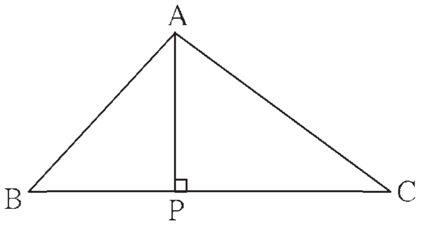
4 مثلث کا ارتفاع اور وسطانیہ

آیئے ذرا یاد کریں

گذشتہ جماعت میں ہم مطالعہ کر چکے ہیں کہ مثلث کے تینوں زاویوں کے ناصف متراکز ہوتے ہیں، مثلث کے اضلاع کے عمودی ناصف متراکز ہوتے ہیں۔ ہمیں یہ بھی معلوم ہے کہ ان کے نقطۂ تراکز کو بالترتیب داخلی مرکز اور حائط مرکز کہتے ہیں۔

عملی کام : ایک خط کھینچیے۔ خط کے باہر کوئی بھی ایک نقطہ لیجیے۔ گنیے کی مدد سے اس نقطے سے خط پر عمود کھینچیے۔

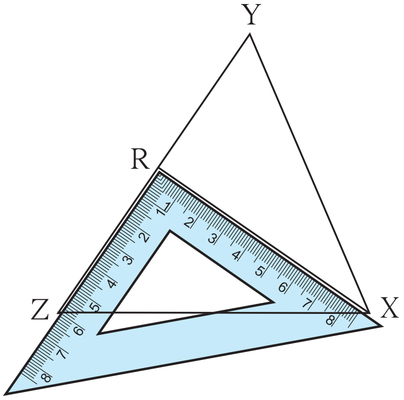
آیئے سمجھ لیں



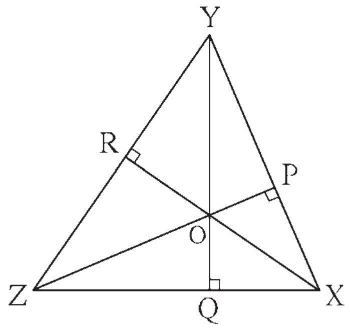
ارتفاع (Altitude)

مثلث کے کسی بھی راس سے اس کے مقابل کے ضلع پر کھینچے گئے عمودی قطعہ خط کو اس مثلث کا ارتفاع کہتے ہیں۔ $\triangle ABC$ میں قطعہ AP قاعدہ BC پر ارتفاع ہے۔

مثلث کا ارتفاع کھینچنا :



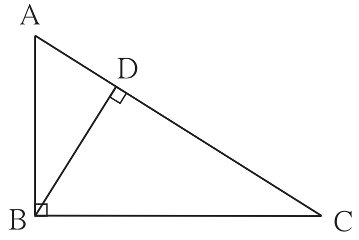
1. $\triangle XYZ$ کوئی ایک مثلث بنایئے۔
2. قاعدہ YZ کے مقابل کے راس X سے گنیا کی مدد سے عمود کھینچیے۔ وہ YZ کو جس مقام پر قطع کرتا ہے اس نقطہ کو R نام دیجیے۔ قطعہ XR، قاعدہ YZ پر ارتفاع ہے۔
3. قطعہ XZ کو قاعدہ تصور کریں اور اس کے مقابل کے راس Y سے قطعہ XZ پر عمود کھینچیں تب قطعہ $XZ \perp$ قطعہ YQ
4. خط XY کو قاعدہ لیں اور اس کے مقابل کے راس Z سے خط XY پر عمود کھینچیں تب قطعہ $XY \perp$ قطعہ ZP



قطعہ XR، قطعہ YQ، قطعہ ZP یہ تینوں $\triangle XYZ$ کے ارتفاع ہیں۔

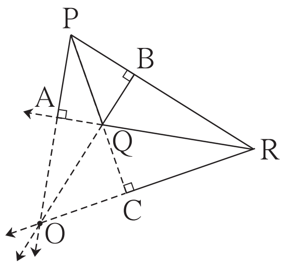
اسے ذہن نشین رکھیے کہ تینوں ارتفاع متراکز ہیں۔ اس نقطۂ تراکز کو ارتفاعوں کا نقطۂ تراکز یا ارتفاعی تراکز کہتے ہیں۔ ارتفاعی تراکز کو 'O' حرف سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثلث کے ارتفاعی مرکز کا مقام :



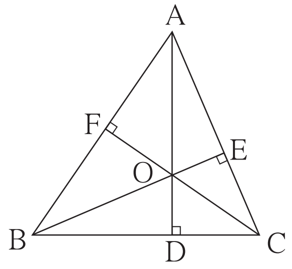
عملی کام I :

کوئی بھی ایک قائمۃ الزاویہ مثلث بنایئے۔ اس کے تمام ارتفاع کھینچیے۔ وہ کس نقطہ پر ملتے ہیں، اسے لکھیے۔



عملی کام II :

کوئی بھی ایک منفرجۃ الزاویہ مثلث بنایئے۔ اس کے تینوں ارتفاع کھینچیے۔ وہ ایک دوسرے کو کہاں ملتے ہیں؟ ان ارتفاعوں کو شامل کرنے والے خطوط کھینچیے۔ اس بات کا مشاہدہ کیجیے کہ وہ مثلث کے بیرونی حصے میں واقع ایک نقطے سے گذرتے ہیں۔



عملی کام III :

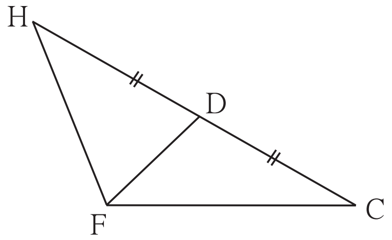
$\triangle ABC$ ایک حادۃ الزاویہ مثلث بنایئے۔ اس کے تمام ارتفاع کھینچیے۔ اس بات کا مشاہدہ کیجیے کہ ارتفاعی تراکز کا مقام کہاں ہے۔

یہ میری سمجھ میں آگیا

مثلث کے ارتفاع ایک ہی نقطے سے گذرتے ہیں یعنی ارتفاع متراکز (Concurrent) ہوتے ہیں۔ ان کے نقطۂ تراکز کو ارتفاعی مرکز یا مرکز ارتفاع (Orthocenter) کہتے ہیں۔ اسے 'O' حرف سے ظاہر کرتے ہیں۔

- قائمۃ الزاویہ مثلث کا نقطۂ تراکز یعنی مرکز ارتفاع قائمہ زاویہ بنانے والے راس پر ہوتا ہے۔
- منفرجۃ الزاویہ مثلث کا نقطۂ تراکز یعنی مرکز ارتفاع اس مثلث کے بیرون میں واقع ہوتا ہے۔
- حادۃ الزاویہ مثلث کا نقطۂ تراکز یعنی مرکز ارتفاع مثلث کے اندرون میں واقع ہوتا ہیں۔

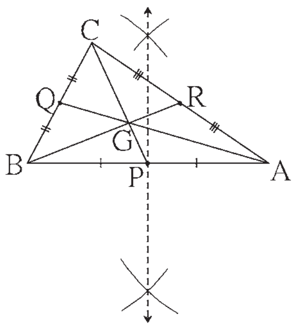
آیئے سمجھ لیں



وسطانیہ (Median)

مثلث کا راس اور مقابل کے ضلع کے وسطی نقطے کو ملانے والے قطعہ خط کو مثلث کے اس ضلع کا وسطانیہ کہتے ہیں۔ $\triangle HCF$ میں قطعہ FD، ضلع HC کا وسطانیہ ہے۔

مثلث کا وسطانیہ کھینچنا :



1. $\triangle ABC$ بنائیے۔
2. ضلع AB کا وسطی نقطہ حاصل کیجیے اسے P نام دیجیے قطعہ CP کھینچیے۔
3. ضلع BC کا وسطی نقطہ حاصل کیجیے اسے Q نام دیجیے قطعہ AQ کھینچیے۔
4. ضلع AC کا وسطی نقطہ حاصل کیجیے اسے R کا نام دیجیے۔قطعہ BR کھینچیے۔

$\triangle ABC$ کے قطعہ CP، قطعہ AQ، قطعہ BR وسطانیے ہیں۔ذہن نشین رکھیے کہ یہ متراکز ہیں۔ان کے نقطۂ تراکز کو ہندسی مرکز کہتے ہیں۔اسے G حرف سے ظاہر کرتے ہیں۔

عملی کام IV : ایک قائمۃ الزاویہ مثلث، ایک منفرجۃ الزاویہ مثلث اور ایک حادۃ الزاویہ مثلث بنا کر ان کے وسطانیے کھینچیے۔مشاہدہ کیجیے کہ وہ متراکز ہیں۔

مثلث کے وسطانیوں کے ہندسی مرکز کی خصوصیت :

- $\triangle ABC$ کوئی بھی ایک بڑا مثلث بنائیے۔
- $\triangle ABC$ کے قطعہ AR، قطعہ CP اور قطعہ BQ وسطانیے کھینچیے۔ہندسی مرکز کو G نام دیجیے۔

شکل میں قطعات خط کی لمبائی ناپ کر جدول کے خالی چوکون پر کیجیے۔

$l(AG) = \square$	$l(GR) = \square$	$l(AG) : l(GR) = \square$
$l(BG) = \square$	$l(GQ) = \square$	$l(BG) : l(GQ) = \square$
$l(CG) = \square$	$l(GP) = \square$	$l(CG) : l(GP) = \square$

نتیجہ اخذ کیجیے کہ یہ تمام نسبتیں تقریباً 1 : 2 ہیں۔

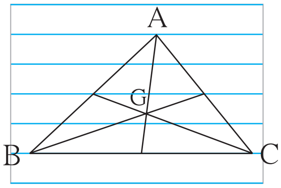
یہ میری سمجھ میں آ گیا

مثلث کے وسطانیے متراکز ہوتے ہیں۔ان کے نقطۂ تراکز کو ہندسی مرکز (Centroid) کہتے ہیں۔اسے G حرف سے ظاہر کرتے ہیں۔

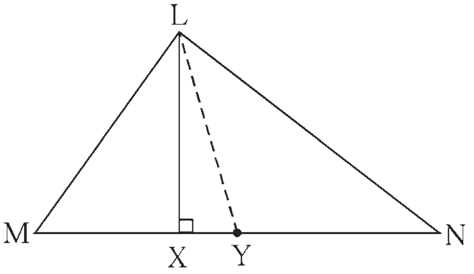
کسی بھی مثلث میں G کا مقام مثلث کے اندرون میں واقع ہوتا ہے۔

نقطۂ تراکز یعنی ہندسی مرکز ہر وسطانیے کو 1 : 2 کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

آئیے بحث کریں



ایک طالب علم نے بیاض کے کاغذ پر پانچ متوازی خطوط کی مدد سے $\triangle ABC$ بنایا۔متصلہ شکل کے مطابق اس نے ہندسی مرکز G معلوم کیا۔بتائیے کہ اس نے G کا جو مقام معلوم کیا وہ کس طرح صحیح ہے؟



.1 △LMN میں .... ارتفاع ہے اور .... وسطانیہ ہے۔
(خالی جگہ میں مناسب قطعہ خط کے نام لکھیے)

.2 △PQR ایک حادۃ الزاویہ مثلث بنایئے اور اس کے تینوں ارتفاع کھینچیے۔ نقطۂ تراکز کو 'O' نام دیجیے۔

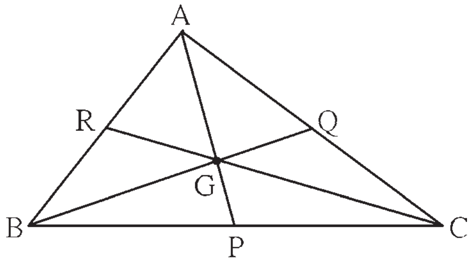
.3 △STV ایک منفرجۃ الزاویہ مثلث بنایئے اور اس کے وسطانیے کھینچ کر ہندسی مرکز بتایئے۔

.4 △LMN ایک منفرجۃ الزاویہ مثلث بنایئے اور اس کے تمام ارتفاع کھینچیے۔ نقطۂ تراکز کو 'O' نام دیجیے۔

.5 △XYZ ایک قائمۃ الزاویہ مثلث بنایئے اس کے وسطانیے کھینچیے اور نقطۂ تراکز کو 'G' سے ظاہر کیجیے۔

.6 کوئی بھی ایک متساوی الساقین مثلث کھینچیے۔ اس کے تمام وسطانیے اور تمام ارتفاع کھینچیے۔ ان کے نقطۂ تراکز کے بارے میں اپنا مشاہدہ درج کیجیے۔

.7 خالی جگہ پر کیجیے۔



△ABC کا G ہندسی مرکز ہے۔

اگر $l(RG) = 2.5$ ہوتو $l(GC) =$ ....

اگر $l(BG) = 6$ ہوتو $l(BQ) =$ ....

اگر $l(AP) = 6$ ہوتو $l(AG) =$ .... اور $l(GP) =$ ....

اسے کیجیے

(I) کوئی بھی ایک متساوی الاضلاع مثلث بنایئے۔ اس مثلث کا حائط مرکز (C)، داخلی مرکز (I)، ہندسی مرکز (G) اور ارتفاعی مرکز (O) معلوم کیجیے۔ مشاہدات درج کیجیے۔

(II) کوئی بھی ایک متساوی الساقین مثلث بنایئے۔ دیکھیے کہ اس کے ہندسی مرکز، ارتفاعی مرکز، حائط مرکز اور داخلی مرکز ہم خطی ہیں۔ اس کی تصدیق کیجیے۔

جوابات کی فہرست

مشقی سیٹ 4.1

1. قطعہ LX اور قطعہ LY 7. (1) 5 (2) 9 (3) 4, 2

D6LVB3