আমি (i) নং ও (ii) নং সমীকরণদ্বয়ের লেখচিত্র অঙ্কন করি।

$4x + 5y = 9$ —— (i)

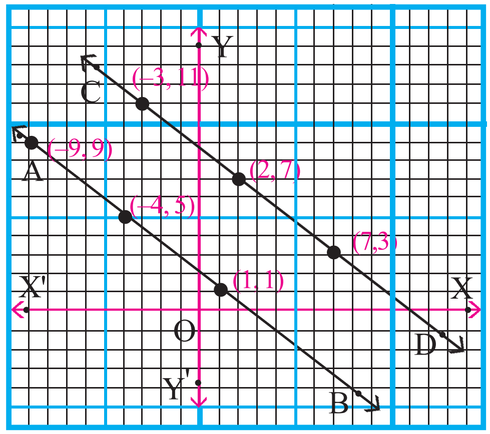
বা, $y = \frac{9-4x}{5}$

x	1	-4	-9
$y = \frac{9-4x}{5}$	□	□	9

$8x + 10y = 86$ —— (ii)

বা, $y = \frac{86-8x}{10}$

x	2	-3	7
$y = \frac{86-8x}{10}$	□	□	3



দেখছি (i) নং ও (ii) নং সমীকরণের লেখচিত্র যথাক্রমে $\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$ পরস্পর সমান্তরাল সরলরেখা।

∴ লেখচিত্র থেকে পেলাম,

(i) নং ও (ii) নং সমীকরণদ্বয় সাধারণ সমাধানযোগ্য নয়।

(b) $x + y - 2 = 0$ —— (i)

$15x + 15y - 30 = 0$ —— (ii)

$$\frac{1}{15} = \frac{1}{15} = \frac{-2}{-30}$$

∴ উপরের সহগগুলির অনুপাত থেকে পাচ্ছি (i) নং ও (ii) নং সমীকরণদ্বয় সমাধানযোগ্য কিন্তু অসংখ্য সাধারণ সমাধান পাবো।

আমি (i) নং ও (ii) নং সমীকরণদ্বয়ের লেখচিত্র অঙ্কন করি

$x + y = 2$

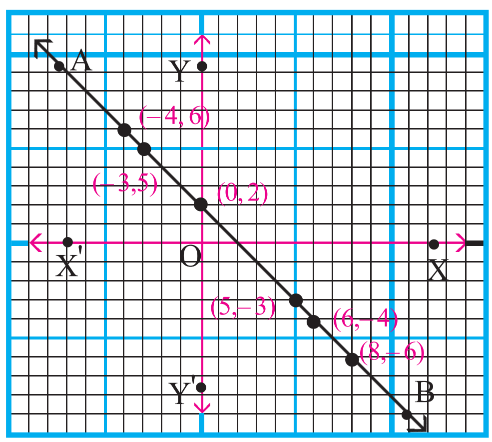
∴ $y = 2 - x$

x	0	5	−3
$y = 2 - x$	□	□	5

$15x + 15y = 30$

∴ $y = \frac{30-15x}{15}$

x	6	-4	8
$y = \frac{30-15x}{15}$	□	6	□



দেখছি, (i) নং ও (ii) নং সমীকরণের লেখচিত্রের দুটি সরলরেখা সমাপতিত হয়ে একটি সরলরেখা $\overleftrightarrow{AB}$ হয়েছে।

∴ লেখচিত্র থেকে পেলাম (i) নং ও (ii) নং সমীকরণদ্বয় সাধারণ সমাধানযোগ্য এবং সমীকরণদ্বয়ের অসংখ্য সাধারণ সমাধান আছে।

(c) $4x - y - 5 = 0$ —— (i)
$7x - 4y - 2 = 0$ —— (ii)

$$\frac{4}{7} \neq \frac{-1}{-4}$$

$\therefore$ (i) নং ও (ii) নং সমীকরণদ্বয় সাধারণ সমাধানযোগ্য এবং একটিমাত্র সাধারণ সমাধান আছে।

আমি (i) নং ও (ii) নং সমীকরণদ্বয়ের লেখচিত্র অঙ্কন করি

$4x - y - 5 = 0$ —— (i)

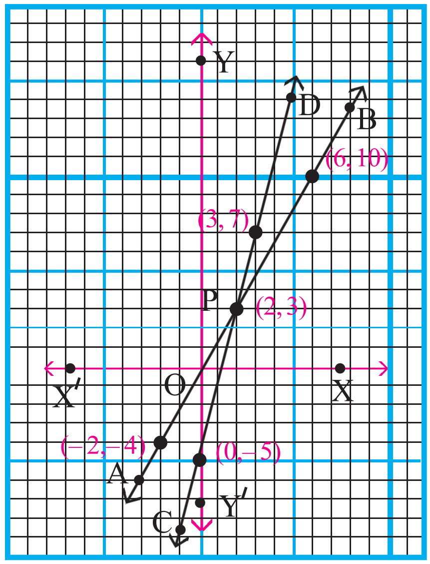
$\therefore x = \dfrac{y+5}{4}$

$x = \dfrac{y+5}{4}$			0
y	3	7	–5

$7x - 4y - 2 = 0$ —— (ii)

$\therefore x = \dfrac{4y+2}{7}$

$x = \dfrac{4y+2}{7}$		–2	
y	3	–4	10



লেখচিত্র থেকে দেখছি (i) নং ও (ii) নং সমীকরণদ্বয় সাধারণ সমাধানযোগ্য এবং তারা একটিমাত্র বিন্দু P-তে ছেদ করেছে যার স্থানাঙ্ক (2,3)

$\therefore$ (i) নং ও (ii) সমীকরণদ্বয়ের একটিমাত্র সাধারণ সমাধান $x = 2$ এবং $y = 3$.

(d), (e), (f)-এর সাধারণ সমাধান যোগ্যতা দেখি ও নিজে যাচাই করি

6 আমি নীচের সহসমীকরণগুলির লেখচিত্র না এঁকে শুধুমাত্র একই চলের সহগগুলির মধ্যে এবং ধ্রুবকগুলির মধ্যে অনুপাত বের করি। এরপর তাদের সম্পর্ক দেখে সমীকরণগুলির লেখচিত্র সমান্তরাল, পরস্পরছেদি, না পরস্পর সমাপতিত হবে লিখি।

(a) $3x + 9y + 12 = 0$
$x + 3y + 4 = 0$

(b) $\dfrac{x}{5} + \dfrac{y}{4} = 23$
$\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{5} = 22$

(c) $4x + 3y = 20$
$16x + 12y = 10$

(a) $3x + 9y + 12 = 0$ —— (i)
$x + 3y + 4 = 0$ —— (ii)

$$\frac{3}{1} = \frac{9}{3} = \frac{12}{4}$$

$\therefore$ (i) নং ও (ii) নং দুইচলবিশিষ্ট একঘাত সহসমীকরণদ্বয়ের লেখচিত্রগুলি পরস্পর সমাপতিত হবে এবং একটি সরলরেখা হবে।

(c) -এর ক্ষেত্রে একইভাবে আমি নিজে করি।

(b) $\dfrac{x}{5} + \dfrac{y}{4} = 23$ —— (i)
$\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{5} = 22$ —— (ii)

$$\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{4}} \neq \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{5}}$$

$\therefore$ (i) নং ও (ii) নং সহসমীকরণদ্বয়ের লেখচিত্রদুটি পরস্পরছেদি সরলরেখা হবে।

7 p-এর কোন মানের জন্য $3x - 4y = 1$ এবং $9x + py = 2$ -এর একটিমাত্র সমাধান থাকবে, হিসাব করে লিখি।

$$3x - 4y = 1 \text{ ———— (i)}$$
$$9x + py = 2 \text{ ———— (ii)}$$

(i) নং $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ সমীকরণ এবং (ii) নং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ সমীকরণের $\frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1}{b_2}$ ও $\frac{c_1}{c_2}$ মানগুলির তুলনা করে পাই ।

$$a_1 = 3, b_1 = -4 \text{ এবং } c_1 = -1$$
$$a_2 = 9, b_2 = p \text{ এবং } c_2 = -2$$

(i) ও (ii) নং সমীকরণের সমাধান থাকবে না যদি $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ হয়।

$\therefore \frac{3}{9} = \frac{-4}{p}$ বা, $3p = -36$ $\therefore p = -12$

$\therefore$ p-এর মান -12 বাদে সকল মানের জন্য (i) ও (ii) সমীকরণের একটিমাত্র সমাধান থাকবে।

8 r -এর যে মানের জন্য $rx + 2y = 5$ এবং $(r + 1) x + 3y = 2$ সমীকরণগুলির কোনো সমাধান পাওয়া যাবে না হিসাব করে লিখি।

$$rx + 2y = 5 \text{ ———— (i)}$$
$$(r+1)x + 3y = 2 \text{ ———— (ii)}$$

(i) ও (ii) নং সমীকরণের কোনো সমাধান থাকবে না যদি $\frac{r}{r+1} = \frac{2}{3}$ হয় বা, $3r = 2r + 2$ $\therefore r = 2$

$\therefore r = 2$ হলে (i) নং ও (ii) নং সমীকরণের কোনো সমাধান থাকবে না।

9 p -এর কোন মানের জন্য $px + 6y - p = 0$ এবং $(p - 1) x + 4y + (p - 5) = 0$ সমীকরণদ্বয়ের একাধিক সমাধান থাকবে, হিসাব করে লিখি।

$$px + 6y - p = 0 \text{ ———— (i)}$$
$$(p-1)x + 4y + (p-5) = 0 \text{ ———— (ii)}$$

(i) নং $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ সমীকরণ এবং (ii) নং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ সমীকরণের $\frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1}{b_2}$ ও $\frac{c_1}{c_2}$ মানগুলির তুলনা করে পাই ।

এখানে, $a_1 = p, b_1 = 6, c_1 = -p$ এবং $a_2 = p - 1, b_2 = 4$, ও $c_2 = p - 1$

(i) ও (ii) নং সমীকরণের একাধিক সমাধান থাকবে, যদি $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ হয়।

সুতরাং, $\frac{p}{p-1} = \frac{6}{4} = \frac{-p}{p-5}$

$\therefore \frac{p}{p-1} = \frac{3}{2}$

বা, $3p - 3 = 2p$

$\therefore p = 3$

আবার, $\frac{3}{2} = \frac{-p}{p-5}$

বা, $3p - 15 = -2p$

বা, $5p = 15$

$\therefore p = 3$

দেখছি, $p = 3$ হলে, (i) ও (ii) নং সমীকরণের অসংখ্য সমাধান পাবো।

10 তীর্থ একটি দুইচল বিশিষ্ট একঘাত সমীকরণ $2x + y = 6$ লিখেছে। আমি আর একটি দুইচল বিশিষ্ট একঘাত সমীকরণ লিখি যাতে দুটি সমীকরণের লেখচিত্র (a) সমান্তরাল হয় (b) পরস্পরচ্ছেদি হয় (c) পরস্পর সমাপতিত হয়।

(a) $2x + y = 6$ —— (i)

(i) নং সমীকরণের লেখচিত্রের সমান্তরাল একটি সরলরেখার সমীকরণ

$4x + 2y = 10$ [যেহেতু $\frac{2}{4} = \frac{1}{2} \neq \frac{6}{10}$]

(b) $2x + y = 6$ সমীকরণের লেখচিত্রের সঙ্গে পরস্পরছেদি অপর একটি সরলরেখার সমীকরণ,

$3x + 2y = 6$ [যেহেতু $\frac{2}{3} \neq \frac{1}{2}$]

(c) $2x + y = 6$ সমীকরণের লেখচিত্রের সঙ্গে সমাপতিত হবে অপর একটি সরলরেখার সমীকরণ,

$12x + 6y = 36$ [যেহেতু $\frac{2}{12} = \frac{1}{6} = \frac{6}{36}$]

কষে দেখি - 5.2

1. নীচের সহসমীকরণগুলির লেখচিত্র অঙ্কন করে সমাধানযোগ্য কিনা লিখি ও সমাধানযোগ্য হলে সমাধানটি বা অসংখ্য সমাধানের ক্ষেত্রে 3টি সমাধান লিখি।

(a) $2x + 3y - 7 = 0$, $3x + 2y - 8 = 0$ (b) $4x - y = 11$, $-8x + 2y = -22$ (c) $7x + 3y = 42$, $21x + 9y = 42$ (d) $5x + y = 13$, $5x + 5y = 12$

2. নীচের প্রতিজোড়া সমীকরণগুলির একই চলের সহগগুলির ও ধ্রুবকগুলির অনুপাতের সম্পর্ক নির্ণয় করে সমীকরণ দুটি সমাধানযোগ্য কিনা লিখি ও সমীকরণগুলির লেখচিত্র এঁকে যাচাই করি।

(a) $x + 5y = 7$, $x + 5y = 20$ (b) $2x + y = 8$, $2y - 3x = -5$ (c) $5x + 8y = 14$, $15x + 24y = 42$ (d) $3x + 2y = 6$, $12x + 8y = 24$

3. নীচের প্রতিজোড়া সমীকরণগুলি একই চলের সহগগুলির ও ধ্রুবকগুলির অনুপাতের সম্পর্ক নির্ণয় করে সমীকরণগুলির লেখচিত্রগুলি সমান্তরাল বা পরস্পরচ্ছেদি বা সমাপতিত হবে কিনা লিখি।

a) $5x + 3y = 11$, $2x - 7y = -12$ (b) $6x - 8y = 2$, $3x - 4y = 1$ (c) $8x - 7y = 0$, $8x - 7y = 56$ (d) $4x - 3y = 6$, $4y - 5x = -7$

4. নীচের প্রতিজোড়া সমীকরণগুলির মধ্যে যেগুলি সমাধানযোগ্য তাদের লেখচিত্র এঁকে সমাধান করি এবং অসংখ্য সমাধানের ক্ষেত্রে 3টি সমাধান লিখি।

a) $4x + 3y = 20$, $8x + 6y = 40$ (b) $4x + 3y = 20$, $12x + 9y = 20$ (c) $4x + 3y = 20$, $\frac{3x}{4} - \frac{y}{8} = 1$

d) $p - q = 3$, $\frac{p}{3} + \frac{q}{2} = 6$ (e) $p - q = 3$, $\frac{p}{5} - \frac{q}{5} = 3$ (f) $p - q = 3$, $8p - 8q = 5$

5. তথাগত একটি দুইচল বিশিষ্ট একঘাত সমীকরণ $x + y = 5$ লিখেছে। আমি আর একটি দুইচল বিশিষ্ট একঘাত সমীকরণ লিখি যাতে দুটি সমীকরণের লেখচিত্র

(a) পরস্পর সমান্তরাল হবে। (b) পরস্পরছেদি হবে। (c) পরস্পর সমাপতিত হবে।

প্রতি বছর আষাঢ় মাসে আমাদের স্কুলের সামনের মাঠে মেলা বসে। তিনদিন ধরে এই মেলা চলে। এবছর আমরা কিছু বন্ধুরা মিলে স্কুল ছুটির পরে মেলায় গিয়ে অনেক চারা গাছ কিনলাম।

11 সায়ন 42 টাকায় 6 টি বেলফুলের চারা কিনল। 1 টি বেলফুলের চারার দাম হিসাব করি।

ধরি, 1 টি বেলফুলের চারার দাম x টাকা

শর্তানুসারে, $6x = 42$ —— (i)

$\therefore x = \square$

সুতরাং, 1 টি বেলফুলের চারার দাম 7 টাকা।

(i) নং সমীকরণটি একচলবিশিষ্ট একঘাত সমীকরণ।

12 আমি 19 টাকায় 1 টি চন্দ্রমল্লিকা ফুলের চারা এবং 2 টি গাঁদাফুলের চারা কিনলাম। কিন্তু বুলু 24 টাকায় একই দামের 1 টি চন্দ্রমল্লিকা ফুলের চারা এবং 3 টি গাঁদাফুলের চারা কিনল। আমি সহসমীকরণ গঠন করে 1 টি চন্দ্রমল্লিকা ফুলের চারা এবং 1 টি গাঁদাফুলের চারার দাম হিসাব করে লিখি।

ধরি, 1 টি চন্দ্রমল্লিকা ফুলের চারার দাম x টাকা এবং

1 টি গাঁদাফুলের চারার দাম y টাকা

সহসমীকরণগুলি হল, $x + 2y = 19$ —— (ii)

$x + 3y = 24$ —— (iii)

দেখছি, (ii) নং ও (iii) নং সমীকরণগুলি দুইচলবিশিষ্ট একঘাত সমীকরণ।

(i) নং একচলবিশিষ্ট একঘাত সমীকরণটি খুব সহজেই সমাধান করতে পারি। কিন্তু (ii) নং ও (iii) নং সমীকরণদ্বয়ের লেখচিত্র অঙ্কন না করে কীভাবে সহজে সমাধান করব?

(ii) নং — (iii) নং করে পাই,

$(x + 2y) - (x + 3y) = 19 - 24$

বা, $x + 2y - x - 3y = -5$

বা, $-y = -5$

$\therefore y = 5$

অন্যভাবে,

$$\begin{array}{r} x + 2y = 19 \\ x + 3y = 24 \\ - \quad - \quad\; - \\ \hline \end{array}$$

বিয়োগ করে পাই, $-y = -5$

$\therefore y = 5$

(ii) নং সমীকরণ থেকে পাই, $x + 2y = 19$

বা, $x + 2 \times 5 = 19$

বা, $x = 19 - 10 = 9$

$\therefore x = 9$

নির্ণেয় সমাধান, $x = 9$

$y = 5$

আমি (i) নং ও (ii) নং সমীকরণদ্বয়ের লেখচিত্র এঁকে সমাধান করে দেখছি $x = 9$ এবং $y = 5$ [নিজে করি]

$\therefore$ 1 টি চন্দ্রমল্লিকা ফুলের চারার দাম 9 টাকা এবং 1 টি গাঁদা ফুলের চারার দাম 5 টাকা।

আমি (i) নং ও (ii) নং সমীকরণে $x = 9$ ও $y = 5$ বসিয়ে দেখছি,
$9 + 2 \times 5 = 19$ এবং $9 + 3 \times 5 = \square$
$x = 9$ ও $y = 5$ মানগুলি (i) নং ও (ii) নং সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

দুটি দুইচলবিশিষ্ট একঘাত সমীকরণের একটি চল অপনয়ন করে অন্য একটি চলবিশিষ্ট একঘাত সমীকরণে পরিণত করে সমাধান করার পদ্ধতির নাম কী হবে?

দুটি দুইচলবিশিষ্ট একঘাত সমীকরণকে সমাধান করার এই পদ্ধতিকে **অপনয়ন পদ্ধতি** (Method of Elimination) বলা হয়।

13 আমি $3x + 4y = 17$ এবং $4x - 3y = 6$—এই সমীকরণ দুটিকে অপনয়ন পধতিতে সমাধান করি ও লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করে যাচাই করি।

$3x + 4y = 17$ —— (i)
$4x - 3y = 6$ —— (ii)

প্রথমে (i) নং ও (ii) নং সমীকরণ থেকে x চলটি অপনয়ন করি।

$\therefore$ (i) নং $\times 4$ – (ii) নং $\times 3$ করে পাই,

$$\begin{array}{r} 12x + 16y = 68 \\ 12x - 9y = 18 \\ - \quad + \quad\quad - \\ \hline \end{array}$$

বিয়োগ করে পাই, $25y = 50$
$\therefore y = 2$

(i) নং থেকে পাই, $3x + 4 \times 2 = 17$
বা, $3x = 17 - 8 = 9$
$\therefore x = \square$

$\therefore$ অপনয়ন পদ্ধতিতে সমাধান করে (i) নং ও (ii) নং সমীকরণের সমাধান পেলাম $x = 3$ ও $y = 2$.

আমি (i) নং ও (ii) নং সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করে সমাধান করে পেলাম, $x = 3$ ও $y = 2$ [নিজে করি]

(i) নং ও (ii) নং সমীকরণে $x = 3$ ও $y = 2$ বসিয়ে পাচ্ছি,
$3 \times 3 + 4 \times 2 = \square$ এবং $4 \times 3 - 3 \times 2 = \square$
$\therefore$ $x = 3$ এবং $y = 2$ (i) নং ও (ii) নং সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

14 আমি নীচের দুইচলবিশিষ্ট সমীকরণগুলি **অপনয়ন পদ্ধতিতে** সমাধান করি এবং সমাধানে পাওয়া চলগুলির মান সমীকরণকে সিদ্ধ করছে কিনা যাচাই করি।

(a) $3x - \frac{2}{y} = 5$
$x + \frac{4}{y} = 4$

(b) $(2x + 3y - 5)^2 + (3x + 2y - 5)^2 = 0$

(c) $\frac{2}{x} + \frac{5}{y} = 1$
$\frac{3}{x} + \frac{2}{y} = \frac{19}{20}$

(d) $ax + by = c$
$bx + ay = 1 + c$

(a) $3x - \frac{2}{y} = 5$ ——— (i)
$x + \frac{4}{y} = 4$ ——— (ii)

y চলটি অপনয়ন করার জন্য (i) নং সমীকরণকে 2 দিয়ে ও (ii) নং সমীকরণকে 1 দিয়ে গুণ করি।

$$6x - \frac{4}{y} = 10$$
$$x + \frac{4}{y} = 4$$

যোগ করে পাই, $7x = 14$

$\therefore x = \square$

(i) নং সমীকরণে x = 2 বসিয়ে পাই,

$3\times2 - \frac{2}{y} = 5$

বা, $-\frac{2}{y} = 5 - 6 = -1$

বা, $\frac{2}{y} = 1$

$\therefore y = 2$

নির্ণেয় সমাধান $x = 2$
$y = 2$

$3x - \frac{2}{y}$ $= 3 \times 2 - \frac{2}{2}$ $= \square$	$x + \frac{4}{y}$ $= 2 + \frac{4}{2}$ $= \square$

$\therefore$ x =2 ও y = 2 (i) নং ও (ii) নং সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

(b) $(2x + 3y - 5)^2 + (3x + 2y - 5)^2 = 0$

যেকোনো বাস্তব সংখ্যামালার বর্গ সর্বদা ধনাত্মক। দুটি ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যামালার বর্গের সমষ্টি শূন্য হলে, তারা পৃথক পৃথকভাবে শূন্য হবে।

সুতরাং, $2x + 3y - 5 = 0$ ——— (i)
$3x + 2y - 5 = 0$ ——— (ii)

(i) নং × 3 – (ii) নং × 2 করে পাই,

$$6x + 9y - 15 = 0$$
$$\underset{-}{6x} \underset{-}{+} 4y \underset{+}{-} 10 = 0$$

বিয়োগ করে পাই, $5y - 5 = 0$

বা, $5y = 5 \therefore y = 1$

y-এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$2x + 3 \times 1 - 5 = 0$

বা, $2x = 2 \therefore x = 1$

সুতরাং, নির্ণেয় সমাধান, x = 1, y = 1

(c) $\frac{2}{x} + \frac{5}{y} = 1$

বা, $2 \times (\frac{1}{x}) + 5 \times (\frac{1}{y}) = 1$

ধরি, $\frac{1}{x} = p$ এবং $\frac{1}{y} = q$

$\therefore\ x = \frac{1}{p}$ এবং $y = \frac{1}{q}$

সুতরাং, $2p + 5q = 1$ ——— (i)

আবার, $\frac{3}{x} + \frac{2}{y} = \frac{19}{20}$

বা $3 \times (\frac{1}{x}) + 2 \times (\frac{1}{y}) = \frac{19}{20}$

$\therefore\ 3p + 2q = \frac{19}{20}$ ——— (ii)

p চলটি অপনয়ন করার জন্য $3 \times$ (i) নং $- 2 \times$ (ii) নং করে পাই,

$$6p + 15q = 3$$
$$6p + 4q = \frac{19}{10}$$
$$- \quad - \qquad -$$

$$11q = 3 - \frac{19}{10} = \frac{11}{10}$$

$\therefore\ q = \frac{1}{10}$

(i) নং সমীকরণে $q = \frac{1}{10}$ বসিয়ে পাই,

$$2p + 5q = 1$$

$\therefore\ 2 \times p + 5 \times \frac{1}{10} = 1$

বা, $2p = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\therefore\ p = \frac{1}{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$ এবং $y = \frac{1}{q} = 10$

যাচাই করি,

$\frac{2}{x} + \frac{5}{y} = \frac{2}{4} + \frac{5}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

$\frac{3}{x} + \frac{2}{y} = \frac{3}{4} + \frac{2}{10} = \square$

$\therefore\ x = 4, y = 10$ (i) নং ও (ii) নং সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

(d) $ax + by = c$ ——— (i)

$bx + ay = 1 + c$ ——— (ii)

(i) নং $\times\ b$ – (ii) নং $\times\ a$ করে পাই,

$$abx + b^2y = bc$$
$$abx + a^2y = a + ac$$
$$- \quad - \qquad - \quad -$$

বিয়োগ করে পাই, $b^2y - a^2y = bc - a - ac$

বা, $y(b^2 - a^2) = bc - ac - a$

$\therefore\ y = \frac{bc - ac - a}{b^2 - a^2}$

(i) নং সমীকরণে y-এর মান বসিয়ে পাই,

$$ax + \frac{b^2c - abc - ab}{b^2 - a^2} = c$$

বা, $ax = c - \frac{b^2c - abc - ab}{b^2 - a^2}$

বা, $ax = \frac{b^2c - a^2c - b^2c + abc + ab}{b^2 - a^2}$

বা, $x = \frac{a(bc - ac + b)}{a(b^2 - a^2)}$

$\therefore\ x = \frac{bc - ac + b}{b^2 - a^2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = \frac{bc - ac + b}{b^2 - a^2}$

$y = \frac{bc - ac - a}{b^2 - a^2}$

কষে দেখি - 5.3

1. নীচের দুইচলবিশিষ্ট একঘাত সহসমীকরণগুলি **অপনয়ন পদ্ধতিতে** সমাধান করি ও লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করে যাচাই করি :

   (a) $8x + 5y - 11 = 0$, $3x - 4y - 10 = 0$ (b) $2x + 3y - 7 = 0$, $3x + 2y - 8 = 0$

2. $7x - 5y + 2 = 0$ সমীকরণকে কত দিয়ে গুণ করে $2x + 15y + 3 = 0$ সমীকরণের সঙ্গে যোগ করব যাতে y চলটিকে অপনীত করতে পারি।

3. $4x - 3y = 16$ ও $6x + 5y = 62$ উভয় সমীকরণকে সবথেকে ছোটো কোন কোন স্বাভাবিক সংখ্যা দিয়ে গুণ করলে দুটি সমীকরণের x-এর সহগ সমান হবে তা লিখি।

4. নীচের দুইচলবিশিষ্ট সহসমীকরণগুলি **অপনয়ন পদ্ধতিতে** সমাধান করি।

(i) $3x + 2y = 6$, $2x - 3y = 17$ (ii) $2x + 3y = 32$, $11y - 9x = 3$ (iii) $x + y = 48$, $x + 4 = \frac{5}{2}(y + 4)$

(iv) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 8$, $\frac{5x}{4} - 3y = -3$ (v) $3x - \frac{2}{y} = 5$, $x + \frac{4}{y} = 4$ (vi) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$, $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$

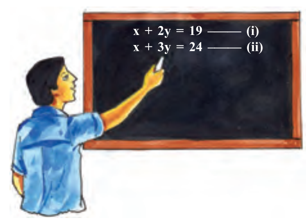
(vii) $\frac{x+y}{2} + \frac{3x-5y}{4} = 2$, $\frac{x}{14} + \frac{y}{18} = 1$ (viii) $\frac{xy}{x+y} = \frac{1}{5}$, $\frac{xy}{x-y} = \frac{1}{9}$ (ix) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-2} = 3$, $\frac{2}{x-1} + \frac{3}{y-2} = 5$

(x) $\frac{14}{x+y} + \frac{3}{x-y} = 5$, $\frac{21}{x+y} - \frac{1}{x-y} = 2$ (xi) $\frac{x+y}{5} - \frac{x-y}{4} = \frac{7}{20}$, $\frac{x+y}{3} - \frac{x-y}{2} + \frac{5}{6} = 0$ (xii) $x + y = a + b$, $ax - by = a^2 - b^2$

(xiii) $\frac{x+a}{a} = \frac{y+b}{b}$, $ax - by = a^2 - b^2$ (xiv) $ax + by = c$, $a^2x + b^2y = c^2$ (xv) $ax + by = 1$, $bx + ay = \frac{(a+b)^2}{a^2+b^2} - 1$

(xvi) $(7x - y - 6)^2 + (14x + 2y - 16)^2 = 0$

15 সুমিতা বোর্ডে $x + 2y = 19$ ও $x + 3y = 24$ সমীকরণ দুটি লিখল।



$x + 2y = 19$ ———— (i)

$x + 3y = 24$ ———— (ii)

আমি একটি চলকে অন্য চলের মাধ্যমে প্রকাশ করি ও কী পাই দেখি।

$x + 2y = 19$ আবার $x + 3y = 24$

$x = 19 - 2y$ —— (iii) $x = 24 - 3y$ —— (iv)

দেখছি (iii) নং ও (iv) নং সমীকরণের বামদিক সমান।

(iii) নং ও (iv) নং সমীকরণ দুটি তুলনা করে কী পাই দেখি।

$19 - 2y = 24 - 3y$

বা, $-2y + 3y = 24 - 19$ $\therefore y = 5$

(iii) নং সমীকরণে $y = 5$ বসিয়ে পাই, $x = 19 - 2 \times 5 = 9$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = 9, y = 5$

এইভাবে দুটি দুইচলবিশিষ্ট একঘাত সমীকরণকে একটি চলের মাধ্যমে প্রকাশ করে ও তুলনা করে সমাধান করার পদ্ধতিকে কী বলা হয়?

সমাধানের এই পদ্ধতিকে তুলনামূলক পদ্ধতি (Method of Comparison) বলা হয়।

16 $4x - 3y = 16$ ও $6x + 5y = 62$ সমীকরণদ্বয় তুলনামূলক পদ্ধতিতে সমাধান করি ও লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করে যাচাই করি।

$4x - 3y = 16$ ——— (i)

বা, $4x = 16 + 3y$

$\therefore x = \dfrac{16+3y}{4}$ ——— (iii)

$6x + 5y = 62$ ——— (ii)

বা, $6x = 62 - 5y$

$\therefore x = \dfrac{\square}{\square}$ ——— (iv)

আমি (iii) ও (iv) সমীকরণদ্বয় তুলনা করে পাই,

$$\frac{16+3y}{4} = \frac{62-5y}{6}$$

বা, $96 + 18y = 248 - 20y$

বা, $38y = 248 - 96 = \square$ $\quad \therefore y = \square$

(iii) নং সমীকরণ থেকে পাই, $x = \dfrac{16+3y}{4} = \dfrac{16+3\times 4}{4} = 7$

তুলনামূলক পদ্ধতিতে সমাধান করে পেলাম, $x = 7$ এবং $y = 4$

আমি লেখচিত্রের সাহায্যে (i) নং ও (ii) নং সমীকরণ সমাধান করে পেলাম $x = 7$ ও $y = 4$ [নিজে করি]

কষে দেখি - 5.4

1. $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = 8$ সমীকরণের x-কে y চলের মাধ্যমে প্রকাশ করি।

2. $\dfrac{2}{x} + \dfrac{7}{y} = 1$ সমীকরণের y-কে x চলের মাধ্যমে প্রকাশ করি।

3. নীচের সহসমীকরণগুলি **তুলনামূলক পদ্ধতিতে** সমাধান করি এবং সমাধানের মানগুলি সমীকরণগুলিকে সিদ্ধ করে কিনা যাচাই করি।

(a) $2(x-y) = 3$, $5x + 8y = 14$

(b) $2x + \dfrac{3}{y} = 5$, $5x - \dfrac{2}{y} = 3$

(c) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 1$, $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = 1$

(d) $4x - 3y = 18$, $4y - 5x = -7$

4. $2x + y = 8$ ও $2y - 3x = -5$ সহসমীকরণগুলি তুলনামূলক পদ্ধতিতে সমাধান করি ও লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করে যাচাই করি।

5. **নীচের দুইচলবিশিষ্ট সহসমীকরণগুলি তুলনামূলক পদ্ধতিতে সমাধান করি :**

(i) $3x - 2y = 2$, $7x + 3y = 43$

(ii) $2x - 3y = 8$, $\dfrac{x+y}{x-y} = \dfrac{7}{3}$

(iii) $\dfrac{1}{3}(x-y) = \dfrac{1}{4}(y-1)$, $\dfrac{1}{7}(4x-5y) = x - 7$

(iv) $\dfrac{x+1}{y+1} = \dfrac{4}{5}$, $\dfrac{x-5}{y-5} = \dfrac{1}{2}$

(v) $x + y = 11$, $y + 2 = \dfrac{1}{8}(10y + x)$

(vi) $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4} = 1$, $2x + 4y = 11$

(vii) $x + \frac{2}{y} = 7$, $2x - \frac{6}{y} = 9$

(viii) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}$, $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$

(ix) $\frac{x+y}{xy} = 2$, $\frac{x-y}{xy} = 1$

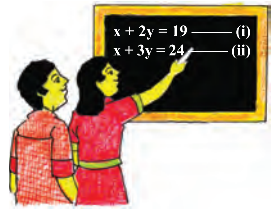
(x) $\frac{x+y}{5} + \frac{x-y}{4} = 5$, $\frac{x+y}{4} + \frac{x-y}{5} = 5\frac{4}{5}$

(xi) $\frac{4}{x} - \frac{y}{2} = -1$, $\frac{8}{x} + 2y = 10$

(xii) $2 - 2(3x - y) = 10(4 - y) - 5x = 4(y - x)$

17 সিরাজ সুমিতার বোর্ডে লেখা দুইচলবিশিষ্ট একঘাত সমীকরণগুলি অন্যভাবে সমাধান করার চেষ্টা করছে।

$x + 2y = 19$ —— (i), $x + 3y = 24$ —— (ii)



আমি যদি (i) নং সমীকরণ থেকে x চলকে y চলের মাধ্যমে প্রকাশ করি এবং (ii) নং সমীকরণে x-এর পরিবর্তে সেটি বসাই তাহলে কী পাই দেখি।

$x + 2y = 19$

$\therefore$ $x = 19 - 2y$ ——— (iii)

(ii) নং সমীকরণে x = 19 – 2y বসিয়ে পাই,

$x + 3y = 24$

বা, $19 - 2y + 3y = 24$

বা, $19 + y = 24$

বা, $y = 24 - 19$ $\therefore y = 5$

(iii) নং সমীকরণে y = 5 বসিয়ে পাই,

$x = 19 - 2y$

বা, $x = 19 - 2 \times 5$

$\therefore$ $x = \square$

এই পদ্ধতিতে সমাধান করে পেলাম x = 9 এবং y = 5

> এইভাবে একটি দুইচলবিশিষ্ট একঘাত সমীকরণের একটি চলকে অপর চলের মাধ্যমে প্রকাশ করে অন্য দুইচলবিশিষ্ট একঘাত সমীকরণে ওই চলের পরিবর্তে বসিয়ে সমাধান করার পদ্ধতির নাম কী?
>
> এই পদ্ধতির নাম পরিবর্ত পদ্ধতি (Method of Substitution)।

18 আমি **পরিবর্ত পদ্ধতিতে** পাশের দুইচলবিশিষ্ট একঘাত সহসমীকরণগুলি সমাধান করি এবং সমাধানের মানগুলি সমীকরণগুলিকে সিদ্ধ করে কিনা যাচাই করি।

(a) $5x+3y=11$, $2x-7y=-12$ (b) $2x + \frac{3}{y} = 5$, $5x - \frac{2}{y} = 3$

(a) $5x + 3y = 11$ —— (i), $2x - 7y = -12$ —— (ii)

বা, $3y = 11 - 5x$

$\therefore y = \frac{11 - 5x}{3}$ ———— (iii)

(ii) নং সমীকরণে y-এর পরিবর্তে $\frac{11 - 5x}{3}$ বসিয়ে পাই,

$2x - 7 \times \left(\frac{11 - 5x}{3}\right) = -12$

বা, $2x - \frac{77 - 35x}{3} = -12$

বা, $\frac{6x - 77 + 35x}{3} = -12$

বা, $41x - 77 = -36$

বা, $41x = 41$ $\therefore x = \square$

(iii) নং সমীকরণে x = 1 বসিয়ে পাই,

$y = \frac{11 - 5 \times 1}{3}$

$\therefore$ $y = \square$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, x = 1, y = 2

যাচাই করি, $5 \times 1 + 3 \times 2 = \square$ এবং $2 \times 1 - 7 \times 2 = \square$

$\therefore$ x = 1 ও y = 2 মান (i) নং ও (ii) নং সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

(b) $2x + \frac{3}{y} = 5$ ——— (i) $\qquad 5x - \frac{2}{y} = 3$ ——— (ii)

বা, $2x = 5 - \frac{3}{y}$

বা, $x = \frac{1}{2}\left(5 - \frac{3}{y}\right)$ ——— (iii)

(ii) নং সমীকরণে x -এর পরিবর্তে $\frac{1}{2}\left(5 - \frac{3}{y}\right)$ বসিয়ে পাই,

$5x - \frac{2}{y} = 3$

বা, $5 \times \frac{1}{2}\left(5 - \frac{3}{y}\right) - \frac{2}{y} = 3$

বা, $\frac{25}{2} - \frac{15}{2y} - \frac{2}{y} = 3$

বা, $-\frac{15}{2y} - \frac{2}{y} = 3 - \frac{25}{2}$

বা, $\frac{-15-4}{2y} = \frac{6-25}{2}$

বা, $\frac{-19}{2y} = \frac{-19}{2}$

বা, $-38y = -38$

$\therefore \quad y = \square$

y -এর মান (iii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$x = \frac{1}{2}\left(5 - \frac{3}{1}\right) \quad \therefore x = \square$

নির্ণেয় সমাধান $x = 1$ ও $y = 1$

যাচাই করি,

$2\times1 + \frac{3}{1} = \square$ এবং $5\times1 - \frac{2}{1} = \square$ $\therefore$ $x=1$ ও $y=1$ মান (i) নং ও (ii) নং সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

কষে দেখি - 5.5

1. $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 1$ সমীকরণের x-কে y চলের মাধ্যমে প্রকাশ করি

2. $2x + 3y = 9$ সমীকরণে y -এর পরিবর্তে $\frac{7-4x}{-5}$ বসিয়ে x -এর মান কত হবে লিখি।

3. নীচের দুইচলবিশিষ্ট সহসমীকরণগুলি প্রথমে পরিবর্ত পদ্ধতিতে সমাধান করি ও লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করে যাচাই করি।

   (a) $3x - y = 7$
   $2x + 4y = 0$

   (b) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 2 = \frac{x}{4} + \frac{y}{2}$

4. নীচের দুইচলবিশিষ্ট সহসমীকরণগুলি পরিবর্ত পদ্ধতিতে সমাধান করি ও সমাধানের মানগুলি সমীকরণগুলিকে সিদ্ধ করে কিনা যাচাই করি।

   (a) $2x + \frac{3}{y} = 1$
   $5x - \frac{2}{y} = \frac{11}{12}$

   (b) $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 2$
   $\frac{5}{x} + \frac{10}{y} = 5\frac{5}{6}$

   (c) $\frac{x+y}{xy} = 3$
   $\frac{x-y}{xy} = 1$

   (d) $\frac{x+y}{x-y} = \frac{7}{3}$
   $x + y = \frac{7}{10}$

5. নীচের দুইচলবিশিষ্ট সহসমীকরণগুলি পরিবর্ত পদ্ধতিতে সমাধান করি

   (i) $2(x-y) = 3$
   $5x + 8y = 14$

   (ii) $2x + \frac{3}{y} = 5$
   $5x - \frac{2}{y} = 3$

   (iii) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$
   $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$

   (iv) $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}$
   $7x - 5y = 2$

   (v) $\frac{2}{x} + \frac{5}{y} = 1$
   $\frac{3}{x} + \frac{2}{y} = \frac{19}{20}$

   (vi) $\frac{1}{3}(x-y) = \frac{1}{4}(y-1)$
   $\frac{1}{7}(4x-5y) = x - 7$

   (vii) $\frac{x}{14} + \frac{x}{18} = 1$
   $\frac{x+y}{2} + \frac{3x-5y}{4} = 2$

   (viii) $p(x+y) = q(x-y) = 2pq$

19 রাবেয়া ও শুভ ওই মেলা থেকে পেয়ারাগাছের চারা ও লেবুগাছের চারা কিনল। রাবেয়া 62 টাকায় 4টি পেয়ারাগাছের চারা এবং 5টি লেবুগাছের চারা কিনল। কিন্তু শুভ 36 টাকায় 3টি পেয়ারা গাছের চারা এবং 2টি লেবুগাছের চারা কিনল। একটি পেয়ারা গাছের চারা ও লেবুগাছের চারার দাম হিসাব করি।

আমি প্রথমে সহসমীকরণ গঠন করি

ধরি, 1টি পেয়ারাগাছের চারার দাম x টাকা এবং 1টি লেবুগাছের চারার দাম y টাকা।

শর্তানুসারে, $4x + 5y = 62$ ———— (i)

$3x + 2y = 36$ ———— (ii)

আমি অপনয়ন পদ্ধতিতে (i) নং ও (ii) নং সমীকরণদ্বয় সমাধান করার চেষ্টা করি।

x অপনয়ন করার জন্য $3 \times (i) - 4 \times (ii)$ করে পাই,

$$\begin{array}{r} 3 \times 4x + 3 \times 5y = 3 \times 62 \\ \underline{\underset{-}{}4 \times 3x \underset{-}{+} 4 \times 2y = \underset{-}{}4 \times 36} \end{array}$$

বা, $y\,(3 \times 5 - 4 \times 2) = 3 \times 62 - 4 \times 36$

$\therefore y = \dfrac{36 \times 4 - 3 \times 62}{4 \times 2 - 3 \times 5} = \square$

একইভাবে y অপনয়ন করার জন্য $2 \times (i) - 5 \times (ii)$ করে পাই,

$x = \dfrac{2 \times 62 - 5 \times 36}{4 \times 2 - 3 \times 5} = \square$

আমি একইভাবে দুটি দুইচলবিশিষ্ট একঘাত সমীকরণ নিয়ে অপনয়ন পদ্ধতিতে x ও y-এর মান বের করি।

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ———— (iii)

$a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ———— (iv)

$a_2 \times (iii) - a_1 \times (iv)$ করে পাই,

$$\begin{array}{r} a_1a_2x + b_1a_2y + c_1a_2 = 0 \\ \underline{\underset{-}{}a_1a_2x \underset{-}{+} b_2a_1y \underset{-}{+} c_2a_1 = \underset{-}{0}} \end{array}$$

বা, $y = \dfrac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_2b_1 - b_2a_1} = \dfrac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ [যেখানে $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$]

$\therefore \dfrac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \dfrac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ ———— (v)

একইভাবে $b_2 \times (iii) - b_1 \times (iv)$ করে পাই,

$$\begin{array}{rcrcrcl} a_1b_2x & + & b_1b_2y & + & b_2c_1 & = & 0 \\ a_2b_1x & + & b_1b_2y & + & b_1c_2 & = & 0 \\ - & & - & & - & & \\ \hline x(a_1b_2 - a_2b_1) & & & = & b_1c_2 & - & b_2c_1 \end{array}$$

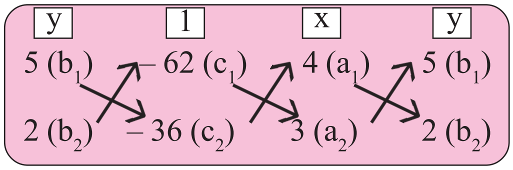
বা, $x = \dfrac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ [$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$]

$\therefore \dfrac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \dfrac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ ———— (vi)

$\therefore$ (v) নং ও (vi) নং থেকে পেলাম,

$\dfrac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \dfrac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \dfrac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ ——— (vii) [যেখানে, $(a_1b_2 - a_2b_1) \neq 0$]

20 আমি যদি (iii) নং ও (iv) নং দুইচলবিশিষ্ট একঘাত সমীকরণগুলি অপনয়ন পদ্ধতিতে সমাধানের মাঝের ধাপগুলি না করে সরাসরি (vii) নং সূত্র প্রয়োগ করে সমাধান করি, তাহলে (i) নং ও (ii) নং সহসমীকরণের কী সমাধান পাই দেখি।



$4x + 5y - 62 = 0$ ———— (i)

$3x + 2y - 36 = 0$ ———— (ii)

$$\frac{x}{5\times(-36) - 2\times(-62)} = \frac{y}{(-62)\times 3 - (-36)\times 4} = \frac{1}{4\times 2 - 3\times 5}$$

বা, $\frac{x}{-56} = \frac{y}{-42} = \frac{1}{-7}$

সুতরাং, $\frac{x}{-56} = \frac{1}{-7}$ আবার, $\frac{y}{-42} = \frac{1}{-7}$

বা, $-7x = -56$ বা, $-7y = -42$

$\therefore$ $x = 8$ $\therefore$ $y = 6$

এই পদ্ধতিতে নির্ণেয় সমাধান পেলাম, $x = 8, y = 6$

$\therefore$ 1টি পেয়ারাগাছের চারার দাম 8 টাকা ও
1টি লেবুগাছের চারার দাম 6 টাকা।

যাচাই করি, 4টি পেয়ারাগাছের চারা ও 5টি লেবুগাছের চারার মোট দাম 4×8 টাকা + 5×6 টাকা = ☐ টাকা। আবার, 3টি পেয়ারাগাছের চারা ও 2টি লেবুগাছের চারার মোট দাম 3×8 টাকা + 2×6 টাকা = ☐ টাকা

এইভাবে (vii) নং সূত্র সরাসরি প্রয়োগ করে দুইচলবিশিষ্ট একঘাত সমীকরণকে সমাধান করার পদ্ধতির নাম কী?

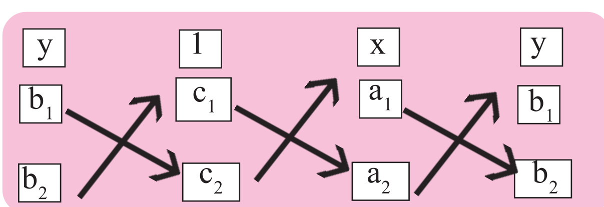
এই পদ্ধতির নাম **বজ্রগুণন পদ্ধতি** (Method of Cross multiplication)।

বুঝেছি, $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$

$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$

সুতরাং, $\frac{x}{b_1 c_2 - b_2 c_1} = \frac{y}{c_1 a_2 - c_2 a_1} = \frac{1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$ [যেখানে, $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$]

এই সূত্র সহজে মনে রাখার চেষ্টা করি।



21 সোফি একটি পরীক্ষায় সকল প্রশ্নের উত্তর দিয়ে 32 নম্বর পেয়েছে। প্রতিটি ঠিক উত্তরের জন্য 5 নম্বর পেয়েছে এবং প্রতিটি ভুল উত্তরের জন্য 2 নম্বর বাদ দেওয়া হয়েছে। যদি প্রতিটি ঠিক উত্তরের জন্য 4 নম্বর দেওয়া হয় এবং প্রতিটি ভুল উত্তরের জন্য 1 নম্বর বাদ দেওয়া হয়, তবে সোফির প্রাপ্ত নম্বর হয় 28; সহসমীকরণ গঠন করে বজ্রগুণন পদ্ধতিতে হিসাব করে পরীক্ষায় মোট প্রশ্নের সংখ্যা লিখি।

ধরি, সোফি x টি প্রশ্নের সঠিক উত্তর দিয়েছে এবং y টি প্রশ্নের ভুল উত্তর দিয়েছে।

শর্তানুসারে, $5x - 2y = 32$
$4x - y = 28$

$\therefore \quad 5x - 2y - 32 = 0$
$4x - y - 28 = 0$

$$\therefore \frac{x}{(-2)\times(-28)-(-1)\times(-32)} = \frac{y}{(-32)\times 4 - 5\times(-28)} = \frac{1}{5\times(-1)-4\times(-2)}$$

বা, $\dfrac{x}{\square} = \dfrac{y}{\square} = \dfrac{1}{\square}$

সুতরাং, $\dfrac{x}{24} = \dfrac{1}{3}$

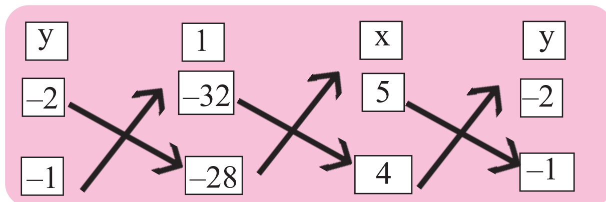
বা, $3x = 24$

$\therefore x = \square$

এবং, $\dfrac{y}{12} = \dfrac{1}{3}$

বা, $3y = 12$

$\therefore \quad y = \square$



বুঝেছি ওই পরীক্ষায় 8 টি + 4 টি = 12টি প্রশ্ন ছিল।

যাচাই করি,প্রথম ক্ষেত্রে 8টি ঠিক উত্তর ও 4টি ভুল উত্তরের জন্য মোট প্রাপ্ত নম্বর = $8 \times 5 - 4 \times 2 = \square$

আবার, দ্বিতীয় ক্ষেত্রে 8টি ঠিক উত্তর ও 4টি ভুল উত্তরের জন্য মোট প্রাপ্ত নম্বর = $8 \times 4 - 4 \times 1 = \square$

কষে দেখি— 5.6

নীচের দুইচলবিশিষ্ট একঘাত সহসমীকরণগুলি বজ্রগুণন পদ্ধতিতে সমাধান করি।

1. $8x + 5y = 11$
   $3x - 4y = 10$
2. $3x - 4y = 1$
   $4x = 3y + 6$
3. $5x + 3y = 11$
   $2x - 7y = -12$
4. $7x - 3y - 31 = 0$
   $9x - 5y - 41 = 0$
5. $\dfrac{x}{6} - \dfrac{y}{3} = \dfrac{x}{12} - \dfrac{2y}{3} = 4$
6. $\dfrac{x}{5} + \dfrac{y}{3} = \dfrac{x}{4} - \dfrac{y}{3} - \dfrac{3}{20} = 0$
7. $\dfrac{x+2}{7} + \dfrac{y-x}{4} = 2x - 8$
   $\dfrac{2y-3x}{3} + 2y = 3x + 4$
8. $x + 5y = 36$
   $\dfrac{x+y}{x-y} = \dfrac{5}{3}$
9. $13x - 12y + 15 = 0$
   $8x - 7y = 0$
10. $x + y = 2b$
    $x - y = 2a$
11. $x - y = 2a$
    $ax + by = a^2 + b^2$
12. $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 2$
    $ax - by = a^2 - b^2$
13. $ax + by = 1$
    $bx + ay = \dfrac{2ab}{a^2 + b^2}$

আজ আমরা ঠিক করেছি সারাদিন নৌকায় ঘুরে বেড়াব। আমরা মোট 42 জন। দুটি নৌকা ভাড়া করেছি। নাজিরগঞ্জ থেকে আমাদের দুটি নৌকা একসঙ্গে ও একইবেগে যাত্রা শুরু করল। একটি নৌকায় আমরা বাড়ির ছোটোরা বসলাম এবং অন্য নৌকায় বাড়ির বয়স্করা বসলেন।

আমাদের নৌকা 10 ঘণ্টায় স্রোতের অনুকূলে 44 কিমি. এবং প্রতিকূলে 30 কিমি. গেল। কিন্তু অন্য নৌকা 13 ঘণ্টায় স্রোতের অনুকূলে 55 কিমি. এবং প্রতিকূলে 40 কিমি. গেল।

22 আমি সহসমীকরণ গঠন করে ও সমাধান করে স্থির জলে আমাদের নৌকার বেগ ও স্রোতের বেগ হিসাব করে লিখি।

ধরি, স্থির জলে নৌকার বেগ x কিমি./ঘণ্টা এবং স্রোতের বেগ y কিমি./ঘণ্টা।

$\therefore$ স্রোতের অনুকূলে 1 ঘণ্টায় নৌকা যায় (x + y) কিমি.

স্রোতের অনুকূলে নৌকাটি (x + y) কিমি. যায় 1 ঘণ্টায়

1 কিমি. যায় $\frac{1}{x+y}$ ঘণ্টায়

44 কিমি. যায় $\frac{44}{x+y}$ ঘণ্টায়

আবার, স্রোতের প্রতিকূলে 1 ঘণ্টায় নৌকা যায় (x – y) কিমি.

স্রোতের প্রতিকূলে নৌকাটি (x – y) কিমি যায় 1 ঘণ্টায়

1 কিমি. যায় $\frac{1}{x-y}$ ঘণ্টায়

30 কিমি. যায় $\frac{30}{x-y}$ ঘণ্টায়

শর্তানুসারে, $\frac{44}{x+y} + \frac{30}{x-y} = 10$ —— (i) একইভাবে পাই, $\frac{55}{x+y} + \frac{40}{x-y} = 13$ —— (ii)

23 আমি (i) নং ও (ii) - নং সহসমীকরণদুটি অপনয়ন পদ্ধতিতে সমাধান করে x ও y -এর মান বের করার চেষ্টা করি।

ধরি, x + y = p এবং x – y = q

$\frac{44}{p} + \frac{30}{q} = 10$ ———— (i) $\frac{55}{p} + \frac{40}{q} = 13$ ———— (ii)

4 × (i) নং – 3× (ii) নং করে পাই,

$\frac{176}{p} + \frac{120}{q} = 40$

$\frac{165}{p} + \frac{120}{q} = 39$

– – –

$\frac{11}{p} = 1 \quad \therefore \quad p = 11$

(i) নং সমীকরণ থেকে পাই, $\frac{55}{11} + \frac{40}{q} = 13$

বা, $5 + \frac{40}{q} = 13$

বা, $\frac{40}{q} = 8$

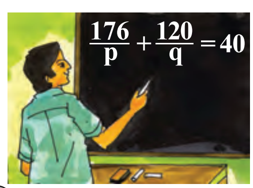
বা, 8q = 40 $\therefore$ q = ☐

$\therefore$ পেলাম, x + y = 11 ———— (iii)

x – y = 5 ———— (iv)

যোগ করে, 2x = 16

$\therefore$ x = 8 (iii) থেকে পাই, y = 11 – 8 = 3



$\therefore$ স্থির জলে আমাদের নৌকার বেগ ঘণ্টায় 8 কিমি. এবং স্রোতের বেগ ঘণ্টায় 3 কিমি.।

24 আমার দিদি তার খাতায় একটি ভগ্নাংশ লিখেছে, যার লব ও হরের সঙ্গে 2 যোগ করলে ভগ্নাংশটি $\frac{7}{9}$ হবে। আবার ওই ভগ্নাংশের লব ও হর থেকে 3 বিয়োগ করলে ভগ্নাংশটি $\frac{1}{2}$ হবে। খাতায় ভগ্নাংশটি কী লিখেছে না দেখে হিসাব করে লিখি।

ধরি, ভগ্নাংশটির লব x এবং হর y $\quad \therefore$ ভগ্নাংশটি $\frac{x}{y}$

শর্তানুসারে, $\frac{x+2}{y+2} = \frac{7}{9}$ ———— (i)

$\frac{x-3}{y-3} = \frac{1}{2}$ ———— (ii)

(i) নং থেকে পাই, $9x + 18 = 7y + 14$

$\therefore\ 9x - 7y = -4$ ———— (iii)

(ii) নং থেকে পাই, $2x - 6 = y - 3$

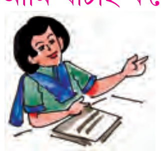
$\therefore\ 2x - y = 3$ ———— (iv)

আমি অপনয়ন পদ্ধতিতে (iii) নং ও (iv) নং সমীকরণ সমাধান করে পেলাম,

x = 5 এবং y = 7 [নিজে করি]

$\therefore$ ভগ্নাংশটি $\frac{5}{7}$

আমি যাচাই করে দেখি ঠিক ভগ্নাংশ পেলাম নাকি।



ভগ্নাংশের লব ও হরের সাথে 2 যোগ করে পাই → $\frac{5+2}{7+2} = \frac{7}{9}$

ভগ্নাংশের লব ও হর থেকে 3 বিয়োগ করে পাই → $\frac{5-3}{7-3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

25 আমার বন্ধু জাফর খাতায় একটি দুই অঙ্কের সংখ্যা লিখল। জাফরের লেখা দুই অঙ্কের সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি 8; আবার ওই সংখ্যার সঙ্গে 18 যোগ করলে সংখ্যাটির অঙ্কগুলি স্থানবিনিময় করবে। আমরা হিসাব করে জাফরের লেখা দুই অঙ্কের সংখ্যাটি লিখি।

ধরি, জাফরের লেখা দুই অঙ্কের সংখ্যার একক স্থানীয় অঙ্ক x এবং দশক স্থানীয় অঙ্ক y

$\therefore$ সংখ্যাটি $10y + x$

শর্তানুসারে, $x + y = 8$ ——— (i)

দশক	একক
y	x

অঙ্কদ্বয় পরস্পর স্থান বিনিময় করে অর্থাৎ $10y + x$ সংখ্যাটি হবে $10x + y$

শর্তানুসারে, $10y + x + 18 = 10x + y$

বা, $10y - y + x - 10x + 18 = 0$

বা, $9y - 9x + 18 = 0$

$\therefore\ y - x + 2 = 0$ ——— (ii)

দশক	একক
x	y

আমি (i) নং ও (ii) নং সমীকরণদ্বয় অপনয়ন পদ্ধতিতে সমাধান করে পাই, $x = 5$ এবং $y = 3$ [নিজে করি]

সংখ্যাটি $10 \times 3 + 5 = 35$

আমি যাচাই করে দেখছি, $3 + 5 = \square$ এবং $35 + 18 = \square$

26 মুরাদ একটি দুই অঙ্কের সংখ্যা লিখবে যার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি 11 এবং সংখ্যাটির সাথে 63 যোগ করলে অঙ্কদ্বয় স্থান পরিবর্তন করবে। সহসমীকরণ গঠন করে সমাধান করি ও নির্ণেয় দুই অঙ্কের সংখ্যাটি লিখি। [নিজে করি]

কষে দেখি - 5.7

1. আমাদের স্কুলের পাশে বই-এর দোকান থেকে আমার বন্ধু রীতা 34 টাকায় 5টি পেন ও 3টি পেনসিল কিনেছে। কিন্তু সুমিত ওই একই দোকান থেকে একই দামে 7 টি পেন ও 6টি পেনসিল 53 টাকায় কিনেছে। আমি সহসমীকরণ গঠন করে প্রতিটি পেন ও প্রতিটি পেনসিলের দাম হিসাব করে লিখি।

2. আমার বন্ধু আয়েশা ও রফিকের ওজন একত্রে 85 কিগ্রা.। আয়েশার ওজনের অর্ধেক রফিকের ওজনের $\frac{4}{9}$ অংশের সমান হলে, সহসমীকরণ গঠন করে তাদের পৃথকভাবে ওজন হিসাব করে লিখি।

3. আমার কাকাবাবুর বর্তমান বয়স আমার বোনের বর্তমান বয়সের দ্বিগুণ। 10 বছর আগে আমার কাকাবাবুর বয়স আমার বোনের বয়সের তিনগুণ ছিল। সহসমীকরণ গঠন করে তাদের বর্তমান বয়স পৃথকভাবে হিসাব করে লিখি।

4. আমাদের গ্রামের দেবকুমারকাকু 590 টাকার একটি চেক ব্যাঙ্ক থেকে ভাঙালেন। তিনি যদি ব্যাঙ্ক থেকে পাঁচ টাকার ও দশ টাকার মোট 70 খানা নোট পেয়ে থাকেন, তবে তিনি ব্যাঙ্ক থেকে কতগুলি পাঁচ টাকার নোট এবং কতগুলি দশ টাকার নোট পেলেন হিসাব করে লিখি।

5. আমি স্কুলের ব্ল্যাকবোর্ডে এমন একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ লিখব যার হরটি লব অপেক্ষা 5 বেশি এবং লব ও হরের সঙ্গে যদি 3 যোগ করি তবে ভগ্নাংশটি $\frac{3}{4}$ হবে। সহসমীকরণ গঠন করি ও সমাধান করে প্রকৃত ভগ্নাংশটি ব্ল্যাকবোর্ডে লিখি।

6. মারিয়া তার খাতায় দুটি এমন সংখ্যা লিখেছে যে প্রথম সংখ্যার সঙ্গে 21 যোগ করলে তা দ্বিতীয় সংখ্যার দ্বিগুণ হয়। আবার দ্বিতীয় সংখ্যার সঙ্গে 12 যোগ করলে তা প্রথম সংখ্যার দ্বিগুণ হয়। হিসাব করে মারিয়ার লেখা সংখ্যা দুটি লিখি।

7. লালিমা ও রমেন দুজনেই তাদের বাড়ির বাগান পরিষ্কার করে। লালিমা 4 দিন ও রমেন 3দিন একসঙ্গে বাগান পরিষ্কার করলে কাজটির $\frac{2}{3}$ অংশ সম্পন্ন হয়। আবার লালিমা 3 দিন ও রমেন 6 দিন একসঙ্গে বাগান পরিষ্কার করলে কাজটির $\frac{11}{12}$ অংশ সম্পন্ন হয়। সহসমীকরণ গঠন করি এবং সমাধান করে লালিমা ও রমেন পৃথকভাবে কাজটি করলে কতদিনে শেষ করবে হিসাব করে লিখি।

8. আমার মা দু-ধরনের শরবত তৈরি করেছেন। প্রথম ধরনের 100 লিটার শরবতে 5 কিগ্রা. চিনি এবং দ্বিতীয় ধরনের 100 লিটার শরবতে 8 কিগ্রা. চিনি আছে। আমি দু-ধরনের শরবত মিশিয়ে 150 লিটার শরবত তৈরি করব, যাতে চিনি থাকবে $9\frac{2}{3}$ কিগ্রা.। সহসমীকরণ গঠন করে হিসাব করে দেখি 150 লিটার শরবতে দু-ধরনের শরবত কতটা পরিমাণ মেশাব।

9. গত বছরে বকুলতলা গ্রামপঞ্চায়েত নির্বাচনে অখিলবাবু ও ছন্দাদেবী প্রার্থী ছিলেন। অখিলবাবু ছন্দাদেবীকে 75 ভোটে পরাজিত করলেন। অখিলবাবুকে যারা ভোট দিয়েছেন তাঁদের 20% যদি ছন্দাদেবীকে ভোট দিতেন, তাহলে ছন্দাদেবী 19 ভোটে জিততে পারতেন। সহসমীকরণ গঠন করে সমাধান করে দেখি, কে কত ভোট পেয়েছেন।

10. রফিকদের আয়তক্ষেত্রাকার মেঝের দৈর্ঘ্য 2 মিটার এবং প্রস্থ 3 মিটার বৃদ্ধি করলে ক্ষেত্রফল 75 বর্গমিটার বৃদ্ধি পায়। কিন্তু দৈর্ঘ্য 2 মিটার হ্রাস এবং প্রস্থ 3 মিটার বৃদ্ধি করলে ক্ষেত্রফল 15 বর্গমিটার বৃদ্ধি পায়। সহসমীকরণ গঠন করে রফিকদের মেঝের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় করি।

11. আমার বন্ধু মেরি ঈশানকে বলল, তোমার টাকার $\frac{1}{3}$ আমায় দাও তাহলে আমার 200 টাকা হবে। ঈশান মেরিকে বলল, তোমার টাকার অর্ধেক আমাকে দিলে আমার 200 টাকা হবে। সহসমীকরণ গঠন করে হিসাব করে দেখি কার কাছে কত টাকা আছে।

12. আজ দাদা ও তার কিছু বন্ধুরা একসাথে মেলায় যাবে। তাই আমার দাদু তাদের মধ্যে কিছু টাকা সমান ভাগে ভাগ করে দিলেন। দেখছি, যদি 2 জন বন্ধু কম থাকত তবে প্রত্যেকে 18 টাকা পেত। আবার যদি 3জন বন্ধু বেশি থাকত তবে প্রত্যেকে 12 টাকা পেত। দাদারা কতজন মেলায় গিয়েছিল এবং দাদু মোট কত টাকা ওদের মধ্যে সমান ভাগে ভাগ করে দিয়েছিলেন হিসাব করে লিখি।

13. আমার দাদার একটি থলিতে 1 টাকার মুদ্রা ও 50 পয়সার মুদ্রা মিলিয়ে মোট 350 টাকা আছে। আমার বোন ওই টাকার থলি থেকে এক তৃতীয়াংশ 50 পয়সা বের করে তার জায়গায় সমসংখ্যক 1 টাকার মুদ্রা রেখে দিল এবং এখন ওই থলিতে মোট টাকার পরিমাণ 400 টাকা হলো। প্রথমে দাদার থলিতে আলাদাভাবে 1 টাকার মুদ্রা ও 50 পয়সার মুদ্রা কতগুলি ছিল হিসাব করে লিখি।

14. আজ মামার বাড়ি যাব। তাই একটি মোটরগাড়ি আমাদের বাড়ি থেকে সমবেগে মামার বাড়ির দিকে রওনা দিল। যদি গাড়িটির গতিবেগ ঘণ্টায় 9 কিমি. বেশি হতো তবে ওই পথ অতিক্রম করতে তার 3 ঘণ্টা সময় কম লাগত। আবার গতিবেগ যদি ঘণ্টায় 6 কিমি. কম হতো তবে ওই পথ অতিক্রম করতে তার 3 ঘণ্টা বেশি সময় লাগত। আমাদের বাড়ি থেকে মামার বাড়ির দূরত্ব এবং গাড়ির গতিবেগ ঘণ্টায় কত কিমি. ছিল হিসাব করে লিখি।

15. মোহিত এমন একটি দুই অঙ্কের সংখ্যা লিখবে যেটি তার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টির 4 গুণ অপেক্ষা 3 বেশি এবং সংখ্যাটির অঙ্কদুটি স্থানবিনিময় করলে যে সংখ্যা হয় তা মূল সংখ্যার চেয়ে 18 বেশি। হিসাব করে দেখি মোহিত কোন সংখ্যা লিখবে।

16. আমি একটি দুই অঙ্কের সংখ্যা লিখব যার অঙ্কদুটির সমষ্টি 14 এবং সংখ্যাটি থেকে 29 বিয়োগ করলে অঙ্কদুটি সমান হবে। সহসমীকরণ গঠন করি ও সমাধান করে দেখি দুই অঙ্কের সংখ্যাটি কী হবে।

17. রহমত চাচা তার নৌকা নিয়ে স্রোতের অনুকূলে 6 ঘণ্টায় 30 মাইল গিয়ে এই পথ স্রোতের প্রতিকূলে 10 ঘণ্টায় ফিরে এলেন। স্থির জলে রহমত চাচার নৌকার গতিবেগ ও স্রোতের গতিবেগ হিসাব করে লিখি।

18. হাওড়া স্টেশন থেকে একটি ট্রেন ছাড়ার 1 ঘণ্টা পরে বিশেষ কারণে 1 ঘণ্টা দেরি করে এবং তারপর পূর্বের বেগের $\frac{3}{5}$ অংশ বেগে চলে নির্দিষ্ট সময়ের 3 ঘণ্টা পরে গন্তব্যস্থলে পৌঁছায়। যদি বিশেষ কারণটি পূর্বস্থান থেকে আরও 50 কিমি. দূরবর্তী স্থানে হতো, তাহলে ট্রেনটি আগের চেয়ে 1 ঘণ্টা 20 মিনিট পূর্বে গন্তব্যস্থানে পৌঁছাতো। ট্রেনটি মোট কত পথ চলেছিল এবং পূর্বের বেগ কত ছিল হিসাব করে লিখি।

19. মৌসুমি দুই অঙ্কের একটি সংখ্যাকে অঙ্কদুটির সমষ্টি দিয়ে ভাগ করে ভাগফল 6 এবং ভাগশেষ 6 পায়। যদি মৌসুমি অঙ্ক দুটি স্থান বিনিয়ম করে সংখ্যাটিকে অঙ্ক দুটির সমষ্টি দিয়ে ভাগ করে, তাহলে ভাগফল 4 এবং ভাগশেষ 9 হয়। সহসমীকরণ গঠন করে মৌসুমির সংখ্যাটি নির্ণয় করি।

20. ফরিদাবিবি কয়েকটি বাক্সে কমলালেবু রাখতে গিয়ে দেখলেন যে তিনি যদি প্রত্যেকটি বাক্সে 20 টি কমলালেবু বেশি রাখেন তাহলে 3টি বাক্স কম লাগে। আবার তিনি যদি প্রত্যেকটি বাক্সে 5টি কমলালেবু কম রাখেন তাহলে 1টি বাক্স বেশি লাগে। সহসমীকরণ গঠন করে হিসাব করি ফরিদাবিবির কাছে কতগুলি কমলালেবু এবং কতগুলি বাক্স ছিল।

21. সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন:

(i) যদি $x = 3t$ এবং $y = \frac{2t}{3} - 1$ হয়, তাহলে t-এর কোন মানের জন্য $x = 3y$ হবে?

(ii) k-এর কোন মানের জন্য $2x + 5y = 8$ এবং $2x - ky = 3$ সমীকরণদ্বয়ের কোনো সমাধান থাকবে না?

(iii) x, y বাস্তব সংখ্যা এবং $(x - 5)^2 + (x - y)^2 = 0$ হলে, x এবং y - এর মান কত?

(iv) $x^2 + y^2 - 2x + 4y = -5$ হলে, x এবং y - এর মান কত?

(v) r -এর কোন মানের জন্য $rx - 3y - 1 = 0$ এবং $(4 - r)x - y + 1 = 0$ সমীকরণদ্বয়ের সমাধান সম্ভব নয়?

(vi) $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ সমীকরণকে $y = mx + c$ আকারে লিখি, যেখানে m এবং c ধ্রুবক।

(vii) k -এর কোন মানের জন্য $kx - 21y + 15 = 0$ এবং $8x - 7y = 0$ সমীকরণদ্বয়ের একটিমাত্র সমাধান থাকবে?

(viii) a এবং b -এর কোন মানের জন্য $5x + 8y = 7$ এবং $(a+b)x + (a-b)y = (2a + b + 1)$ সমীকরণদ্বয়ের অসংখ্য সমাধান থাকবে?

22. বহু বিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.) :

(i) $4x + 3y = 7$ এবং $7x - 3y = 4$ সমীকরণদ্বয়ের

(a) একটি নির্দিষ্ট সমাধান আছে (b) অসংখ্য সমাধান আছে
(c) কোনো সমাধান নেই (d) কোনোটিই নয়

(ii) $3x + 6y = 15$ এবং $6x + 12y = 30$ সমীকরণদ্বয়ের

(a) একটি নির্দিষ্ট সমাধান আছে। (b) অসংখ্য সমাধান আছে।
(c) কোনো সমাধান নেই (d) কোনোটিই নয়।

(iii) $4x + 4y = 20$ এবং $5x + 5y = 30$ সমীকরণদ্বয়ের

(a) একটি নির্দিষ্ট সমাধান আছে (b) অসংখ্য সমাধান আছে।
(c) কোনো সমাধান নেই (d) কোনোটিই নয়।

(iv) নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির কোনটির সমাধান (1, 1)

(a) $2x + 3y = 9$ (b) $6x + 2y = 9$
(c) $3x + 2y = 5$ (d) $4x + 6y = 8$

(v) $4x + 3y = 25$ এবং $5x - 2y = 14$ সমীকরণদ্বয়ের সমাধান

(a) $x = 4, y = 3$ (b) $x = 3, y = 4$
(c) $x = 3, y = 3$ (d) $x = 4, y = -3$

(vi) $x + y = 7$ সমীকরণের সমাধানগুলি হলো

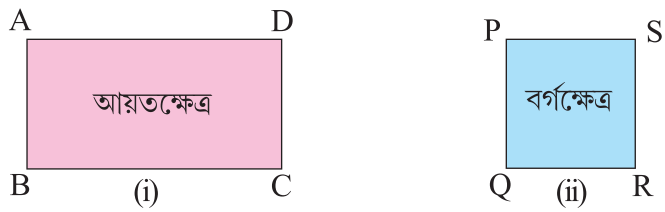
(a) (1, 6), (3, –4) (b) (1, –6), (4, 3)
(c) (1, 6), (4, 3) (d) (–1, 6), (–4, 3)

6 সামান্তরিকের ধর্ম
PROPERTIES OF PARALLELOGRAM

আগামী বুধবার আমরা নবম শ্রেণির ছাত্রছাত্রীরা নিজেদের ইচ্ছামতো হাতের কাজ তৈরি করে দেখাব। তাই আজ রবিবার দুপুরে আমরা ছয়জন বন্ধু সায়ন্তনদের বাড়ির ছাদের ঘরে জড়ো হয়েছি।

আমরা অনেকগুলি পুরোনো পিচবোর্ডের বাক্স জড়ো করেছি। এগুলির সাহায্যে আমরা কেউ বাড়ি তৈরি করব, কেউ ব্রিজ তৈরি করব, কেউ বা নানান ধরনের মডেল তৈরি করব।

আমি দুটি পিচবোর্ডের বাক্সের সকল ধারগুলি খুলে ফেললাম। কী রকম জ্যামিতিক আকার পেলাম নীচে আঁকি—



দেখছি, দুটি চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্র ABCD ও PQRS পেলাম।

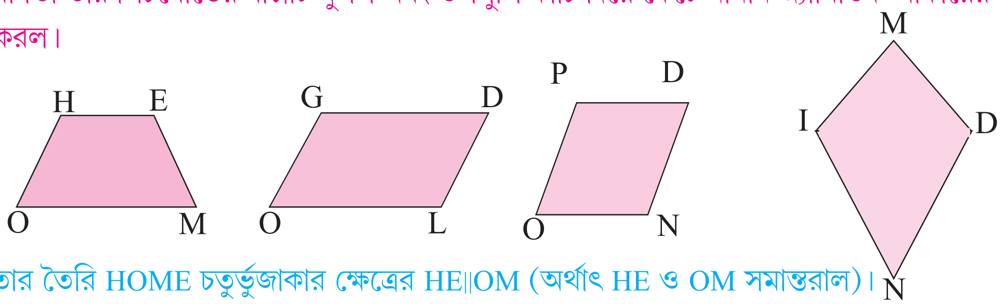
চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্র ABCD এর ☐ টি শীর্ষবিন্দু A, B, C ও D; ☐ টি বাহু AB, BC, CD ও DA এবং ☐ টি কোণ ∠ABC , ☐ , ☐ , ☐ ; ABCD চতুর্ভুজের কর্ণগুলি হলো ☐ ও ☐

চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্র PQRS-এর ☐ টি শীর্ষবিন্দু P,Q,R ও S; ☐ টি বাহু PQ,QR,RS এবং SP;

চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্র PQRS এর কোণগুলি ও কর্ণগুলি লিখি।

আমার বন্ধু রণিতা তার পিচবোর্ডের বাক্সটি খুলল এবং তলগুলি কাঁচি দিয়ে কেটে নানান জ্যামিতিক আকারের ক্ষেত্র তৈরি করল।

সে করল



দেখছি, রণিতার তৈরি HOME চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রের HE||OM (অর্থাৎ HE ও OM সমান্তরাল)।

∴ HOME চতুর্ভুজ আকারের ক্ষেত্র একটি ট্রাপিজিয়াম আকারের ক্ষেত্র।

যে চতুর্ভুজের একজোড়া বিপরীত বাহু পরস্পর সমান্তরাল, তাকে **ট্রাপিজিয়াম** বলা হয়।

কিন্তু রণিতার তৈরি GOLD চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রের GO||DL এবং GD||OL.

∴ GOLD চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রটি একটি সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্র।

যে চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান্তরাল তাকে **সামান্তরিক** বলা হয়।

আবার, POND চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রের PO || DN, PD || ON এবং PO = ON

POND চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রটি ☐ আকারের ক্ষেত্র।

∴ যে সামান্তরিকের একজোড়া সন্নিহিত বাহুর দৈর্ঘ্য সমান তাকে **রম্বস** বলা হয়।

(i) ও (ii) নং ABCD ও PQRS -চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রদ্বয়ের বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান্তরাল। এরাও কি সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্র ?

আয়তক্ষেত্র ABCD এবং বর্গক্ষেত্র PQRS এরাও সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্র।

বুঝেছি, যে সামান্তরিকের একটি কোণ সমকোণ তাকে **আয়তাকার চিত্র** বলা হয়।

যে আয়তকার চিত্রের একজোড়া সন্নিহিত বাহুর দৈর্ঘ্য সমান হয় তাকে **বর্গাকার চিত্র** বলা হয়।

অথবা রম্বসের একটি কোণ সমকোণ হলে তাকে **বর্গাকার চিত্র** বলা হয়।

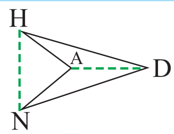
পেলাম,
(i) প্রতিটি বর্গাকার চিত্রই, আয়তাকার চিত্র এবং রম্বস।
(ii) প্রতিটি আয়তাকার চিত্র, বর্গাকার চিত্র এবং রম্বসই সামান্তরিক।
(iii) প্রতিটি সামান্তরিকই ☐ (আয়তাকার চিত্র/ট্রাপিজিয়াম)। [নিজে করি]

মেপে দেখছি, MIND চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রের MI=MD এবং NI=ND

∴ MIND চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্র কাইট আকারের ক্ষেত্র।

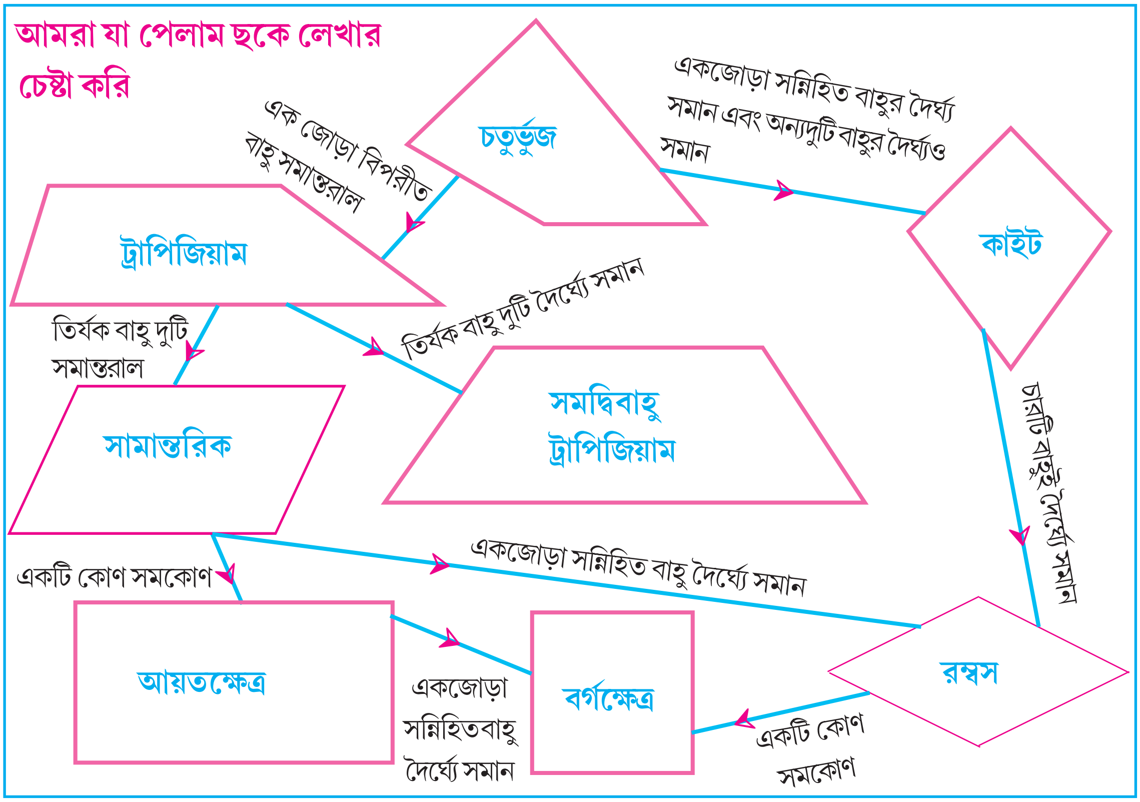
পেলাম, যে চতুর্ভুজের এক জোড়া সন্নিহিত বাহুর দৈর্ঘ্য সমান এবং বাকি দুটি বাহুর দৈর্ঘ্যও সমান তাকে **কাইট** বলা হয়।

মিহির একটি পিচবোর্ড কেটে অন্য একটি আকার তৈরি করল —

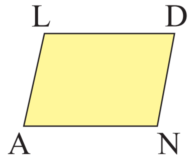


দেখছি, HAND চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রের একটি কর্ণ চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রের মধ্যে নেই। এদের **অকুব্জ (Concave) চতুর্ভুজ** বলা হয়। (এই ধরনের চতুর্ভুজ নিয়ে এখানে কোনো আলোচনা নেই।)

আমরা যা পেলাম ছকে লেখার চেষ্টা করি



সায়ন্তন তার পিচবোর্ডের টুকরোগুলি কাঁচি দিয়ে কেটে কেটে নানান আকারের রঙিন সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্র তৈরি করল।



আমি হলুদ রঙের সামান্তরিক ক্ষেত্র LAND-এর বাহুগুলি মেপে দেখছি, LA = DN, LD = AN
আবার চাঁদার সাহায্যে মেপে দেখছি, $\angle LAN = \angle LDN$ এবং $\angle ALD = \angle AND$

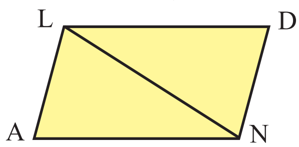
পেলাম LAND সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্রের বিপরীত বাহুর দৈর্ঘ্য ও বিপরীত কোণগুলির মান সমান।

আমিও মেপে দেখছি সবুজ রঙের COMB সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্রের বিপরীত বাহুর দৈর্ঘ্য ও বিপরীত কোণগুলির মান সমান। **[নিজে করি]**

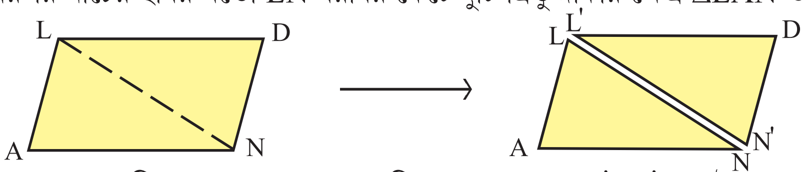
হাতেকলমে সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্রের প্রতিটি কর্ণ সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রটিকে দুটি সর্বসম ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রে বিভক্ত করে এবং সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্রের বিপরীত বাহুগুলির দৈর্ঘ্য সমান।

(i) প্রথমে হলুদ রঙের LAND সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্রের মতো আরো দুটি সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্র এঁকে কেটে নিলাম।

(ii) এবার LAND সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্রের L ও N বিন্দু বরাবর ভাঁজ করে কর্ণ LN আঁকলাম।



(iii) এরপর নীচের ছবির মতো LN বরাবর কেটে দুটি ত্রিভুজাকার ক্ষেত্র ΔLAN ও $\Delta N'DL'$ পেলাম,

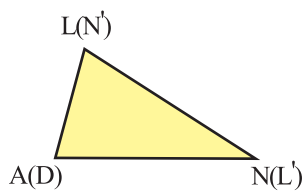


(iv) এবার LAN ত্রিভুজাকার ক্ষেত্র অপর ত্রিভুজাকার ক্ষেত্র N'DL'-এর উপর এমনভাবে রাখলাম যাতে নীচের ছবির মতো হয়।

ΔLAN-এর A বিন্দু $\Delta N'DL'$-এর D বিন্দুতে,

ΔLAN-এর L বিন্দু $\Delta N'DL'$-এর N' বিন্দুতে এবং

ΔLAN-এর N বিন্দু $\Delta N'DL'$-এর L' বিন্দুতে সমাপতিত হয়।



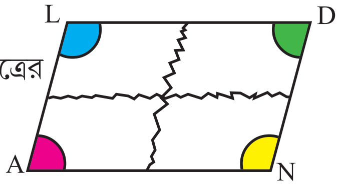
দেখছি, ΔLAN ও $\Delta N'DL'$ সম্পূর্ণভাবে একটির সাথে অপরটি মিশে গেছে।

$\therefore$ পেলাম $\Delta LAN \cong \Delta N'DL'$ এবং LA = N'D এবং AN = DL'

$\therefore$ হাতেকলমে যাচাই করলাম যে, সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্রের প্রতিটি কর্ণ সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রটিকে দুটি সর্বসম ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রে বিভক্ত করে এবং সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্রের বিপরীত বাহুগুলির দৈর্ঘ্য সমান।

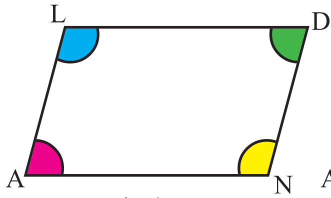
1 আয়েশা LAND সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্রের বিপরীত কোণগুলি মানে পরস্পর সমান, এই ধর্মটি হাতেকলমে যাচাই করার জন্য LAND সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্রের মাপের আরও দুটি সামান্তরিক আকার ক্ষেত্র এঁকে কেটে নিল।

হাতেকলমে

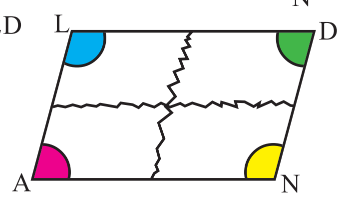


(i) এবার আমি পাশের ছবির মতো একটি LAND সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের চারটি কোণ এঁকে রঙিন করলাম ও কেটে নিলাম।

(ii) এরপরে অপর LAND সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্র বোর্ডে আটকে দিলাম এবং কেটে নেওয়া চারটি কোণের টুকরো বোর্ডে আটকানো সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্রের সঙ্গে মিলিয়ে কী পেলাম লিখি।



বোর্ডে আটকানো সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্র



চার টুকরো করা সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্র

দেখছি, ∠A = ∠D এবং ∠L = ∠N

∴ হাতেকলমে পেলাম সামান্তরিকের বিপরীত কোণগুলির মান সমান।

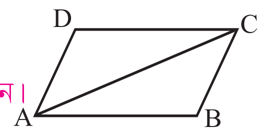
2 আমি একইভাবে অপর একটি সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্র আঁকি ও কেটে নিয়ে হাতেকলমে যাচাই করি যে সামান্তরিকের কর্ণ সামান্তরিককে দুটি সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত করে এবং সামান্তরিকের বিপরীত বাহুগুলির দৈর্ঘ্য ও কোণগুলির মান সমান। [নিজে করি]

যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

উপপাদ্য- 14 কোনো সামান্তরিকের

(i) প্রতিটি কর্ণ সামান্তরিককে দুটি সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত করে

(ii) বিপরীত বাহুগুলির দৈর্ঘ্য সমান। (iii) বিপরীত কোণগুলি মানে সমান।



প্রদত্ত (দেওয়া আছে) : ধরি, ABCD সামান্তরিক। অর্থাৎ AB ∥ DC এবং AD ∥ BC;
AC কর্ণ সামান্তরিককে দুটি ত্রিভুজ △ABC ও △CDA-তে বিভক্ত করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে: (i) △ABC ≅ △CDA (ii) AB = DC; BC = AD
এবং (iii) ∠ABC = ∠ADC; ∠BAD = ∠BCD

প্রমাণ : △ABC ও △CDA-এর মধ্যে, ∠ACB = একান্তর ∠CAD [∵ AD ∥ BC এবং AC উহাদের ছেদক] .... (1)

AC [সাধারণ বাহু]

এবং ∠BAC = একান্তর ∠ACD [∵ AB ∥ DC এবং AC উহাদের ছেদক] .... (2)

∴ △ABC ≅ △CDA [সর্বসমতার A-S-A শর্তানুসারে] [(i) প্রমাণিত]

∴ AB = DC ও BC = AD [সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ বাহু] [(ii) প্রমাণিত]

আবার, ∠ABC = ∠ADC [সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ কোণ]

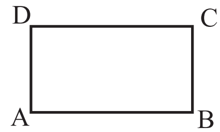
∠BAC + ∠CAD = ∠ACB + ∠ACD [(1) ও (2) থেকে পেলাম]

∴ ∠BAD = ∠BCD [(iii) প্রমাণিত]

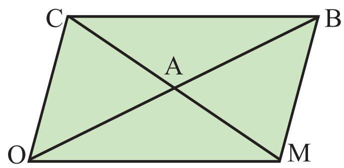
3 PQRS একটি সামান্তরিক এঁকে কর্ণ PR টানলাম। এবার যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, $\triangle PQR \cong \triangle RSP$; $PQ = SR$, $PS = QR$ এবং $\angle PQR = \angle PSR$, $\angle QPS = \angle QRS$ **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 1 আমি যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, আয়তাকার চিত্রের বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান এবং প্রত্যেকটি কোণ সমকোণ।

উত্তর সংকেত : যে সামান্তরিকের একটি কোণ সমকোণ সেটি একটি আয়তাকার চিত্র। ধরি, $\angle BAD = 90°$
আবার $\angle BAD + \angle ABC = 180°$ [$\because$ AD ∥ BC এবং AB উহাদের ছেদক]
$\therefore \quad \angle ABC = 90°$
যেহেতু সামান্তরিকের বিপরীত কোণগুলি সমান,
$\therefore \quad \angle BAD = \angle BCD = 90°, \angle ABC = \angle ADC = 90°$



রণিতা সায়ন্তনের তৈরি সবুজ রঙের COMB সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্রের দুটি কর্ণ CM ও OB অঙ্কন করেছে যারা পরস্পরকে A বিন্দুতে ছেদ করেছে।

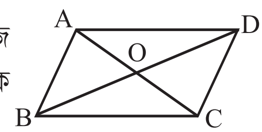


স্কেল ও কাঁটা কম্পাসের সাহায্যে দেখছি, CA=AM এবং OA=AB

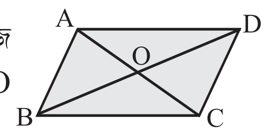
সায়ন্তন আরও একটি যে কোনো আকারের সামান্তরিক অঙ্কন করল ও তার দুটি কর্ণ এঁকে কর্ণগুলির অংশের মাপ নিয়ে দেখল যে সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে।

হাতে কলমে আমি হাতে কলমে যাচাই করি যে সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

(i) আমি সাদা আর্ট পেপারে একটি সামান্তরিক ABCD অঙ্কন করলাম। কাগজ ভাঁজ করে এই সামান্তরিকের দুটি কর্ণ AC ও BD অঙ্কন করলাম যারা পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করল।

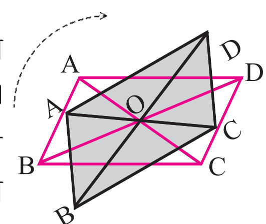


(ii) এবার একটি ট্রেসিং পেপারে একই মাপের সামান্তরিক ABCD আঁকলাম। ভাঁজ করে এই সামান্তরিকের দুটি কর্ণ AC ও BD অঙ্কন করলাম যারা পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে।

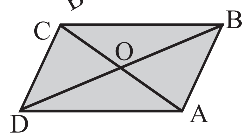


(iii) এবার একটি বোর্ডে আর্ট পেপারে আঁকা সামান্তরিকটি আটকে দিলাম এবং তার উপরে ট্রেসিং পেপারে আঁকা সামান্তরিকটি একটি পিনের সাহায্যে আঁটকে দিলাম।

(iv) O বিন্দুতে পিন আটকে ট্রেসিং পেপারটি ঘড়ির কাঁটার দিকে (বা ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে) একবার 180° ঘোরালাম যাতে নীচের ছবির মতো ট্রেসিং পেপারের আঁকা সামান্তরিক আর্টপেপারে আঁকা সামান্তরিকের সঙ্গে সমাপতিত হয়।



(v) দেখছি, AO = OC এবং BO = OD



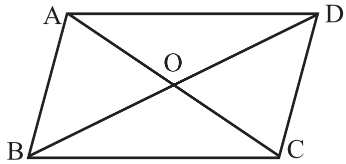
হাতেকলমে পেলাম, সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

4 সাব্বা PQRS একটি সামান্তরিক অঙ্কন করল এবং এই সামান্তরিকের দুটি কর্ণ PR ও QS অঙ্কন করল যারা পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে।

আমি হাতে কলমে যাচাই করি PO = OR, QO = OS [নিজে করি]

যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

উপপাদ্য : 15 সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে



প্রদত্ত : ABCD সামান্তরিকের দুটি কর্ণ AC ও BD পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে: AO = OC এবং BO = OD.

প্রমাণ : Δ AOD ও Δ BOC-এর মধ্যে,

$\angle CAD$ = একান্তর $\angle ACB$ [$\because$ AD $\parallel$ BC এবং AC উহাদের ছেদক]

অর্থাৎ $\angle OAD$ = একান্তর $\angle OCB$

AD = BC [$\because$ সামান্তরিকের বিপরীত বাহু]

এবং $\angle AOD$ = বিপ্রতীপ $\angle BOC$ [$\because$ AC ও BD কর্ণদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করেছে।]

$\therefore$ $\Delta AOD \cong \Delta BOC$ [সর্বসমতার A-S-A শর্তানুসারে]

$\therefore$ AO = OC এবং BO = OD [সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ বাহু] **(প্রমাণিত)**

5. PQRS সামান্তরিকের দুটি কর্ণ PR ও QS পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করলে যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে PO = OR এবং QO = OS। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 2 আমি যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

প্রদত্ত : PQRS রম্বসের PR ও QS কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে: PO = OR, QO = OS এবং $\angle POS = 90°$

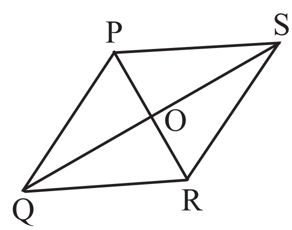
প্রমাণ : PQRS রম্বসের PO = OR এবং QO = OS [$\because$ সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে এবং রম্বস একটি সামান্তরিক]

ΔPOQ ও ΔPOS -এর মধ্যে,

QO = SO

PQ = PS [রম্বসের বাহু]

এবং PO সাধারণ বাহু



$\therefore$ $\Delta POQ \cong \Delta POS$ [সর্বসমতার S-S-S শর্তানুসারে]

$\therefore$ $\angle POQ = \angle POS$ [সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ কোণ]

কিন্তু, $\angle POQ + \angle POS = 180°$ [$\because$ সরলকোণ]

বা, 2 $\angle POS = 180°$

$\therefore$ $\angle POS = 90°$

$\therefore$ রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে। [প্রমাণিত]

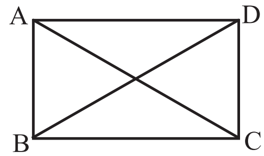
প্রয়োগ : 3 আমি যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে আয়তাকার চিত্রের কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্য সমান।

উত্তর সংকেত : ABCD আয়তাকার চিত্রের, $\angle ABC = 90^\circ$

$AB \parallel DC$ এবং BC ছেদক। $\therefore \angle ABC + \angle BCD = 180^\circ$

$\therefore \angle ABC = \angle BCD = 90^\circ$

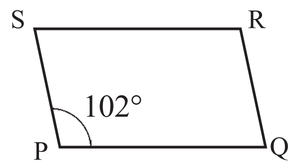
$\Delta ABC \cong \Delta DBC$ [**প্রমাণ নিজে করি**] $\therefore AC = BD$



প্রয়োগ : 4 আমি যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, বর্গাকার চিত্রের কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্য সমান এবং তারা পরস্পরকে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করে। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 5 সাব্বা PQRS একটি সামান্তরিক এঁকেছে, যার $\angle P = 102^\circ$;

আমি হিসাব করে PQRS সামান্তরিকের অপর কোণগুলির মাপ লিখি।



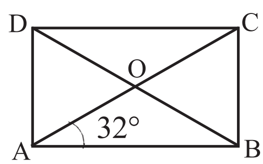
$\angle SPQ = 102^\circ = \angle SRQ$ [সামান্তরিকের বিপরীতকোণ]

$\angle SPQ + \angle PSR =$ ☐ [$\because PQ \parallel SR$ এবং PS তাদের ছেদক]

$\therefore \angle PSR = 180^\circ - 102^\circ = 78^\circ = \angle PQR$

প্রয়োগ : 6 যদি সাব্বার আঁকা PQRS সামান্তরিকের $\angle PQR = 75^\circ$ হতো, তাহলে $\angle QRS$ এর মান কত হতো হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 7 সায়ন্তন একটি আয়তাকার চিত্র ABCD এঁকেছে যার দুটি কর্ণ AC ও BD পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে। $\angle OAB = 32^\circ$ হলে, $\angle OBC$ -এর মান হিসাব করে লিখি।



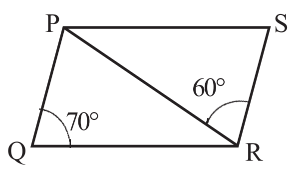
ABCD আয়তাকার চিত্রের কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্য সমান এবং তারা পরস্পরকে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

সুতরাং, $OA = OC = OB = OD$

$\therefore \Delta AOB$ সমদ্বিবাহু। সুতরাং, $\angle OAB = \angle OBA$

$\therefore \angle OAB = 32^\circ = \angle OBA$; $\therefore \angle OBC = 90^\circ - 32^\circ =$ ☐ [$\because$ ABCD আয়তাকার চিত্র]

প্রয়োগ : 8 আমি পাশের PQRS সামান্তরিকের ছবি দেখি ও $\angle QPR$, $\angle SPR$ ও $\angle PRQ$ -এর মান হিসাব করে লিখি।

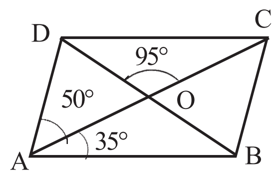


PQRS সামান্তরিকের $PQ \parallel SR$ এবং PR ছেদক।

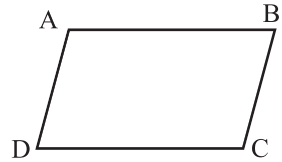
$\therefore \angle QPR =$ একান্তর $\angle PRS = 60^\circ$

একইভাবে, $\angle SPR =$ ☐, $\angle PRQ =$ ☐ **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 9 পাশের ছবিতে ABCD সামান্তরিকের $\angle BAO = 35^\circ$, $\angle DAO = 50^\circ$ এবং $\angle COD = 95^\circ$; আমি হিসাব করে $\angle ABO$, $\angle ODC$, $\angle ACB$ ও $\angle CBD$-এর মান লিখি। **[নিজে করি]**



প্রয়োগ : 10 ABCD সামান্তরিকের পরিসীমা 40 সেমি. এবং AB=12 সেমি. হলে, সামান্তরিকের প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।

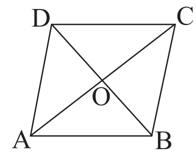


AB = DC =12 সেমি. এবং AD + BC = (40–2×12) সেমি. = 16 সেমি.

$\therefore$ AD = BC = $\frac{16}{2}$ সেমি. = 8 সেমি.

প্রয়োগ : 11 ABCD সামান্তরিকের পরিসীমা 35সেমি. এবং AB = 9.5 সেমি. হলে, AD বাহুর দৈর্ঘ্য কী হবে হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 12 সাথি একটি রম্বস এঁকেছে যার কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 24সেমি. ও 18 সেমি.। আমি হিসাব করে রম্বসের প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য লিখি।



ধরি, ABCD রম্বসের AC = 24 সেমি. এবং BD = 18 সেমি।

রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

$\therefore$ AO = $\frac{24}{2}$ সেমি. = 12 সেমি. এবং BO = $\frac{18}{2}$ সেমি. = 9 সেমি. এবং $\angle AOB = 90°$

$\therefore$ সমকোণী ত্রিভুজ AOB-এর, $AB^2 = OA^2 + OB^2 = (12^2 + 9^2)$সেমি.^{2} = (144 + 81) সেমি.^{2} = 225 সেমি.^{2}

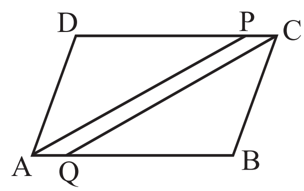
$\therefore$ AB = $\sqrt{225 \text{ সেমি.}^2}$ = 15 সেমি.

সুতরাং ABCD রম্বসের প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য 15 সেমি.

প্রয়োগ : 13 যদি ABCD রম্বসের কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 8 সেমি. ও 6 সেমি. হয়, তবে ABCD রম্বসের প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ: 14 আমি ABCD সামান্তরিকের ∠BAD ও ∠BCD কোণের দুটি সমদ্বিখণ্ডক এঁকেছি যা DC এবং AB বাহুকে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করেছে। আমি যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, PAQC একটি সামান্তরিক।

প্রদত্ত: ABCD সামান্তরিকের ∠BAD ও ∠BCD কোণের সমদ্বিখণ্ডক দুটি AP ও CQ যথাক্রমে DC ও AB বাহুকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করেছে।



প্রমাণ করতে হবে যে: APCQ একটি সামান্তরিক।

প্রমাণ : ABCD সামান্তরিকের DC || AB এবং AP ছেদক।

সুতরাং, ∠DPA = একান্তর ∠PAQ

আবার, ∠PAQ = $\frac{1}{2}$ ∠DAB [∵ AP, ∠A এর সমদ্বিখণ্ডক]

= $\frac{1}{2}$ ∠DCB [∵ সামান্তরিকের বিপরীত কোণদ্বয় সমান]

= ∠PCQ [∵ CQ, ∠C-এর সমদ্বিখণ্ডক]

সুতরাং, ∠DPA = ∠PCQ

কিন্তু PA ও CQ সরলরেখাংশ দুটিকে DC সরলরেখাংশ ছেদ করায় অনুরূপ কোণদুটি সমান।

$\therefore$ PA || CQ

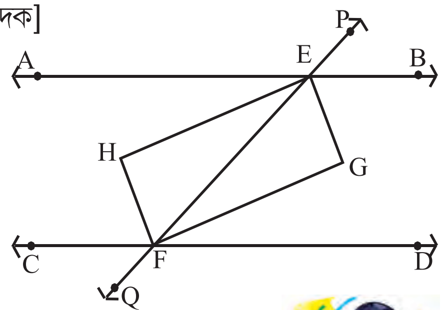
আবার, AQ || PC [যেহেতু সামান্তরিকের বিপরীত বাহু AB ও DC সমান্তরাল]

APCQ চতুর্ভুজের AP || QC এবং AQ || PC; সুতরাং APCQ একটি সামান্তরিক।

প্রয়োগ : 15 আমি যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, দুটি সমান্তরাল সরলরেখা ও তাদের একটি ছেদকের অন্তর্ভুক্ত অন্ত:কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকগুলি একটি আয়তাকার চিত্র উৎপন্ন করে।

প্রদত্ত : AB ও CD দুটি সমান্তরাল সরলরেখাকে PQ ছেদক যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করেছে। EG ও EH যথাক্রমে ∠BEF ও ∠AEF কোণ দুটিকে এবং FG ও FH যথাক্রমে ∠DFE ও ∠CFE কোণ দুটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে: EHFG একটি আয়তাকার চিত্র।



প্রমাণ : ∠AEF = একান্তর ∠EFD [∵ AB ∥ CD এবং EF ছেদক]

সুতরাং, $\frac{1}{2}$∠AEF = $\frac{1}{2}$∠EFD

∴ ∠HEF = ∠EFG; কিন্তু এরা একান্তর কোণ।

∴ HE ∥ FG

অনুরূপে, HF ∥ GE

∴ EHFG একটি সামান্তরিক।

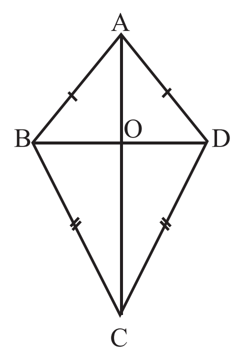
আবার, ∠HEG = $\frac{1}{2}$(∠AEF + ∠BEF) = $\frac{1}{2}$ × 2 সমকোণ

∴ ∠HEG = 1 সমকোণ; সুতরাং, EHFG একটি আয়তাকার চিত্র।

প্রয়োগ : 16 সাব্বা তার খাতায় ABCD কাইট এঁকে AC ও BD কর্ণ দুটি এঁকেছে যারা পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে। আমি যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে AC, BD -এর উপর লম্ব এবং BO = OD

প্রদত্ত : ABCD কাইটের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে: AC, BD-এর উপর লম্ব এবং BO = OD



প্রমাণ : ABCD একটি কাইট যার AB = AD এবং BC = CD

Δ ABC ও Δ ADC -এর মধ্যে AB = AD; BC = CD এবং AC সাধারণ বাহু

∴ Δ ABC ≅ Δ ADC [সর্বসমতার S-S-S শর্তানুসারে]

∴ ∠BAC = ∠DAC [সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ কোণ]

সুতরাং, ∠BAO = ∠DAO ———— (i)

Δ ABO ও Δ ADO — এর মধ্যে

AB = AD; ∠BAO = ∠DAO [(i) থেকে পেলাম]

এবং AO সাধারণ বাহু।

∴ ΔABO ≅ ΔADO (সর্বসমতার S-A-S শর্তানুসারে)

BO = DO (সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ বাহু) (প্রমাণিত)

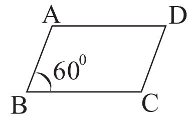
আবার, ∠AOB = ∠AOD (সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ কোণ)

এবং ∠AOB + ∠AOD = 180°; সুতরাং, ∠AOB = ∠AOD = 90°

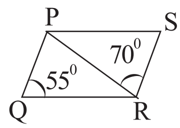
∴ AO, BD এর উপর লম্ব। অর্থাৎ, AC, BD এর উপর লম্ব। (প্রমাণিত)

নিজে করি - 6.1

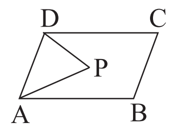
1. ABCD সামান্তরিকের কোণগুলি হিসাব করে লিখি, যেখানে $\angle B = 60°$



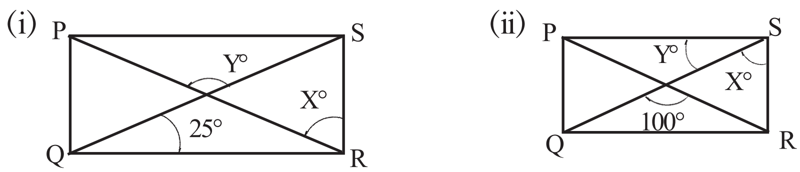
2. পাশের ছবির PQRS সামান্তরিকের $\angle PRQ$ - এর মান হিসাব করে লিখি।



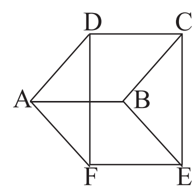
3. পাশের ছবির ABCD সামান্তরিকের AP ও DP যথাক্রমে $\angle BAD$ ও $\angle ADC$ -এর সমদ্বিখণ্ডক হলে, $\angle APD$-এর মান হিসাব করে লিখি।



4. আমি নীচের PQRS আয়তাকার চিত্রের X ও Y -এর মান হিসাব করে লিখি।



5. পাশের চিত্রে ABCD এবং ABEF দুটি সামান্তরিক। আমি যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, CDFE ও একটি সামান্তরিক।

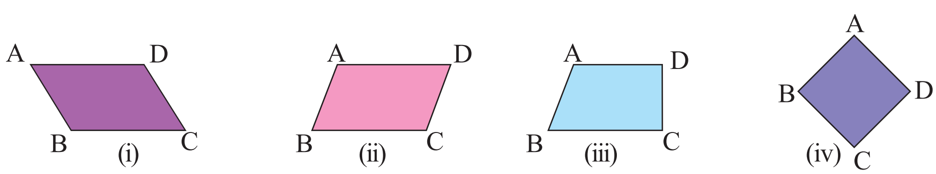


6. ABCD সামান্তরিকের AB > AD হলে, যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, $\angle BAC < \angle DAC$।

আমরা অনেকগুলি ছোটো-বড়ো নানান মাপের রঙিন সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্রবিশিষ্ট পিচবোর্ড কেটে তাদের বাহু, কোণ ও কর্ণের মধ্যে সম্পর্ক জেনেছি।

কিন্তু সায়ন্তনের বোন ঝিমলি অনেকগুলি ছোটো-বড়ো নানান মাপের রঙিন চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্র এঁকেছে এবং কাঁচি দিয়ে কেটে আলাদা করে রেখেছে।

আমি ঝিমলির আঁকা চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রগুলি একটি বড়ো সাদা চার্ট পেপারে আটকে দেয়ালে টাঙিয়ে দিলাম। ঝিমলি এঁকেছে,



সায়ন্তন, ঝিমলির আঁকা চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রগুলির বাহুগুলির দৈর্ঘ্য স্কেলের সাহায্যে মেপে দেখল (i), (ii) ও (iv) নম্বর চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রের বিপরীত বাহুগুলির দৈর্ঘ্য পরস্পর সমান। কিন্তু (iii) নং চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রের বিপরীত বাহুগুলির দৈর্ঘ্য পরস্পর সমান নয়।

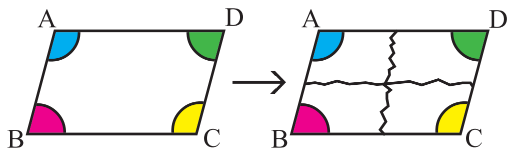
আমরা নানাভাবে হাতেকলমে যাচাই করে দেখেছি যে, সামান্তরিকের বিপরীত বাহুগুলির দৈর্ঘ্য পরস্পর সমান। কিন্তু এই সকল চতুর্ভুজ যাদের বিপরীত বাহুগুলির দৈর্ঘ্য পরস্পর সমান, তারা কি সামান্তরিক হবে? হাতেকলমে যাচাই করি।

6 আমি হাতেকলমে প্রথমে বেগুনি রঙের (i) নং চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রটি সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্র কিনা যাচাই করি।

বেগুনি রঙের (i) নং ABCD চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রের AB=DC এবং AD=BC

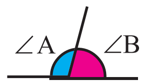
(i) নং ABCD চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রের বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান্তরাল কিনা যাচাই করি।

হাতেকলমে



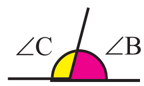
(I) আমি প্রথমে (i) নং ABCD চতুর্ভুজের চারটি কোণ রঙিন করলাম ও কেটে নিলাম।

(II) এবার ∠A ও ∠B পাশাপাশি বসিয়ে পেলাম →



দেখছি, $\angle A + \angle B = 180°$

(III) এবার ∠B ও ∠C পাশাপাশি বসিয়ে পেলাম →



দেখছি, $\angle B + \angle C = 180°$

সিদ্ধান্ত : (II) নং থেকে পেলাম, AD ও BC সরলরেখা দুটিকে AB ছেদ করায় অন্তঃস্থ সন্নিহিত কোণ দুটির যোগফল 180° হয়েছে। ∴ AD ∥ BC

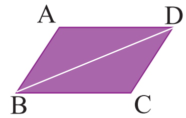
একইভাবে (III) নং থেকে পেলাম AB ∥ DC

∴ হাতেকলমে পেলাম, ABCD চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রটি সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্র।

একইভাবে ঝিমলির আঁকা (ii) , (iii) ও (iv) নং চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রগুলির বিপরীত বাহুগুলি সমান্তরাল কিনা হাতেকলমে কোণগুলির সাহায্যে যাচাই করি।

চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্র	বিপরীত বাহুর দৈর্ঘ্য	∠A + ∠B	AD ও BC বাহুর প্রকৃতি	∠B + ∠C	AB ও DC বাহুর প্রকৃতি	সিদ্ধান্ত
(ii) নং গোলাপি চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্র ABCD	AB = DC = ☐ AD = BC = ☐	∠A+∠B = ☐	AD ∥ BC	∠B+∠C=180°	AB ∥ DC	ABCD সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্র
(iii) নং আকাশি চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্র ABCD	AB ≠ DC AD ≠ BC	∠A + ∠B = 180°	AD ∥ BC	∠B+∠C≠180°	AB ও DC পরস্পর সমান্তরাল নয়	সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্র নয়।
(iv) নং নীল চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্র ABCD	☐	☐	☐	☐	☐	☐

(নিজে করি)



সাব্বা (i) নং ABCD চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রের একটি কর্ণ BD টানল এবং চাঁদা দিয়ে মেপে একান্তর কোণগুলির মাপ লিখল। চাঁদা দিয়ে মেপে পেলাম, $\angle ADB = \angle DBC$

কিন্তু AD ও BC সরলরেখা দুটিকে BD ছেদ করায় একান্তর কোণদ্বয় $\angle ADB$ ও $\angle DBC$ -এর পরিমাপ সমান হয়েছে। সুতরাং, $AD \parallel BC$

আবার চাঁদা দিয়ে মেপে দেখেছি, $\angle ABD = \angle CDB$

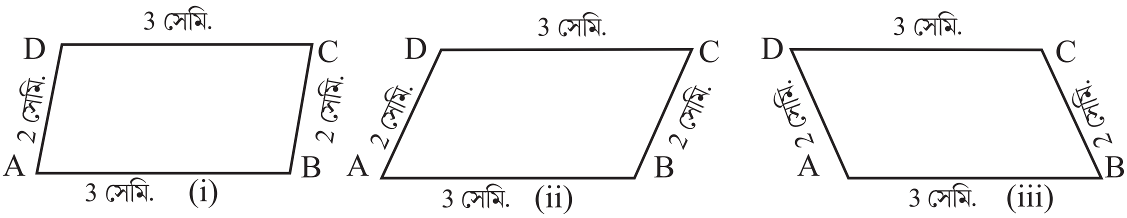
অর্থাৎ AB ও DC সরলরেখা দুটিকে BD ছেদ করায় একান্তর কোণদ্বয় $\angle ABD$ ও $\angle CDB$ — এর পরিমাপ সমান হয়েছে। সুতরাং $AB \parallel DC$

ABCD চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রের কর্ণ টেনে এবং একান্তর কোণ মেপে দেখছি $AB \parallel DC$ এবং $AD \parallel BC$

$\therefore$ ABCD একটি সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্র।

আমি একইভাবে (ii), (iii) ও (iv) নং চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রের কর্ণ টেনে এবং একান্তর কোণগুলি মেপে দেখছি (ii) নং ও (iv) নং চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্র দুটির প্রত্যেকে সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্র। কিন্তু (iii) নং চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রটি সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্র নয়।

আমি ঝিমলির মতো অনেকগুলি চতুর্ভুজ ABCD আঁকলাম যাদের AB=DC=3 সেমি. এবং AD=BC=2 সেমি.



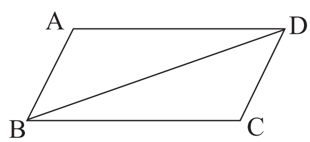
একইভাবে (i), (ii) ও (iii) নং চতুর্ভুজের কোণগুলি চাঁদার সাহায্যে মেপে দেখছি, প্রতিটি চতুর্ভুজ ☐ [নিজে যাচাই করে লিখি]

হাতেকলমে পেলাম— **চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলির দৈর্ঘ্য সমান হলে চতুর্ভুজটি সামান্তরিক হবে।**

যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

উপপাদ্য : 16 কোনো চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলির দৈর্ঘ্য সমান হলে চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক হবে।

প্রদত্ত : ABCD চতুর্ভুজের AB=DC এবং AD=BC



প্রমাণ করতে হবে যে: ABCD একটি সামান্তরিক।

অঙ্কন : BD কর্ণ টানলাম।

প্রমাণ : ΔABD ও ΔCDB -এর মধ্যে, AB=DC; AD=BC [প্রদত্ত] এবং BD সাধারণ বাহু

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta CDB$ (সর্বসমতার S-S-S শর্তানুসারে)

$\angle ADB = \angle CBD$ (সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ কোণ)

কিন্তু AD ও BC -কে BD ছেদ করায় $\angle ADB$ = একান্তর $\angle CBD$

$\therefore AD \parallel BC$

আবার, $\angle ABD = \angle CDB$ (সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ কোণ); কিন্তু এরা একান্তর কোণ

$\therefore AB \parallel DC$

ABCD চতুর্ভুজের $AD \parallel BC$ এবং $AB \parallel DC$

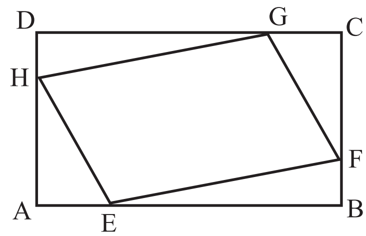
$\therefore$ ABCD একটি সামান্তরিক (প্রমাণিত)

সামান্তরিকের বিপরীত বাহুগুলির দৈর্ঘ্য সমান হয়— এই উপপাদ্যর বিপরীতে পেলাম “চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলির দৈর্ঘ্য সমান হলে চতুর্ভুজটি সামান্তরিক হবে” উপপাদ্যটি। তাই দ্বিতীয় উপপাদ্যটিকে প্রথমটির **বিপরীত উপপাদ্যও** বলা হয়।

প্রয়োগ : 17 ABCD আয়তাকার চিত্রের AB, BC, CD, DA বাহুগুলির উপর যথাক্রমে E, F, G, H বিন্দুগুলি এমনভাবে অবস্থিত যে AE = CG এবং BF = DH; যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, EFGH একটি সামান্তরিক।

প্রদত্ত : ABCD আয়তাকার চিত্রের AE = CG এবং BF = DH

প্রমাণ করতে হবে যে: EFGH চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক।



প্রমাণ : AB = DC, AE = CG

সুতরাং, AB – AE = DC – CG

$\therefore$ BE = DG

ΔDHG ও ΔBEF এর মধ্যে,

DG = EB

$\angle$GDH = $\angle$EBF = 1 সমকোণ

DH = FB

$\therefore$ ΔDHG $\cong$ ΔBEF [সর্বসমতার S-A-S শর্তানুসারে]

সুতরাং HG = EF .... (i)

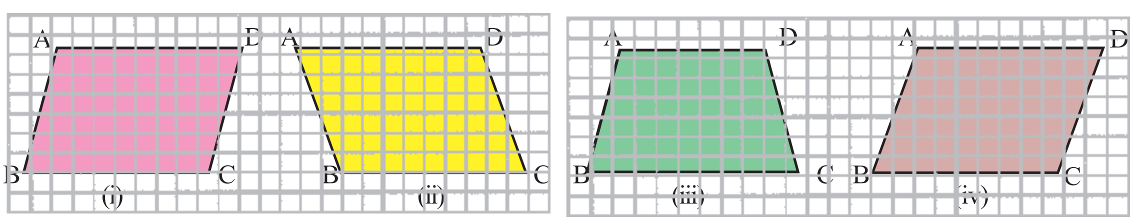
অনুরূপে প্রমাণ করা যায় যে, HE = GF .... (ii) ($\because$ Δ AHE $\cong$ Δ CGF)

$\therefore$ (i) ও (ii) থেকে পাই, EFGH একটি সামান্তরিক।

আমার বন্ধু রহমত ঠিক করেছে এবছরে ইচ্ছামতো হাতের কাজ দেখানোর অনুষ্ঠানে সে পিচবোর্ডের এমন কিছু নতুন ধরনের চতুর্ভুজ তৈরি করবে যাদের বিপরীত কোণগুলি সমান।

তাই সে তার পুরানো ছক আঁকা পিচবোর্ডে অনেকগুলি ছোটো বড়ো রঙিন চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্র তৈরি করল যাদের বিপরীত কোণগুলি সমান।

রহমত করল,



আমি চাঁদার সাহায্যে মেপে দেখি উপরের (i) নং চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রের বিপরীত কোণগুলি সমান কিনা।

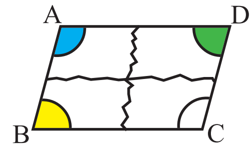
চাঁদার সাহায্যে মেপে দেখছি, $\angle$A = $\angle$C = ☐ এবং $\angle$B = $\angle$D = ☐ অর্থাৎ, (i) নং ABCD চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রের বিপরীত কোণগুলি সমান।

আমরা বিভিন্ন পরীক্ষার মাধ্যমে ও হাতেকলমে যাচাই করে দেখেছি, সামান্তরিকের বিপরীত কোণগুলি সমান হয়। কিন্তু কোনো চতুর্ভুজের বিপরীত কোণগুলি সমান হলে চতুর্ভুজটি সামান্তরিক হবে কিনা হাতে কলমে যাচাই করি।

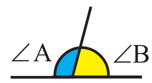
হাতে কলমে

আমরা প্রথমে হাতে কলমে পরীক্ষা করে দেখি গোলাপি রঙের (i) নং ABCD চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রটি সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্র কিনা। অর্থাৎ, ABCD চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রের বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান্তরাল কিনা।

(i) প্রথমে ABCD চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রের কোণগুলি রঙিন করে চারটি কোণ কেটে নিলাম।



(ii) এবার ∠A ও ∠B পাশাপাশি বসিয়ে নীচের ছবির মতো পেলাম।

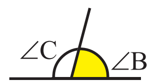


অর্থাৎ, $\angle A + \angle B = 180°$

পেলাম, AD ও BC সরলরেখাংশকে AB ছেদ করায় একই পার্শ্বস্থ অন্তঃস্থ কোণদ্বয়ের সমষ্টি 180°

$\therefore$ AD || BC

(iii) এবার ∠B ও ∠C পাশাপাশি বসিয়ে পাশের ছবির মতো পেলাম।



অর্থাৎ, $\angle B + \angle C = 180°$

$\therefore$ পেলাম, AB ও DC সরলরেখাংশকে BC ছেদ করায় একই পার্শ্বস্থ অন্তঃস্থ কোণদ্বয়ের সমষ্টি 180°

$\therefore$ AB || DC

$\therefore$ হাতে কলমে পেলাম, ABCD চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রটির বিপরীত কোণ সমান হলে, ক্ষেত্রটি সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্র হবে।

একইভাবে আমি রহমতের আঁকা (ii), (iii) ও (iv) নং চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রের কোণগুলি কেটে নিয়ে হাতে কলমে যাচাই করে কী পাই দেখি।

চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্র	বিপরীত কোণের পরিমাপ	∠A + ∠B	AD ও BC বাহুর প্রকৃতি	∠B + ∠C	AB ও DC বাহুর প্রকৃতি	সিদ্ধান্ত
(ii) নং হলুদ রঙের ABCD চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্র	∠A=∠C=☐ ∠B=∠D=☐	180°	AD || BC	180°	AB || DC	চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রটি সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্র
(iii) নং সবুজ রঙের ABCD চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্র	∠A ≠ ∠C ∠B ≠ ∠D	180°	AD || BC	∠B+∠C≠180°	AB ও DC পরস্পর সমান্তরাল নয়।	চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রটি সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্র নয়।
(iv) নং বাদামি রঙের ABCD চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্র						(নিজে করি)

হাতে কলমে দেখছি, চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রের বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সমান হলে, চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রটি একটি সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্র হবে।

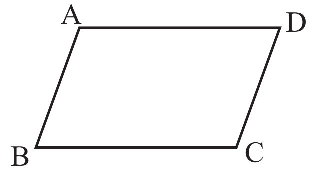
আমি আরও দুটি চতুর্ভুজ আঁকলাম যাদের বিপরীত কোণগুলি সমান। এবার হাতে কলমে যাচাই করে দেখছি চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্র দুটি সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্র কিনা।   [নিজে করি]

যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

উপপাদ্য: 17 কোনো চতুর্ভুজের বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সমান হলে চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক হবে।

প্রদত্ত: ABCD চতুর্ভুজের $\angle BAD = \angle BCD$ এবং $\angle ABC = \angle ADC$

প্রমাণ করতে হবে যে: ABCD একটি সামান্তরিক।



প্রমাণ: একটি চতুর্ভুজের চারটি কোণের সমষ্টি 4 সমকোণ।

সুতরা, $\angle BAD + \angle ABC + \angle BCD + \angle ADC = 4$ সমকোণ

বা, $\angle BAD + \angle ABC + \angle BAD + \angle ABC = 4$ সমকোণ

বা, $2 (\angle BAD + \angle ABC) = 4$ সমকোণ

$\therefore \angle BAD + \angle ABC = 2$ সমকোণ

যেহেতু, AD ও BC সরলরেখাংশ দুটিকে AB সরলরেখাংশ ছেদ করায় ছেদকের একই পাশে উৎপন্ন অন্তঃস্থ কোণদুটির সমষ্টি 2 সমকোণ, সুতরাং $AD \parallel BC$

একইভাবে প্রমাণ করতে পারি যে, $AB \parallel DC$

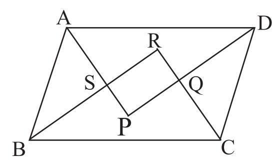
$\therefore$ ABCD একটি সামান্তরিক [প্রমাণিত]

প্রয়োগ : 18 প্রমাণ করি যে, কোনো সামান্তরিকের চারটি কোণের সমদ্বিখণ্ডকগুলি পরস্পর মিলিত হয়ে আয়তাকার চিত্র গঠন করে।

প্রদত্ত : ABCD সামান্তরিকের $\angle BAD$, $\angle ABC$, $\angle BCD$ ও $\angle ADC$ -এর সমদ্বিখণ্ডকগুলি যথাক্রমে AP, BR, CR ও DP পরস্পর মিলিত হয়ে PQRS চতুর্ভুজ তৈরি করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে: PQRS একটি আয়তাকার চিত্র।

প্রমাণ : ABCD সামান্তরিকের $AB \parallel DC$ এবং AD ভেদক।



$\angle BAD + \angle ADC = 180°$

বা, $\frac{1}{2}\angle BAD + \frac{1}{2}\angle ADC = 90°$

$\therefore \angle PAD + \angle PDA = 90°$

সুতরাং, Δ APD -তে, $\angle APD = 180° - 90° = 90°$;

একইভাবে প্রমাণ করা যায়, $\angle BRC = 90°$; $\angle ASB = 90° = \angle RSP$, $\angle CQD = 90° = \angle RQP$

$\therefore$ PQRS চতুর্ভুজের $\angle PSR = \angle PQR = 90°$ এবং $\angle SRQ = \angle SPQ = 90°$

যেহেতু, PQRS চতুর্ভুজের বিপরীত কোণগুলি সমান, সুতরাং PQRS একটি সামান্তরিক।

আবার , PQRS সামান্তরিকের প্রত্যেক কোণের মান 90°, সুতরাং PQRS একটি আয়তাকার চিত্র।

প্রমাণ করি যে, একটি চতুর্ভুজের দুটি বিপরীত কোণ সমান এবং এক জোড়া বিপরীত বাহু সমান্তরাল হলে, চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক হবে। [নিজে প্রমাণ করি।]

সামান্তরিকের বিপরীত কোণগুলি সমান হয় — এই উপপাদ্যের বিপরীত উপপাদ্য কী পেলাম লিখি। (নিজে করি)

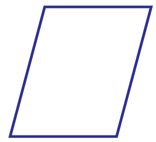
আমরা হাতে কলমে যাচাই করে পেলাম, একটি চতুর্ভুজ নিম্নলিখিত দুটি শর্তে সামান্তরিক হবে।

(i) যদি চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলির দৈর্ঘ্য পরস্পর সমান হয়।

(ii) যদি চতুর্ভুজের বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সমান হয়।

কিন্তু যদি চতুর্ভুজের একজোড়া বিপরীতবাহু পরস্পর সমান ও সমান্তরাল হয়, তবে কি চতুর্ভুজটি সামান্তরিক হবে?

আমাদের বিদ্যালয়ে নবম ও দশম শ্রেণির ছাত্র-ছাত্রীদের বিতর্কসভা হবে।



প্রধানশিক্ষক মহাশয় আমাদের শ্রেণির সহেলীর উপর দায়িত্ব দিলেন বিতর্ক সভায় পক্ষে ও বিপক্ষে যারা অংশগ্রহণ করবে তাদের নামের তালিকা একটি আর্ট পেপারে লিখে নোটিশ বোর্ডে টাঙিয়ে দিতে।

দেখছি, সহেলী সমান দৈর্ঘ্যের 2 টি নীল সুতো নিয়ে আর্ট পেপারের উপরে ও নীচে ধার বরাবর আঠা দিয়ে আটকে নিল। তারপর সে একই ধারের নীল সুতোর দুটো প্রান্ত আর একটা নীল সুতো বসিয়ে আঠা দিয়ে আটকাল এবং অপর ধারদুটোও একইভাবে নীল সুতো দিয়ে আটকে দিল।

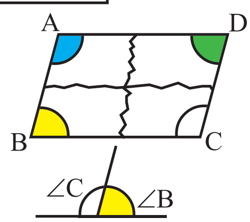
চারদিকে নীল সুতোর বর্ডার দিয়ে সে আর্ট পেপারের চারধারের বর্ডার বরাবর আর্ট পেপারটি কাঁচি দিয়ে কেটে উপরের ছবির মতো করল। এরপর বিতর্কসভায় পক্ষে ও বিপক্ষে যারা অংশগ্রহণ করবে তাদের নাম লিখল।

দেখছি আর্ট পেপারের উপর নীচ ধার বরাবর আর্ট পেপারটির দৈর্ঘ্য সমান এবং তারা সমান্তরাল।

এই ধরনের চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রকে কী বলব?

আমিও একই রকম চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্র তৈরি করলাম যার একজোড়া বিপরীত বাহুর দৈর্ঘ্য সমান এবং তারা পরস্পর সমান্তরাল।

হাতেকলমে যাচাই করি চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্রটি কী ধরনের চতুর্ভুজ।



আগের মতো $\angle B$ এবং $\angle C$ কেটে পাশাপাশি বসিয়ে

দেখছি, $\angle B + \angle C = 180°$; অর্থাৎ অপর জোড়া বিপরীত বাহু পরস্পর সমান্তরাল।

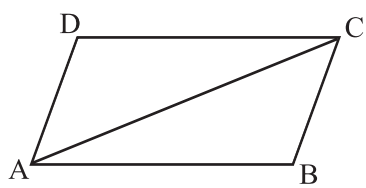
$\therefore$ $AB \parallel DC$

$\therefore$ হাতেকলমে পেলাম, ABCD একটি সামান্তরিক।

$\therefore$ হাতে কলমে পেলাম, চতুর্ভুজের একজোড়া বিপরীত বাহু সমান ও সমান্তরাল হলে চতুর্ভুজটি সামান্তরিক হবে।

যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

উপপাদ্য: 18 যে-কোনো চতুর্ভুজের একজোড়া বিপরীত বাহু সমান ও সমান্তরাল হলে চতুর্ভুজটি সামান্তরিক হবে।



প্রদত্ত : ABCD চতুর্ভুজের $AB = DC$ এবং $AB \parallel DC$

প্রমাণ করতে হবে যে: ABCD একটি সামান্তরিক।

অঙ্কন : AC কর্ণ অঙ্কন করলাম।

প্রমাণ : ΔABC ও ΔCDA-এর মধ্যে, $AB = DC$ [প্রদত্ত]

$\angle BAC =$ একান্তর $\angle ACD$ [$\because$ $AB \parallel DC$ এবং AC ছেদক] এবং AC উহাদের সাধারণ বাহু।

$\therefore$ $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (S-A-S সর্বসমতার শর্তানুসারে)

সুতরাং, $\angle ACB = \angle DAC$ [সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ কোণ]

কিন্তু BC ও AD সরলরেখাংশকে AC ছেদ করায় দুটি একান্তর কোণ সমান হয়েছে।

$\therefore$ $BC \parallel AD$

যেহেতু, ABCD চতুর্ভুজের $AB \parallel DC$ এবং $BC \parallel AD$,

$\therefore$ ABCD একটি সামান্তরিক। **(প্রমাণিত)**

নিজে করি - 6.2

1. ফিরোজ PQRS একটি চতুর্ভুজ অঙ্কন করেছে যার PQ = SR এবং PQ || SR; আমি যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, PQRS একটি সামান্তরিক।
2. সাব্বা এমন দুটি সরলরেখাংশ AD ও BC এঁকেছে যে, AD || BC এবং AD = BC; আমি যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, AB = DC এবং AB || DC.

প্রয়োগ: 19 নীচের ছবির ΔABC ও ΔDEF-এর AB = DE এবং AB || DE, BC = EF এবং BC || EF; ΔABC-এর A,B ও C শীর্ষবিন্দুগুলির সাথে যথাক্রমে ΔDEF-এর D,E ও F শীর্ষবিন্দুগুলি যোগ করলাম। প্রমাণ করি যে, (a) চতুর্ভুজ ABED একটি সামান্তরিক (b) চতুর্ভুজ BEFC একটি সামান্তরিক (c) চতুর্ভুজ ACFD একটি সামান্তরিক এবং (d) $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

প্রমাণ : (a) চতুর্ভুজ ABED এর AB = DE এবং AB || DE [প্রদত্ত]

$\therefore$ চতুর্ভুজ ABED একটি সামান্তরিক

(b) BEFC চতুর্ভুজের BC = □ এবং BC || □ [প্রদত্ত]

$\therefore$ চতুর্ভুজ BEFC একটি সামান্তরিক [নিজে লিখি]

(c) $\because$ ABED একটি সামান্তরিক

$\therefore$ BE = AD এবং BE || AD ———— (i)

আবার, BEFC একটি সামান্তরিক

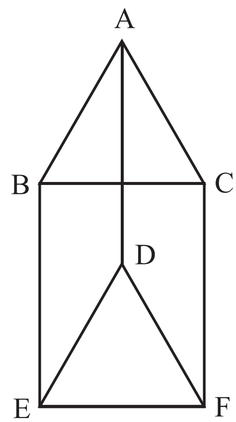
$\therefore$ BE = CF এবং BE || CF ———— (ii)

(i) ও (ii) থেকে পাই, AD || CF এবং AD = CF; $\therefore$ ADFC একটি □

(d) ΔABC ও ΔDEF-এর মধ্যে, AB = DE [প্রদত্ত], BC = EF [প্রদত্ত]

এবং AC = DF [$\because$ ADFC একটি সামান্তরিক]

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DEF$ (S-S-S সর্বসমতার শর্তানুসারে)



প্রয়োগ: 20 PQRS একটি সামান্তরিক। A ও B যথাক্রমে PS ও QR-এর মধ্যবিন্দু। P, B; Q, A; R, A এবং B, S যোগ করলাম। PB ও QA পরস্পরকে C বিন্দুতে এবং RA ও BS পরস্পরকে D বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করি যে, (a) চতুর্ভুজ AQBS একটি সামান্তরিক (b) চতুর্ভুজ PBRA একটি সামান্তরিক (c) চতুর্ভুজ ACBD একটি সামান্তরিক।

প্রমাণ : (a) PQRS একটি সামান্তরিক।

সুতরাং, PS || QR এবং PS = QR

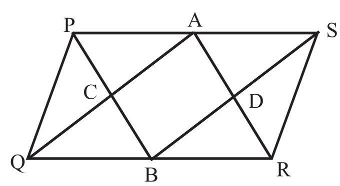
$\therefore \frac{1}{2}PS = \frac{1}{2}QR$

সুতরাং, PA = BR এবং AS = QB

$\therefore$ AQBS চতুর্ভুজের AS || QB [$\because$ PS || QR]

এবং AS = QB

$\therefore$ AQBS চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক।



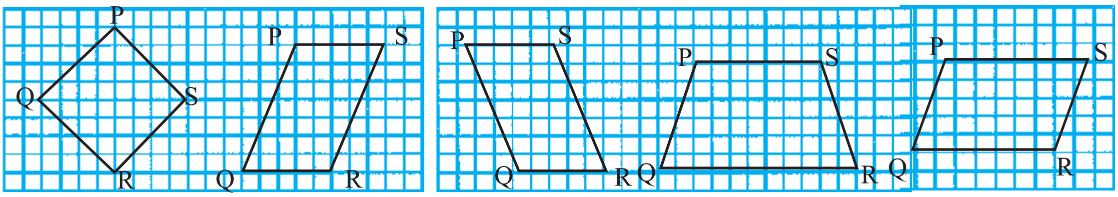
(b) একইভাবে প্রমাণ করে পাই, PBRA চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক [নিজে করি]

(c) ACBD চতুর্ভুজের AC || DB [$\because$ AQBS সামান্তরিক]

BC || DA [$\because$ PBRA সামান্তরিক]

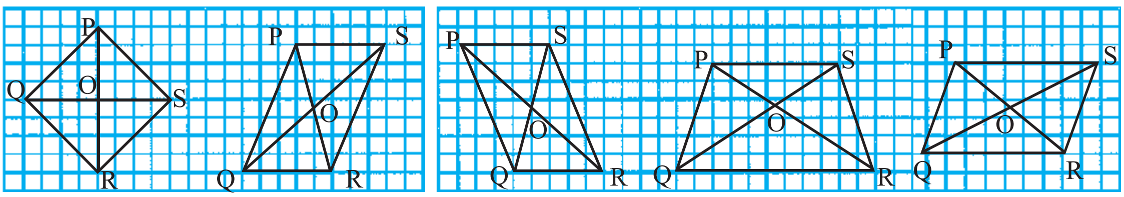
$\therefore$ ACBD একটি সামান্তরিক।

আমরা যখন নিজেদের পিচবোর্ড কেটে নানা ধরনের ও ছোটো-বড়ো মাপের চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্র তৈরি করে সামান্তরিকের ধর্ম যাচাই করছি এবং কোন কোন শর্তে চতুর্ভুজগুলি সামান্তরিক হচ্ছে তা দেখার চেষ্টা করছি, তখন সাব্বার ভাই, সালেম তার ছক কাগজে অনেকগুলি চতুর্ভুজ এঁকেছে।



(i) (ii) (iii) (iv) (v)

আমি সালেমের আঁকা PQRS চতুর্ভুজের কর্ণ PR ও QS আঁকলাম। এবার মেপে দেখি কোন চতুর্ভুজের কর্ণগুলি পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করছে।



(i) (ii) (iii) (iv) (v)

ছক কাগজের ঘর গুনে দেখছি, (i) নং PQRS চতুর্ভুজের কর্ণ PR ও QS পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে এবং PO = OR = ☐ , QO = OS = ☐ অর্থাৎ (i) নং চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে।

PQRS চতুর্ভুজের চারটি কোণ ($\angle P$, $\angle Q$, $\angle R$ ও $\angle S$) টুকরো করে পাশাপাশি বসিয়ে দেখলাম, $\angle P + \angle Q = 180^\circ$ এবং $\angle Q + \angle R = 180^\circ$

সুতরাং, পেলাম PS || QR এবং PQ || SR; অর্থাৎ, PQRS চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক।

আমি (ii), (iii), ও (v) নং চতুর্ভুজগুলির চারটি কোণ ($\angle P$, $\angle Q$, $\angle R$ ও $\angle S$) টুকরো করে পাশাপাশি বসিয়ে দেখলাম, $\angle P + \angle Q = 180^\circ$ এবং $\angle Q + \angle R = 180^\circ$

সুতরাং, পেলাম PS || QR এবং PQ || SR; অর্থাৎ, PQRS চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক।

(iv) নং চতুর্ভুজের ক্ষেত্রে নিজে PO, OR, QO, এবং OS এর দৈর্ঘ্য মাপি ও চারটি কোণ টুকরো করে হাতেকলমে সামান্তরিক পেলাম কিনা দেখি। [নিজে করি]

আমি ছক কাগজে যে কোনো চতুর্ভুজ এঁকে একইভাবে হাতে কলমে যাচাই করে পেলাম,

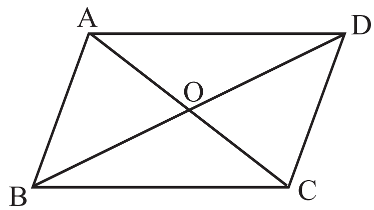
চতুর্ভুজের দুটি কর্ণ পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে চতুর্ভুজটি সামান্তরিক হবে।

যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

উপপাদ্য: 19 একটি চতুর্ভুজের দুটি কর্ণ পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে চতুর্ভুজটি সামান্তরিক হবে।

প্রদত্ত: ABCD চতুর্ভুজের AC ও BD কর্ণদুটি পরস্পরকে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে।
অর্থাৎ, AO = OC এবং BO = OD

প্রমাণ করতে হবে যে: ABCD একটি সামান্তরিক ।



প্রমাণ : ΔAOD ও ΔBOC-এর মধ্যে, AO = OC

$\angle$AOD = $\angle$BOC [বিপ্রতীপ কোণ]

BO = OD

$\therefore$ ΔAOD $\cong$ ΔBOC [সর্বসমতার S-A-S শর্তানুসারে]

সুতরাং, AD = BC [সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ বাহু]

এবং $\angle$OAD = $\angle$OCB [সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ কোণ]

কিন্তু AD ও BC সরলরেখাংশকে AC ছেদ করার ফলে এই দুটি একান্তর কোণ সমান।

সুতরাং, AD || BC

যেহেতু, ABCD চতুর্ভুজের AD || BC এবং AD = BC,

$\therefore$ ABCD একটি সামান্তরিক। [প্রমাণিত]

উপরের উপপাদ্যটি অর্থাৎ চতুর্ভুজের দুটি কর্ণ পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে চতুর্ভুজটি সামান্তরিক হবে।
—এই উপপাদ্যটি কোন উপপাদ্যের বিপরীত উপপাদ্য লিখি। [নিজে লিখি]

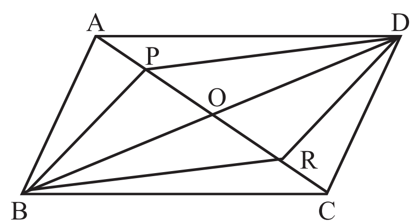
প্রয়োগ : 21 ABCD একটি সামান্তরিক। এই সামান্তরিকের AC ও BD কর্ণদুটি O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। AC কর্ণের ওপর P ও R দুটি এমন বিন্দু যাতে AP = CR হয়। প্রমাণ করি যে, চতুর্ভুজ PBRD একটি সামান্তরিক।

প্রদত্ত : (i) ABCD একটি সামান্তরিক।

(ii) AC কর্ণের ওপর P ও R দুটি এমন বিন্দু যেখানে AP = CR

প্রমাণ করতে হবে যে: চতুর্ভুজ PBRD একটি সামান্তরিক।

প্রমাণ : যেহেতু ABCD একটি সামান্তরিক, সুতরাং তার কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।



$\therefore$ AO = CO এবং BO = DO.

দেওয়া আছে, AP = CR

সুতরাং, AO – AP = CO – CR

$\therefore$ OP = OR

আবার, BO = OD

সুতরাং, চতুর্ভুজ PBRD এর কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে।

$\therefore$ PBRD একটি সামান্তরিক।

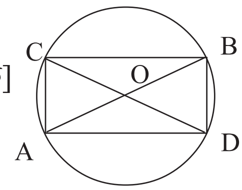
প্রয়োগ : 22 কোনো বৃত্তে AB ও CD দুটি ব্যাস। প্রমাণ করি যে, ACBD একটি আয়তাকার চিত্র।

প্রদত্ত : O কেন্দ্রীয় বৃত্তের দুটি ব্যাস AB ও CD

প্রমাণ করতে হবে যে: ACBD একটি আয়তাকার চিত্র।

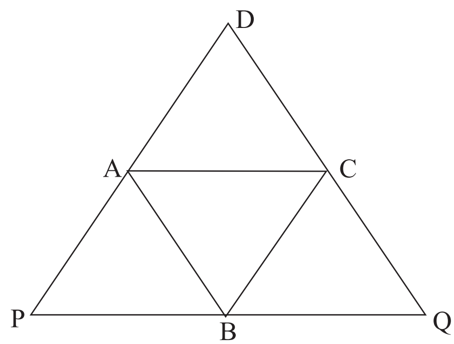
প্রমাণ : ACBD চতুর্ভুজটির OA=OB এবং OC=OD; [কারণ, OA , OB, OC, OD একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]।
যেহেতু, ACBD চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় AB ও CD পরস্পরকে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে,
সুতরাং, ACBD একটি সামান্তরিক।

Δ ADB ও Δ CBD - তে AB = CD [যেহেতু একই বৃত্তের ব্যাস],
AD = CB [যেহেতু ACBD সামান্তরিকের বিপরীত বাহু] এবং BD সাধারণ বাহু।
$\therefore \Delta ADB \cong \Delta CBD$ [S-S-S সর্বসমতা অনুসারে]
$\therefore \angle ADB = \angle CBD$ [সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ কোণ]
আবার $\angle ADB + \angle CBD = 180^\circ$ [AD||CB এবং DB তাদের ছেদক]
বা, $\angle ADB + \angle ADB = 180^\circ$
বা, $2\angle ADB = 180^\circ \therefore \angle ADB = 90^\circ$
সুতরাং, সামান্তরিক ACBD -এর একটি কোণ সমকোণ।
$\therefore$ আয়তকার চিত্রের সংজ্ঞা থেকে পাই, ACBD একটি আয়তাকার চিত্র। **(প্রমাণিত)**



প্রয়োগ : 23 ABCD একটি সামান্তরিক। DA ও DC বাহু দুটিকে P ও Q পর্যন্ত এমনভাবে বাড়ানো হলো যাতে AP = DA এবং CQ = DC হয়।

প্রমাণ করি যে, P, B ও Q বিন্দু তিনটি সমরেখ।



প্রদত্ত : i) ABCD একটি সামান্তরিক
ii) AP = DA এবং CQ = DC

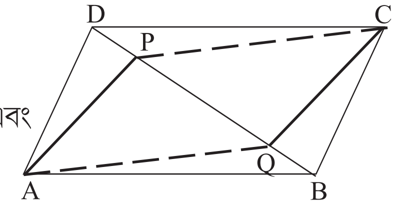
প্রমাণ করতে হবে যে: P, B ও Q বিন্দু তিনটি সমরেখ।

অঙ্কন : P, B; B, Q এবং A, C যুক্ত করলাম।

প্রমাণ : যেহেতু ABCD একটি সামান্তরিক,
সুতরাং, DA = CB এবং DA || CB; দেওয়া আছে AP = DA
$\therefore$ AP = CB এবং AP || CB
APBC চতুর্ভুজের একজোড়া বিপরীত বাহু পরস্পর সমান ও সমান্তরাল।
সুতরাং, APBC একটি সামান্তরিক। $\therefore$ PB || AC,
অনুরূপভাবে পাই, যেহেতু ABCD একটি সামান্তরিক,
সুতরাং, DC = AB এবং DC || AB; দেওয়া আছে CQ = DC
$\therefore$ CQ = AB এবং CQ || AB; সুতরাং, CABQ একটি সামান্তরিক।
$\therefore$ BQ || AC
যেহেতু, PB || AC এবং BQ || AC $\therefore$ PB || BQ

আবার যেহেতু B বিন্দুটি PB ও BQ দুটি সরলরেখাংশতেই আছে, সুতরাং PB ও BQ একই সরলরেখায় আছে। সুতরাং, P, B ও Q বিন্দু তিনটি সমরেখ। **(প্রমাণিত)**

প্রয়োগ : 24 ABCD একটি সামান্তরিক। AP এবং CQ যথাক্রমে শীর্ষবিন্দু A এবং C থেকে কর্ণ BD এর ওপর লম্ব। প্রমাণ করি যে (i) $\Delta APB \cong \Delta CQD$ (ii) AP = CQ এবং (iii) AQCP একটি সামান্তরিক।



প্রদত্ত : (i) ABCD একটি সামান্তরিক।
(ii) $AP \perp BD$ এবং $CQ \perp BD$

প্রমাণ করতে হবে যে: (i) $\Delta APB \cong \Delta CQD$, (ii) AP = CQ এবং (iii) AQCP একটি সামান্তরিক

প্রমাণ : ΔAPB ও ΔCQD -এর মধ্যে,
$\angle BPA = \angle CQD = 90°$ [যেহেতু $AP \perp BD$ এবং $CQ \perp BD$]
$\angle ABP =$ একান্তর $\angle CDQ$ [$\because$ ABCD সামান্তরিক এবং BD কর্ণ $\therefore$ DC || AB এবং DB ছেদক]
AB = DC [ABCD সামান্তরিকের বিপরীত বাহু]

$\Delta APB \cong \Delta CQD$ [A-A-S সর্বসমতার শর্ত অনুসারে][**প্রমাণিত**]
সুতরাং, AP = CQ [সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ বাহু] [**প্রমাণিত**]
আবার AP || CQ [$\because$ AP ও CQ সরলরেখাংশ দুটিই BD সরল রেখাংশের উপর লম্ব]
সুতরাং, AQCP চতুর্ভুজের একজোড়া বিপরীত বাহু সমান এবং সমান্তরাল।
$\therefore$ AQCP একটি সামান্তরিক। [**প্রমাণিত**]

কষে দেখি— 6

1. প্রমাণ করি যে , একটি সামান্তরিকের কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্য সমান হলে, সামান্তরিকটি একটি আয়তাকার চিত্র।
2. প্রমাণ করি যে, একটি সামান্তরিকের কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্য সমান হলে এবং কর্ণদ্বয় পরস্পরকে লম্বভাবে ছেদ করলে, সামান্তরিকটি একটি বর্গাকার চিত্র।
3. প্রমাণ করি যে, একটি সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে লম্বভাবে ছেদ করলে, সামান্তরিকটি একটি রম্বস।
4. ABCD সামান্তরিকের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে। O বিন্দুগামী যেকোনো সরলরেখা AB ও DC বাহুকে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করি যে OP = OQ
5. প্রমাণ করি যে, একটি সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়ামের যে-কোনো সমান্তরাল বাহুসংলগ্ন দুটি কোণ পরস্পর সমান।
6. ABCD বর্গাকার চিত্রে BC বাহুর উপর P যে-কোনো একটি বিন্দু। B বিন্দু থেকে AP-এর উপর অঙ্কিত লম্ব DC বাহুকে Q বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করি যে, AP = BQ
7. প্রমাণ করি যে, একটি চতুর্ভুজের দুটি বিপরীত কোণ পরস্পর সমান ও দুটি বিপরীত বাহু পরস্পর সমান্তরাল হলে, চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক।
8. ΔABC-এর BP ও CQ মধ্যমা দুটি যথাক্রমে R ও S বিন্দু পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করা হল যে, BP = PR এবং CQ = QS হয়। প্রমাণ করি যে, S, A, R বিন্দু তিনটি সমরেখ।
9. PQRS সামান্তরিকের SQ কর্ণ K ও L বিন্দুতে সমান তিনভাগে বিভক্ত হয়েছে। PK, SR-কে M বিন্দুতে এবং RL, PQ কে N বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করি যে, PMRN একটি সামান্তরিক।
10. ABCD ও AECF দুটি সামান্তরিকেরই AC একটি কর্ণ। B, E, D, F বিন্দুগুলি সমরেখ না হলে, প্রমাণ করি যে, BEDF একটি সামান্তরিক।

11. ABCD একটি চতুর্ভুজ। ABCE ও BADF দুটি সামান্তরিক অঙ্কন করা হলো। প্রমাণ করি যে, CD ও EF পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

12. ABCD সামান্তরিকের AB = 2 AD; প্রমাণ করি যে $\angle$ BAD ও $\angle$ ABC -এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় DC বাহুর মধ্যবিন্দুতে সমকোণে মিলিত হয়।

13. ABCD সামান্তরিকের AB ও AD বাহুর উপর যথাক্রমে ABPQ ও ADRS বর্গাকার চিত্র অঙ্কন করা হলো যারা সামান্তরিকটির বাইরে অবস্থিত। প্রমাণ করি যে, PRC ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

14. ABCD সামান্তরিকের $\angle$BAD স্থূলকোণ; AB ও AD বাহুর উপর দুটি সমবাহু ত্রিভুজ ABP ও ADQ অঙ্কন করা হলো যারা সামান্তরিকের বাইরে অবস্থিত। প্রমাণ করি যে, CPQ একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

15. OP, OQ ও OR তিনটি সরলরেখাংশ। OPAQ, OQBR এবং ORCP সামান্তরিক তিনটি অঙ্কন করা হলো। প্রমাণ করি যে, AR , BP ও CQ পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

16. বহু বিকল্পীয় প্রশ্ন (M. C. Q.):

(i) ABCD সামান্তরিকের $\angle$BAD = 75° এবং $\angle$CBD = 60° হলে, $\angle$BDC-এর পরিমাপ
(a) 60° (b) 75° (c) 45° (d) 50°

(ii) নিম্নলিখিত জ্যামিতিক চিত্রগুলির কোনটির কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্য সমান তা লিখি।
(a) সামান্তরিক (b) রম্বস (c) ট্রাপিজিয়াম (d) আয়তাকার চিত্র

(iii) ABCD সামান্তরিকের $\angle$BAD = $\angle$ABC হলে, ABCD সামান্তরিকটি
(a) রম্বস (b) ট্রাপিজিয়াম (c) আয়তাকার চিত্র (d) কোনোটিই নয়

(iv) ABCD সামান্তরিকের BD কর্ণের মধ্যবিন্দু M; BM, $\angle$ABC -কে সমদ্বিখণ্ডিত করলে, $\angle$AMB এর পরিমাপ
(a) 45° (b) 60° (c) 90° (d) 75°

(v) ABCD রম্বসের $\angle$ACB=40° হলে, $\angle$ADB - এর পরিমাপ
(a) 50° (b) 110° (c) 90° (d) 120°

17. সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন:

(i) ABCD সামান্তরিকের $\angle$A : $\angle$ B = 3:2 হলে, সামান্তরিকটির কোণগুলির পরিমাপ লিখি।

(ii) ABCD সামান্তরিকের $\angle$A ও $\angle$B-এর সমদ্বিখণ্ডদ্বয় CD বাহুর উপর E বিন্দুতে মিলিত হয়। BC বাহুর দৈর্ঘ্য 2 সেমি. হলে, AB বাহুর দৈর্ঘ্য কত তা লিখি।

(iii) ABCD বর্গাকার চিত্রের ভিতর সমবাহু ত্রিভুজ AOB অবস্থিত। $\angle$COD -এর পরিমাপ লিখি।

(iv) ABCD বর্গাকার চিত্রের AD বাহুর উপর M একটি বিন্দু যাতে $\angle$CMD = 30° হয়। কর্ণ BD, CM-কে P বিন্দুতে ছেদ করলে, $\angle$ DPC-এর পরিমাপ কত তা লিখি।

(v) ABCD রম্বসের AB বাহুর দৈর্ঘ্য 4 সেমি. এবং $\angle$BCD = 60° হলে, কর্ণ BD -এর দৈর্ঘ্য কত তা লিখি।

7 বহুপদী সংখ্যামালা
(POLYNOMIAL)

আমাদের স্কুলে বৃক্ষরোপণ উৎসব পালন করা হবে। এবছরে আমরা ঠিক করেছি নিজেরা কার্ড তৈরি করে ওই দিনের উৎসবে বিশিষ্ট অতিথিদের আমন্ত্রণ জানাব।

তাই আর্টপেপার, রং পেনসিল, আঠা, রঙিন কাগজ ইত্যাদি কেনার জন্য আমরা প্রত্যেকে 5 টাকা করে দেবো। আমরা 18 জনের প্রত্যেকে 5 টাকা করে দিলে আমাদের মোট 18×5 টাকা = ☐ টাকা উঠবে।

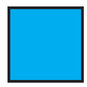
1 কিন্তু আমাদের এই কাজে আরও কিছুজন যোগ দেবে। সেক্ষেত্রে কত টাকা উঠবে হিসাব করি।

যদি এই কাজে মোট x জন যোগ দেয় ও প্রত্যেকে 5 টাকা করে দিলে মোট $5 \times x$ টাকা = 5x টাকা উঠবে।

5x এ 5 ধ্রুবক (Constant)এবং x চল (Variable)।

আমরা অনেকগুলি নানারঙের বর্গক্ষেত্রাকার ও আয়তক্ষেত্রাকার ছোটো বড়ো কার্ড তৈরি করেছি। রিয়া মেপে দেখল, নীল রঙের বর্গক্ষেত্রাকার কার্ডের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 8 সেমি.।

∴ ওই নীল রঙের বর্গক্ষেত্রাকার কার্ডের পরিসীমা 4×8 সেমি.।

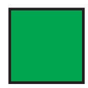


আবার, ফিরোজ অন্য একটি সবুজ রঙের বর্গক্ষেত্রাকার কার্ড মেপে দেখল, প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য 6 সেমি.।

∴ ওই সবুজ রঙের বর্গক্ষেত্রাকার কার্ডের পরিসীমা 4×6 সেমি.।

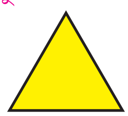
অর্থাৎ, যদি বর্গক্ষেত্রাকার কার্ডের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য x সেমি. হয়, তবে সেই বর্গক্ষেত্রাকার কার্ডের পরিসীমা হবে 4x সেমি.।

4x এ 4 ধ্রুবক এবং x চল।



জেনিফা আবার কিছু কার্ড তৈরি করেছে যেগুলি আবার ত্রিভুজাকারক্ষেত্র। মেপে দেখছি, জেনিফার তৈরি এই ত্রিভুজ ক্ষেত্রাকার কার্ডের প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য 6 সেমি.। অর্থাৎ কার্ডটি সমবাহু ত্রিভুজাকারক্ষেত্র।

∴ এই সমবাহু ত্রিভুজ ক্ষেত্রাকার কার্ডের পরিসীমা 3×6 সেমি.।



সমবাহু ত্রিভুজের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য x একক হলে, পরিসীমা হবে 3x একক।

3x-এ 3 ধ্রুবক এবং x চল।

2 5x, 4x, 3x এগুলি কী?

5x, 4x, 3x এগুলি বীজগাণিতিক সংখ্যামালা [Algebraic Expression]। এদের চল x এবং 5,4,3 ধ্রুবক।

সাধারণত চলকে x, y, z, ... দিয়ে এবং ধ্রুবককে a, b, c .... দিয়ে প্রকাশ করা হয়।

চল ও ধ্রুবক ইংরাজি বর্ণমালার বর্ণ দিয়ে বোঝানো হলেও একই পরিস্থিতিতে ধ্রুবকের মান একই থাকে, কিন্তু চলের মানের পরিবর্তন হতে পারে।

[যেমন, বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা 4x একক। এখানে x একক (বাহুর দৈর্ঘ্য) পরিবর্তিত হতে পারে কিন্তু 4 অপরিবর্তিত থাকে]

বর্গক্ষেত্রাকার কার্ডের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য x একক হলে, ক্ষেত্রফল x^2 বর্গ একক।

3 x^2 কি একটি বীজগাণিতিক সংখ্যামালা?

x^2 একটি বীজগাণিতিক সংখ্যামালা। একে x-এর দ্বিঘাত বলা হয়। x^2-এ নিধান x ও সূচক 2

4 বৃক্ষরোপণ উৎসবের দিন অনেকগুলি চারাগাছ নিয়ে এসেছি। আমরা ছাত্রছাত্রীরা কিছু চারাগাছ রোপণ করব। আমি ও সুমিত ঠিক করেছি x টি সারিতে কিছু ফুলের চারাগাছ রোপণ করব। মেহের ও সাহেব আমাদের ঠিক করা x টি সারির প্রতি সারিতে x টি ফুলের চারাগাছ লাগাল। কিন্তু এখনও 8টি ফুলের চারাগাছ পড়ে আছে। আমি ওই বাকি 8টি ফুলের চারাগাছ বাগানের অন্য জায়গায় রোপণ করলাম। হিসাব করে দেখি আমরা মোট কতগুলি ফুলের চারাগাছ লাগিয়েছি।

আমরা মোট (x^2+8) টি ফুলের চারাগাছ লাগিয়েছি।

x^2+8 কি বীজগাণিতিক সংখ্যামালা?

x^2, x^2+8, x^2-5x+2, x^3+x^2-x+1-এগুলি সবই বীজগাণিতিক সংখ্যামালা যাদের চলের সূচকগুলি অখণ্ড সংখ্যা।

5 এইরকম বীজগাণিতিক সংখ্যামালা যাদের চলের সূচকগুলি অখণ্ড সংখ্যা। এদের কী বলা হয়?

সকল বীজগাণিতিক সংখ্যামালা যাদের চলের সূচক অখণ্ড সংখ্যা তাদের **বহুপদী সংখ্যামালা (polynomials)** বলা হয়।

x^2, x^2+8, x^2-5x+2, x^3+x^2-x+1, 5x, 4x, 3x এরা সকলেই বহুপদী সংখ্যামালা যাদের চল x; অর্থাৎ এরা সকলেই এক চল বিশিষ্ট বহুপদী সংখ্যামালা।

6 x^2+8 এই বহুপদী সংখ্যামালার x^2 এবং 8 কে কী বলা হয়?

x^2, 8 কে x^2+8 এই বহুপদী **সংখ্যামালার পদ** বলা হয়।

x^2+8 বহুপদী সংখ্যামালার পদ ☐ টি [2/3]।

∴ x^2+8 একটি **দ্বিপদী সংখ্যামালা (Binomial)**
5x, 4x, 3x এদের **একপদী সংখ্যামালা (Monomial)** বলা হয়।
x^2-5x+2 এটিকে **ত্রিপদী সংখ্যামালা (Trinomial)** বলা হয়।

x^2-5x+2 বহুপদী সংখ্যামালার পদগুলি হলো x^2, $-5x$ ও 2
এবং x^3+x^2-x+1 বহুপদী সংখ্যামালার পদগুলি হলো ☐, ☐, ☐ ও ☐ [নিজে লিখি]

একটি বহুপদী সংখ্যামালার প্রতিটি পদে একটি সহগ (Coefficient) থাকে।

x^2-5x+2 বহুপদী সংখ্যামালাকে লিখতে পারি, $1.x^2+(-5)x+2.x^0$ [$\because x^0=1$, যেখানে $x\neq 0$]
∴ x^2-5x+2 বহুপদী সংখ্যামালার x^2-এর সহগ 1, x-এর সহগ –5 এবং x^0-এর সহগ 2

x^3+x^2-x+1 বহুপদী সংখ্যামালায় x এর সহগ ☐ [1/–1] এবং x^0 -এর সহগ ☐

7 $8, 1, -5, 10, 0$ এরাও কি বহুপদী সংখ্যামালা?

$8, 1, -5, 10, 0$ এরা ধ্রুবক বহুপদী সংখ্যামালা (Constant Polynomials)

কিন্তু 0 (শূন্য) -কে শূন্য বহুপদী সংখ্যামালা (Zero Polynomial) বলা হয়।

বহুপদী সংখ্যামালাকে চল অনুযায়ী সাধারণত $p(x)$, $q(y)$, $r(x,y)$ ইত্যাদি দ্বারা চিহ্নিত করা হয়।

যেমন, $p(x) = x^3 + x^2 - x + 1$

$q(y) = y^2 + 5y$

$r(x, y) = 2x^2 + 3xy + y^2$ ইত্যাদি।

8 আমরা মোট (x^2+8) টি চারাগাছ লাগিয়েছি। কিন্তু শিক্ষক-শিক্ষিকারা এবং অতিথিরা লাগিয়েছেন যথাক্রমে $(3x^2+2x+5)$ টি এবং (x^3+1) টি চারাগাছ। আমরা সবাই মিলে মোট কতগুলি চারাগাছ লাগিয়েছি হিসাব করে লিখি।

ধরি, $f(x) = x^2+8$, $g(x) = 3x^2+2x+5$ এবং $p(x) = x^3+1$

$$\therefore \quad f(x) + g(x) + p(x) = (x^2+8) + (3x^2+2x+5) + (x^3+1)$$
$$= x^3 + (x^2+3x^2) + 2x + (8+5+1)$$
$$= x^3+4x^2+2x+14$$

আমরা সবাই মিলে মোট $(x^3+4x^2+2x+14)$ টি চারাগাছ লাগিয়েছি।

$\therefore$ বহুপদী সংখ্যামালাদের সমষ্টি বহুপদী সংখ্যামালা পেলাম।

9 আমি $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + 9$ ও $q(y) = 2y^2 + 3y + 1$ যোগ করি।

$$f(x) + q(y) = (3x^3 + 2x^2 + 9) + (2y^2 + 3y + 1) = 3x^3 + 2x^2 + 2y^2 + 3y + 10$$

আবার বহুপদী সংখ্যামালাদের সমষ্টি বহুপদী সংখ্যামালা পেলাম।

10 আমি যে কোনো বহুপদী সংখ্যামালাদের যোগ করে দেখছি, বহুপদী সংখ্যামালাদের সমষ্টি বহুপদী সংখ্যামালা। দুটি বহুপদী সংখ্যামালা লিখে যোগ করি। [নিজে করি]

11 $g(x)=3x^2+2x+5$ এবং $f(x)=x^2+8$ দুটি বহুপদী সংখ্যামালার বিয়োগফল বহুপদী সংখ্যামালা হবে কিনা হিসাব করে দেখি।

$$g(x) - f(x) = (3x^2 + 2x + 5) - (x^2 + 8)$$
$$= 3x^2 - x^2 + 2x + 5 - 8 = 2x^2 + 2x - 3$$

$\therefore$ দুটি বহুপদী সংখ্যামালার বিয়োগফলও বহুপদী সংখ্যামালা পেলাম।

12 আমি যে কোনো দুটি বহুপদী সংখ্যামালা বিয়োগ করে দেখছি, বহুপদী সংখ্যামালার বিয়োগফল বহুপদী সংখ্যামালা হবে। দুটি বহুপদী সংখ্যামালা লিখে বিয়োগ করি। [নিজে করি]

13 আমি $f(x) = x^2 + 2x + 3$ ও $q(x) = x^2 - 2x - 3$ বহুপদী সংখ্যামালা দুটি গুণ করি।

$$f(x) \cdot q(x) = (x^2+2x+3) \cdot (x^2-2x-3)$$
$$= x^2 (x^2-2x-3) + 2x (x^2-2x-3) + 3 (x^2-2x-3)$$
$$= x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 2x^3 - 4x^2 - 6x + 3x^2 - 6x - 9 = x^4 - 4x^2 - 12x - 9$$

সুতরাং বহুপদী সংখ্যামালাদের গুণফল বহুপদী সংখ্যামালা হবে। নিজে দুটি বহুপদী সংখ্যামালা লিখে গুণ করি।

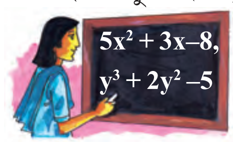
নিজে করি—7.1

1. যদি $f(x) = x^5 + 3x^3 - 7x^2 + 6$, $h(x) = 3x^3 - 8x^2 + 7$, $g(x) = x + 1$, $p(x) = x^4 - x^2 + 2$ এবং $q(y) = 7y^3 - y + 10$ হলে, নীচের বহুপদী সংখ্যামালাগুলি কী হবে হিসাব করে লিখি।

(i) $f(x) + g(x)$ (ii) $f(x) - h(x)$ (iii) $f(x) - p(x)$
(iv) $f(x) + p(x)$ (v) $p(x) + g(x) + f(x)$ (vi) $p(x) - q(y)$
(vii) $f(x) \cdot g(x)$ (viii) $p(x) \cdot g(x)$

আজ সাহানা ও সোহম শ্রেণিকক্ষের ব্ল্যাকবোর্ডে অনেকগুলি বীজগাণিতিক সংখ্যামালা লিখেছে। সেগুলি হলো,

$5x^2 + 3x - 8$, $y^3 + 2y^2 - 5$, $z^{16} + 5z^7 + 6$, $x + \frac{1}{x}$,
$u + \sqrt[3]{u}$, $7 - v + v^3 + v^7$, $\sqrt{x} + x$, $x^4 + y^2 + 4xy$,
$u + v + 6uv$, $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$



সাহানা ও সোহমের লেখা সকল বীজগাণিতিক সংখ্যামালাই কি বহুপদী সংখ্যামালা? বীজগাণিতিক সংখ্যামালার চলের সূচক দেখে বহুপদী সংখ্যামালাগুলি লিখি।

$p(x) = 5x^2 + 3x - 8$, $g(v) = 7 - v + v^3 + v^7$, $f(y) = y^3 + 2y^2 - 5$, $f(x,y) = x^4 + y^2 + 4xy$,
$q(z) = z^{16} + 5z^7 + 6$, $S(u,v) = u + v + 6uv$, $t(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

(i) $x + \frac{1}{x} = x + x^{-1}$ (ii) $u + \sqrt[3]{u} = u + u^{1/3}$ এবং (iii) $\sqrt{x} + x = x^{1/2} + x$

(i), (ii) ও (iii) নং বীজগাণিতিক সংখ্যামালাগুলির চলের সূচক অখণ্ড সংখ্যা নয় [অর্থাৎ শূন্য বা ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা নয়] তাই $x + \frac{1}{x}$, $u + \sqrt[3]{u}$ ও $\sqrt{x} + x$ -এই বীজগাণিতিক সংখ্যামালাগুলি বহুপদী সংখ্যামালা নয়।

14 আমি 4 টি বীজগাণিতিক সংখ্যামালা লিখি যাদের মধ্যে 2টি বহুপদী সংখ্যামালা এবং অপরদুটি বহুপদী সংখ্যামালা নয়। [নিজে করি]

15 আমি বোর্ডে লেখা বহুপদী সংখ্যামালার পদসংখ্যা লিখি এবং তিনটি বহুপদী সংখ্যামালার সর্বোচ্চঘাতের চলের সূচক খুঁজে লিখি।

বহুপদী সংখ্যামালা	পদসংখ্যা	সর্বোচ্চ ঘাতের চলের সূচকের মান
$P(x) = 5x^2+3x-8$	3	2
$f(y) = y^3+2y^2-5$	☐	3
$q(z) = z^{16}+5z^7+6$	☐	☐
$g(v) = 7-v+v^3+v^7$	4	7
$t(x) = x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$	☐	☐

কোনো বহুপদী সংখ্যামালার সর্বোচ্চ ঘাতের চলের সূচককে ওই বহুপদী সংখ্যামালার কী বলা হয়?

তাকে বহুপদী সংখ্যামালার মাত্রা (Degree) বলা হয়।

$p(x) = 5x^2+3x-8$ বহুপদী সংখ্যামালার মাত্রা 2
আবার, $q(z) = z^{16}+5z^7+6$ -এর মাত্রা 16
$\therefore$ f (y), g(v), ও t(x) -এর মাত্রাগুলি যথাক্রমে ☐, ☐ ও ☐ [নিজে লিখি]

16 শূন্য ছাড়া যে কোনো ধ্রুবক বহুপদী সংখ্যামালার মাত্রা কত?

শূন্য ছাড়া যে কোনো ধ্রুবক বহুপদী সংখ্যামালার মাত্রা 0; যেমন, $5 = 5.x^0$, $-7 = -7.x^0$

কিন্তু শূন্য বহুপদী সংখ্যামালার মাত্রা অসংজ্ঞাত। যেহেতু, $0 = 0.x^0$, $0 = 0.x^2$

17 আমি 5টি বহুপদী সংখ্যামালা লিখি যাদের মাত্রা 1

(i) $5x + 2$ (ii) $y + \sqrt{7}$ (iii) $8-3x$ (iv) ☐ (নিজে লিখি) (v) ☐ [নিজে লিখি]

যে বহুপদী সংখ্যামালার মাত্রা 1 তাদের চল সর্বোচ্চ এক ঘাতের হয়। এই সব বহুপদী সংখ্যামালাকে কি একঘাত বহুপদী সংখ্যামালা বলা হয়?

যে সকল বহুপদী সংখ্যামালার চল সর্বোচ্চ এক ঘাতের হয় তাদের **একঘাত বহুপদী সংখ্যামালা বা রৈখিক বহুপদী সংখ্যামালা** বলা হয়।

উপরের $5x + 2$, $y + \sqrt{7}$, $8-3x$, ☐, ☐ সকলেই একঘাত বহুপদী সংখ্যামালা।

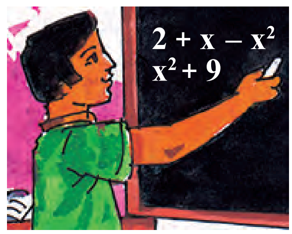
x চলের একঘাত বহুপদী সংখ্যামালার বা রৈখিক বহুপদী সংখ্যামালার সাধারণ রূপ $ax+b$

[a,b ধ্রুবক এবং $a\neq0$]

y চলের একঘাত বহুপদী সংখ্যামালার বা রৈখিক বহুপদী সংখ্যামালার সাধারণ রূপ ☐

[a,b ধ্রুবক এবং $a\neq0$]

সোহমও বোর্ডে কতকগুলি বহুপদী সংখ্যামালা লিখল।



$x^2 + 9$, $2 + x - x^2$, $2x^2 - 7x + 1$, $4y^2 + \sqrt{2}$, $y^2 - \frac{1}{2}$, $z^2 - 4z$

সোহমের লেখা বহুপদী সংখ্যামালাগুলির মাত্রা ☐; অর্থাৎ, এই বহুপদী সংখ্যামালার চল সর্বোচ্চ দুই ঘাতের।০...

অর্থাৎ, বহুপদী সংখ্যামালার মাত্রা 2

18 এই সব বহুপদী সংখ্যামালাগুলিকে কি দ্বিঘাত বহুপদী সংখ্যামালা বলা হয়?

$x^2 + 9$, $2+x-x^2$, $2x^2-7x+1$, $4y^2 + \sqrt{2}$, $y^2 - \frac{1}{2}$, $z^2 - 4z$ —এরা সকলেই দ্বিঘাত বহুপদী সংখ্যামালা।

x চলের দ্বিঘাত বহুপদী সংখ্যামালার সাধারণরূপ ax^2+bx+c [a,b,c ধ্রুবক এবং $a\neq0$]

19 আমি পাঁচটি ত্রিঘাত বহুপদী সংখ্যামালা নীচে লিখি।

(i) $9x^3 + 1$ (ii) $x^3 + x^2 + x + 1$ (iii) $3 - 2x - 3x^3$ (iv) ☐ নিজে লিখি। (v) ☐ নিজে লিখি।

x চলের ত্রিঘাত বহুপদী সংখ্যামালার সাধারণরূপ ax^3+bx^2+cx+d [যেখানে a,b,c,d ধ্রুবক এবং $a\neq0$]

n ঘাতযুক্ত একচলবিশিষ্ট বহুপদী সংখ্যামালা হবে $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots\ldots\ldots + a_1x + a_0$

যেখানে $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots\ldots\ldots\, a_1, a_0$ ধ্রুবক এবং $a_n \neq 0$

এই বহুপদী সংখ্যামালার পদ ☐ টি এবং মাত্রা ☐

যদি, $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \ldots = a_n = 0$ (সব ধ্রুবকের মান শূন্য) হয় তখন পাই শূন্য বহুপদী সংখ্যামালা।

20 শূন্য বহুপদী সংখ্যামালার মাত্রা ☐ (নিজে লিখি)

আবার $f(x, y) = x^4+y^2+4xy$ বহুপদী সংখ্যামালার চল ☐ [1/2]টি।
$\therefore f(x, y)$ দুই চলের বহুপদী সংখ্যামালা।

কিন্তু একাধিক চলবিশিষ্ট বহুপদী সংখ্যামালার মাত্রা কীভাবে পাব?

একাধিক চলবিশিষ্ট বহুপদী সংখ্যামালার মাত্রা নির্ণয়ের ক্ষেত্রে প্রতিটি পদের চলের সূচকগুলি যোগ করা হয় এবং সূচকের সর্বোচ্চ যোগফলই ওই বহুপদী সংখ্যামালার মাত্রা।

$\therefore f(x, y) = x^4 + y^2 + 4xy$ -এর মাত্রা 4

আবার $s(u,v) = u + v + 6uv$ -এই বহুপদী সংখ্যামালার মাত্রা 2

21 আমি নীচের একাধিক চলের বহুপদী সংখ্যামালার মাত্রা লিখি।

(i) $2x^2 + 4y^2 + 3x^2y^2$ (ii) $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ (iii) a^2+b^2+2ab (নিজে করি)

22 নীচের বীজগাণিতিক সংখ্যামালার মধ্যে কোনগুলি বহুপদী সংখ্যামালা লিখি এবং ওই বহুপদী সংখ্যামালাগুলির প্রত্যেকটির মাত্রা লিখি।

(i) $x^4 + 11x - 9$ (ii) $4y^3 + \sqrt{7}y + 3$ (iii) $\sqrt{y} + 4y$ (iv) 0 (v) $z + \frac{1}{z} + 2$ (vi) 13

(i) $x^4 + 11x - 9$ একটি বহুপদী সংখ্যামালা। কারণ এই বীজগাণিতিক সংখ্যামালায় চল x-এর সূচক সংখ্যা অখণ্ড। যেহেতু x-এর সর্বোচ্চ সূচক 4, সুতরাং $x^4 + 11x - 9$-এর মাত্রা 4

(ii) $4y^3 + \sqrt{7}y + 3$ একটি বহুপদী সংখ্যামালা। কারণ এই বীজগাণিতিক সংখ্যামালায় চল y-এর সূচক অখণ্ড সংখ্যা। যেহেতু y-এর সর্বোচ্চ সূচক ☐, সুতরাং $4y^3 + \sqrt{7}y + 3$ -এর মাত্রা 3

(iii) $\sqrt{y} + 4y$ বহুপদী সংখ্যামালা নয়। কারণ এই বীজগাণিতিক সংখ্যামালায় চল y-এর একটি পদের সূচক ভগ্নাংশ। ($\because \sqrt{y} = y^{1/2}$)

(iv) 0 একটি শূন্য বহুপদী সংখ্যামালা যার মাত্রা ☐ [নিজে লিখি]

(v) ও (vi) নিজে করি

23 আমি একটি একচলবিশিষ্ট ত্রিপদী সংখ্যামালা লিখি যার মাত্রা 25

একটি একচলবিশিষ্ট ত্রিপদী সংখ্যামালা যার মাত্রা 25 সেটি হলো $2x^{25} + 5x^{10} + 9$

24 আমি একটি একচলবিশিষ্ট একপদী সংখ্যামালা লিখি যার মাত্রা 8

$-5x^8$ একটি একচলবিশিষ্ট একপদী সংখ্যামালা যার মাত্রা 8

25 আমি একটি একচলবিশিষ্ট দ্বিপদী সংখ্যামালা লিখি যার মাত্রা 7

$2x^7+3x$ একটি একচলবিশিষ্ট দ্বিপদী সংখ্যামালা যার মাত্রা 7

26 আমি একটি একচলবিশিষ্ট দ্বিঘাত বহুপদীসংখ্যামালা এবং একটি ত্রিঘাত বহুপদী সংখ্যামালা লিখি।

একটি একচলবিশিষ্ট দ্বিঘাত বহুপদীসংখ্যামালা হলো $9y^2 + 7y + 8$

একটি একচলবিশিষ্ট ত্রিঘাত বহুপদী সংখ্যামালা হলো $2x^3 - 11x^2 + 3x$

27 আমি $5x^4 - 2x^3 + \frac{1}{2}x + 3$ এই বহুপদী সংখ্যামালার x^3, x ও x^0-এদের সহগ লিখি।

$5x^4 - 2x^3 + \frac{1}{2}x + 3$ বহুপদী সংখ্যামালার x^3-এর সহগ (–2), x-এর সহগ ☐ এবং x^0-এর সহগ 3

কষে দেখি— 7.1

1. **নীচের কোন কোন ক্ষেত্রে বীজগাণিতিক সংখ্যামালাগুলি বহুপদী সংখ্যামালা লিখি। যেগুলি বহুপদী সংখ্যামালা তাদের প্রত্যেকের মাত্রা লিখি।**

(i) $2x^6 - 4x^5 + 7x^2 + 3$ (ii) $x^{-2} + 2x^{-1} + 4$ (iii) $y^3 - \frac{3}{4}y + \sqrt{7}$ (iv) $\frac{1}{x} - x + 2$

(v) $x^{51} - 1$ (vi) $\sqrt[3]{t} + \frac{t}{27}$ (vii) 15 (viii) 0

(ix) $z + \frac{3}{z} + 2$ (x) $y^3 + 4$ (xi) $\frac{1}{\sqrt{2}}x^2 - \sqrt{2}x + 2$

2. **নীচের বহুপদী সংখ্যামালার মধ্যে কোনটি একচলবিশিষ্ট একঘাত সংখ্যামালা, কোনটি একচলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সংখ্যামালা এবং কোনটি একচলবিশিষ্ট ত্রিঘাত সংখ্যামালা লিখি।**

(i) $2x + 17$ (ii) $x^3 + x^2 + x + 1$ (iii) $-3 + 2y^2 + 5xy$

(iv) $5 - x - x^3$ (v) $\sqrt{2} + t - t^2$ (vi) $\sqrt{5}x$

3. **নীচের বহুপদী সংখ্যামালাগুলির নির্দেশ অনুযায়ী সহগ লিখি।**

(i) $5x^3 - 13x^2 + 2$ -এর x^3-এর সহগ (ii) $x^2 - x + \ \ 2$ -এর x-এর সহগ

(iii) $8x - 19$ -এর x^2-এর সহগ (iv) $\sqrt{11} - 3\sqrt{11}x + x^2$ -এর x^0-এর সহগ

4. **আমি নীচের বহুপদী সংখ্যামালাগুলির প্রত্যেকটির মাত্রা লিখি।**

(i) $x^4 + 2x^3 + x^2 + x$ (ii) $7x - 5$ (iii) 16 (iv) $2 - y - y^3$ (v) 7t (vi) $5 - x^2 + x^{19}$

5. আমি দুটি আলাদা একচলবিশিষ্ট দ্বিপদী সংখ্যামালা লিখি যাদের মাত্রা 17

6. আমি দুটি আলাদা একচলবিশিষ্ট একপদী সংখ্যামালা লিখি যাদের মাত্রা 4

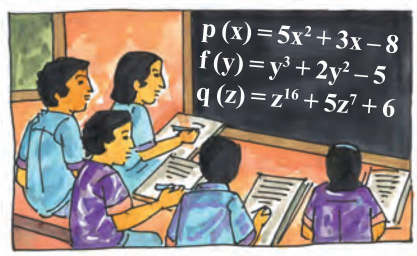
7. আমি দুটি আলাদা একচলবিশিষ্ট ত্রিপদী সংখ্যামালা লিখি যাদের মাত্রা 3

8. **নীচের বীজগাণিতিক সংখ্যামালাগুলির মধ্যে কোনগুলি একচলবিশিষ্ট বহুপদী সংখ্যামালা, কোনগুলি দুইচলবিশিষ্ট বহুপদী সংখ্যামালা এবং কোনগুলি বহুপদীসংখ্যামালা নয় তা লিখি।**

(i) $x^2 + 3x + 2$ (ii) $x^2 + y^2 + a^2$ (iii) $y^2 - 4ax$ (iv) $x + \ \ y + 2$ (v) $x^8 + y^4 + x^5y^9$

(vi) $x + \frac{5}{x}$

সাহানা ও সোহম ব্ল্যাকবোর্ডে যে বহুপদী সংখ্যামালাগুলি লিখেছিল আমরা সব বন্ধুরা সেগুলি খাতায় লিখে নিয়েছি। আমরা এই বহুপদী সংখ্যামালাগুলি নিয়ে এক মজার খেলা খেলব।



আমরা প্রত্যেকে চলের এক একটি মান বলব এবং চলের ওই নির্দিষ্ট মান অনুযায়ী বহুপদী সংখ্যামালাগুলির মান নির্ণয়ের চেষ্টা করবো।

আমি বললাম, $x = 2$

28 $x = 2$ -এর জন্য $p(x) = 5x^2 + 3x - 8$ -এর মান নির্ণয় করি।

$p(x) = 5x^2 + 3x - 8$

$x = 2$ বসিয়ে পাই, $p(2) = 5(2)^2 + 3 \times 2 - 8$

$= 20 + 6 - 8 = 18$

আমরা প্রত্যেকেই $p(2) = 18$ পেলাম।

এবার, ফিরোজ বলল, $y = 1$

29 $y = 1$ -এর জন্য $f(y) = y^3 + 2y^2 - 5$ -এর মান নির্ণয় করি।

$f(y) = y^3 + 2y^2 - 5$

$y = 1$ বসিয়ে পাই, $f(1) = (1)^3 + 2(1)^2 - 5 = -2$

30 এবার $z = -1$ -এর জন্য $q(z) = z^{16} + 5z^7 + 6$ -এর মান নির্ণয় করি।

$q(z) = z^{16} + 5z^7 + 6$

$q(-1) = (-1)^{16} + 5(-1)^7 + 6 = 1 - 5 + 6 = \square$ [নিজে লিখি]

31 এবার $v = -2$ -এর জন্য $g(v) = 7 - v + v^3 + v^7$ -এর মান নিজে হিসাব করে লিখি।

32 এবার আমরা $P(x) = 5x^2 + 3x - 8$ -এর মান নির্ণয় করি যখন $x = 1$

$P(1) = 5(1)^2 + 3.1 - 8 = 0$

দেখছি, $P(1) = 0$ পেলাম। অর্থাৎ $x = 1$ -এর জন্য $P(x)$ এর মান 0 পেলাম। একে কী বলব?

যেহেতু, $x = 1$ এর জন্য $P(x) = 5x^2 + 3x - 8$ এর মান 0

সুতরাং, 1 কে $P(x)$ **বহুপদী সংখ্যামালার শূন্য** বলা হয়।

একটি সংখ্যা c কে $f(x)$ বহুপদী সংখ্যামালার শূন্য বলা হবে যদি $f(c) = 0$ হয়।

33 $f(x) = 8 - x$ বহুপদী সংখ্যামালার শূন্য কী হবে হিসাব করি।

$f(1) = 8 - 1 = 7$

$f(2) = 8 - 2 = 6$

....

$f(8) = 8 - 8 = 0$

$\therefore$ $x = 8$ -এর জন্য $f(x)$ -এর মান 0 হবে।

$\therefore$ 8, $f(x)$ বহুপদী সংখ্যামালার শূন্য।

34 $g(x) = 2x + 16$ বহুপদী সংখ্যামালার শূন্য কী হবে খুঁজি।

$g(x)$ বহুপদী সংখ্যামালার শূন্য নির্ণয়ের জন্য x-এর কোন মানের জন্য $g(x)$ -এর মান 0 হবে দেখি।

$2x + 16 = 0$

বা, $2x = -16$

$\therefore$ $x = -8$

সুতরাং, $x = -8$ -এর জন্য $g(x)$ এর মান 0 হবে।

$\therefore$ -8, $g(x)$ বহুপদী সংখ্যামালার শূন্য।

সহজে $g(x) = 0$ সমাধান করে $g(x)$ বহুপদী সংখ্যামালার শূন্য পেলাম। কিন্তু $g(x) = 0$ কে কী বলা হয়?

$g(x) = 0$ কে বহুপদী সংখ্যামালার সমীকরণ বলা হয় এবং $x = -8$, $g(x) = 0$ বহুপদী সংখ্যামালার সমীকরণের বীজ।

তাই বলা হয়, -8, $g(x)$ বহুপদী সংখ্যামালার শূন্য।

অথবা, -8, $g(x) = 0$ বহুপদী সংখ্যামালার সমীকরণের বীজ।

35 এবার, 4 -এই ধ্রুবক বহুপদী সংখ্যার শূন্য কী হবে দেখি।

4 -এই ধ্রুবক বহুপদী সংখ্যার কোনো শূন্য নেই। কারণ 4 অর্থাৎ $4 \cdot x^0$ তে x-এর পরিবর্তে কোনো সংখ্যা বসিয়ে শূন্য পাব না।

∴ শূন্য নয় এমন কোনো ধ্রুবক বহুপদী সংখ্যার শূন্য নেই।

কিন্তু শূন্য বহুপদী সংখ্যার শূন্য কী হবে?

প্রত্যেক বাস্তব সংখ্যাই শূন্য বহুপদী সংখ্যার শূন্য। কারণ 0-কে লেখা যায় $0 \cdot x^5$; x-এর পরিবর্তে যেকোনো বাস্তব সংখ্যা বসালে $0 \cdot x^5$-এর মান শূন্য হবে যেমন, $0.0^5 = 0$, $0.3^5 = 0$, $0.(\frac{4}{5})^5 = 0$ ইত্যাদি। কিন্তু $0.x^0$-এর ক্ষেত্রে $x \neq 0$ বসাতে হবে। কারণ, 0^0 অসংজ্ঞাত।

36 নীচের ছকটি দেখি ও কোনটি বহুপদী সংখ্যামালার শূন্য হবে হিসাব করে লিখি ।

বহুপদী সংখ্যামালা	বহুপদী সংখ্যামালার শূন্য
$x - 5$	1, 5, 9, –2
$10 - 5x$	7, 0, 1, 2
$2y + 2$	0 , 1, –1, 2
$5z$	5, 1, 0, 2

x -এর কোন মানের জন্য $x - 5 = 0$ হবে দেখি।

$$x - 5 = 0$$
$$\therefore x = 5$$

∴ 5, $x - 5$ বহুপদী সংখ্যামালার শূন্য।

$10 - 5x$, $2y + 2$ ও $5z$ বহুপদী সংখ্যামালার শূন্য হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

দেখছি, উপরের সব রৈখিক বহুপদী সংখ্যামালার শূন্য একটি মাত্র সংখ্যা।

37 আমি $f(x) = ax + b$ [a, b, ধ্রুবক এবং $a \neq 0$] রৈখিক বহুপদী সংখ্যামালার শূন্য কী হবে হিসাব করি।

$$f(x) = ax + b = 0$$
$$\therefore x = -\frac{b}{a}$$

∴ দেখছি, $x = -\frac{b}{a}$, f (x) রৈখিক বহুপদী সংখ্যামালার একমাত্র শূন্য।

পেলাম, একটি রৈখিক বহুপদী সংখ্যামালার কেবলমাত্র একটিই শূন্য থাকে।

38 একটি দ্বিঘাত বহুপদী সংখ্যামালা $q(x) = x^2 - 4$-এর শূন্য কী হবে হিসাব করে লিখি।

$q(x) = x^2 - 4$ -এ $x = 2$ বসিয়ে পাই, $q(2) = 2^2 - 4 = 0$

$q(x) = x^2 - 4$ -এ $x = -2$ বসিয়ে পাই, $q(-2) = (-2)^2 - 4 = 0$

∴ 2 ও –2 দুটিই $q(x) = x^2 - 4$ বহুপদী সংখ্যামালার শূন্য।

কী কী পেলাম লিখি

(i) একটি বহুপদী সংখ্যামালার শূন্য, সর্বদা শূন্য নাও হতে পারে।
(ii) 0 একটি বহুপদী সংখ্যামালার শূন্য হতেও পারে।
(iii) প্রতিটি রৈখিক বহুপদী সংখ্যামালার একটি এবং কেবলমাত্র একটি শূন্য থাকবে।
(iv) একটি বহুপদী সংখ্যামালার একাধিক শূন্য থাকতে পারে।

কষে দেখি 7.2

1. যদি $f(x) = x^2 + 9x - 6$ হয়, তাহলে $f(0)$, $f(1)$ ও $f(3)$ -এর মান হিসাব করে লিখি।

2. **নীচের বহুপদী সংখ্যামালা $f(x)$ -এর $f(1)$ ও $f(-1)$ -এর মান হিসাব করে লিখি :**

   (i) $f(x) = 2x^3 + x^2 + x + 4$ (ii) $f(x) = 3x^4 - 5x^3 + x^2 + 8$
   (iii) $f(x) = 4 + 3x - x^3 + 5x^6$ (iv) $f(x) = 6 + 10x - 7x^2$

3. **নীচের বিবৃতিগুলি যাচাই করি :**

   (i) $P(x) = x - 1$ বহুপদী সংখ্যামালার শূন্য 1
   (ii) $P(x) = 3 - x$ বহুপদী সংখ্যামালার শূন্য 3
   (iii) $P(x) = 5x + 1$ বহুপদী সংখ্যামালার শূন্য $-\frac{1}{5}$
   (iv) $P(x) = x^2 - 9$ বহুপদী সংখ্যামালার শূন্যদ্বয় 3 ও -3
   (v) $P(x) = x^2 - 5x$ বহুপদী সংখ্যামালার শূন্যদ্বয় 0 এবং 5
   (vi) $P(x) = x^2 - 2x - 8$ বহুপদী সংখ্যামালার শূন্যদ্বয় 4 এবং (-2)

4. **নীচের বহুপদী সংখ্যামালাগুলির শূন্য নির্ণয় করি :**

   (i) $f(x) = 2 - x$ (ii) $f(x) = 7x + 2$ (iii) $f(x) = x + 9$
   (iv) $f(x) = 6 - 2x$ (v) $f(x) = 2x$ (vi) $f(x) = ax + b, (a \neq 0)$

বৃক্ষরোপণ অনুষ্ঠানে আমরা আমাদের শ্রেণিকক্ষটি খুব সুন্দর করে সাজাতে চাই। তাই আমরা বেশ কিছু টাকা সংগ্রহ করেছি।

39 কিন্তু আমাদের কাছে 55 টাকা এখনও অতিরিক্ত হিসাবে পড়ে আছে। আমরা 24 জনের মধ্যে ওই 55 টাকা সমান ভাগে ভাগ করে দেবো। হিসাব করে দেখি প্রত্যেককে কত টাকা দেবো।

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline 24 & 55 \\ & -48 \\ \hline & 7 \end{array}$$

দেখছি, প্রত্যেককে 2 টাকা দেওয়ার পর আরও 7 টাকা পড়ে রইল।

$\therefore$ পেলাম $55 = 24 \times 2 + 7$ এবং $7 < 24$

$\therefore$ ভাজ্য = ভাজক × ভাগফল + ভাগশেষ এবং $0 \leq$ ভাগশেষ $<$ ভাজক

এক্ষেত্রে, ভাজক ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং ভাজ্য, ভাগফল ও ভাগশেষ অখণ্ড সংখ্যা।

কিন্তু যদি আমাদের কাছে 72 টাকা টাকা পড়ে থাকত, তবে আমরা 24 জনকে টাকাটা সমান ভাগে ভাগ করে দিতে পারতাম কিনা হিসাব করে দেখি।

$$\begin{array}{r|l} & 3 \\ \hline 24 & 72 \\ & -72 \\ \hline & 0 \end{array}$$

এখানে ভাগশেষ 0

$\therefore 72 = 24 \times 3 + 0$

দেখছি, 24, 72 -এর উৎপাদক এবং 72, 24 -এর গুণিতক।

40 আমরা যদি $(3x^3 + 2x^2 + x)$ -এই টাকা x জনের মধ্যে সমান ভাগে ভাগ করে দিতাম, তাহলে প্রত্যেকে কত টাকা পাবো হিসাব করে দেখি।

বুঝেছি, প্রত্যেকে $(3x^2 + 2x + 1)$ টাকা পাবে।
এখানে ভাজ্য = $3x^3 + 2x^2 + x$, ভাজক = x, ভাগফল = $3x^2 + 2x + 1$
এবং ভাগশেষ = 0
$\therefore\ 3x^3 + 2x^2 + x = (3x^2 + 2x + 1) \times x + 0$

ভাজ্য = ভাজক × ভাগফল + ভাগশেষ

এবং ভাগশেষ 0 (শূন্য) অথবা ভাগশেষের মাত্রা < ভাজকের মাত্রা।

$$\begin{array}{r|l} & 3x^2 + 2x + 1 \\ \hline x & 3x^3 + 2x^2 + x \\ & -3x^3 \\ \hline & \quad 2x^2 \\ & -2x^2 \\ \hline & \qquad x \\ & \quad -x \\ \hline & \qquad 0 \end{array}$$

আবার দেখছি, $(3x^3 + 2x^2 + x)$-এর প্রতিটি পদে x আছে।
তাই লিখতে পারি, $3x^3+2x^2+x = x(3x^2+2x+1)$ যেখানে, x ও $3x^2+2x+1$ দুটিই বহুপদী সংখ্যামালা।
$\therefore$ বলতে পারি, x, $3x^3 + 2x^2 + x$ -এর **একটি উৎপাদক** এবং $3x^3 + 2x^2 + x$, x -এর **গুণিতক**।
আবার একইভাবে $(3x^2 + 2x + 1)$, $(3x^3 + 2x^2 + x)$ -এর **অপর একটি উৎপাদক**
এবং $(3x^3 + 2x^2 + x)$, $(3x^2 + 2x + 1)$ -এর **গুণিতক**।

ধরি, $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x$ এবং $g(x) = x$
$g(x)$ রৈখিক বহুপদী সংখ্যামালার শূন্য হবে 0; কারণ $g(0) = 0$
এবার $f(0)$ -র মান কী পাই দেখি।
$f(0) = 3.0 + 2.0 + 0 = 0$
$\therefore$ এক্ষেত্রে, $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x$ কে $g(x) = x$ দিয়ে ভাগ করে ভাগফল $3x^2 + 2x + 1$ পেলাম।
ধরি, $q(x) = 3x^2 + 2x + 1$
অর্থাৎ $f(x) = g(x) \times q(x) + f(0)$

41 যদি আমরা $(3x^3 + 2x^2 + 1)$- কে x দিয়ে ভাগ করতাম, তাহলে কী পেতাম দেখি।

পেতাম, $3x^3 + 2x^2 + 1 = x(3x^2 + 2x) + 1$
ধরি, $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + 1$ এবং $g(x) = x$
এখানে, $f(0) = 3.0 + 2.0 + 1 = 1$

$\therefore$ এখানে, $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + 1$- কে $g(x) = x$ দিয়ে ভাগ করে ভাগফল $3x^2 + 2x$ পেলাম, যেখানে, $q(x) = 3x^2 + 2x$
অর্থাৎ, $f(x) = g(x) \times q(x) + f(0)$

$$\begin{array}{r|l} & 3x^2 + 2x \\ \hline x & 3x^3 + 2x^2 + 1 \\ & -3x^3 \\ \hline & \quad 2x^2 \\ & -2x^2 \\ \hline & \qquad 1 \end{array}$$

42 আমি যদি $f(x) = 3x^2 + 5x + 1$ -কে $g(x) = (x - 1)$ রৈখিক বহুপদী সংখ্যামালা দিয়ে ভাগ করি, তাহলে কী পাই দেখি।

$$\begin{array}{r|l} & 3x + 8 \\ \hline x - 1 & 3x^2 + 5x + 1 \\ & \underline{-}\,3x^2 \mp 3x \\ \hline & \qquad 8x + 1 \\ & \qquad \underline{-}\,8x \mp 8 \\ \hline & \qquad\quad 9 \end{array}$$

এখানে, ভাজ্য = $3x^2 + 5x + 1$, ভাজক = $x - 1$,
ভাগফল = $3x + 8$ এবং ভাগশেষ = 9
আবার, $3x^2 + 5x + 1 = (x - 1)(3x + 8) + 9$
[নিজে হিসাব করে যাচাই করি]

$\therefore$ ভাজ্য = ভাজক × ভাগফল + ভাগশেষ

অর্থাৎ যদি f (x) এবং g (x) দুটি বহুপদী সংখ্যামালা হয়, এবং $g(x) \neq 0$ হয়, তবে দুটি অনন্য (unique) বহুপদী সংখ্যামালা q (x) এবং r (x) পাবো, যাতে **$f(x) = g(x) \times q(x) + r(x)$** হয়, যেখানে $r(x) = 0$ অথবা r (x)-এর মাত্রা < g (x)-এর মাত্রা।

দেখছি, $f(x) = 3x^2 + 5x + 1$, $g(x) = x - 1$এবং

g (x) রৈখিক বহুপদী সংখ্যামালার শূন্য 1

এবং $f(1) = 3.1^2 + 5.1 + 1 = 9$

$\therefore$ $f(x) = 3x^2 + 5x + 1$ বহুপদী সংখ্যামালাকে $g(x) = x - 1$ রৈখিক বহুপদী সংখ্যামালা দিয়ে ভাগ করার ক্ষেত্রে একটি বহুপদী সংখ্যামালা $q(x) = 3x + 8$ পেলাম যাতে,

$f(x) = g(x) \times q(x) + f(1)$ হয় এবং f (1)-এর মাত্রা < g (x)-এর মাত্রা।

অর্থাৎ এক্ষেত্রেও সহজে ভাগশেষ = f (1) পেলাম।

43 $3x^2 + 5x - 1$-কে $x - 1$ দিয়ে ভাগ করে দেখি ভাগশেষ 7 অর্থাৎ f (1) হচ্ছে কিনা। **[নিজে করি]**

44 আমি $f(x) = x^4+x^3+2x^2-1$- কে $g(x) = x+1$ দিয়ে ভাগ করে দেখছি,

ভাগশেষ= $f(-1) = (-1)^4+(-1)^3+2(-1)^2-1$

$= 1-1+2-1=1$ [নিজে করি]

আমরা উপরের উদাহরণ থেকে দেখছি, কোনো বহুপদী সংখ্যামালা f (x)-কে কোনো রৈখিক বহুপদী সংখ্যামালা g(x) দিয়ে ভাগ করার ক্ষেত্রে ভাগ না করেই খুব সহজেই ভাগশেষ নির্ণয় করতে পারছি।

ভাগশেষ নির্ণয় করার এই সহজ পদ্ধতি যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি।

ভাগশেষ উপপাদ্য (Remainder Theorem) :

f(x) একটি বহুপদী সংখ্যামালা যার মাত্রা $n(n \geq 1)$ এবং a যে-কোনো একটি বাস্তব সংখ্যা। f(x) -কে $(x - a)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে f(a)

প্রমাণ : ধরি, f (x) একটি বহুপদী সংখ্যামালা।

f(x)-কে (x–a) দিয়ে ভাগ করলে অনন্য (unique) ভাগফল q(x) এবং অনন্য (unique) ভাগশেষ r(x) পাই।

এবং $f(x) = (x-a)\, q(x) + r(x)$..............(I) এবং $r(x) = 0$ অথবা r (x) এর মাত্রা < (x–a)-এর মাত্রা

(x–a)-এর মাত্রা 1 এবং r (x)-এর মাত্রা, (x–a)-র মাত্রার কম।

$\therefore$ r (x) -এর মাত্রা =0 অথবা, $r(x) = 0$

$\therefore$ r (x) একটি ধ্রুবক সংখ্যা।

ধরি, $r(x) = R$

$\therefore$ (I) নংথেকে পেলাম, $f(x) = (x-a)\, q(x) + R$. (এটি একটি অভেদ)

x = a বসিয়ে পাই, $f(a) = (a-a)\, q(a) + R = R$. $\therefore$ $f(a) = R$ (প্রমাণিত)।

45 $f(x) = x^3-2x^2+6x-1$ বহুপদী সংখ্যামালাকে $(x-2)$ দিয়ে ভাগ করলে কী ভাগশেষ পাবো ভাগশেষ উপপাদ্য প্রয়োগ করে সহজে হিসাব করে লিখি।

প্রথমে $(x-2)$ রৈখিক বহুপদী সংখ্যামালার শূন্য খুঁজি।

$\therefore \quad x-2 = 0$ সুতরাং, $x = 2$

ভাগশেষ উপপাদ্য থেকে জানি, $f(x) = x^3-2x^2+6x-1$-কে $x-2$ দিয়ে ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $f(2)$

$\therefore$ নির্ণেয় ভাগশেষ $= f(2)$

$= (2)^3 - 2.2^2+6.2-1 \quad = 8-8+12-1 = 11$

46 $(12x^3-11x+5)$ বহুপদী সংখ্যামালাকে $(2x-1)$ দিয়ে ভাগ করলে কী ভাগশেষ পাবো লিখি।

$2x-1 = 0$ সুতরাং, $x = \frac{1}{2}$

$(2x-1)$ রৈখিক বহুপদী সংখ্যামালার শূন্য হলো $\frac{1}{2}$

ধরি, $f(x) = 12x^3 - 11x + 5$

$\therefore$ নির্ণেয় ভাগশেষ $= f(\frac{1}{2}) = 12\times(\frac{1}{2})^3 - 11\times\frac{1}{2}+5$

$= 12 \times \frac{1}{8} - \frac{11}{2} + 5 = \frac{3}{2} - \frac{11}{2} + 5 = \square$

47 $f(x) = x^4-2x^2-1$-কে $(x-1)$ দিয়ে ভাগ করলে কী ভাগশেষ পাবো লিখি। [নিজে করি]

48 $f(x) = 4x^3+8x^2-5$-কে $(2x+1)$ দিয়ে ভাগ করলে কী ভাগশেষ পাবো লিখি। [নিজে করি]

49 $(10x^3 - 11x^2 - 8x + 3)$ বহুপদী সংখ্যামালা $(2x-3)$-এর গুণিতক কিনা হিসাব করে লিখি।

$2x-3 = 0$

বা, $2x = 3 \quad \therefore x = \frac{3}{2}$

$\therefore$ $(2x-3)$ রৈখিক বহুপদী সংখ্যামালার শূন্য $\frac{3}{2}$

ধরি, $f(x) = 10x^3 - 11x^2 - 8x + 3$

$\therefore$ $(2x-3)$-এর গুণিতক $f(x)$ হবে যদি $f(\frac{3}{2}) = 0$ হয়।

$f(\frac{3}{2}) = 10 \times (\frac{3}{2})^3 - 11\times(\frac{3}{2})^2 - 8 \times \frac{3}{2} + 3 = \square$

$\therefore$ $f(x)$, $(2x-3)$ এর গুণিতক।

50 হিসাব করে দেখি $(x-2)$, $f(x) = x^3 - x - 6$-এর উৎপাদক কিনা।

$(x-2)$ রৈখিক বহুপদী সংখ্যামালার শূন্য 2

$f(x) = x^3 - x - 6$

সুতরাং, $f(2) = \square^3 - \square - \square$ (নিজে করি)

$\therefore f(2) = \square$

$\therefore$ $(x-2)$, $f(x)$ -এর একটি উৎপাদক।

51 যদি $ax^2 + 3x - 5$ এবং x^2-2x+a বহুপদী সংখ্যামালাদ্বয়কে $x - 3$ দ্বারা ভাগ করলে একই ভাগশেষ থাকে, তবে a-এর মান হিসাব করে লিখি।

ধরি, $f(x) = ax^2 + 3x - 5$ এবং $g(x) = x^2-2x+a$

$f(x)$-কে $(x-3)$দিয়ে ভাগ করলে ভাগশেষ পাই, $f(3) = 9a + 9 - 5 = 9a + 4$

$g(x)$-কে $(x-3)$ দিয়ে ভাগ করলে ভাগশেষ পাই, $g(3) = 9 - 6 + a = 3 + a$

যেহেতু, $f(3) = g(3)$

সুতরাং, $9a + 4 = 3 + a$

বা, $8a = -1 \qquad \therefore a = -\frac{1}{8}$

52 যদি $ax^2–8x–5$ এবং $2x^2+x+3a$ বহুপদী সংখ্যামালাদ্বয়কে $(x–1)$ দ্বারা ভাগ করলে একই ভাগশেষ থাকে, তবে a-এর মান হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

কষে দেখি 7.3

1. ভাগশেষ উপপাদ্য প্রয়োগ করে x^3-3x^2+2x+5 -কে (i) $x-2$ (ii) $x+2$ (iii) $2x-1$ (iv) $2x+1$ দ্বারা ভাগ করলে প্রতিক্ষেত্রে কত ভাগশেষ পাবো হিসাব করে লিখি।

2. ভাগশেষ উপপাদ্য প্রয়োগ করে $(x-1)$ দ্বারা নীচের বহুপদী সংখ্যামালাকে ভাগ করলে কী কী ভাগশেষ পাবো হিসাব করে লিখি।

(i) $x^3-6x^2+13x+60$ (ii) $x^3-3x^2+4x+50$

(iii) $4x^3+4x^2-x-1$ (iv) $11x^3-12x^2-x+7$

3. ভাগশেষ উপপাদ্য প্রয়োগ করে ভাগশেষ লিখি যখন,

(i) $(x-3)$ দ্বারা (x^3-6x^2+9x-8) বহুপদী সংখ্যামালাকে ভাগ করা হয়।

(ii) $(x-a)$ দ্বারা (x^3-ax^2+2x-a) বহুপদী সংখ্যামালাকে ভাগ করা হয়।

4. ভাগশেষ উপপাদ্য প্রয়োগ করে $p(x)=4x^3+4x^2-x-1$ বহুপদী সংখ্যামালা $(2x+1)$-এর গুণিতক কিনা হিসাব করি।

5. $(x-4)$ দ্বারা (ax^3+3x^2-3) এবং $(2x^3-5x+a)$ বহুপদী সংখ্যামালাদ্বয়কে ভাগ করলে যদি একই ভাগশেষ থাকে তবে a-এর মান কী হবে হিসাব করে লিখি।

6. x^3+2x^2-px-7 এবং $x^3+px^2-12x+6$ এই দুটি বহুপদী সংখ্যামালাকে যথাক্রমে $(x+1)$ ও $(x-2)$ দ্বারা ভাগ করলে যদি R_1 ও R_2 ভাগশেষ পাওয়া যায় এবং যদি $2R_1+R_2=6$ হয়, তবে p-এর মান কত হিসাব করি।

7. $x^4-2x^3+3x^2-ax+b$ বহুপদী সংখ্যামালাকে $(x-1)$ এবং $(x+1)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ যথাক্রমে 5 এবং 19 হয়। ওই বহুপদী সংখ্যামালাকে $x+2$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে হিসাব করি।

8. যদি $f(x)=\frac{a(x-b)}{a-b}+\frac{b(x-a)}{b-a}$ হয়, তাহলে দেখাই যে, $f(a)+f(b)=f(a+b)$

9. $f(x)=ax+b$ এবং $f(0)=3$, $f(2)=5$ হলে, a ও b-এর মান নির্ণয় করি।

10. $f(x)=ax^2+bx+c$ এবং $f(0)=2$, $f(1)=1$ ও $f(4)=6$ হলে, a, b ও c এর মান নির্ণয় করি।

11. বহু বিকল্পীয় প্রশ্ন: (M.C.Q.)

(i) নীচের কোনটি একচলবিশিষ্ট বহুপদী সংখ্যামালা

(a) $x+\frac{2}{x}+3$ (b) $3\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}+5$ (c) $\sqrt{2}x^2-\sqrt{3}x+6$ (d) $x^{10}+y^5+8$

(ii) নীচের কোনটি বহুপদী সংখ্যামালা

(a) $x-1$ (b) $\frac{x-1}{x+1}$ (c) $x^2-\frac{2}{x^2}+5$ (d) $x^2+\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x^2}}+6$

(iii) নীচের কোনটি রৈখিক বহুপদী সংখ্যামালা

(a) $x+x^2$ (b) $x+1$ (c) $5x^2-x+3$ (d) $x+\frac{1}{x}$

(iv) নীচের কোনটি দ্বিঘাত বহুপদী সংখ্যামালা

(a) $\sqrt{x}-4$ (b) x^3+x (c) x^3+2x+6 (d) x^2+5x+6.

(v) $\sqrt{3}$ বহুপদী সংখ্যামালার মাত্রা

(a) $\frac{1}{2}$ (b) 2 (c) 1 (d) 0

12. সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন :

(i) $p(x) = 2x - 3$ বহুপদী সংখ্যামালার শূন্য কত লিখি।

(iii) $p(x) = x + 4$ হলে, $p(x) + p(-x)$ -এর মান কত লিখি।

(iv) $x^3 + 4x^2 + 4x - 3$ বহুপদী সংখ্যামালাকে x দ্বারা ভাগ করলে, ভাগশেষ কত হবে লিখি।

(v) $(3x-1)^7 = a_7x^7 + a_6x^6 + a_5x^5 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_1x + a_0$ হলে, $a_7 + a_6 + a_5 + \ldots\ldots\ldots + a_0$-এর মান কত লিখি। (যেখানে $a_7, a_6 \ldots\ldots\ldots\ldots a_0$ ধ্রুবক)

53 বৃক্ষরোপণ অনুষ্ঠানের পর যদি 96 টাকা পড়ে থাকত এবং আমরা 24 জনকে সেই টাকা সমান ভাগে ভাগ করে দিতাম তাহলে প্রত্যেককে কত করে দিতাম দেখি।

96 টাকা ÷ 24 = ☐ টাকা।

আবার, **96 = 24 × 4 + 0,** 0 < 24 **এবং এখানে ভাগশেষ 0; 24, 96-এর উৎপাদক।**
24, 96 -এর উৎপাদক হলে 96 কে 24 দিয়ে ভাগ করার সময় ভাগশেষ শূন্য হবে।

54 $(6x^2 + 17x + 5)$ টাকা $(3x + 1)$ জনের মধ্যে সমান ভাগে ভাগ করে দেবার পর কত টাকা অবশিষ্ট থাকবে দেখি।

$$\begin{array}{r|l} & 2x + 5 \\ \hline 3x + 1 & 6x^2 + 17x + 5 \\ & \underline{6x^2 + 2x} \\ & \quad\; 15x + 5 \\ & \quad\; \underline{15x + 5} \\ & \qquad\; 0 \end{array}$$

ভাগশেষ = 0

$(3x + 1)$, $(6x^2 + 17x + 5)$ -এর একটি উৎপাদক

অন্যভাবে বলতে পারি $(3x + 1)$ রৈখিক বহুপদী সংখ্যামালাটি $6x^2 + 17x + 5$ বহুপদী সংখ্যামালার একটি উৎপাদক হলে, অপর একটি বহুপদী সংখ্যামালা $(2x + 5)$ পাবো যাতে, $6x^2 + 17x + 5 = (3x + 1)(2x + 5)$ হবে।

পেলাম, বহুপদী সংখ্যামালা $f(x)$-এর একটি উৎপাদক $(x - a)$ হবে, যদি $f(a) = 0$ হয় এবং $f(a) = 0$ হলে $(x - a)$, $f(x)$-এর একটি উৎপাদক হবে।

উপরের উদাহরণ থেকে পাওয়া কোনো বহুপদী সংখ্যামালার সঙ্গে কোনো রৈখিক বহুপদী সংখ্যামালার উৎপাদক হওয়ার শর্ত লিখি ও যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি।

গুণনীয়ক উপপাদ্য (Factor Theorem) :

যদি $f(x)$ কোনো একটি বহুপদী সংখ্যামালা যার মাত্রা $n(n \geq 1)$ এবং a যে-কোনো একটি বাস্তব সংখ্যা হয়, তাহলে

(i) $(x - a)$, $f(x)$-এর একটি উৎপাদক হবে, যদি $f(a) = 0$ হয়

এবং (ii) $f(a) = 0$ হবে, যদি $(x - a)$, $f(x)$ -এর একটি উৎপাদক হয়।

প্রমাণ : ভাগশেষ উপপাদ্য থেকে বলতে পারি, একটি বহুপদী সংখ্যামালা $f(x)$ কে $(x - a)$ দিয়ে ভাগ করলে একটি বহুপদী সংখ্যামালা $q(x)$ পাবো যাতে $f(x) = (x - a)\,q(x) + f(a)$ হয়।

(i) যদি $f(a) = 0$ হয়, তবে $f(x) = (x - a)\,q(x)$ পাবো।

∴ $(x - a)$, $f(x)$-এর একটি উৎপাদক।

(ii) আবার যদি $(x - a)$, $f(x)$-এর একটি উৎপাদক হয়, তাহলে একটি বহুপদী সংখ্যামালা $g(x)$ পাবো যাতে $f(x) = (x - a)\,g(x)$ হবে।

$x = a$ বসিয়ে পাবো $f(a) = (a - a)\,g(a) = 0$ (প্রমাণিত)

55 আমি গুণনীয়ক উৎপাদক ব্যবহার করে $(x-2)$,$(4x^4+4x^3-19x^2-16x+12)$-এর একটি উৎপাদক কিনা পরীক্ষা করি। প্রথমে $x-2$ বহুপদী সংখ্যামালার শূন্য কত হবে দেখি।

$x-2=0 \therefore x=2$

ধরি, $f(x)=4x^4+4x^3-19x^2-16x+12$

$x=2$ বসিয়ে পাই, $f(2)=4(2)^4+4(2)^3-19\times(2)^2-16\times2+12$

$=4\times16+4\times8-19\times4-32+12$

$=64+32-76-32+12 \quad =108-108 \quad =0$

$\therefore$ $(x-2)$,$(4x^4+4x^3-19x^2-16x+12)$-এর একটি উৎপাদক

56 k-এর মান কত হলে, $(3x-2)$, $15x^2-kx-14$-এর একটি উৎপাদক হবে হিসাব করে লিখি।

ধরি, $f(x)=15x^2-kx-14$

$(3x-2)$ - রৈখিক বহুপদী সংখ্যামালার শূন্য $\frac{2}{3}$

$3x-2=0$, $\therefore x=\frac{2}{3}$

$\because$ $(3x-2)$, $f(x)$- এর একটি উৎপাদক,

$\therefore f\left(\frac{2}{3}\right)=0$

$\therefore 15\left(\frac{2}{3}\right)^2-k\frac{2}{3}-14=0$

বা, $15\times\frac{4}{9}-\frac{2k}{3}-14=0$

বা, $\frac{-2k}{3}=14-\frac{20}{3}=\frac{42-20}{3}$

বা $-\frac{2k}{3}=\frac{22}{3}$ $\qquad \therefore k=-11$

$\therefore k=-11$ হলে ,$(3x-2)$, $15x^2-kx-14$ - এর একটি উৎপাদক হবে।

57 k-এর মান কত হলে, $4x^2-kx+1$-এর একটি উৎপাদক $(x-1)$ হবে, হিসাব করে লিখি।[নিজে করি]

58 n যে-কোনো যুগ্ম ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে, দেখাই যে, x^n-y^n বহুপদী সংখ্যামালাটির একটি উৎপাদক $x+y$

ধরি, x^n-y^n কে $x+y$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল Q এবং x বর্জিত ভাগশেষ R

ভাজ্য = ভাজক × ভাগফল + ভাগশেষ,

$\therefore x^n-y^n=(x+y)\times Q+R$ [এটি একটি অভেদ]

যেহেতু R- ভাগশেষটি x বর্জিত, সুতরাং x-এর মান যাই হোক না কেন, তাতে R-এর মান পরিবর্তিত হবে না। তাই উপরের অভেদে x-এর জায়গায় $(-y)$ লিখে পাই

$(-y)^n-y^n=(-y+y)\times Q+R$

$y^n-y^n=0\times Q+R$ $\qquad$ ($\because$ n যুগ্ম ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা)

$\therefore R=0$

সুতরাং, x^n-y^n বহুপদী সংখ্যামালাটির একটি উৎপাদক $(x+y)$, যখন n যে-কোনো যুগ্ম ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

কষে দেখি— 7.4

1. নীচের বহুপদী সংখ্যামালাগুলির মধ্যে কোনগুলির একটি উৎপাদক $(x + 1)$ হিসাব করে লিখি।

(i) $2x^3 + 3x^2 - 1$ (ii) $x^4 + x^3 - x^2 + 4x + 5$ (iii) $7x^3 + x^2 + 7x + 1$

(iv) $3 + 3x - 5x^3 - 5x^4$ (v) $x^4 + x^2 + x + 1$ (vi) $x^3 + x^2 + x + 1$

2. গুণনীয়ক উপপাদ্য ব্যবহার করে নীচের বহুপদী সংখ্যামালাগুলি $f(x)$ -এর একটি উৎপাদক $g(x)$ কিনা লিখি।

(i) $f(x) = x^4 - x^2 - 12$ এবং $g(x) = x + 2$

(ii) $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 11x - 30$ এবং $g(x) = x + 5$

(iii) $f(x) = 2x^3 + 7x^2 - 24x - 45$ এবং $g(x) = x - 3$

(iv) $f(x) = 3x^3 + x^2 - 20x + 12$. এবং $g(x) = 3x - 2$

3. k- এর মান কত হলে $x + 2$ দ্বারা $2x^4 + 3x^3 + 2kx^2 + 3x + 6$ বহুপদী সংখ্যামালাটি বিভাজ্য হবে হিসাব করে লিখি।

4. k- এর মান কত হলে, নীচের বহুপদী সংখ্যামালাগুলি $f(x)$ - এর একটি উৎপাদক $g(x)$ হবে হিসাব করি:

(i) $f(x) = 2x^3 + 9x^2 + x + k$ এবং $g(x) = x - 1$

(ii) $f(x) = kx^2 - 3x + k$ এবং $g(x) = x - 1$

(iii) $f(x) = 2x^4 + x^3 - kx^2 - x + 6$ এবং $g(x) = 2x - 3$

(iv) $f(x) = 2x^3 + kx^2 + 11x + k + 3$ এবং $g(x) = 2x - 1$

5. $ax^4 + 2x^3 - 3x^2 + bx - 4$ বহুপদী সংখ্যামালার উৎপাদক $x^2 - 4$ হলে, a ও b এর মান কত হবে হিসাব করে লিখি।

6. $x^3 + 3x^2 + 2ax + b$ বহুপদী সংখ্যামালার দুটি উৎপাদক $(x + 1)$ এবং $(x + 2)$ হলে, a ও b এর মান কত হবে হিসাব করে লিখি।

7. $ax^3 + bx^2 + x - 6$ বহুপদী সংখ্যামালাকে $(x - 2)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ 4 হয় এবং এই বহুপদী সংখ্যামালার একটি উৎপাদক $x + 2$ হলে, a ও b-এর মান কত হবে হিসাব করি।

8. n যে-কোনো ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা (যুগ্ম বা অযুগ্ম) হলে, দেখাই যে, $x^n - y^n$ বহুপদী সংখ্যামালাটির একটি উৎপাদক $x - y$.

9. n যে-কোনো অযুগ্ম ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে, দেখাই যে $x^n + y^n$ বহুপদী সংখ্যামালাটির একটি উৎপাদক $x + y$.

10. n যে-কোনো ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা (যুগ্ম বা অযুগ্ম) হলে, দেখাই যে $x^n + y^n$ বহুপদী সংখ্যামালাটির একটি উৎপাদক কখনই $x - y$ হবে না।

11. বহু বিকল্পীয় প্রশ্ন (M . C. Q.):

(i) $x^3 + 6x^2 + 4x + k$ বহুপদী সংখ্যামালাটি $(x + 2)$ দ্বারা বিভাজ্য হলে, k-এর মান

(a) - 6 (b) – 7 (c) – 8 (d) – 10

(ii) $f(x)$ বহুপদী সংখ্যামালার $f(-\frac{1}{2}) = 0$ হলে, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক হবে

(a) $2x - 1$ (b) $2x+1$ (c) $x - 1$ (d) $x + 1$

(iii) $f(x)$ বহুপদী সংখ্যামালার $(x-1)$ একটি উৎপাদক, কিন্তু $g(x)$ বহুপদী সংখ্যামালার উৎপাদক নয়। সুতরাং $(x-1)$ একটি উৎপাদক হবে

(a) $f(x)\,g(x)$ (b) $-f(x)+g(x)$ (c) $f(x)-g(x)$ (d) $\{f(x)+g(x)\}g(x)$

(iv) x^n+1 বহুপদী সংখ্যামালার $(x+1)$ একটি উৎপাদক হবে যখন

(a) n একটি অযুগ্ম ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা (b) n একটি যুগ্ম ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা

(c) n একটি ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা (d) n একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা

(v) $an^4+bn^3+cn^2+dn+e$ বহুপদী সংখ্যামালার n^2-1 উৎপাদক হলে

(a) $a+c+e=b+d$ (b) $a+b+e=c+d$ (c) $a+b+c=d+e$ (d) $b+c+d=a+e$

12. সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন:

(i) $x^3+ax^2-2x+a-12$ বহুপদী সংখ্যামালার $x+a$ একটি উৎপাদক হলে, a-এর মান কত হিসাব করে লিখি।

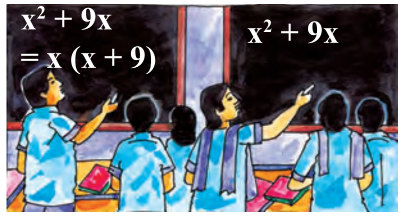
(ii) $k^2x^3-kx^2+3kx-k$ বহুপদী সংখ্যামালার $x-3$ একটি উৎপাদক হলে, k-এর মান কত হিসাব করে লিখি।

(iii) $f(x)=2x+5$ হলে, $f(x)+f(-x)$ -এর মান কত হবে লিখি।

(iv) px^2+5x+r বহুপদী সংখ্যামালার $(x-2)$ এবং $(x-\frac{1}{2})$ উভয়েই উৎপাদক হলে, p ও r -এর মধ্যে সম্পর্ক হিসাব করে লিখি।

(v) $f(x)=2x+3$ রৈখিক বহুপদী সংখ্যামালার শূন্য কত হবে লিখি।

8 উৎপাদকে বিশ্লেষণ
(FACTORISATION)



আজ শনিবার। আজ আমরা স্কুলে একটি মজার খেলা খেলব। আমাদের শ্রেণিকক্ষে দুটি ব্ল্যাকবোর্ড। প্রথমে আমরা সবাই দুটি দলে ভাগ হয়ে যাব। এবার প্রতি দলের একজন একটি ব্ল্যাকবোর্ডে যে-কোনো একটি বহুপদী সংখ্যামালা লিখবে। অপরদল অন্য বোর্ডে ওই বহুপদী সংখ্যামালাটি উৎপাদকে বিশ্লেষণের চেষ্টা করবে।

মিহির বোর্ডে লিখল 26

আমরা করলাম, $26 = 2 \times 13$

1 সাথি বোর্ডে লিখল $x^2 + 9x$; এটি একটি দ্বিঘাত বহুপদী সংখ্যামালা। $(x^2 + 9x)$ -কে উৎপাদকে বিশ্লেষণের চেষ্টা করি।

$x^2 + 9x = x(x + 9)$

2 অলি লিখল $x^2 + 3x - 4$; এটি একটি দ্বিঘাত বহুপদী সংখ্যামালা। $(x^2 + 3x - 4)$ -কে উৎপাদকে বিশ্লেষণের চেষ্টা করি।

$x^2 + 3x - 4 = x^2 + 4x - x - 4$

$= x(x + 4) - 1(x + 4) \quad = (x + 4)(x - 1)$

3 নাসরিন লিখল $x^3 + 3x - 4$; এটি একটি ত্রিঘাত বহুপদী সংখ্যামালা। এই ধরনের বহুপদী সংখ্যামালাকে কীভাবে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করব?

ধরি, $f(x) = x^3 + 3x - 4$

প্রথমে $f(x)$-এর একটি উৎপাদক খুঁজি।

$f(x)$-এ $x = +1, +2, +3$, বসিয়ে দেখি x - এর কোন মানে $f(x) = 0$ পাই।

$f(1) = (1)^3 + 3.1 - 4 = 0$

দেখছি, $f(1) = 0$

গুণনীয়ক উপপাদ্য থেকে বলতে পারি, $(x-1)$, $f(x)$ -এর একটি উৎপাদক।

$x^3 + 3x - 4$
$= x^3 - x^2 + x^2 - x + 4x - 4$
$= x^2(x - 1) + x(x - 1) + 4(x - 1)$
$= (x - 1)(x^2 + x + 4)$

অন্যভাবে,

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + x + 4 \\
x - 1 & x^3 + 3x - 4 \\
 & \underline{x^3 \mp x^2} \\
 & x^2 + 3x \\
 & \underline{x^2 \mp x} \\
 & 4x - 4 \\
 & \underline{4x \mp 4} \\
 & 0
\end{array}
$$

$\therefore x^3 + 3x - 4 = (x-1)(x^2 + x + 4)$

> $f(x) = x^3 + 3x - 4$ -এর উৎপাদকে বিশ্লেষণে প্রথমে $f(x)$ -এর একটি উৎপাদক খুঁজতে হবে। অর্থাৎ x-এর কোন মানের জন্য $f(x)$ -এর মান 0 হবে তা নির্ণয় করতে হবে।

কিন্তু এই পদ্ধতিতে উৎপাদকে বিশ্লেষণকে কী বলা হয়?

শূন্য পদ্ধতি (Vanishing Method) বা পরীক্ষা পদ্ধতি (Trial method) বলা হয়।

4 $f(x) = x^3 + 3x - 4$, এখানে $x = \pm 1, \pm 2, \pm 3$, ..., বসিয়ে x -এর কোন মানে $f(x)$ -এর মান শূন্য হবে, সেটা জানার কি কোনো সহজ পদ্ধতি আছে?

$f(x)$ -এ ধ্রুবক পদটি -4 এবং -4 এর উৎপাদকগুলি হলো $\pm1, \pm2, \pm4$.

সুতরাং x -এর এই মানগুলির মধ্যে কোনো একটি মান বা একের বেশি মানে $f(x)$ -এর মান শূন্য হবে।

5 $f(x) = x^3 + 3x + 4$ হলে, তখনও কি x -এর স্থানে $\pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots$ এই উৎপাদকগুলির কোনো একটির মান বসিয়ে f (x) -এর মান শূন্য পেতাম?

এখানে যেহেতু f (x) -এর প্রত্যেকটি পদ ধনাত্মক , সুতরাং x -এর ধনাত্মক মানে f (x) শূন্য হতো না।

তাই এখানে x-এর ঋণাত্মক মানে f (x) -এর মান শূন্য হবে।

যদি $x = -1$ হয়, $f(x) = (-1)^3 + 3(-1) + 4$

$= -1 - 3 + 4 = 0$

সুতরাং এখানে $x^3 + 3x + 4$ বহুপদী সংখ্যামালার একটি উৎপাদক হতো $(x + 1)$

রজত লিখল → $\boxed{x^3 - 7x - 6}$

6 $(x^3 - 7x - 6)$ বহুপদী সংখ্যামালা শূন্য পদ্ধতিতে উৎপাদকে বিশ্লেষণের জন্য x -এর কোন মানের জন্য $x^3 - 7x - 6$ -এর মান শূন্য হবে দেখি।

ধরি, $f(x) = x^3 - 7x - 6$

দেখছি, $f(-1) = (-1)^3 - 7(-1) - 6 = 0$

∴ গুণনীয়ক উপপাদ্য থেকে পাই, $(x + 1)$, f (x) -এর একটি উৎপাদক

$$\begin{aligned}
&x^3 - 7x - 6 \\
&= x^3 + x^2 - x^2 - x - 6x - 6 \\
&= x^2(x + 1) - x(x + 1) - 6(x + 1) \\
&= (x + 1)(x^2 - x - 6) \\
&= (x + 1)\{x^2 - 3x + 2x - 6\} \\
&= (x + 1)\{x(x - 3) + 2(x - 3)\} \\
&= (x + 1)(x - 3)(x + 2)
\end{aligned}$$

অন্যভাবে,

$$\begin{aligned}
&x^3 - 7x - 6 \\
&= x^3 + 1 - 7x - 7 \\
&= (x + 1)(x^2 - x + 1) - 7(x + 1) \\
&= (x + 1)(x^2 - x + 1 - 7) \\
&= (x + 1)(x^2 - x - 6) \\
&= (x + 1)(x - 3)(x + 2)
\end{aligned}$$

এছাড়া, $(x^3 - 7x - 6)$ কে $(x + 1)$ দ্বারা ভাগ করেও বাকি উৎপাদকগুলি পেতে পারি।

7 $(x^3 - 7x + 6)$ এবং $(2x^3 - x - 1)$ বহুপদী সংখ্যামালাদুটি একইভাবে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করি। [নিজে করি]

8 মোহিত লিখল, $f(x) = 2x^3 + x^2 - 9x - 9$: এখানেও কি –9 এর উৎপাদকগুলির মধ্যে $2x^3 + x^2 - 9x - 9$ বহুপদী সংখ্যামালার মান শূন্য হবে?

এক্ষেত্রে চলের সর্বোচ্চ ঘাতের সহগ 2 এবং ধ্রুবক সংখ্যা – 9; আবার $\frac{-9}{2}$ লঘিষ্ঠ আকারে আছে।

– 9 -এর উৎপাদকগুলি $\pm 1, \pm 3, \pm 9$

2 -এর উৎপাদকগুলি $\pm 1, \pm 2$

সুতরাং f (x)-এর সম্ভাব্য বাস্তব শূন্যগুলি হবে $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 9, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{9}{2}$

$f(x) = 2x^3 + x^2 - 9x - 9$

$f(1) = 2 + 1 - 9 - 9 \neq 0$

$f(-1) = -2 + 1 + 9 - 9 \neq 0$

$f(x) = 2x^3 + x^2 - 9x - 9$-এ x -এর মান $-\frac{1}{2}$ বসিয়ে দেখি f (x) -এর মান শূন্য হয় কিনা।

$$f(-\frac{1}{2}) = 2(-\frac{1}{2})^3 + (-\frac{1}{2})^2 - 9(-\frac{1}{2}) - 9$$
$$= 2 \times (-\frac{1}{8}) + \frac{1}{4} + \frac{9}{2} - 9 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{9}{2} - 9 \neq 0$$

$f(x) = 2x^3 + x^2 - 9x - 9$-এ x -এর মান $\pm\frac{3}{2}$, $\pm\frac{9}{2}$ বসিয়ে দেখি f (x) -এর মান শূন্য হয় কিনা।

$$f(-\frac{3}{2}) = 2(-\frac{3}{2})^3 + (-\frac{3}{2})^2 - 9(-\frac{3}{2}) - 9$$
$$= 2 \times (-\frac{27}{8}) + \frac{9}{4} + \frac{27}{2} - 9 = -\frac{27}{4} + \frac{9}{4} + \frac{27}{2} - 9$$
$$= \frac{-27 + 9 + 54 - 36}{4} = \frac{-63 + 63}{4} = 0$$

সুতরাং, $x = \frac{-3}{2}$ মানে f (x) -এর মান শূন্য।

$\therefore$ 2x + 3, $2x^3 + x^2 - 9x - 9$ বহুপদী সংখ্যামালার একটি উৎপাদক

$$2x^3 + x^2 - 9x - 9$$
$$= 2x^3 + 3x^2 - 2x^2 - 3x - 6x - 9$$
$$= x^2(2x + 3) - x(2x + 3) - 3(2x + 3)$$
$$= (2x + 3)(x^2 - x - 3)$$

9 রীনা লিখল— $8a^3 + 8a - 5$

ধরি, $f(a) = 8a^3 + 8a - 5$

মান বসিয়ে দেখছি, $f(\frac{1}{2}) = 8 \times (\frac{1}{2})^3 + 8 \times (\frac{1}{2}) - 5 = 1 + 4 - 5 = 0$

$\therefore$ গুণনীয়ক উপপাদ্য থেকে পাই f(a) -এর একটি উৎপাদক (2a – 1)

$$(8a^3 + 8a - 5)$$
$$= 8a^3 - 4a^2 + 4a^2 - 2a + 10a - 5$$
$$= 4a^2(2a - 1) + 4a(2a - 1) + 5(2a - 1)$$
$$= (2a - 1)(4a^2 + 2a + 5)$$

অন্যভাবে,

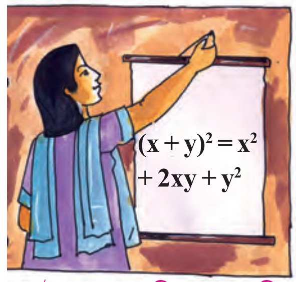
$$8a^3 + 8a - 5$$
$$= 8a^3 - 1 + 8a - 4$$
$$= (2a)^3 - (1)^3 + 4(2a - 1)$$
$$= (2a - 1)(4a^2 + 2a + 1) + 4(2a - 1)$$
$$= (2a - 1)(4a^2 + 2a + 1 + 4)$$
$$= (2a - 1)(4a^2 + 2a + 5)$$

10 আমি একইভাবে $(8a^3 + 4a - 3)$ বহুপদী সংখ্যামালাকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করি ও কী কী উৎপাদক পাই দেখি। (নিজে করি)

কষে দেখি— 8.1

নীচের বহুপদী সংখ্যামালাগুলিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করি :

1. $x^3 - 3x + 2$
2. $x^3 + 2x + 3$
3. $a^3 - 12a - 16$
4. $x^3 - 6x + 4$
5. $x^3 - 19x - 30$
6. $4a^3 - 9a^2 + 3a + 2$
7. $x^3 - 9x^2 + 23x - 15$
8. $5a^3 + 11a^2 + 4a - 2$
9. $2x^3 - x^2 + 9x + 5$
10. $2y^3 - 5y^2 - 19y + 42$



আমরা যখন সবাই মিলে এই নতুন খেলায় ব্যস্ত তখন আমার বন্ধু সুচেতা এক মজার কাজ করেছে। সে একটি সাদা আর্ট পেপারে তার জানা কিছু অভেদ লিখে শ্রেণিকক্ষের একদিকের দেয়ালে টাঙিয়ে দিয়েছে।

সে লিখেছে,

$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ — I

$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$ — II

$(x^2 - y^2) = (x + y)(x - y)$ — III

11 আমি সুচেতার লেখা অভেদের সাহায্যে $(x^2 - 1 - 2a - a^2)$ বহুপদী সংখ্যামালাকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করি।

$x^2 - 1 - 2a - a^2$

$= x^2 - (1 + 2a + a^2)$

$= x^2 - (1 + a)^2$ [(I) অভেদের সাহায্যে পেলাম]

$= (x + 1 + a)(x - 1 - a)$ [(III) অভেদের সাহায্যে পেলাম]

12 আমি সুচেতার লেখা অভেদের সাহায্য নিয়ে নীচের বহুপদী সংখ্যামালাগুলি উৎপাদকে বিশ্লেষণ করি।

(i) $p^4 + 2p^2 + 9$ (ii) $x^2 - 2ax + (a + b)(a - b)$ (iii) $a^{16} - b^{16}$ (iv) $4x^2 - 12xy + 9y^2 + 2x - 3y$

(i) $p^4 + 2p^2 + 9 = (p^2)^2 + 2\cdot p^2\cdot 3 + (3)^2 - 4p^2$

$= (p^2 + 3)^2 - (2p)^2 = (p^2 + 3 + 2p)(p^2 + 3 - 2p)$

(ii) $x^2 - 2ax + (a + b)(a - b)$

$= x^2 - 2ax + a^2 - b^2$

$= (x - a)^2 - b^2$

$= (x - a + b)(x - a - b)$

অন্যভাবে

$x^2 - 2ax + (a + b)(a - b)$

$= x^2 - \{(a + b) + (a - b)\}x + (a + b)(a - b)$

$= x^2 - (a + b)x - (a - b)x + (a + b)(a - b)$

$= x\{x - (a + b)\} - (a - b)\{x - (a + b)\}$

$= \{x - (a + b)\}\{x - (a - b)\}$

$= (x - a - b)(x - a + b)$

(iii) $a^{16} - b^{16}$

$= (a^8)^2 - (b^8)^2$

$= (a^8 + b^8)(a^8 - b^8)$

$= (a^8 + b^8)\{(a^4)^2 - (b^4)^2\}$

$= (a^8 + b^8)(a^4 + b^4)(a^4 - b^4)$

$= (a^8 + b^8)(a^4 + b^4)\{(a^2)^2 - (b^2)^2\}$

$= (a^8 + b^8)(a^4 + b^4)(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$

$= (a^8 + b^8)(a^4 + b^4)(a^2 + b^2)(a + b)(a - b)$

(iv) $4x^2 - 12xy + 9y^2 + 2x - 3y$

$= (2x)^2 - 2.2x.3y + (3y)^2 + 2x - 3y$

$= (2x - 3y)^2 + (2x - 3y)$

$= (2x - 3y)(2x - 3y + 1)$

কষে দেখি— 8.2

নীচের বীজগাণিতিক সংখ্যামালাগুলিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করি :

1. $\frac{x^4}{16} - \frac{y^4}{81}$ **2.** $m^2 + \frac{1}{m^2} + 2 - 2m - \frac{2}{m}$ **3.** $9p^2 - 24pq + 16q^2 + 3ap - 4aq$

4. $4x^4 + 81$ **5.** $x^4 - 7x^2 + 1$ **6.** $p^4 - 11p^2q^2 + q^4$

7. $a^2 + b^2 - c^2 - 2ab$ **8.** $3a(3a + 2c) - 4b(b + c)$ **9.** $a^2 - 6ab + 12bc - 4c^2$

10. $3a^2+4ab+b^2-2ac-c^2$ **11.** $x^2-y^2-6ax+2ay+8a^2$ **12.** $a^2-9b^2+4c^2-25d^2-4ac+30bd$

13. $3a^2-b^2-c^2+2ab-2bc+2ca$ **14.** $x^2 - 2x - 22499$ **15.** $(x^2 - y^2)(a^2 - b^2) + 4abxy$

আমার বন্ধু পল্লবও সুচেতার মতো তার জানা কিছু অভেদ চার্টপেপারে লিখে দেয়ালে টাঙিয়ে দিল।

পল্লব লিখল ,

$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ — IV	$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$ — VII
$x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy\,(x+y)$ — V	$x^3 - y^3 = (x-y)^3 + 3xy\,(x-y)$ — VIII
$x^3 + y^3 = (x+y)\,(x^2 - xy + y^2)$ — VI	$x^3 - y^3 = (x-y)\,(x^2 + xy + y^2)$ — IX

13 নাসরিন ব্ল্যাকবোর্ডে পাঁচটি বহুপদী সংখ্যামালা লিখল। সেগুলি,

(i) $a^3 - \frac{1}{a^3} - 2a + \frac{2}{a}$ (ii) $\frac{x^3}{64} \quad \frac{64}{x^3}$ (iii) $1 - x^{12}$

(iv) $63a^3 + 6a^2 - 12a + 8$ (v) $a^3 - 9b^3 + (a+b)^3$

আমি নাসরিনের লেখা বহুপদী সংখ্যামালাগুলিকে দেয়ালে টাঙানো অভেদের সাহায্যে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করি।

(i) $a^3 - \frac{1}{a^3} - 2a + \frac{2}{a}$

$= (a - \frac{1}{a})\ \{a^2 + a.\frac{1}{a} + (\frac{1}{a})^2\} - 2\,(a - \frac{1}{a})$ **[IX- নং অভেদের সাহায্যে]**

$= (a - \frac{1}{a})\,(a^2 + 1 + \frac{1}{a^2}) - 2\,(a - \frac{1}{a})$

$= (a - \frac{1}{a})\ [a^2 + 1 + \frac{1}{a^2} - 2]$ $\quad = (a - \frac{1}{a})\ (a^2 - 1 + \frac{1}{a^2})$

(ii) $\frac{x^3}{64} - \frac{64}{x^3}$

$= (\frac{x}{4})^3 - (\frac{4}{x})^3$

$= (\frac{x}{4} - \frac{4}{x})\ \{(\frac{x}{4})^2 + \frac{x}{4} \times \frac{4}{x} + (\frac{4}{x})^2\}$ **[IX- নং অভেদের সাহায্যে]**

$= (\frac{x}{4} - \frac{4}{x})\ \{(\frac{x}{4})^2 + 1 + (\frac{4}{x})^2\}$

$= (\frac{x}{4} - \frac{4}{x})\ \{(\frac{x}{4})^2 + 2.\frac{x}{4}.\frac{4}{x} + (\frac{4}{x})^2 - 1\}$

$= (\frac{x}{4} - \frac{4}{x})\ \{(\frac{x}{4} + \frac{4}{x})^2 - (1)^2\} = (\frac{x}{4} - \frac{4}{x})\ (\frac{x}{4} + \frac{4}{x} + 1)\ (\frac{x}{4} + \frac{4}{x} - 1)$

(iii) $1 - x^{12}$

$= (1)^2 - (x^6)^2$

$= (1 + x^6)\,(1 - x^6)$

$= (1 + x^6)\,\{(1)^2 - (x^3)^2\}$

$= (1 + x^6)\,(1 + x^3)\,(1 - x^3)$

$= \{(1)^3 + (x^2)^3\}\ \{(1)^3 + (x)^3\}\ \{(1)^3 - (x)^3\}$

$= (1 + x^2)\,(1 - x^2 + x^4)\,(1 + x)\,(1 - x + x^2)\,(1 - x)\,(1 + x + x^2)$

$= (1 - x)\,(1 + x)\,(1 + x^2)\,(1 + x + x^2)\,(1 - x + x^2)\,(1 - x^2 + x^4)$

(iv) $63a^3 + 6a^2 - 12a + 8$

$= 64a^3 - a^3 + 6a^2 - 12a + 8$

$= (4a)^3 - \{(a)^3 - 3.(a)^2.\ 2 + 3.a.(2)^2 - (2)^3\}$

$= (4a)^3 - (a-2)^3$

$= \{4a - (a-2)\}\ \{(4a)^2 + 4a.\ (a-2) + (a-2)^2\}$

$= (4a - a + 2)\ (16a^2 + 4a^2 - 8a + a^2 - 4a + 4)$

$= (3a + 2)\ (21a^2 - 12a + 4)$

(v) $a^3 - 9b^3 + (a+b)^3$

$= a^3 - b^3 + (a+b)^3 - 8b^3$

$= (a)^3 - (b)^3 + (a+b)^3 - (2b)^3$

$= (a-b)\ (a^2 + ab + b^2) + \{\ (a+b) - 2b\}\ \{(a+b)^2 + (a+b).2b + (2b)^2\}$

$= (a-b)\ (a^2 + ab + b^2) + (a-b)\ (a^2 + 2ab + b^2 + 2ab + 2b^2 + 4b^2)$

$= (a-b)\ (a^2 + ab + b^2) + (a-b)\ (a^2 + 4ab + 7b^2)$

$= (a-b)\ (a^2 + ab + b^2 + a^2 + 4ab + 7b^2)$

$= (a-b)\ (2a^2 + 5ab + 8b^2)$

কষে দেখি— 8.3

নীচের বীজগাণিতিক সংখ্যামালাগুলিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করি।

1. $t^9 - 512$ **2.** $729p^6 - q^6$ **3.** $8\ (p-3)^3 + 343$ **4.** $\frac{1}{8a^3} + \frac{8}{b^3}$

5. $(2a^3 - b^3)^3 - b^9$ **6.** $AR^3 - Ar^3 + AR^2h - Ar^2h$ **7.** $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - 8$

8. $32x^4 - 500x$ **9.** $8a^3 - b^3 - 4ax + 2bx$ **10.** $x^3 - 6x^2 + 12x - 35$

নিষাদ একটি বোর্ডে লিখল ⟶ $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

14 দেখছি, $x^3 + y^3 + z^3$ — $3xyz$ - একটি তিনটি চলবিশিষ্ট বহুপদী সংখ্যামালা যার মাত্রা 3; আমি দেয়ালে টাঙানো চার্ট পেপারের অভেদগুলির সাহায্য নিয়ে $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$-কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করি।

$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

$= (x+y)^3 - 3xy\ (x+y) + z^3 - 3xyz$

$= (x+y)^3 + z^3 - 3xy\ (x+y) - 3xyz$

$= (x+y+z)\ \{(x+y)^2 - (x+y)z + z^2\} - 3xy\ (x+y+z)$

$= (x+y+z)\ \{x^2 + y^2 + 2xy - xz - yz + z^2 - 3xy\}$

$= (x+y+z)\ (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

আমরা আর একটি নতুন অভেদ পেলাম।

$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)\ (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$ ———— X

15 যদি $x + y + z = 0$ হয়, তাহলে $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ কত হবে দেখি।

যেহেতু $x + y + z = 0$, সুতরাং, $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$

$\therefore\ x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ ———— XI

16 আমি X– নং অভেদের সাহায্যে নীচের বহুপদী সংখ্যামালাগুলির উৎপাদকে বিশ্লেষণ করি।

(i) $1 + b^3 + 8c^3 - 6bc$ (ii) $a^3 - b^3 + 1 + 3ab$

(iii) $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$ (iv) $a^6 + 5a^3 + 8$

(i) $1 + b^3 + 8c^3 - 6bc = (1)^3 + (b)^3 + (2c)^3 - 3.1.b.2c$

$= (1 + b + 2c)\ \{(1)^2 + b^2 + (2c)^2 - 1.b - b.2c - 2c.1\}$

[X– নং থেকে পেলাম]

$= (1 + b + 2c)\ (1 + b^2 + 4c^2 - b - 2bc - 2c)$

(ii) $a^3 - b^3 + 1 + 3ab = (a)^3 + (-b)^3 + (1)^3 - 3.a.(-b).1$

$= (a - b + 1)\ \{a^2 + (-b)^2 + (1)^2 - a.(-b) - (-b).1 - 1.a\}$

$= (a - b + 1)\ (a^2 + b^2 + 1 + ab + b - a)$

(iii) $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$

ধরি, $a - b = x$, $b - c = y$ এবং $c - a = z$

সুতরাং, $x + y + z = a - b + b - c + c - a = 0$

$(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$

$= x^3 + y^3 + z^3$

$= 3xyz$ [যেহেতু, $x + y + z = 0$, সুতরাং, $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$]

$= 3\ (a - b)\ (b - c)\ (c - a)$

(iv) $a^6 + 5a^3 + 8$

$a^6 + 5a^3 + 8$

$= (a^2)^3 + (?)^3 + (2)^3 - 3.a^2.(?).2$

যেহেতু মধ্যপদটি $5a^3$,

সুতরাং '?' টি $\pm a, \pm 2a, \pm 3a, \pm 4a$.......এদের মধ্যে একটি হবে।

যদি '?' = a বসাই তাহলে হয়, $(a^2)^3 + (a)^3 + (2)^3 - 3.a^2.(a).2$

কিন্তু এখানে $+ 5a^3$ না হয়ে $- 5a^3$ হচ্ছে।

যদি '?' = – a বসাই তাহলে হয়, $(a)^2 + (-a)^3 + (2)^3 - 3.a^2.(-a).2$

এক্ষেত্রে মধ্যপদ ($+ 5a^3$) হচ্ছে।

$a^6 + 5a^3 + 8$

$= (a^2)^3 + (-a)^3 + (2)^3 - 3.a^2.(-a).2$

$= \{a^2 + (-a) + 2\}\ \{(a^2)^2 + (-a)^2 + (2)^2 - a^2(-a) - (-a).2 - 2.a^2\}$

$= (a^2 - a + 2)\ (a^4 + a^2 + 4 + a^3 + 2a - 2a^2)$

$= (a^2 - a + 2)\ (a^4 + a^3 - a^2 + 2a + 4)$

কষে দেখি—8.4

নীচের বীজগাণিতিক সংখ্যামালাগুলিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করি।

1. $x^3 + y^3 - 12xy + 64$
2. $8x^3 - y^3 + 1 + 6xy$
3. $8a^3 - 27b^3 - 1 - 18ab$
4. $1 + 8x^3 + 18xy - 27y^3$
5. $(3a - 2b)^3 + (2b - 5c)^3 + (5c - 3a)^3$
6. $(2x - y)^3 - (x + y)^3 + (2y - x)^3$
7. $a^6 + 32a^3 - 64$
8. $a^6 - 18a^3 + 125$
9. $p^3 (q - r)^3 + q^3 (r - p)^3 + r^3 (p - q)^3$
10. $p^3 + \frac{1}{p^3} + \frac{26}{27}$