\mathrm{at}_2, a/t_2)$

(v) $(a\sec\alpha, b\tan\alpha)$ और $(a\sec\beta, b\tan\beta)$

11.13 दो रेखाओं के मध्य का कोण (Angle between two lines)

माना दो रेखाएँ AB तथा CD हैं जिनके समीकरण क्रमशः $y = m_1x + c_1$ तथा $y = m_2x + c_2$ है। यह रेखाएँ x-अक्ष की धन दिशा से क्रमशः θ_1 तथा θ_2 कोण बनाती है। अतः इनके ढाल $m_1 = \tan\theta_1$ तथा $m_2 = \tan\theta_2$ है। तथा दोनों रेखाएँ एक दूसरे को P बिन्दु पर इस प्रकार काटती है कि चित्र 11.15 में $\angle BPD = \theta$. बने, अब त्रिभुज EPF में

$$\theta + \theta_2 = \theta_1 \qquad \therefore \qquad \theta = \theta_1 - \theta_2 \qquad (1)$$

समीकरण (1) से $\theta = \theta_1 - \theta_2$

$$\therefore \qquad \tan\theta = \tan(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\text{या} \qquad \tan\theta = \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1 \tan\theta_2} = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}$$

$$\text{अतः} \qquad \theta = \tan^{-1}\left[\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}\right] \qquad (2)$$

माना AB तथा CD के मध्य दूसरा कोण $CPB = \phi$ है

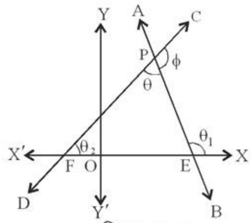
$$\text{तब} \qquad \phi = \pi - \theta$$

$$\therefore \qquad \tan\phi = \tan(\pi - \theta)$$

$$\text{या} \qquad \tan\phi = -\tan\theta$$

$$\text{या} \qquad \tan\phi = -\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}$$

$$\text{अतः} \qquad \phi = \tan^{-1}\left[-\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}\right] \qquad (3)$$



चित्र 11.15

रेखाओं (2) तथा (3) के मध्य कोण $= \tan^{-1}\left[\pm\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}\right]$

टिप्पणी :

(i) दोनों रेखाओं के मध्य का कोण न्यूनकोण है तब $\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}$ धनात्मक लेते है। जब अधिक कोण हो तब यह राशि ऋणात्मक लेते है।

(ii) यदि दोनों रेखाओं में एक रेखा y-अक्ष के समान्तर हो तो θ का मान उपर्युक्त सूत्र से ज्ञात करना असम्भव है क्योंकि वह रेखा x-अक्ष से $90°$ का कोण बनाती है जिससे m_1 या m_2 का मान $\tan 90°$ अर्थात् अनन्त होगा। माना कि AB रेखा $y-$अक्ष के समान्तर है अर्थात् $x-$अक्ष से $90°$ का कोण बनाती है।

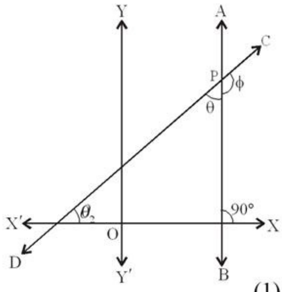
चित्रानुसार, $\theta = \frac{\pi}{2} - \theta_2$

या $\tan\theta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta_2\right)$

या $\tan\theta = \cot\theta_2$

$\Rightarrow$ $\tan\theta = \frac{1}{\tan\theta_2} = \frac{1}{m_2}$

$\therefore$ $\theta = \tan^{-1}\frac{1}{m_2}$ (1)



चित्र 11.16

इसी प्रकार रेखाओं के मध्य का दूसरा कोण $CPB = \phi$ हो तब

$$\phi = \pi - \theta$$

या $\phi = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \theta_2\right)$

या $\phi = \frac{\pi}{2} + \theta_2$

या $\tan\phi = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta_2\right)$

या $\tan\phi = -\cot\theta_2$

अतः $\tan\phi = -\frac{1}{\tan\theta_2}$

$\Rightarrow$ $\tan\phi = -\frac{1}{m_2}$

$\therefore$ $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{m_2}\right)$ (2)

अतः समीकरण (1) एवं (2) से ज्ञात होता है कि यदि दो रेखाओं में से एक रेखा $y-$अक्ष के समान्तर है तब रेखाओं के मध्य का कोण $= \tan^{-1}\left(\pm\frac{1}{m_2}\right)$ होगा।

11.14 दो रेखाओं के समान्तर होने के लिए आवश्यक प्रतिबंध (Necessary condition for two lines to be parallel)

यदि दो रेखाएँ समान्तर हों, तो उनके मध्य का कोण शून्य होगा अतः कोण की स्पर्शज्या का मान भी शून्य होगा।

माना कि रेखाओं के समीकरण $y = m_1x + c_1$ तथा $y = m_2x + c_2$ है।

इन दोनों रेखाओं के मध्य का कोण θ हो तो

$$\tan\theta = \pm\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}$$

दोनों रेखाएँ समान्तर है अतः $\theta = 0°$ अर्थात् $\tan\theta = \tan 0 = 0$ रखने पर,

$$(m_1 - m_2) = 0$$

इस प्रकार दो रेखाएँ समान्तर है तो $m_1 = m_2$ अर्थात् उनकी प्रवणताएँ समान होंगी। इसको इस प्रकार भी कह सकते है कि यदि एक रेखा की प्रवणता ज्ञात हो तो उसके समान्तर रेखा की प्रवणता भी वही रहेगी।

11.15 दो रेखाओं के परस्पर लम्बवत् होने का प्रतिबंध (Condition for two lines to be mutually perpendicular)

माना कि दी हुई सरल रेखाओं के समीकरण निम्न हैं

$$y = m_1x + c_1 \quad (1)$$

$$y = m_2x + c_2 \quad (2)$$

यदि इन दोनों रेखाओं के मध्य का कोण θ हो तो $\tan\theta = \pm\left[\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}\right]$

यदि ये रेखाएँ परस्पर लम्बवत् हो तो $\theta = 90°$ अर्थात् $\tan\theta = \tan 90° = \infty$

अतः $\qquad 1 + m_1m_2 = 0$

या $\qquad m_1m_2 = -1$

या $\qquad m_2 = -\frac{1}{m_1}$

अतः दो लम्बवत् रेखाओं की प्रवणताओं का गुणनफल −1 होता है और किसी दी हुई रेखा की प्रवणता का चिह्न परिवर्तन करके व्युत्क्रम लिखने पर उस रेखा के लम्बवत् रेखा की प्रवणता प्राप्त होगी।

11.16 दिये हुए बिन्दु से गुजरने वाली एवं दी हुई सरल रेखा से निर्धारित कोण बनाने वाली रेखा की समीकरण (Equation of a line passing through a given point and making a certain angle with the given line)

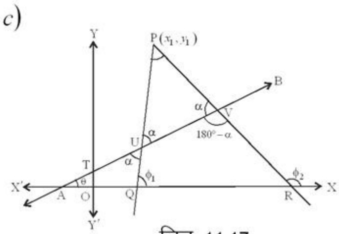
माना कि कोई बिन्दु $P(x_1, y_1)$ है तथा AB कोई रेखा है जो $x-$ अक्ष के साथ θ कोण बनाती है तथा P से गुजरने वाली दो अभीष्ट रेखाएँ PQ, PR, $x-$ अक्ष से क्रमशः ϕ_1 तथा ϕ_2 कोण बनाती है

$\therefore$ PQ का समीकरण $\qquad y - y_1 = \tan\phi_1(x - x_1) \quad (1)$

तथा PR का समीकरण $\qquad y - y_1 = \tan\phi_2(x - x_1) \quad (2)$

अब दी हुई रेखा AB की समीकरण $\qquad y = mx + c \; (\because m = \tan\theta, OT = c)$

जो कि PQ तथा PR से α कोण बनाती है।



चित्र 11.17

ΔAUQ तथा ΔAVR में, $\phi_1 = \theta + \alpha$ और $\phi_2 = \theta + (180 - \alpha)$

अतः $\qquad \tan\phi_1 = \tan(\theta + \alpha)$

$\Rightarrow \qquad \tan\phi_1 = \frac{\tan\theta + \tan\alpha}{1 - \tan\theta\tan\alpha}$

या $\qquad \tan\phi_1 = \frac{m + \tan\alpha}{1 - m\tan\alpha} \quad (3)$

तथा $\qquad \tan\phi_2 = \tan\left[\theta + (180° - \alpha)\right] = \tan\left[180° + (\theta - \alpha)\right]$

अतः $\qquad \tan\phi_2 = \tan(\theta - \alpha) = \frac{\tan\theta - \tan\alpha}{1 + \tan\theta\tan\alpha} = \frac{m - \tan\alpha}{1 + m\tan\alpha} \quad (4)$

$\tan\phi_1$ तथा $\tan\phi_2$ का मान समीकरण (3) तथा (4) से समीकरण (1) तथा (2) में रखने पर अभीष्ट रेखा का समीकरण प्राप्त होता है

$$y - y_1 = \frac{m + \tan\alpha}{1 - m\tan\alpha}(x - x_1) \quad (5)$$

या

$$y - y_1 = \frac{m - \tan\alpha}{1 + m\tan\alpha}(x - x_1) \quad (6)$$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 12: रेखाओं $3x+y-7=0$ और $x+2y+9=0$ के मध्य का कोण ज्ञात कीजिए।

हल: दी हुई रेखा $3x+y-7=0$ की प्रवणता

$$m_1=-\frac{x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}=-\frac{3}{1}$$

इसी प्रकार दूसरी रेखा $x+2y+9=0$ की प्रवणता

$$m_2=-\frac{x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}=-\frac{1}{2}$$

माना कि दोनों रेखाओं के मध्य का कोण θ है।

अतः $$\tan\theta=\pm\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}=\pm\frac{-3+\frac{1}{2}}{1+(-3)\left(-\frac{1}{2}\right)}=\pm(-1)$$

अतः $$\tan\theta=-1,\ 1$$

$\therefore$ $$\tan\theta=-\tan 45^\circ \text{ तथा } \tan\theta=\tan 45^\circ$$

$\therefore$ $$\theta=135^\circ \text{ तथा } \theta=45^\circ$$

उदाहरण 13: सिद्ध कीजिए कि रेखाएँ $2x-y+9=0$ और $4x-2y-8=0$ समान्तर है।

हल: प्रथम रेखा का समीकरण $2x-y+9=0$ है जिसकी प्रवणता m_1 है

$\therefore$ $$m_1=-\frac{x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}=2$$

इसी प्रकार दूसरी रेखा की समीकरण $4x-2y-8=0$ जिसकी प्रवणता m_2 है,

$\therefore$ $$m_2=-\frac{x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}=2$$

अतः $$m_1=m_2$$

इस प्रकार दोनों रेखाओं की प्रवणताएँ समान हैं अतः दोनों रेखाएँ समान्तर हैं।

उदाहरण 14: उस सरल रेखा की समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(1,1)$ से होकर जाए और रेखा $3x-4y=7$ के समान्तर हो।

हल : प्रथम विधि : माना कि बिन्दु $(1,1)$ से होकर जाने वाली रेखा की समीकरण है

$$y-1=m(x-1) \tag{1}$$

प्रश्नानुसार दी गयी रेखा है $3x-4y=7$ (2)

इसकी प्रवणता $$m_1=-\frac{x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}=\frac{3}{4} \tag{3}$$

रेखा (1) एवं (2) समान्तर हैं इसलिए दोनों की प्रवणताएँ समान होंगी

अतः $$m=m_1=3/4$$

m का मान समीकरण (2) में रखने पर, $y-1=(3/4)(x-1)$

या $$3x-4y+1=0$$ यही अभीष्ट समीकरण है।

द्वितीय विधि : प्रश्नानुसार दी गयी रेखा $3x-4y=7$ के समान्तर रेखा की समीकरण

$3x-4y=\lambda$ (जहाँ λ कोई स्वेच्छ अचर है) (1)

यह रेखा बिन्दु $(1,1)$ से गुजरती है। अतः $x=1$, $y=1$ समीकरण में रखने पर संतुष्ट करेगी

$3\times1-4\times1=\lambda \Rightarrow \lambda=-1$

समीकरण (1) में $\lambda=-1$ रखने पर, $3x-4y+1=0$

यही अभीष्ट रेखा का समीकरण है।

उदाहरण 15: उस रेखा की समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(1,2)$ से गुजरती है तथा बिन्दु $(4,-3)$ और $(2,5)$ को मिलाने वाली रेखा के समान्तर है।

हल : बिन्दु $(1,2)$ से गुजरने वाली रेखा की समीकरण जिसकी प्रवणता m है।

$$y-2=m(x-1) \tag{1}$$

दिये हुए दो बिन्दु $(4,-3)$ ओर $(2,5)$ को मिलाने वाली रेखा की प्रवणता

$$m_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{5-(-3)}{2-4}=-4$$

रेखा (1) दिए गए दो बिन्दुओं $(4,-3)$ और $(2,5)$ को मिलाने वाली रेखा के समान्तर होगी यदि

$$m=m_1 \qquad \therefore \qquad m=-4$$

m का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$y-2=-4(x-1)$$

या $4x+y-6=0$, अभीष्ट रेखा का समीकरण है।

उदाहरण 16: बिन्दु $(3,-4)$ से गुजरने वाली $x-$अक्ष के समान्तर रेखा की समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : प्रथम विधि : दिये हुए बिन्दु $(3,-4)$ से गुजरने वाली रेखा की समीकरण, सूत्र $y-y_1=m(x-x_1)$ से (यहाँ $x_1=3$, $y_1=-4$)

$y-(-4)=m(x-3)$ ($m=\tan\theta=$ रेखा की प्रवणता है।)

या $$y+4=m(x-3) \tag{1}$$

हम जानते है कि $x-$अक्ष की प्रवणता $m=\tan 0=0$

(क्योंकि $x-$अक्ष, $x-$अक्ष के साथ $0°$ का कोण बनाती है)

समीकरण (1) में m का मान रखने पर अभीष्ट समीकरण प्राप्त होगा

$$y+4=0(x-3) \qquad y+4=0 \Rightarrow y=-4$$

द्वितीय विधि : हमें ज्ञात है कि $x-$अक्ष के समानतर c दूरी पर स्थित किसी सरल रेखा की समीकरण है

$y=c$ (1)

यह रेखा बिन्दु $(3,-4)$ से गुजरती है, तब बिन्दु $(3,-4)$ को संतुष्ट करेगी

अतः $-4=c$, c का यह मान समीकरण (1) में रखने पर अभीष्ट रेखा का समीकरण $y=-4$ प्राप्त होता है।

उदाहरण 17: सिद्ध कीजिए कि रेखाएँ $2x-y+9=0$ तथा $x+2y-7=0$ एक दूसरे पर लम्बवत् हैं।

हलः प्रथम दी गयी रेखा का समीकरण $2x-y+9=0$ इसकी प्रवणता

$$m_1=-\frac{x \text{ का गुणाँक}}{y \text{ का गुणाँक}}=-\frac{2}{(-1)}=2 \tag{1}$$

इसी प्रकार द्वितीय रेखा की समीकरण $x+2y-7=0$ इसकी प्रवणता, m_2 हो, तब

$$m_2=-\frac{x \text{ का गुणाँक}}{y \text{ का गुणाँक}}=-\frac{1}{2} \tag{2}$$

हम जानते है कि यदि दो रेखाओं की प्रवणताएँ m_1 तथा m_2 हो और वे परस्पर लम्बवत् हो तो उनकी प्रवणताओं का गुणनफल सदैव -1 होता है

अर्थात् $m_1 m_2 = -1$, m_1 तथा m_2 के मान रेखने पर

$$2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \quad \Rightarrow \quad = -1 = -1$$

अतः दोनों रेखाएँ लम्बवत् हैं।

उदाहरण 18: उस रेखा की समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(3,2)$ से गुजरती है तथा रेखा $y = x$ के लम्बवत् है।

हल : प्रथम विधि : दिये हुए बिन्दु $(3,2)$ से गुजरने वाली रेखा की समीकरण, जिसकी प्रवणता m है,

$y - y_1 = m(x - x_1)$, यहाँ $x_1 = 3, y_1 = 2$

$$y - 2 = m(x - 3) \qquad (1)$$

दी गयी रेखा की $y = x$ अर्थात् $x - y = 0$ की प्रवणता

$$m_1 = -\frac{x \text{ का गुणाँक}}{y \text{ का गुणाँक}} = -\frac{1}{-1} \text{ अतः } m_1 = 1$$

रेखा $x - y = 0$ की लम्ब रेखा की प्रवणता $m = -\frac{1}{m_1} \Rightarrow m = -\frac{1}{1} = -1$

समीकरण (1) में $m = -1$ रखने पर अभीष्ट समीकरण है

$y - 2 = -1(x - 3)$ अतः $x + y - 5 = 0$

द्वितीय विधि : दी गयी रेखा $y = x$ अर्थात् $x - y = 0$ के लम्बवत् किसी रेखा की समीकरण

$$x + y = \lambda \quad (\text{यहाँ } \lambda \text{ स्वेच्छ है}) \qquad (1)$$

यह रेखा बिन्दु $(3,2)$ से गुजरती है अतः दिये बिन्दु के निर्देशांक समीकरण (1) को संतुष्ट करेगे। अतः $3 + 2 = \lambda \Rightarrow \lambda = 5$

λ का मान समीकरण (1) में रखने पर अभीष्ट रेखा की समीकरण

$x + y = 5$ या $x + y - 5 = 0$

उदाहरण 19: उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(2,1)$ तथा $(4,3)$ के मिलाने वाली रेखा का लम्ब अर्धक है।

हल : बिन्दुओं $(2,1)$ तथा $(4,3)$ को मिलाने वाली रेखा की प्रवणता

$$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 1}{4 - 2} = 1$$

अब बिन्दुओं $(2, 1)$ तथा $(4, 3)$ को मिलाने वाली रेखा के लम्ब रेखा की प्रवणता $m = -\frac{1}{m_1} = -1$

दिये हुए बिन्दुओं $(2,1)$ तथा $(4,3)$ का मध्य बिन्दु (x_1, y_1) हो तब

$x_1 = \frac{2+4}{2}$, $y_1 = \frac{1+3}{2}$ से $x_1 = 3, y_1 = 2$

अतः बिन्दु $(3,2)$ से गुजरने वाली रेखा जिसकी प्रवणता -1 है, की समीकरण

$y - y_1 = m(x - x_1)$ से $y - 2 = -1(x - 3)$ या $x + y - 5 = 0$

यही दिए गए बिन्दुओं से बनी रेखा के लम्ब अर्धक का समीकरण है।

उदाहरण 20: उन दो रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(2,3)$ से गुजरती है और रेखा $3x+y=5$ के साथ $45°$ का कोण बनाती है।

हल : $\because$ एक दिये हुए बिन्दु (x_1, y_1) से गुजरने वाली तथा एक दी गई रेखा $y=mx+c$ के साथ दिया गया कोण α बनाने वाली रेखाओं की समीकरण

$$y-y_1=\frac{m+\tan\alpha}{1-m\tan\alpha}(x-x_1) \qquad (1)$$

तथा
$$y-y_1=\frac{m-\tan\alpha}{1+m\tan\alpha}(x-x_1) \qquad (2)$$

प्रश्नानुसार यहाँ $(x_1, y_1)=(2,3), \alpha=45^o, \therefore \tan\alpha=\tan 45^o=1$ तथा m, रेखा $3x+y=5$ की प्रवणता है

$$\therefore \qquad m=-\frac{x \text{ का गुणाँक}}{y \text{ का गुणाँक}}=-\frac{3}{1}=-3$$

इनके मान समीकरण (1) एवं (2) में रखने पर अभीष्ट रेखाओं के समीकरण

$$x+2y-8=0 \qquad (3)$$

तथा
$$2x-y-1=0 \qquad (4)$$

अतः अभीष्ट समीकरण $x+2y-8=0$ तथा $2x-y-1=0$ है।

उदाहरण 21: सिद्ध कीजिए कि बिन्दुओं $(c\cos\alpha, c\sin\alpha)$ और $(c\cos\beta, c\sin\beta)$ को मिलाने वाली रेखा पर मूल बिन्दु से डाला गया लम्ब इनके मध्य की दूरी को समद्विभाजित करता है।

हल : यह सिद्ध करना पर्याप्त है कि बिन्दुओं $(c\cos\alpha, c\sin\alpha)$ और $(c\cos\beta, c\sin\beta)$ को मिलाने वाली तथा मूल बिन्दु और इन बिन्दुओं के मध्य बिन्दु को मिलाने वाली रेखाएँ परस्पर लम्बवत् है।

बिन्दुओं $(c\cos\alpha, c\sin\alpha)$ और $(c\cos\beta, c\sin\beta)$ को मिलाने वाली रेखा की प्रवणता

$$m_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{c\sin\alpha-c\sin\beta}{c\cos\alpha-c\cos\beta}=\frac{(\sin\alpha-\sin\beta)}{(\cos\alpha-\cos\beta)} \qquad (1)$$

दिये हुए बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा के मध्य बिन्दु के निर्देशांक है

$$\left(\frac{c\cos\alpha+c\cos\beta}{2}, \frac{c\sin\alpha+c\sin\beta}{2}\right)$$

मूल बिन्दु $(0,0)$ और उपर्युक्त बिन्दु को मिलाने वाली रेखा की प्रवणता

$$m_2=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{\frac{c\sin\alpha+c\sin\beta}{2}-0}{\frac{c\cos\alpha+c\cos\beta}{2}-0}=\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta} \qquad (2)$$

अब
$$m_1m_2=\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha-\cos\beta}\times\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}$$

$$=\frac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\cos^2\alpha-\cos^2\beta}=-\frac{(\cos^2\alpha-\cos^2\beta)}{(\cos^2\alpha-\cos^2\beta)}=-1$$

अतः m_1 तथा m_2 प्रवणता वाली रेखाएं परस्पर लम्बवत् है। अतः दिए गए बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा पर मूल बिन्दु से डाला गया लम्ब इसे समद्विभाजित करता है।

प्रश्नमाला 11.3

1. निम्नलिखित सरल रेखाओं के मध्य का कोण ज्ञात कीजिए।

   (i) $y=\left(2-\sqrt{3}\right)x+5$ तथा $y=\left(2+\sqrt{3}\right)x-7$

   (ii) $2y-3x+5=0$ तथा $4x+5y+8=0$

   (iii) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ तथा $\frac{x}{b}-\frac{y}{a}=1$

2. सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित सरल रेखाएँ समान्तर है।

   (i) $2y=mx+c$ तथा $4y=2mx$

   (ii) $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ तथा $x+y\tan\alpha=5\tan\alpha$

3. सिद्ध कीजिए कि रेखाएँ जिनके समीकरण $4x+5y+7=0$ तथा $5x-4y-11=0$ है परस्पर लम्बवत् हैं।

4. उन सरल रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जो

   (i) बिन्दु $(4,5)$ से गुजरती है तथा $2x-3y-5=0$ रेखा के समान्तर है।

   (ii) बिन्दु $(1,2)$ से गुजरती है तथा रेखा $4x+3y+8=0$ के लम्बवत् है।

   (iii) रेखा $2x+5y=7$ के समान्तर है तथा बिन्दुओं $(2,7)$ तथा $(-4,1)$ को मिलाने वाली रेखा के मध्य बिन्दु से होकर जाती है।

   (iv) बिन्दुओं $(-3,7)$ तथा $(5,-4)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड को $4:7$ के अनुपात में विभाजित करती है तथा इस पर लम्ब है।

5. एक त्रिभुज के शीर्ष $(0,0),(4,-6)$ और $(1,-3)$ हैं, इन बिन्दुओं से त्रिभुज की सम्मुख भुजाओं पर डाले गए लम्बों के समीकरण ज्ञात कीजिए।

6. उस त्रिभुज का लम्ब केन्द्र ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष $(2,0),(3,4)$ और $(0,3)$ हैं।

7. किसी त्रिभुज के दो शीर्ष $(3,-1)$ तथा $(-2,3)$ है। त्रिभुज का लम्ब केन्द्र मूल बिन्दु पर है। तीसरे शीर्ष के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

8. बिन्दुओं $(2,-3)$ तथा $(-1,5)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड के लम्ब अर्द्धक का समीकरण ज्ञात कीजिए।

9. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो सरल रेखा $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=1$ पर,, उस बिन्दु से जहाँ वह $x-$ अक्ष से मिलती है, लम्ब है।

10. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा $2x+3y+11=0$ के समान्तर है तथा अक्षों पर काटे गए अन्तःखण्डों का योग 15 है।

11. उन सरल रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(2,-3)$ से गुजरती हैं तथा सरल रेखा $3x-2y=4$ से 45^o का कोण बनाती है।

12. उन रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(4,5)$ से गुजरती है तथा रेखाओं $3x=4y+7$ और $5y=12x+6$ से समान कोण बनाती है।

13. सिद्ध कीजिए कि उस रेखा का समीकरण निम्नलिखित होगा जो मूल बिन्दु से होकर गुजरती है तथा रेखा $y=mx+c$ के साथ θ कोण बनाती है

$$\frac{y}{x}=\frac{m+\tan\theta}{1-m\tan\theta}$$

14. सिद्ध कीजिए कि बिन्दु $(a\cos^3\theta, a\sin^3\theta)$ से गुजरने वाली तथा सरल रेखा $x\sec\theta + y\,cosec\theta = a$ पर लम्ब सरल रेखा का समीकरण $x\cos\theta - y\sin\theta = a\cos 2\theta$ है।

15. एक समबाहु त्रिभुज के एक शीर्ष के निर्देशांक $(2,3)$ है तथा सम्मुख भुजा का समीकरण $x + y = 2$ है। शेष भुजाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए।

16. उन दो रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(3,-2)$ से गुजरती है तथा रेखा $x + \sqrt{3}y = 1$ से $60°$ का कोण बनाती है।

विविध प्रश्नमाला–11

1. उस सरल रेखा का समीकरण जो y-अक्ष के समान्तर तथा y-अक्ष के बायीं ओर 5 इकाई की दूरी पर है
   (A) $y = 5$ (B) $x = 5$
   (C) $x = -5$ (D) $y = -5$

2. उस रेखा का समीकरण जो बिन्दु $(3,-4)$ से होकर गुजरती है तथा x-अक्ष के समान्तर है :
   (A) $x = 3$ (B) $y = -4$
   (C) $x + 3 = 0$ (D) $y - 4 = 0$

3. y-अक्ष की प्रवणता है :
   (A) 1 (B) 0
   (C) ∞ (D) $\pi/2$

4. समीकरण $x \times \frac{1}{2} + y \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 5$ द्वारा निरूपित सरल रेखा निम्न रूप में है :
   (A) सममित रूप (B) झुकाव रूप
   (C) अन्तःखण्ड रूप (D) लम्ब रूप

5. सरल रेखा $3x - 4y = 7$ के समान्तर और मूल बिन्दु से गुजरने वाली रेखा का समीकरण है :
   (A) $3x - 4y = 1$ (B) $3x - 4y = 0$
   (C) $4x - 3y = 1$ (D) $3y - 4x = 0$

6. मूल बिन्दु से सरल रेखा $x + \sqrt{3}y = 1$ पर डाले गए लम्ब की लम्बाई p है तो p का मान है :
   (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$
   (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) 1

7. यदि रेखाएँ $y = mx + 5$ तथा $3x + 5y = 8$ परस्पर लम्ब हैं तो m का मान है :
   (A) $\frac{5}{3}$ (B) $-\frac{5}{3}$
   (C) $-\frac{3}{5}$ (D) $\frac{3}{5}$

8. सरल रेखा $3x - 4y + 7 = 0$ पर लम्ब और बिन्दु $(1,-2)$ में से गुजरने वाली रेखा का समीकरण होगा :
   (A) $4x + 3y - 2 = 0$ (B) $4x + 3y + 2 = 0$
   (C) $4x - 3y + 2 = 0$ (D) $4x - 3y - 2 = 0$

9. रेखाओं $y = -2$ तथा $y = x + 2$ के मध्य का अधिक कोण है।
   (A) 145^o (B) 150^o
   (C) 135^o (D) 120^o

10. रेखा $3x-4y-4=0$ द्वारा x-अक्ष तथा y-अक्ष पर काटे गये अन्तःखण्डों की लम्बाई है

(A) $\frac{4}{3}$ और -1 (B) $\frac{4}{3}$ और 1

(C) $\frac{3}{4}$ और -1 (D) $\frac{3}{4}$ और 1

11. बिन्दु $(1,0)$ तथा $\left(-2,\sqrt{3}\right)$ को मिलाने वाली रेखा x-अक्ष के साथ θ कोण बनाती है तो $\tan\theta$ का मान है :

(A) $\sqrt{3}$ (B) $-\sqrt{3}$

(C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (D) $\frac{1}{-\sqrt{3}}$

12. रेखा के समीकरण $2x+\sqrt{3}y-4=0$ को झुकाव रूप में बदलने पर झुकाव रूप में प्रयुक्त अचर राशि के मान है :

(A) $m=2, c=4$ (B) $m=\frac{2}{\sqrt{3}}, c=-\frac{4}{\sqrt{3}}$

(C) $m=\frac{\sqrt{3}}{2}, c=2$ (D) $m=\frac{-2}{\sqrt{3}}, c=\frac{4}{\sqrt{3}}$

13. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(2,3)$ से गुजरती है तथा $x-$अक्ष से $45°$ का कोण बनाती है।

14. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(-3,2)$ से गुजरती है तथा अक्षों से बराबर तथा विपरीत चिह्नों वाले अन्तःखण्ड काटती है।

15. यदि मूल बिन्दु से सरल रेखा $4x+3y+a=0$ पर डाले गये लम्ब की लम्बाई 2 हो तो a का मान ज्ञात कीजिए।

16. यदि किसी रेखा का अक्षों के मध्य का अन्तःखण्ड बिन्दु $(5,2)$ पर समद्विभाजित होता है, तो रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

17. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(0,1)$ से होकर जाती है तथा रेखा द्वारा x-अक्ष पर काटा गया अन्तःखण्ड y-अक्ष पर काटे गए अन्तःखण्ड का तिगुना हो।

18. सरल रेखाएँ $y=2m+c$ एवं $2x-y+5=0$ परम्पर समान्तर एवं लम्बवत् हों तो m के मान ज्ञात कीजिए।

19. मूल बिन्दु से रेखा $\frac{x}{2a}+\frac{y}{2b}=4$ पर डाले गये लम्ब की लम्बाई p हो तो सिद्ध कीजिए $\frac{1}{p^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. x एवं y एक घातीय समीकरण सदैव सरल रेखा को प्रदर्शित करता है।
2. सरल रेखा का व्यापक समीकरण $ax+by+c=0$ होता है।
3. यदि कोई सरल रेखा मूल बिन्दु से गुजरती है तो उसके समीकरण में अचर पद c शून्य होता है अर्थात् व्यापक समीकरण $ax+by=0$ होता है।
4. x–अक्ष का समीकरण $y=0$ होता है।
5. y–अक्ष का समीकरण $x=0$ होता है।
6. x–अक्ष के समान्तर तथा b दूरी पर स्थित रेखा का समीकरण $y=\pm b$ होता है।
7. y–अक्ष के समान्तर तथा a दूरी पर स्थित रेखा का समीकरण $x=\pm a$ होता है।
8. रेखा की प्रवणता यदि रेखा x–अक्ष की धनात्मक दिशा से θ कोण बनाती है, तो उसकी प्रवणता $m=\tan\theta$ होगी।
9. झुकाव रूप में रेखा का समीकरण $y=mx+c$ है जहाँ m रेखा की प्रवणता तथा $c, y-$अक्ष पर काटा गया अन्तःखण्ड है।

10. अन्तःखण्ड के रूप में रेखा का समीकरण $x/a + y/b = 1$ है जहाँ a तथा b रेखा द्वारा क्रमशः x–अक्ष तथा y–अक्ष पर काटे गये अन्तःखण्ड है।

11. लम्ब रूप में रेखा का समीकरण $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ है। जहाँ p रेखा पर मूल बिन्दु से डाले गए लम्ब की लम्बाई है तथा यह लम्ब x–अक्ष से α कोण बनाता है।

12. एक बिन्दु (x_1, y_1) से गुजरने वाली रेखा का समीकरण $y - y_1 = m(x - x_1)$ है जहाँ m रेखा की प्रवणता है।

13. दो बिन्दुओं (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) से गुजरने वाली रेखा का समीकरण $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ है।

14. दो बिन्दुओं (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) को मिलाने वाली रेखा की प्रवणता

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{कोटियों का अन्तर}}{\text{भुजों का अन्तर}}$$

15. दो रेखाओं $y = m_1x + c_1$ तथा $y = m_2x + c_2$ के मध्य का कोण θ हो] तो $\tan\theta = \pm\left[\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}\right]$ होगा। यदि रेखाएँ समान्तर है तो $m_1 = m_2$ तथा लम्ब हो तो $m_1m_2 = -1$ अर्थात् $m_1 = \frac{-1}{m_2}$ एवं दोनों रेखाएँ संपाती होंगी यदि $m_1 = m_2$ तथा $c_1 = c_2$.

16. प्रायः दो रेखाओं के मध्य का कोण ज्ञात करते समय उनके मध्य का न्यूनकोण ज्ञात करते हैं। जिसके लिए $\tan\theta$ का चिह्न धनात्मक लेते है।

17. दो रेखाओं के समीकरण $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ एवं $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ में से एक रेखा $y-$अक्ष के समान्तर हो तो उनके मध्य कोण ज्ञात करने हेतु उक्त सूत्र का प्रयोग नहीं करते क्योंकि इस स्थिति में $\tan\theta$ का मान अनिर्धार्य होता है। इस स्थिति में रेखाओं के मध्य का कोण $\tan\theta = \pm\left(\frac{b_1}{a_1}\right)$ से ज्ञात करते हैं।

18. रेखा $ax + by + c_1 = 0$ के समान्तर रेखा का समीकरण $ax + by + c_2 = 0$ होता है जहाँ c_2 अचर पद है जिसका मान प्रश्न में दी गई अन्य शर्त के अनुसार ज्ञात करते हैं।

19. रेखा $ax + by + c_1 = 0$ के लम्बवत् रेखा का समीकरण $bx - ay + c_2 = 0$ जहाँ c_2 अचर पद है जिसका मान प्रश्न में दी गई अन्य शर्त के अनुसार ज्ञात करते हैं।

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 11.1

1. (i) $y=5$ (ii) $y+3=0$ 2. (i) $y=a+b$ (ii) $y=a^2-b^2$ (iii) $y=b\cos\theta$

3. (i) $x=5$ (ii) $x+3=0$ (iii) $5x-2=0$

4. (i) $x=\sqrt{7}$ (ii) $x=2-\sqrt{3}$ (iii) $x=p+q$

5. $x+3=0,\ \ y=2$ 6. $y=4, x=3, y=12$ और $y+4=0, x=11$ तथा $x+5=0$

7. $(4,3),(-4,3),(-4,-3),(4,-3)$ क्षेत्रफल = 48 वर्ग इकाई

8. (i) $x-y=0$ (ii) $x-\sqrt{3}y=0$ (iii) $x-y+5=0$

9. (i) $3x+5y-15=0$ (ii) $3x-2y+6=0$

10. $x+y=5$ 11. $x+2y=5$ 12. $5x+3y+30=0$ 13. $3x+2y-6=0, x-2y-10=0$

15. (i) $3x+5y-15=0$ (ii) $3x+5y+15=0$ (iii) $3x-4y-15=0$

16. $x-\sqrt{3}y+4=0$ 17. $2,(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 18. $\sqrt{3}x+y=6, \sqrt{3}x-y=6$

प्रश्नमाला 11.2

1. (i) $m=\frac{7}{13},\quad c=-\frac{15}{13},\quad a=\frac{15}{7},\quad b=-\frac{15}{13}$

(ii) $m=-\frac{5}{6},\quad c=-\frac{4}{3},\quad a=\frac{-8}{5},\quad b=-\frac{4}{3}$

2. $-\cot\alpha$ 3. (i) $\tan 60°$ (ii) $\tan 150°$

5. $\frac{5}{2};\left(1,\frac{3}{4}\right)$ 6. $a=-\frac{1}{4}, b=\frac{1}{5}$

7. (i) $x\cos 225°+y\sin 225°=1$ (ii) $x\cos 150°+y\sin 150°=1$

8. $\frac{11}{5},-\frac{4}{3}$

9. $a=\frac{5}{2} b=-\frac{5}{3}$ 10. झुकाव कोण $=90+2$, अन्तः खण्ड $=p\cot 2$

11. $x-y+1=0$

12. (i) $y-x=1$ (ii) $ax-by=ab$ (iii) $(a-2b)x-by+b^2+2ab-a^2=0$

(iv) $t_1t_2y+x=a(t_1+t_2)$ (v) $bx\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-ay\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=ab\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

प्रश्नमाला 11.3

1. (i) 120^o या 60^o (ii) $\tan^{-1}\left(-\frac{23}{2}\right)$ (iii) $90°$

4. (i) $2x-3y+7=0$ (ii) $3x-4y+5=0$ (iii) $2x+5y=18$ (iv) $88x-121y+371=0$

5. $y-x=0,\ x-3y=22,\ 2x-3y=11$ 6. $\left(\frac{12}{11},-\frac{30}{11}\right)$ 7. $\left(-\frac{36}{7},-\frac{45}{7}\right)$

8. $6x-16y+13=0$ 9. $ax+by=a^2$ 10. $2x+3y-18=0$

11. $y+5x-7=0$ तथा $5y-x+17=0$ 12. $9x-7y=1$ तथा $7x+9y=73$

15. $\left(2+\sqrt{3}\right)x-y=1+2\sqrt{3}$ तथा $\left(2-\sqrt{3}\right)x-y=1-2\sqrt{3}$

16. $x-\sqrt{3}y-3-2\sqrt{3}=0$ तथा $x-3=0$

विविध प्रश्नमाला

1. C 2. B 3. C 4. D 5. B 6. B 7. A

8. B 9. C 10. A 11. D 12. D 13. $x-y+1=0$

14. $x-y+5=0$ 15. 10 16. $2x+5y=20$ 17. $x+3y=3.$ 18. $1, -\frac{1}{4}$