5.9: سودمرکب کے لیے ضابطہ کی تدوین

مذکورہ بالا مثال میں ہم نے دیکھا کہ سرینو نے سودمرکب کا حساب کیا۔اگر رقم کی مدت ایک یا دوسال ہو تو یہ حسابات کرنا آسان ہوتا ہے لیکن دوسال سے زائد کے عرصہ کے لیے ہم اسے کیا اسی طرح محسوب کرسکیں گے؟ کیا کوئی مختصر طریقہ بھی ہے؟ آیئے ایک مثال کے ذریعہ ہم اس پر غور کریں گے اور پتہ لگائیں گے۔

جب $T = 1$ سال تب رقم $A = P\left[1+\frac{R}{100}\right]$ سودمفرد کے لئے

فرض کیجئے کہ P1 = ` 10,000 اور R = 12% شرح سود سالانہ

سرینو کا طریقہ			مسئلہ کی عمومیت		
پہلا سال	اصل زر P1 کل زر A1	₹10,000 $10000\left(1+\frac{12}{100}\right)$ $=10000\left(\frac{112}{100}\right)$ = ₹11,200	پہلا سال	اصل زر کل زر	P_1 $A_1 = P_1\left(1+\frac{R}{100}\right)$
پہلا سال	اصل زر P2 کل زر A2	₹11,200 $11200\left(1+\frac{12}{100}\right)$ $=11200\left(\frac{112}{100}\right)$ = ₹12,544	پہلا سال	اصل زر کل زر	$P_2 = P_1\left(1+\frac{R}{100}\right)$ $A_2 = P_2\left(1+\frac{R}{100}\right)$ $=P_1\left(1+\frac{R}{100}\right)\left(1+\frac{R}{100}\right)$ $=P_1\left(1+\frac{R}{100}\right)^2$

سال درسال اسی طرح آگے بڑھتے ہوئے n سال کے اختتام پر کل زر $=A_n$ $P_1\left[1+\frac{R}{100}\right]^n$

$$A = P\left[1+\frac{R}{100}\right]^n$$

اس ضابطہ کی رو سے n سالوں کے بعد ادا شدنی رقم ہی محسوب کی جاسکتی ہے۔مرکب سود کیسے محسوب کریں؟ ہاں! یہ بھی آسان ہے۔مرکب سود حاصل کرنے کے لیے کل زر سے اصل زر تفریق کریں۔

$$\therefore C.I. = P\left[1+\frac{R}{100}\right]^n - P$$

بتایئے کہ سودمفرد اور سودمرکب میں کیا فرق ہے؟ سودمفرد ہر سال ہی رہتا ہے جبکہ سودمرکب مدت کے ساتھ بڑھتا رہتا ہے۔

SCERT TELANGANA

مثال 12 اگر اصل زر 5000 ` ہو اور یہ رقم 8% کی شرح سود سالانہ سے 2 سال کے لیے مشغول کی جائے تو سود مرکب اور کل زر کیا ہوگا؟

حل:

$$P = ₹\,5000; \quad R = 8\% \quad \text{اور} \quad n = 2 \text{ سال}$$

$$A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^{n}$$

$$= 5000\left(1+\frac{8}{100}\right)^{2}$$

$$= 5000 \times \frac{108}{100} \times \frac{108}{100} = ₹\,5832.$$

سود = کل زر - اصل زر

$$= ₹\,5832 - ₹\,5000$$

$$= ₹\ 832$$

یہ کیجیے

(1 ` 20,000 کو 6 سال کے لیے 5% سالانہ کی شرح سود سے مشغول کرنے پر سود مرکب کیا ہوگا؟

(2 ` 12,600 پر سود مرکب محسوب کیجیے جبکہ قرض کی مدت 2 سال اور شرح سود سالانہ 10% ہے۔

5.9: سود مرکب سالانہ یا ششماہی محسوب کیا جاسکتا ہے

آپ نے نوٹ کیا ہوگا کہ اوپر کے حسابات میں ہم نے سود مرکب سالانہ محسوب کیا۔ سود کا یہ حساب کیا معنی رکھتا ہے؟ ہاں! چونکہ ہم سود مرکب ششماہی یا ہر سہ ماہی بھی محسوب کر سکتے ہیں۔

جب مرکب سود سالانہ محسوب کیا جاتا ہے تو اس مدت کو جس کے بعد اصل زر میں سود جمع کیا جاتا ہے کیا کہتے ہیں؟ اس مدت کو ''مدت تبادلہ'' کہا جاتا ہے۔ جب سود مرکب ششماہی طور پر محسوب کیا جائے تو ایک سال میں مدت تبادلہ دو مرتبہ ملحوظ کیا جائے گا۔ ہر مدت 6 مہینے کی ہوگی۔ ان حسابات میں سوذ سود کی شرح کا نصف ہوگا اور وہ مدت جس کے لیے سود مرکب محسوب کیا جاتا ہو قرض کی مدت کے سالوں کا دوگنی ہوگی۔

مثال:11 سود مرکب معلوم کیجیے جبکہ اصل زر ایک سال کی مدت کے لیے 10% سالانہ کی شرح سے ایک ہزار روپے دی گئی ہے سود مرکب ششماہی طور پر محسوب کیجیے۔

حل: یہاں پر سود مرکب ششماہی لیا جار ہا ہے۔ لہٰذا ایک سال میں مدت تبادلہ دو مرتبہ لینی ہوگی۔

6 ماہ کے لئے سود $= \frac{1}{2} \times 10\% = 5\%$

SCERT TELANGANA

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20

$$A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$$

$$A = 1000\left(1+\frac{5}{100}\right)^2$$

$$= 1000\left(\frac{105}{100}\right)^2$$

$$= ₹\ 1102.50$$

سودمرکب = A - P = 1102.50 - 1000 = ` 102.50

یہ کیجئے مدت تبادلہ معلوم کیجئے جبکہ سود مرکب اور شرح سود ذیل کے مطابق ہوگا

(1 ایک رقم $1\frac{1}{2}$ سال کے لیے 8% شرح سالانہ سودمرکب سے ششماہی محسوب کی گئی۔

(2 ایک رقم دوسال کی مدت کے لیے 4% شرح سالانہ سودمرکب سے ششماہی محسوب کی جائے۔

سوچئیے، بحث کیجئیے اور لکھئیے

اگر سود مرکب سہ ماہی محسوب کیا جائے تو سود کیسے تبدیل ہوگا؟ مدت تبادلہ کتنی مرتبہ واقع ہوگی؟ سہ ماہی کی شرح سود کیسے محسوب کی جائے گی اور سالانہ شرح سود سے کتنی مختلف ہوگی؟ ان موضوعات پر اپنے ساتھیوں سے تبادلہ خیال کیجئے۔

مثال 14: قرض کی رقم ` 12,000 پر $1\frac{1}{2}$ سال کے لیے 10% سالانہ کی شرح سے سودمرکب ششماہی ہو تو کل زر کیا ہوگا؟

حل: یہاں پر سود مرکب ششماہی وصول کیا جارہا ہے $1\frac{1}{2}$ میں مدت تبادلہ کی تعداد 3 ہوگی۔ اس لئے n = 3

شرح سود $\frac{1}{2}\times 10\% = 5\%$

$$A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$$

$$A = 12000\left(1+\frac{5}{100}\right)^3$$

$$= 12000\left(\frac{105}{100}\right)^3$$

$$= ₹\ 13891.50$$

سودمرکب = A – P

= 13891.50 – 12000

= ₹ 1891.50

SCERT TELANGANA

مثال 13: یادیا نے اپنی گھریلو ضرورتوں کے لیے $12\frac{1}{2}\%$ سالانہ شرح سود مرکب پر 5120 ` قرض لیا۔ دو سال 9 مہینوں کی مدت کے بعد اسے قرض ادا کرنے کے لیے کتنا کل زر ادا کرنا ہوگا؟ سود کی رقم کتنی ہوگی۔

حل: ریشما نے اس سوال کو یوں حل کرنے کی کوشش کی

اس نے دو سال 9 ماہ کو اس طرح لکھا کہ $2\frac{9}{12}$ سال = $2\frac{3}{4}$ سال

ان قیمتوں کو پہلے سے معلوم ضابطہ میں اس نے اس طرح درج کیا $A = 5120\left[1+\frac{25}{200}\right]^{2\frac{3}{4}}$

اس مرحلہ پر وہ سوچ میں پڑ گئی اور اپنی ٹیچر سے پوچھا کہ اگر قوت نما کسر میں ہو تو کیسے حل کیا جائے۔ ٹیچر نے اسے ایک اشارہ دیا کہ پہلے صحیح عدد کے لیے رقم محسوب کیجیے پھر اس کے بعد اس رقم کو اصل زر تصور کرتے ہوئے $\frac{3}{4}$ سال کے لیے سود مفرد معلوم کیجیے۔

$$A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$$

$$A = 5120\left(1+\frac{25}{200}\right)^2$$

$$= 5120\left(\frac{225}{200}\right)^2$$

$$= ₹\ 6480$$

باقی 9 مہینوں کے لیے سود = $6480\times\frac{25}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{100} = 607.50$ روپے

اس طرح یادیا کو 2 سال 9 ماہ کے اختتام پر جو رقم ادا کرنی ہوگی

$$6480 + 607.50 = ` 7087.50$$

اس طرح کل سود مرکب $7087.50 - 5120 = ` 1967.50$

5.11: سود مرکب کے ضابطہ کا اطلاق

سود مرکب کا ضابطہ ہم کہاں استعمال کرتے ہیں؟ نہ صرف سود محسوب کرنے کے لیے بلکہ مختلف مواقع پر اس ضابطہ کا استعمال کیا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر

- ☆ آبادی میں اضافہ (یا کمی) کے لیے
- ☆ مختلف جراثیم کی افزائش کے لیے جبکہ شرح افزائش معلوم ہو
- ☆ ایک سال کے اندر قیمتوں کے بڑھنے یا گھٹنے کی صورت میں کسی شے کی قیمت محسوب کرنے کے لئے

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20
SCERT TELANGANA

مثال 16: ایک گاؤں کی آبادی 6250 ہے۔ اس گاؤں کی آبادی کی شرح میں سالانہ 8% کا اضافہ ہوتو دو سال بعد آبادی کیا ہوگی؟

حل: یہاں P = 6250، R = 8%، T = 2 سال

دو سال بعد آبادی

$$A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$$

$$A = 6250\left(1+\frac{8}{100}\right)^2$$

$$= 6250\left(\frac{108}{100}\right)^2$$

$$= 7290$$

مثال 17: ایک ربر کی گیند کسی بلندی سے گرائی گئی۔ یہ گیند زمین سے پہلی بار ٹکرانے کے بعد 90% فیصد دوبارہ اچھلتی ہے اگر اسے 25 میٹر اونچائی سے گرایا جائے تو 2 مرتبہ زمین سے ٹکرانے کے بعد یہ کتنی بلندی تک اچھلے گی۔

حل: پہلی بار ٹکرا کر گیند 90% تک اچھلتی ہے۔ یعنی ہر مرتبہ 10% بلندی گھٹ جاتی ہے۔

اس طرح R = -10% سے سوال حل کیا جائے گا۔

P = 25 میٹر اور n = 2

زمین سے دو مرتبہ ٹکرانے کے بعد گیند کی بلندی

$$A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$$

$$A = 25\left(1-\frac{10}{100}\right)^2$$

$$= 25\left(\frac{90}{100}\right)^2$$

$$= 20.25 \text{ m}$$

مشق – 5.3

(1 اپنے مکان کی تزئین نو کے لیے سدھا کرنے بینک سے 15,000 روپے کا قرض لیا۔ اسے یہ رقم 9% سالانہ سود مفرد کی شرح سے 8 سال کے لیے دی گئی۔ اس کی ماہانہ ادائیگی کی اقساط کیا ہوں گی؟

(2 ایک ٹی وی سیٹ 21,000 روپے میں خریدا گیا اگر ایک سال بعد اس کی قیمت میں 5% کمی واقع ہوئی ہو تب (کسی شے کے استعمال اور گذرتی مدت کے ساتھ اس کی قیمت میں تخفیف ہو جاتی ہے) ایک سال بعد ٹی وی کی قیمت معلوم کرو؟

SCERT TELANGANA

(3 8,000 روپے پر 5% سالانہ سود مرکب کی شرح سے دو سال کے لیے کل زر اور سود مرکب معلوم کیجئے۔

(4 دو سال کی مدت کے لیے 6,500 روپے پر سود مرکب اور کل زر کیا ہوگا جبکہ ایک سال کے لیے سود 5% کی شرح سے اور دوسرے سال کے دوران 6% سالانہ کی شرح لگائی گئی؟

(5 کار کی خریدی کے لیے پرتیبھا نے فینانس کمپنی سے 47,000 روپے قرض لیئے۔ یہ قرض اسے 17% سالانہ کی شرح سود مفرد سے 5 سال کے لیے دیا گیا۔ بتاؤ کہ (a) پرتیبھا، کمپنی کو 5 سال کے اختتام پر کتنا کل زر ادا کرے گی۔ (b) ادائیگی کی ماہانہ اقساط کیا ہونگے؟

(6 حیدرآباد کی آبادی 2011ء کے اختتام پر 68,09,000 ریکارڈ کی گئی۔ شہر کی آبادی میں اگر سالانہ 4.7 فیصد کا اضافہ ہوتا ہو تب 2015ء کے ختم تک کل آبادی کیا ہوگی؟

(7 اصل زر 10,000 روپے پر ایک سال 3 ماہ کے لیے $8\frac{1}{2}\%$ سالانہ کی شرح سے سود مرکب محسوب کیجئے؟

(8 عارف نے بینک سے 80,000 روپے کا قرض لیا۔ اگر شرح سود 10% سالانہ ہو تو بتاؤ کہ ڈیڑھ سال بعد (i) سود مرکب سے کل زر کتنا ہوگا۔ (ii) سود ششماہی محسوب کیا جائے تو یہ کل زر کیا ہوگا؟ ان رقموں کا فرق بھی محسوب کیجئے؟

(9 ایک شخص نے پرساد سے 6% سالانہ سود مفرد کی شرح سے دو سال کے لیے 12,000 روپے کا قرض لیا۔ اگر وہ اس رقم کو 6% سالانہ سود مرکب کی شرح سے لیتا ہے تو اسے کتنی زیادہ رقم ادا کرنی پڑے گی؟

(10 سائنس کی ایک لیباریٹری میں ایک تجربہ کے دوران جراثیم میں 2.5% فی گھنٹہ کی شرح سے اضافہ ہوا۔ ابتدا میں 5,06,000 جراثیم پائے گئے ہوں تو 2 گھنٹے بعد ان کی تعداد کیا ہوگی؟

(11 علی نے اسکوٹر خریدنے کے لیے ایک بینک سے 26,400 روپے قرض حاصل کیا۔ اگر شرح سود 15% سالانہ پر سود مرکب مقرر کیا جائے تب دو سال 4 ماہ کے بعد کل زر کیا ہوگا؟

(12 بھارتی نے تین سال کے لیے 12% سالانہ سود مفرد سے 12,500 روپے اور اسی رقم کو مادھوری نے اسی مدت کے لیے 10% سالانہ سود مرکب کی شرح سے حاصل کیا۔ کس نے زیادہ سود ادا کیا۔ اور وہ کتنا زیادہ ہے؟

(13 ایک مشین کی قیمت 5% سالانہ کی شرح سے گھٹتی ہو تو ایک سال بعد اس کی قیمت کیا رہ جائے گی؟

(14 اگر کسی شہر کی موجودہ آبادی 12 لاکھ ہو تو دو سال بعد 4% سالانہ کی شرح کے اضافہ کے ساتھ اس کی آبادی کیا ہوگی؟

(15 اگر سود مرکب سہ ماہی محسوب کیا جائے تو یہ سود 1000 روپے پر ایک سال کے بعد 10% سالانہ کی شرح سے کیا ہوگا؟

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20
SCERT TELANGANA

ہم نے کیا سیکھا

(1 دو سادہ نسبتوں کو ایک واحد نسبت کے طور پر ان کے مقدموں اور تالیوں کے حاصل ضرب کی نسبت کے طور پر لکھا جائے تو اسے مرکب نسبت کہتے ہیں۔ یعنی a : b اور c : d دو سادہ نسبتیں ہیں تب مرکب نسبت

$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ یعنی a c : b d

(2 فیصد (%) کسی عدد کے 100 سے رشتہ کو ظاہر کرتا ہے۔ لفظ فیصد کا مطلب 100 میں سے یا فی 100 ہوتا ہے۔

$100\% = \frac{100}{100}$ یہ ایسی کسر ہے جس کا نسب نما 100 ہوگا۔

(3 اشتہاری قیمت میں کمی کے فیصد کو کٹوتی یا ڈسکاؤنٹ کہتے ہیں۔ قیمت میں کمی Rebate یا ڈسکاؤنٹ کہلاتی ہے۔ اسے اشتہاری قیمت پر محسوب کیا جاتا ہے۔

(4 نفع یا نقصان ہمیشہ قیمت خرید پر محسوب کیا جاتا ہے۔ نفع' قیمت خرید کے اضافہ فیصد اور نقصان' قیمت خرید کے تخفیف شدہ فیصد کی مثال ہے۔

(5 VAT/ ٹیکس کسی شئے کی قیمت فروخت پر عائد کرتے ہوئے رسید (Bill) میں شامل کیا جاتا ہے۔ یہ دراصل قیمت فروخت میں فیصدی اضافہ ہے۔

(6 سود مفرد اصل زر پر اضافہ شدہ فیصد ہے۔

(7 سود مفرد $I = \frac{P \times T \times R}{100}$ جہاں P = اصل زر، T = مدت سالوں میں، R = شرح سود سالانہ

(8 سود + اصل = کل زر $\Rightarrow P + \frac{P \times T \times R}{100} = P\left[1 + \frac{T \times R}{100}\right]$

(9 سود مرکب سود پر سود محسوب کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔

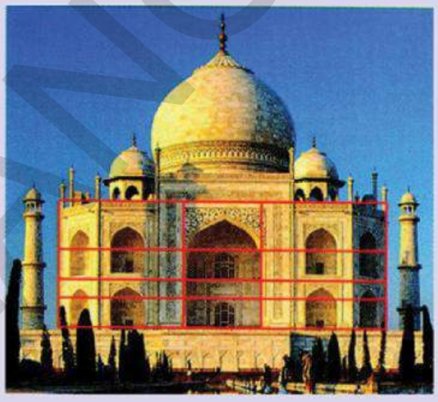
(10 n برسوں کے بعد سود مرکب $A = P\left[1 + \frac{R}{100}\right]^n$

(11 اس مدت کو جس کے بعد اصل زر میں سود جمع کیا جاتا ہے مدت تبادلہ کہتے ہیں۔ جب سود ششماہی محسوب کیا جائے تو ایک سال میں مدت تبادلہ دو مرتبہ ہوگی۔ ایسی صورت میں ششماہی شرح سود سالانہ شرح سود کا نصف ہوگا۔

SCERT TELANGANA

کیا آپ جانتے ہیں؟

قدیم یونان میں فنکاروں اور آرکٹیکٹس کا خیال تھا کہ ایک خاص قسم کا مستطیل دیدہ زیب ہوتا ہے۔ ایسے قسم کے مستطیلوں میں طول اور عرض کی نسبت کم و بیش 1.615:1 دیکھی گئی۔ یہ نسبت اس نسبت سے قریب تر ہے جسے سنہری نسبت کہتے ہیں۔ یونان کی ایک مشہور مندر Parthenon جو 5 ویں صدی قبل مسیح میں مکمل طور پر سنگ مرمر سے تعمیر کی گئی تھی اسی نسبت کے مطابق بنائی گئی۔ ہمارے ملک ہندوستان میں تاج محل بھی اسی نسبت کے مطابق بنایا گیا۔



مساوی نسبتوں کی جمع

.1 حسب ذیل کا حاصل جمع کیا ہوگا؟

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{6}+\frac{4}{8}+.....+\frac{100}{200}$$

کیا اِسے ہم اس طرح سے جمع کر سکتے ہیں؟

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{6}+\frac{4}{8}+.....+\frac{100}{200} = \frac{1+2+3+4+.....+100}{2+4+6+8+.....+200}$$

$$= \frac{5050}{2\times 5050} = \frac{1}{2}$$

اگر $\frac{p_1}{q_1}=\frac{p_2}{q_2}=\frac{p_3}{q_3}=.....=\frac{p_n}{q_n}$

تب $\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}+\frac{p_3}{q_3}+.....+\frac{p_n}{q_n}=\frac{p_1+p_2+p_3+....+p_n}{q_1+q_2+q_3+.....+q_n}=\frac{p_1}{q_1}$

.1 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ $\quad \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ $\quad (b,d>0)$

$\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$ iff $\frac{1+2}{2}=\frac{3+6}{6}$

$\frac{5}{2}=\frac{15}{6}$...... اسے دوبارہ اس طرح لکھا جاسکتا ہے $\frac{3}{2}=\frac{9}{6}$

SCERT TELANGANA

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20

$1 = 1 \times 1 \times 1 = 1^3$

$8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$

$27 = 3 \times 3 \times 3 = 3^3$

$64 = ... \times ...... \times ...... =$

∴ ایک مکعب عدد کسی عدد کو اسی عدد سے تین مرتبہ ضرب دینے سے حاصل ہوتا ہے۔

مثلاً x کا مکعب $x \times x \times x = x^3$ ہوگا

کیا 49 ایک مکعب ہے؟ نہیں۔ $7 \times 7 = 49$ اور کوئی ایسا طبعی عدد نہیں پایا جاتا جسے تین مرتبہ ضرب دینے سے 49 حاصل ہوتا ہو۔ ہم جانتے ہیں کہ $27 = 3\times3\times3$ اور $64 = 4\times4\times4$ اس سے پتہ چلتا ہے کہ 49 کامل مکعب نہیں ہے۔

یہ کیجیے

(1) کیا 81 ایک کامل مکعب ہے؟

(2) کیا 125 ایک مکعب ہے؟

ذیل کے جدول پر غور کرتے ہوئے خانہ پری کیجیے:

1	$1^3 = 1 \times 1 \times 1 = 1$
2	$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$
3	$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$
4	$4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$
5	$5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$
6	$6^3 = 6 \times 6 \times 6 = ...$
7	$7^3 = ... = ...$
8	$8^3 = ... = ...$
9	$9^3 = ... = ...$
10	$10^3 = ... = ...$

سوچئے، بحث کیجئے اور لکھئے

(i) 1 اور 100 کے درمیان کتنے مکعب پائے جاتے ہیں۔ 1 اور 500 کے علاوہ 1 اور 1000 کے درمیان بھی ایسے کتنے کامل مکعب ہوں گے؟

(ii) 500 اور 1000 کے درمیان ایسے کتنے کامل مکعب ہیں؟

SCERT TELANGANA

ذیل میں 11 سے 20 تک اعداد کے مکعب دیئے گئے ہیں۔

11	1331
12	1728
13	2197
14	2744
15	3375
16	4096
17	4913
18	5832
19	6859
20	8000

کیا آپ کو 17 اور 18 کے مکعبوں کے درمیان ہندسوں کے حاصل جمع میں کوئی دلچسپ بات نظر آتی ہے؟

جدول پر غور کرنے سے پتہ چلتا ہے کہ کسی جفت عدد کا مکعب بھی جفت ہی ہوگا۔ کیا یہ بات طاق اعداد کے لیے بھی صحیح ہے؟
ہم یہ بھی دیکھتے ہیں کہ اگر کسی عدد میں اکائی کا ہندسہ 1 ہو تو اس کا مکعب بھی ایک ہی پر ختم ہوگا۔ کیا آپ اکائی کے مقام پر 0، 4، 5، 6 یا 9 رکھنے والے اعداد کے مکعبوں کے اکائی کے مقام کے بارے میں کیا کہیں گے؟

کوشش کیجیے

حسب ذیل اعداد میں ہر ایک کے اکائی کے مقام کو پہچانئے۔

(i) 75^3 (ii) 123^3 (iii) 157^3 (iv) 198^3 (v) 206^3

6.11: اعداد کے بعض دلچسپ سلسلے

1) سلسلہ وار طاق اعداد کا حاصل جمع

ان اعداد کے سلسلوں پر غور کیجیے۔

1	=	1	=	1^3
3 + 5	=	8	=	2^3
7 + 9 + 11	=	27	=	3^3
13 + 15 + 17 + 19	=	......	=	....

5^3 تک اعداد کے حاصل جمع کے لیے اگلے کتنے سلسلہ وار طاق اعداد کی ضرورت ہوگی؟

SCERT TELANGANA

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20

2) ذیل کے اعداد کے سلسلہ پر غور کیجیے

$2^3 - 1^3 = 1 + 2 \times 1 \times 3 = 7$

$3^3 - 2^3 = 1 + 3 \times 2 \times 3 = 19$

$4^3 - 3^3 = 1 + 4 \times 3 \times 3 = 37$

$5^3 - 4^3 =$ ……………… $=$ …………..

اوپر کے سلسلہ کو استعمال کرتے ہوئے ذیل کی قیمتیں محسوب کیجیے۔

(i) $10^3 - 9^3$ (ii) $15^3 - 14^3$ (iii) $26^3 - 25^3$

3) ذیل کے اعداد کے سلسلوں پر غور کرتے ہوئے خانہ پری کیجیے۔

$1^3 = 1^2$

$1^3 + 2^3 = (1 + 2)^2 = (3)^2$

$1^3 + 2^3 + 3^3 = (1 + 2 + 3)^2 = (\ \ )^2$

$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = (_____)^2$

………………… $= (1 + 2 + 3 + ... + 10)^2$

∴ ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ پہلے n طبعی اعداد کے مکعبوں کا مجموعہ مساوی ہوتا ہے ان کے حاصل جمع کے مربعوں کے۔

یعنی $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots\ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + ... + n)^2.$

6.12: مکعب اور ان کے مفرد اجزائے ضربی

64 اور 216 پر غور کیجیے

64 اور 216 کو اجزائے ضربی میں تحلیل کرنے پر

$64 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{2 \times 2 \times 2}$

$216 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{3 \times 3 \times 3}$

ان دونوں مثالوں میں ہر جز ضربی تین مرتبہ واقع ہوتا ہے۔ دوسرے الفاظ میں مفرد اجزائے ضربی تین کے گروپ کی شکل میں لکھے جاسکتے ہیں۔

∴ اگر کسی عدد کو تین مساوی اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کے طور پر ظاہر کیا جاسکتا ہو تو یہ کہا جاسکتا ہے کہ وہ عدد کامل مکعب یا مکعبی عدد ہے۔

SCERT TELANGANA

کیا540ایک کامل مکعب ہے؟

540 کے مفرد اجزائے ضربی لکھیے

$540 = 2 \times 2 \times \underline{3 \times 3 \times 3} \times 5$

2	540
2	270
3	135
3	45
3	15
5	5
	1

یہاں پر2اور5، 3 کے گروپ کے طور پر واقع نہیں ہوتے ہیں۔

لہٰذا 540ایک کامل مکعب نہیں ہے۔

یہ کیجئے

حسب ذیل میں کونسے اعداد کامل مکعب ہیں۔

(i) 243 (ii) 400 (iii) 500 (iv) 512 (v) 729

مثال:13 وہ اقل ترین عدد کونسا ہے جس سے 2560 کو ضرب دینے پر حاصل ضرب کامل مکعب بن جاتا ہے؟

حل: سب سے پہلے 2560 کے مفرد اجزائے ضربی لکھیے

$2560 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{2 \times 2 \times 2} \times 5$

2	2560
2	1280
2	640
2	320
2	160
2	80
2	40
2	20
2	10
	5

مفرد جز ضربی 5' 3 کے گروپ کے طور پر واقع نہیں ہوتا ہے۔

لہٰذا 2560 کامل مکعب نہیں ہے۔

.'. وہ اقل ترین عدد جس سے 2560 کو ضرب دینے پر حاصل ضرب کا مکعب ہوتا ہے $5 \times 5 = 25$ ہوگا۔

مثال:14 وہ چھوٹے سے چھوٹا عدد محسوب کیجئے جس سے 1600 کو تقسیم کرنے پر خارج قسمت کامل مکعب بن جاتا ہے۔

حل: 1600 کے مفرد اجزائے ضربی میں تحلیل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$1600 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{2 \times 2 \times 2} \times 5 \times 5$

2	1600
2	800
2	400
2	200
2	100
2	50
5	25
	5

مفرد جز ضربی 5' 3 کے گروپ کے طور پر واقع نہیں ہوتا ہے۔

لہٰذا 1600 کامل مکعب نہیں ہے۔

.'. اقل ترین عدد جس سے 1600 کو تقسیم کرنے پر وہ کامل مکعب بنتا ہے $5 \times 5 = 25$ ہوگا۔

SCERT TELANGANA

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20

مشق - 6.4

(1 حسب ذیل اعداد کے مکعب معلوم کیجئے۔

(i) 8 (ii) 16 (iii) 21 (iv) 30

(2 جانچ کر بتائیے کہ ذیل کے اعداد میں سے کونسے کامل مکعب ہیں یا نہیں۔

(i) 243 (ii) 516 (iii) 729 (iv) 8000 (v) 2700

(3 وہ اقل ترین عدد معلوم کیجئے جس سے 8788 کو ضرب دینے پر کامل مکعب حاصل ہوتا ہے۔

(4 7803 کو کس اقل ترین عدد سے ضرب دیا جانا چاہئے کہ کامل مکعب حاصل ہو؟

(5 8640 کو کس اقل ترین عدد سے تقسیم کیا جائے کہ خارج قسمت ایک کامل مکعب بن جائے؟

(6 روی نے پلاسٹک کی ایک شیٹ سے جس کے ابعاد 12 سمر، 8 سمر اور 3 سمر ہیں۔ ایک مکعب نما تیار کیا۔ ایک مکمل مکعب حاصل کرنے کے لیے روی کے ایسے مکعبوں کی اقل ترین تعداد کتنی ہوگی؟

6.13: جذر المکعب

ہم جانتے ہیں کہ دو اکائیوں کے ضلع کا مکعب بنانے کے لیے 8 اکائی مکعب کی ضرورت ہوتی ہے۔ $(2^3 = 8)$ اسی طرح تین اکائیوں کے ضلع کے مکعب کی تیاری کے لیے 27 اکائی مکعبوں کی ضرورت ہوگی $(3^3 = 27)$

فرض کیجئے کہ 64 اکائی مکعبوں کی مدد سے ایک مکعب بنایا گیا۔ تو اس مکعب کے ضلع کی لمبائی کیا ہوگی؟

فرض کیجئے کہ ضلع کا طول x اکائیاں ہیں۔ $64 = x^3$

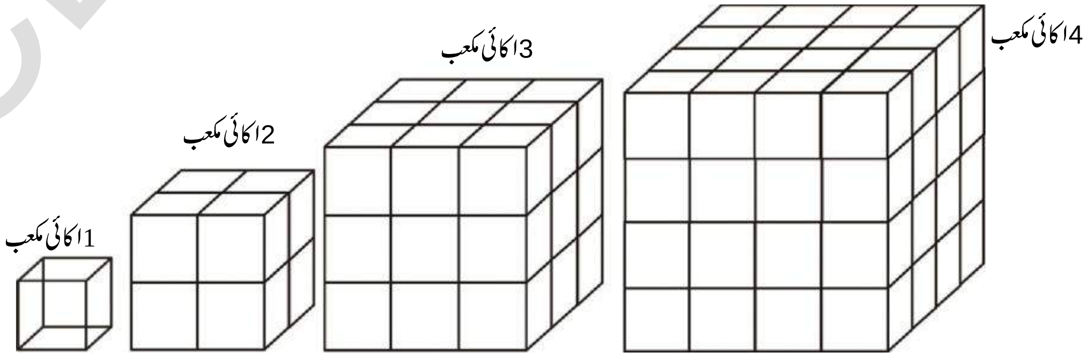
کسی مکعب کے ضلع کا طول معلوم کرنے کے لیے ضروری ہوتا ہے کہ وہ عدد معلوم کیا جائے جس کا مکعب 64 ہے۔

اس لئے اس عدد کو محسوب کرنا جس کا عدد پہلے ہی سے معلوم ہے جذر المکعب کہلاتا ہے۔ یہ عمل مکعب بنانے کے عمل کا برعکس عمل کہلائے گا۔

جیسا کہ $4^3 = 64$ تب 4، 64 کا جذر المکعب کہلاتا ہے۔

ہم اسے $4 = \sqrt[3]{64}$ کی طرح لکھتے ہیں۔ $\sqrt[3]{\ }$ کی علامت جذر المکعب کی علامت کہلاتی ہے۔

لہٰذا کوئی عدد x ایک اور عدد y کا جذر المکعب کہلائے گا جبکہ $y = x^3$ تب $x = \sqrt[3]{y}$ ہو۔



حسب ذیل جدول کومکمل کیجیے

مکعب			جذرالمکعب		
1^3	=	1	$\sqrt[3]{1}$	=	1
2^3	=	8	$\sqrt[3]{8}$	=	2
3^3	=	27	$\sqrt[3]{27}$	=	3
4^3	=	64	$\sqrt[3]{64}$	=	4
5^3	=	125	$\sqrt[3]{125}$	=	5
6^3	=	…...	$\sqrt[3]{}$	=	6
7^3	=	…….	$\sqrt[3]{}$	=	7
8^3	=	……	$\sqrt[3]{}$	=	8
……	=	………..	……..	=	………..
……	=	………..	…………	=	………

6.14: مفرد اجزائے ضربی سے جذرالمکعب معلوم کرنے کا طریقہ:

آیئے 1728 کا جذرالمکعب مفرد اجزائے ضربی طریقہ سے معلوم کریں۔

پہلامرحلہ: 1728 کے مفرد اجزائے ضربی میں تحلیل کریں۔

2	1728
2	864
2	432
2	216
2	108
2	54
3	27
3	9
	3

$$1728 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$$

دوسرامرحلہ: مساوی اجزا کے تین، تین کے گروپ بنایئے۔

$$1728 = (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3 \times 3)$$

تیسرا مرحلہ: ہر گروپ سے ایک جز ضربی لیجیے اور ذیل میں بتائے گئے طریقہ کے مطابق ضرب دیجیے۔

$$\sqrt[3]{1728} = 2 \times 2 \times 3 = 12$$

$$\therefore \sqrt[3]{1728} = 2 \times 2 \times 3 = 12$$

آیئے مزید اور مثالوں کے ذریعہ سمجھیں۔

مثال 15: 4096 کا جذرالمکعب معلوم کیجیے؟

حل: 4096 کے مفرد اجزائے ضربی میں تحلیل کرنے پر

2	4096
2	2048
2	1024
2	512
2	256
2	128
2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
	2

$$4096 = (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2)$$

$$\sqrt[3]{4096} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

$$\therefore \sqrt[3]{4096} = 16$$

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20
SCERT TELANGANA

6.15 دیئے ہوئے عدد کے جذرالمکعب کا تخمینہ

اگر ہم واقف ہیں کہ دیا ہوا عدد ایک مکعب ہے تو اس کا جذرالمکعب ذیل کے طریقہ سے بھی معلوم کیا جاسکتا ہے۔

آیئے اسی طریقہ سے 9261 کے جذرالمکعب کا تخمینہ کریں۔

مرحلہ 1: اکائی کے مقام سے شروع کرتے ہوئے تین ہندسوں کے گروپ بنائیں۔

یعنی 9 261

دوسرا گروپ پہلا گروپ

مرحلہ 2: پہلے گروپ یعنی 261 سے مطلوبہ جذرالمکعب کے اکائی کا مقام حاصل ہوگا چونکہ یہ گروپ اپنے اکائی کے مقام پر 1 پر ختم ہوتا ہے۔لہٰذا اس کے جذرالمکعب کے اکائی کا ہندسہ بھی 1 ہوگا۔

مرحلہ 3: دوسرا گروپ یعنی 9 لیجئے

ہم جانتے ہیں کہ $2^3 < 9 < 3^3$

چونکہ اقل ترین عدد 2 ہے۔ یہ عدد مطلوبہ جذرالمکعب کے دہائی کے مقام پر واقع ہوگا۔

لہٰذا $\therefore \sqrt[3]{9261} = 21$

مشق - 6.5

1) مفرد اجزائے ضربی کے طریقہ سے حسب ذیل کے اعداد کا جذرالمکعب معلوم کیجئے؟

1) 343 2) 729 3) 1331 4) 2744

2) تخمینہ کرتے ہوئے ذیل کے اعداد کے جذرالمکعب بتایئے؟

1) 1512 2) 2197 3) 3375 4) 5832

3) صحیح یا غلط بتلایئے؟

(i) ایک جفت عدد کا مکعب طاق ہوگا۔

(ii) ایک کامل مکعب دو صفروں پر ختم ہوتا ہے۔

(iii) اگر کوئی عدد 5 پر ختم ہوتا ہو تو اس کا مکعب بھی 5 ہی پر ختم ہوگا۔

(iv) صفر پر ختم ہونے والے کسی عدد کا مکعب اپنے سیدھے جانب تین صفر رکھتا ہے۔

(v) ایک واحد ہندسی عدد کا مکعب بھی واحد ہندسہ ہوسکتا ہے۔

(vi) ایسا کوئی کامل مکعب نہیں پایا جاتا جو 8 پر ختم ہوتا ہو۔

(vii) کسی دو ہندسی عدد کا مکعب تین ہندسی عدد ہوسکتا ہے۔

4) ایک ایسا دو ہندسی عدد محسوب کیجئے جو کہ ایک مربع ہونے کے ساتھ ساتھ ایک مکعب بھی ہو؟

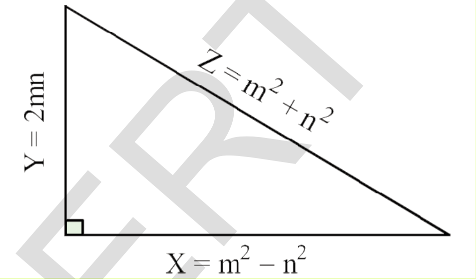
SCERT TELANGANA

ہم نے کیا سیکھا!

- کسی عدد کے مربع میں پائے جانے والے ہندسوں کا تخمینہ کرنا۔
- مربعی اعداد کے مختلف نمونوں کو لکھنا۔
- a,b,c مثبت صحیح اعداد ہیں اگر $a^2+b^2=c^2$ تب $\{a,b,c\}$ فیثا غوری تثلیث ہوں گے۔
- مفرد اجزائے ضربی کے طریقے سے اور تقسیم کے طریقے سے جذر المربع معلوم کرنا۔
- غیر کامل اعداد کا جذر المربع محسوب کرنا۔
- مفرد اجزائے ضربی کے طریقے سے مکعب جذر معلوم کرنا۔
- ایک عدد کے جذر المکعب کا تخمینہ لگانا۔
- ایک صحیح عدد کا مربع ایک صحیح عدد ہی ہوتا ہے جو کہ ایک مربعی عدد ہوتا ہے۔ جبکہ ایک ناطق عدد کا مربع کامل مربع ہوتا ہے۔
- جذر المربع، مربع کا معکوس ہوتا ہے
- اگر کسی عدد کو خود اُسی عدد سے 3 مرتبہ ضرب دینے پر مکعب عدد کہلاتا ہے

ابدی مثلث

ایک قائم الزاویہ مثلث کے اضلاع کے طول خود معلوم کرنے کے لیے ضابطے کو ڈائی پو ہائیٹس نے پیش کیا۔ یہ ضابطہ قدیم یونانیوں کے دور سے ہی چلا آ رہا ہے جو درج ذیل ہے۔



ایک قدم $x = m^2 - n^2$

دوسرا قدم $y = 2mn$

وتر $z = m^2 + n^2$

اعداد m اور n صحیح اعداد ہیں، جن کو بغیر کسی ترتیب کے (دل چاہے) منتخب کیا جاتا ہے

m	n	$X = m^2 - n^2$	$Y = 2mn$	$Z = m^2 + n^2$
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
5	2	21	20	29
4	3	7	24	25
4	1	15	8	17

SCERT TELANGANA

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20

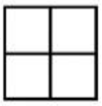
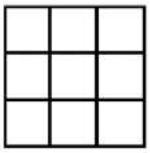
جذرالمربع اور جذرالمکعب
Square roots and Cube roots

6

6.0 تعارف

ایک مربع اکائی ایک ایسا مربع ہے جس کا ضلع '1' اکائی ہے۔

آیئے ہم اکائی مربعوں کو استعمال کرتے ہوئے مربع اشکال بناتے ہیں۔
استعمال کیئے جانے والے اکائی مربعوں کی تعداد پر غور کیجیے۔

سلسلہ نشان	شکل	ضلع کا طول اکائیوں میں	استعمال کئے گئے اکائی مربعوں کی تعداد
1		1	1
2		2	4
3		3	9

اسی طرح اگلے دو مربع بنائیے۔

کیا آپ اندازہ لگا سکتے ہیں کہ 6 اکائیاں ضلع والا ایک مربع بنانے کے لیے جملہ کتنے اکائی مربعے کی ضرورت پڑتی ہے؟

مندرجہ بالا مشاہدات سے یہ سمجھ سکتے ہیں کہ اکائی مربع 1,4,9,16,25,......... سے ہم مربع اشکال بنا سکتے ہیں۔

اعداد 1,4,9,16,25,...... کو اس طرح ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

دیئے ہوئے اجزا کے نمونہ پر غور کیجیے

$1 = 1 \times 1 = 1^2$

$4 = 2 \times 2 = 2^2$

$9 = 3 \times 3 = 3^2$

$16 = 4 \times 4 = 4^2$

$25 = \ldots\ldots \times \ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$

$36 = \ldots\ldots\ldots \times \ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$

....

....

$m = n \times n = n^2$

SCERT TELANGANA

آپ نے مشاہدہ کیا کہ دیئے گئے نمونے میں اعداد کو دو مساوی اجزا کے حاصل ضرب سے ظاہر کیا گیا ہے۔ ایسے اعداد کامل مربع کہلاتے ہیں۔ حسب ذیل کامل مربع اعداد کا مشاہدہ کیجیے۔

(i) $9 = 3 \times 3$

(ii) $49 = 7 \times 7$

(iii) $1.44 = 1.2 \times 1.2$

(iv) $2.25 = 1.5 \times 1.5$

v) $\frac{9}{16} = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4}$

vi) $\frac{4}{12.25} = \frac{2}{3.5} \times \frac{2}{3.5}$

صورت (i) (ii) میں ہم یہ مشاہدہ کرتے ہیں کہ کامل مربع اعداد 9 اور 99 صحیح اعداد ہیں۔ ایسے کامل مربع اعداد کی عام شکل $m=n\times n$ ہوتی ہے جہاں m اور n صحیح اعداد ہیں۔ صورت (iii)، (iv) اور (v) میں کا مربع اعداد صحیح اعداد نہیں ہیں۔

عام طور پر ایک صحیح عدد 'm' کو n^2 سے ظاہر کیا جاسکتا ہے جہاں 'n' ایک صحیح عدد ہے تب 'm' ایک مربع عدد ہے یا 'm' 'n' کا مربع ہے۔

''تمام مربع اعداد کامل مربع ہوتے ہیں'' لیکن تمام کامل مربعے مربع اعداد نہیں ہو سکتے۔

مثال: 2.25 ایک کامل مربع ہے کیوں کہ اسے $(1.5)^2$ سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ یہ ایک صحیح عدد کا مربع نہیں ہے۔ لہذا یہ مربع عدد نہیں ہے۔ کیا 42 ایک مربع عدد ہے؟

ہم جانتے ہیں کہ $6^2=36$ اور $7^2=49$، اگر 42 ایک مربع عدد ہو تو یہ ضروری ہے کہ یہ صحیح عدد کا بھی مربع ہو۔ 6 اور 7 کے درمیان کونسا عدد ہونا چاہیے۔ لیکن 6 اور 7 کے درمیان ایسا کوئی صحیح عدد نہیں پایا جاتا۔ لہٰذا 42 ایک مربع عدد نہیں ہے۔

دیئے گئے جدول میں کامل مربعوں کا مشاہدہ کیجیے۔

(1)	2	3	(4)	5	6	7	8	(9)	10
11	12	13	14	15	(16)	17	18	19	20
21	22	23	24	(25)	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	(36)	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	(49)	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	(64)	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
(81)	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	(100)

کیا جدول میں بتائے گئے اعداد کے علاوہ بھی دوسرے مربع اعداد ہوتے ہیں؟

یہ کیجیے

1۔ ان کے درمیان پائے جانے والے کامل مربع معلوم کیجیے؟ (i) 100 اور 150 (ii) 150 اور 200

2۔ کیا 56 ایک کامل مربع ہے؟ وجوہات بتلائیے۔

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20

SCERT TELANGANA

6.1: مربع اعداد کی خصوصیات؟

مشاہدہ کیجیے اور ذیل کے جدول میں خالی جگہوں کو پر کیجیے۔

عدد	مربع
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	....
7	49
8	64
....	81
10	100

عدد	مربع
11	121
12	144
13	....
14	196
15	225
16	....
17	289
18	324
19	361
20	400

عدد	مربع
21	441
22	....
23	529
....	576
25	625
....	....
....	....
....	....
....	....
....	....

اوپر دیئے گئے جدول میں مربع اعداد کے اکائی کے مقام کے ہندسوں پر غور کیجیے۔ کیا آپ مشاہدہ کرتے ہیں کہ یہ تمام اعداد 9 یا 0,1,4,6,9 پر ختم ہوتے ہیں۔ کوئی بھی اکائی کے مقام پر 2، 3، 7 یا 8
0، 1، 4، 6 یا 9 ایسے اعداد جس کے اکائی کے مقام پر 2، 3، 7 یا 8 ہو کامل مربع نہیں ہوتے"۔
کیا ہم کہہ سکتے ہیں کہ 0 یا 1,5,6,9 پر ختم ہونے والے تمام اعداد مربع اعداد ہوتے ہیں۔ اس کے بارے میں غور کیجیے۔

1. اندازہ کیجیے اور وجہ بتائیے کہ ذیل میں دیئے گئے کونسے اعداد کامل مربع ہیں۔ اوپر کے جدول سے ثابت کیجیے۔

(i) 84 (ii) 108 (iii) 271 (iv) 240 (v) 529

1,9,11,19,21 کے مربعے لکھیے۔

کیا آپ اعداد کے اکائی ہندسہ اور ان کے مربعوں کے درمیان کوئی رشتہ محسوس کرتے ہیں؟

یہ مشاہدہ کیا گیا کہ اگر کسی عدد کے اکائی کے مقام پر 1 یا 9 ہو تو اس کے مربع عدد کے اکائی کے مقام پر ہمیشہ 1 ہوتا ہے۔

اگر ایک عدد کے اکائی کے مقام پر 4 یا 6 ہو تب اس کے مربعے کے اکائی کے مقام پر ہمیشہ 6 ہوتا ہے۔

اسی طرح 0، 2، 3، 5، 7 اور 8 پر ختم ہونے والے اعداد کے مربعوں کے اکائی کے مقام پر آنے والے ہندسوں کا جائزہ لیجیے۔

SCERT TELANGANA

کوشش کیجیے

1. ذیل میں دیئے گئے کون سے اعداد اپنے اکائی کے مقام پر 'ایک' رکھتے ہیں؟

(i) 126^2 (ii) 179^2 (iii) 281^2 (iv) 363^2

2. ذیل میں دیئے گئے کون سے اعداد اپنے اکائی کے مقام پر '6' رکھتے ہیں؟

(i) 116^2 (ii) 228^2 (iii) 324^2 (iv) 363^2

سوچئیے ، بحث کیجئیے اور لکھئیے

رادھا یہ کہتی ہے کہ جفت اعداد کے مربع جفت ہوتے ہیں اور طاق اعداد کے مربعے طاق ہوتے ہیں۔ کیا آپ اس سے متفق ہیں؟ جانچ کیجیے۔

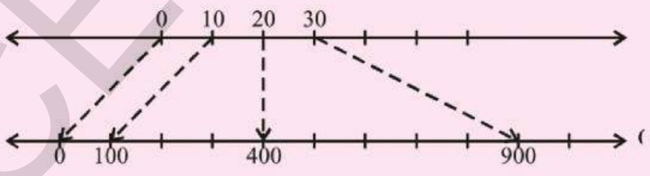
غور کیجیے اور جدول کو مکمل کیجیے:

عدد	ان کے مربع میں پائے جانے والے ہندسوں کی تعداد	
	اقل ترین	اعظم ترین
1-9	1	2
10-99	....	4
100-999	5	....
1009-9999	7	8
n ہندسوں	....	....

کوشش کیجیے

1. اندازہ لگائیے کہ دیئے گئے اعداد کے مربعوں میں کتنے ہندسے پائے جاتے ہیں۔

(i) 72 (ii) 103 (iii) 1000



27، 20 اور 30، کے درمیان واقع ہے۔

27^2، 20^2 اور 30^2، کے درمیان واقع ہے۔

بتلائے کہ حسب ذیل میں سے کونسا 27^2 کا کامل مربع ہوگا

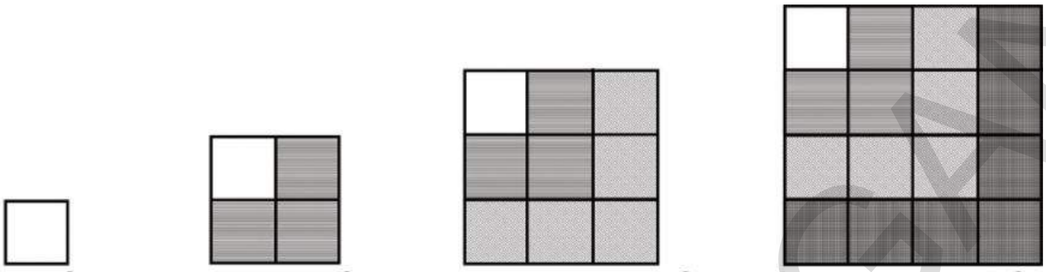
(i) 329 (ii) 525 (iii) 529 (iv) 729

SCERT TELANGANA

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20

6.2 مربع میں دلچسپ نمونے

1. حسب ذیل نمونوں کا مشاہدہ کیجئے اور انہیں مکمل کیجئے



$1 = 1^2$ $\quad$ $1+3 = 4 = 2^2$ $\quad$ $1+3+5 = 9 = 3^2$ $\quad$ $1+3+5+7 = 16 = 4^2$

$1 = 1 = 1^2$

$1 + 3 = 4 = 2^2$

$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$

$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = \ldots\ldots\ldots = (\ )^2$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = \ldots\ldots\ldots = (\ )^2$

اس سے عموماً ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ پہلے 'n' طاق طبعی اعداد کا مجموعہ n^2 کے مساوی ہوتا ہے۔

2: ذیل کے نمونے کا مشاہدہ کیجیے اور خالی جگہوں کو پر کیجیے۔

$(11)^2 = 121$

$(101)^2 = 10201$

$(1001)^2 = 1002001$

$(10001)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$(1000001)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

3: ذیل کے نمونہ کا مشاہدہ کیجیے اور انہیں مکمل کیجیے۔

$1^2 = 1$

$11^2 = 1\ 2\ 1$

$111^2 = 1\ 2\ 3\ 2\ 1$

$1111^2 = 1\ 2\ 3\ 4\ 3\ 2\ 1$

$11111^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$111111^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

'Palindrome' وہ لفظ ہے جو کسی فقرے، جملہ یا عدد کو
سیدھا یا الٹا پڑھنے پر بھی وہی پڑھا جائے گا
مثلاً نادان، داماد 15651 وغیرہ۔

SCERT TELANGANA

4. ذیل کے نمونے سے غائب شدہ اعداد معلوم کیجیے۔

$1^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2$

$2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2$

$3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$

$4^2 + 5^2 + (\ )^2 = 21^2$

$5^2 + (\ )^2 + 30^2 = (\ )^2$

$6^2 + 7^2 + (\ )^2 = (\ )^2$

> کیا مربع کے اساسوں کے درمیان کوئی رشتہ پایا جاتا ہے؟ تیسرے مربع کا اساس کس طرح پہلے اور دوسرے مربع اعداد کے اساس سے رشتہ رکھتا ہے؟ اخذ کردہ مربع عدد کا اساس کس طرح تیسرے مربع عدد کے اساس سے رشتہ رکھتا ہے؟

5. ذیل کے نمونے سے غائب شدہ اعداد معلوم کیجیے۔

$3^2 = 9 = 4 + 5 \qquad \left(\frac{3^2-1}{2} + \frac{3^2+1}{2}\right)$

$5^2 = 25 = 12 + 13 \qquad \left(\frac{5^2-1}{2} + \frac{5^2+1}{2}\right)$

$7^2 = 49 = 24 + 25 \qquad (\quad + \quad)$

$11^2 = 121 = ... + ... \qquad \left(\frac{11^2-1}{2} + \frac{11^2+1}{2}\right)$

$15^2 = 225 = ... + ... \qquad (\quad + \quad)$

اس سے ہم یہ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ کوئی بھی طاق عدد کے مربع کو دو متصلہ اعداد کے مجموعہ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ اگر 'n' ایک طاق عدد ہو تو ہم اس کو $\left(\frac{n^2-1}{2} + \frac{n^2+1}{2}\right)$ سے ظاہر کریں گے۔

6. متواتر مربع اعداد کے درمیان اعداد: حسب ذیل جدول کا مشاہدہ کیجیے اور اسے حل کیجیے۔

متواتر مربع	متواتر مربع اعداد کے درمیانی اعداد	رشتہ
$1^2 = 1; 2^2 = 4$	(1 اور 4 کے درمیان 2 اور 3 اعداد پائے جاتے ہیں)	2 x پہلے عدد کا اساس 1, (2 x 1 = 2)
$2^2 = 4 ; 3^2 = 9$	5, 6, 7, 8, (4 اور 9 کے درمیان 4 اعداد پائے جاتے ہیں)	2 x پہلے عدد کا اساس 2, (2 x 2 = 4)
$3^2 = 9 ; 4^2 = 16$	10, 11, 12, 13, 14, 15 (9 اور 16 کے درمیان 6 اعداد پائے جاتے ہیں)	2 x پہلے عدد کا اساس 3, (2 x 3 = 6)
$4^2 = 16 ; 5^2 = 25$	______________	2 x پہلے عدد کا اساس 4, (2 x 4 = 8)
$5^2 = 25 ; 6^2 = 36$	______________	______________
______________	______________	______________

SCERT TELANGANA

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20

اوپر کے جدول سے کیا آپ نے متواتر مربع اعداد اوران کے درمیانی اعداد کے درمیان موجود رشتہ پر غور کیا؟

اوپر کے جدول کی مدد سے n^2 اور $(n+1)^2$ کے درمیان پائے جانے والے غیر مربعی اعداد کی تعداد معلوم کرنے کی کوشش کیجیے۔

n^2 اور $(n+1)^2$ کے درمیان '$2n$' غیر مربعی اعداد پائے جاتے ہیں۔

یہ کیجیے

1۔ 9^2 اور 10^2 کے درمیان کتنے غیر کامل مربع اعداد پائے جاتے ہیں؟

2۔ 15^2 اور 16^2 کے درمیان کتنے غیر کامل مربع اعداد پائے جاتے ہیں؟

کوشش کیجیے

ریحان کہتا ہے کہ 9^2 اور 11^2 کے درمیان 37 غیر مربعی اعداد پائے جاتے ہیں۔ کیا وہ صحیح ہے؟ وجہ بتلائیے۔

مشق - 6.1

.1 حسب ذیل اعداد کے مربع میں اکائی کے مقام پر کونسا ہندسہ ہوگا؟

(i) 39 (ii) 297 (iii) 5125 (iv) 7286 (v) 8742

.2 حسب ذیل اعداد میں کونسے کامل مربع ہیں؟

(i) 121 (ii) 136 (iii) 256 (iv) 321 (v) 600

.3 ذیل کے اعداد کامل مربع نہیں ہیں۔ وجوہات بتلائیے۔

(i) 257 (ii) 4592 (iii) 2433 (iv) 5050 (v) 6098

.4 کیا ہی ذیل کے اعداد کے مربعے جفت ہونگے یا طاق۔ معلوم کیجیے۔

(i) 431 (ii) 2826 (iii) 8204 (iv) 17779 (v) 99998

.5 ذیل کے اعداد کے مربعوں کے درمیان کتنے اعداد پائے جاتے ہیں۔

(i) 25; 26 (ii) 56; 57 (iii) 107;108

.6 بغیر جمع کیئے ذیل کے اعداد کا مجموعہ معلوم کیجیے۔

(i) $1+3+5+7+9=$

(ii) $1+3+5+7+9+11+13+15+17=$

(iii) $1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21+23+25=$

SCERT TELANGANA

6.3: فیثا غورث کا قانون تثلیث

ذیل پر غور کیجیے

(i) $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$

(ii) $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$

اعداد (3, 4, 5) اور (5, 12, 13) فیثا غورث کے اعداد کے تثلیث کی چند مثالیں ہیں۔

عام طور پر a,b,c مثبت صحیح اعداد ہیں۔ اگر $a^2+b^2 = c^2$ تب a,b,c مثبت فیثا غورث کے اعداد تثلیث کہلاتے ہیں۔ اگر a,b,c کے درمیان کوئی مشترک جز نہ ہو سوائے '1' کے تب (a,b,c) (تین اعداد) ابتدائی تین اعداد (Primitive triple) کہلاتے ہیں۔

یہ کیجیے

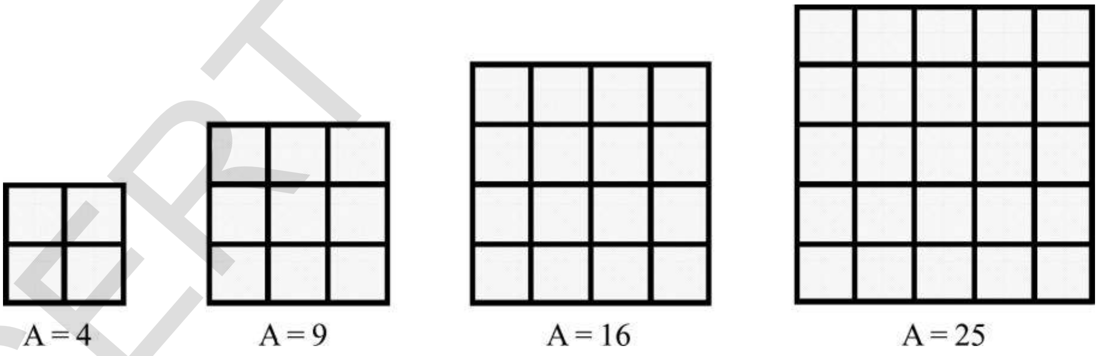
1. جانچ کیجیے کہ آیا ذیل کے اعداد فیثا غورث کے اعداد ثلیث ہیں

(i) 2, 3, 4 (ii) 6, 8, 10 (iii) 9, 10, 11 (iv) 8, 15, 17

2. ایک فیثا غورث کے اعداد کا ایک جوڑ لیجیے۔ ان کے اضعاف لکھئے۔ جانچ کیجیے کہ آیا اضعاف فیثا غورث کے اعداد ہیں؟

6.4: جذر المربع

ذیل کے مربعوں پر غور کیجیے اور جدول مکمل کیجیے۔



مربع کا ضلع (سمر میں)	مربع کا رقبہ (مربع سمر میں)
2	4 = 2 x 2
3	9 = 3 x 3
_____	16 = 4 x 4
_____	25 = 5 x 5

صف/کالم میں اکائی مربعوں کی تعداد، مربع کے ضلع کو ظاہر کرتی ہے۔

SCERT TELANGANA

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20

ایک مربع کا رقبہ اور اس کے ضلع میں کوئی رشتہ پایا جاتا ہے؟

ہم جانتے ہیں کہ مربع کا رقبہ = ضلع × ضلع = (ضلع)

اگر مربع کا رقبہ 169 مربع سمر ہو تو اس کا ضلع کیا ہوگا؟

فرض کیجئے کہ ضلع کا طول x سمر ہے۔

$= 169 = x^2$

تب ضلع کا طول 13 سمر ہوتا ہے۔

اس طرح اگر ایک مربع عدد کو دو مساوی اعداد کے حاصل ضرب کے طور پر ظاہر کیا جائے تو وہ 'جز' اس مربع عدد کا جذر المربع کہلائے گا۔

مثال 1: $3^2 = 9$ اس لیے 9 کا جذر المربع 3 ہے۔

$4^2 = 16$ اس لیے 16 کا جذر المربع 4 ہے۔

$5^2 = 25$ اس لیے 25 کا جذر المربع 5 ہے۔

اگر $y^2 = x$ تب x کا جذر المربع y ہوگا ($\sqrt{x} = y$)

5 اور 5- دونوں کا مربع 25 ہی ہے
اسی طرح 25 کے جذر المربع 5 اور 5- ہوں گے۔
ہم اس باب میں صرف مثبت جذر المربعوں کا احاطہ کریں گے۔ ان جذر المربعوں کو اصل جذر المربع کہتے ہیں اور $\sqrt{25} = 5$ لکھا جاتا ہے

مثال 2: $2^2 = 4$ کیوں کہ ($\sqrt{4} = 2$)

$4^2 = 16$ کیوں کہ ($\sqrt{16} = 4$)

$15^2 = 225$ کیوں کہ ($\sqrt{15} = 225$) وغیرہ

حسب ذیل جدول کو مکمل کیجئے

مربع	جذر المربع
$1^2 = 1$	$\sqrt{1} = 1$
$2^2 = 4$	$\sqrt{4} = 2$
$3^2 = 9$	$\sqrt{9} = 3$
$4^2 = 16$	$\sqrt{16} = 4$
$5^2 = 25$	$\sqrt{25} =$ ……..
$6^2 = 36$	$\sqrt{36} =$ ……..
$7^2 =$ ……..	$\sqrt{\ }$ = ………
$8^2 =$ ……..	$\sqrt{\ }$ = ………
$9^2 =$ ……..	$\sqrt{\ }$ = ………
$10^2 =$ ……..	$\sqrt{\ }$ = ………

SCERT TELANGANA

6.5 متواتر طاق اعداد کا عمل تفریق کے ذریعہ جذرالمربع معلوم کرنا

ہم جانتے ہیں کہ ہر مربع کا اظہار'1' سے شروع کرتے ہوئے متواتر طاق طبعی اعداد کے مجموعہ کے طور پر لکھا جا سکتا ہے۔

غور کیجیے

$$1 + 3 = 4 = 2^2$$

$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$$

اسی نمونے کی الٹی ترتیب سے جذرالمربع معلوم کرنا:

مثال کے طور پر $\sqrt{49}$ کی قدر معلوم کیجیے

پہلا قدم $49 - 1 = 48$ (پہلے طاق عدد سے تفریق کرنے پر)

دوسرا قدم $48 - 3 = 45$ (دوسرے طاق عدد سے تفریق کرنے پر)

تیسرا قدم $45 - 5 = 40$ (تیسرے طاق عدد سے تفریق کرنے پر)

چوتھا قدم $40 - 7 = 33$

پانچواں قدم $33 - 9 = 24$

چھٹواں قدم $24 - 11 = 13$

ساتواں قدم $13 - 13 = 0$

ہم جانتے ہیں کہ

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 7^2 = 49$

$49 - \{1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13\} = 0$

چنانچہ 49 کامل مربع ہے

49 سے ہم نے '1' سے شروع کرتے ہوئے سات متواتر طاق اعداد کو تفریق کیا تو ساتویں مرحلہ پر صفر (0) حاصل ہوا۔

$$\therefore \sqrt{49} = 7$$

نوٹ: اگر اس مرحلہ پر نتیجہ صفر (0) نہ ہو تو دیا ہوا عدد کامل مربع نہیں ہوتا۔

یہ کیجیے

(i) تفریق کے عمل کو دہراتے ہوئے معلوم کیجیے کہ ذیل کے اعداد کامل مربع ہیں یا نہیں؟

(i) 55 (ii) 90 (iii) 121

اوپر بتلائے گئے تفریق کے عمل کو دہراتے ہوئے کسی بھی مربع اعداد کے جذرالمربع معلوم کرنا آسان ہے لیکن بڑے اعداد جیسے ....,625,729 کے لیے اس طریقے سے تاخیر ہوتی ہے۔ اس لیے ہم مختصر طریقہ سے جذرالمربع معلوم کرنے کی کوشش کریں گے۔

SCERT TELANGANA

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20

دیئے گئے اعداد کے جذرالمربع معلوم کرنے کے دو طریقے ہیں۔ وہ یہ ہیں:

(i) مفرد اعداد سے اجزائے ضربی کا طریقہ

(ii) تقسیم کا طریقہ

6.6: مفرد اعداد کے اجزائے ضربی کے طریقہ سے جذرالمربع معلوم کرنا:

2	484
2	242
11	121
11	11
	1

اب ہم اجزائے ضربی کے طریقہ سے 484 کا جذرالمربع معلوم کریں گے۔

مرحلہ 1: دیئے گئے عدد 484 کو مفرد اجزا میں تحلیل کیجیے تب ہمیں

$$484 = 2 \times 2 \times 11 \times 11$$

مرحلہ 2: مساوی اجزا کے جوڑ بنا کر ہم حاصل کرتے ہیں

$$484 = (2 \times 2) \times (11 \times 11)$$

مرحلہ 3: ہر جوڑ سے ایک جز کا انتخاب کر کے ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$\sqrt{484} = 2 \times 11 = 22$$

$$484 = (2 \times 11) \times (2 \times 11) = (2 \times 11)^2$$
$$\sqrt{484} = \sqrt{(2 \times 11)^2}$$
$$= 2 \times 11$$
$$= 22$$

اس طرح، 484 کا جذرالمربع 22 ہے۔

اب ہم کچھ اور مثالیں حل کریں گے۔

2	1296
2	648
2	324
2	162
3	81
3	27
3	9
3	3
	1

مثال 3: مفرد اجزائے ضربی کے طریقہ سے 1296 کا جذرالمربع معلوم کیجیے۔

حل: 1296 کو مفرد اجزائے ضربی میں تحلیل کرنے پر ہمیں

$$1296 = (2 \times 2) \times (2 \times 2) \times (3 \times 3) \times (3 \times 3)$$

$$\sqrt{1296} = 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

$$\therefore \sqrt{1296} = 36$$

مثال 4: 2025 کا جذرالمربع معلوم کیجیے۔

حل: 2025 کے اجزائے ضربی میں تحلیل کیجیے تب ہمیں

2	2025
5	405
3	81
3	27
3	3
	1

$$2025 = (3 \times 3)(3 \times 3)(5 \times 5)$$
$$\sqrt{2025} = 3 \times 3 \times 3$$
$$\sqrt{2025} = 45$$

SCERT TELANGANA

مثال:5 ایسا اقل ترین عدد معلوم کیجئے جس سے 720 کو ضرب دینے پر وہ کامل مربع بن جائے۔

حل: 720 کو مفرد اجزا میں تحلیل کرنے پر ہمیں

2	720
2	360
2	180
2	90
3	45
3	15
5	5
	1

$720 = (2 \times 2) \times (2 \times 2) \times (3 \times 3) \times 5$

ہم دیکھتے ہیں کہ 2,2,3 جوڑیوں میں پائے جاتے ہیں جبکہ 5 کا جوڑ نہیں ہے۔

اس لیے دیئے گئے عدد کو 5 سے ضرب دینا چاہیئے تا کہ یہ کامل مربع بن جائے اس طرح حاصل ہونے والا عدد کامل مربع ہوگا $720 \times 5 = 3600$

مثال:6 وہ اقل ترین عدد معلوم کیجئے جس سے 6000 کو تقسیم کرنے پر وہ کامل مربع بن جائے اور محصلہ عدد کا جذر المربع بھی معلوم کیجئے۔

حل: 6000 کو مفرد اجزائے ضربی میں تحلیل کرنے پر ہمیں

2	6000
2	3000
2	1500
2	750
3	375
5	125
5	25
5	5
	1

$6000 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times 3 \times \underline{5 \times 5} \times 5$

ہم دیکھتے ہیں کہ 2 ‘2 اور 5 کے جوڑ ہیں جبکہ 3 اور 5 کے جوڑ نہیں ہیں۔ اس لیے ہم دیئے گئے عدد کو 3x5=15 سے تقسیم کریں گے۔

اس طرح حاصل ہونے والا کامل مربع $6000 \div 15 = 400$

$400 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5$

400 کا جذر المربع ہے۔

2	400
2	200
2	100
2	50
5	25
5	5
	1

$$\sqrt{400} = \sqrt{(2\times2)\times(2\times2)\times(5\times5)}$$
$$= 2 \times 2 \times 5$$
$$= 20$$

مشق - 6.2

1۔ ذیل کے اعداد کے جذر المربع مفرد اجزائے ضربی کے طریقہ سے معلوم کیجئے۔

(i) 441 (ii) 784 (iii) 4096 (iv) 7056

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20
SCERT TELANGANA

.2 اقل ترین عدد معلوم کیجیے جس سے 3645 کو ضرب دینے پر وہ کامل مربع بن جائے؟

.3 اقل ترین عدد معلوم کیجیے جس سے 2400 کو ضرب دینے پر وہ کامل مربع بن جائے اور محصلہ عدد کا بھی جذر المربع معلوم کیجیے؟

.4 اقل ترین عدد معلوم کیجیے جس سے 7776 کو تقسیم کرنے پر وہ کامل مربع بن جاتا ہے؟

.5 ایک باغ میں 1521 درخت اس طرح لگائے گئے ہیں کہ باغ میں درختوں کے جتنے صف ہیں اتنے ہی درخت ہر صف میں موجود ہیں تب درختوں کے صفوں کی تعداد معلوم کیجیے اور ہر صف میں درختوں کی تعداد کیا ہوگی معلوم کیجیے۔

.6 ایک مدرسہ میں طلبا سے وصول ہونے والی فیس ماہانہ 2601 روپے ہے اگر فی طالب علم کی فیس مدرسہ کے طلبا کی کل تعداد کے مساوی ہو تب مدرسہ میں طلبا کی کل تعداد کتنی ہوگی؟

.7 دو اعداد کا حاصل ضرب 1296 ہے۔ اگر ایک عدد دوسرے کا 16 گنا ہو تو دونوں اعداد معلوم کیجیے۔

.8 7921 سپاہی ایک آڈیٹوریم میں اس طرح بیٹھتے ہیں کہ ہر صف میں جتنے سپاہی ہیں اتنے ہی صف آڈیٹوریم میں موجود ہیں۔ آڈیٹوریم میں صفوں کی تعداد معلوم کیجیے۔

.9 ایک مربعی کھیت کا رقبہ 5184 مربع میٹر ہے۔ مستطیلی کھیت کا رقبہ معلوم کیجیے جس کا احاطہ مربعی کھیت کے احاطے کے مساوی ہے اور جس کا طول، اس کے عرض کا دوگنا ہے۔

6.7: تقسیم کے طریقہ سے جذر المربع معلوم کرنا

ہم پہلے ہی مفرد اجزائے ضربی کے طریقہ سے جذر المربع معلوم کرنا سیکھ چکے ہیں۔ بڑے اعداد کے لیے یہ عمل طویل اور مشکل بن جاتا ہے۔ تقسیم کے طریقہ سے اس مسئلہ پر قابو پا سکتے ہیں۔ اب ہم تقسیم کے طریقہ سے 784 کا جذر المربع معلوم کریں گے

مرحلہ 1: دیئے گئے عدد کے ہندسوں کے جوڑ بنائیے۔ اکائی کے مقام سے شروع کرتے ہوئے بائیں طرف جائیں۔ ہر جوڑ پر بار لگائیے۔

$|7\overline{84}|$

مرحلہ 2: بڑے سے بڑا عدد معلوم کیجیے جس کا مربع دائیں سے ایک ہندسہ یا پہلے جوڑ کے مساوی یا اس سے کم ہو (جیسا کہ 2) اس عدد کو مقسوم علیہ اور خارج قسمت کی جگہ لکھیے۔

2 | $7\overline{84}$ | 2

مرحلہ 3: ایک ہندسہ یا پہلی جوڑ سے مقسوم علیہ اور خارج قسمت کے حاصل ضرب (2 x 2 = 4) کو تفریق کیجیے (جیسا کہ 7 - 4 = 3)

2 | $7\overline{84}$ | 2
4
3

مرحلہ 4: باقی (جو کہ 3) کے دائیں جانب دوسری جوڑ کو نیچے لائیے (جو کہ 384) اب یہ نیا مقسوم ہے

2 | $7\overline{84}$ | 2
–4
384

مرحلہ 5: اگلے ممکنہ مقسوم علیہ سے خارج قسمت کو دوگنا کیجیے (جو کہ 4 = 2 x 2) اور اس کے دائیں ایک خانہ بنائیے۔

2 | $7\overline{84}$ | 2
–4
4□ | 384

SCERT TELANGANA

2	$\overline{784}$	28
	−4	
4[8]	384	
	384	
	0	

مرحلہ 6: بڑے سے بڑے ممکنہ ہندسہ سے دیئے گئے خانہ کو اس طرح پر کریں کہ نئے مقسوم علیہ کا حاصل ضرب اور یہ ہندسہ نئے مقسوم کے مساوی یا اس سے کم ہو (جو کہ 384 = 8 x 48)

2	$\overline{784}$	28
	−4	
48	384	
	−384	
	0	

مرحلہ 7: تفریق کرنے پر ہم کو صفر '0' حاصل ہوا اس طرح سے خارج قسمت 28 جذر المربع ہوگا۔

$$\therefore \sqrt{784} = 28$$

سوچئے ، بحث کیجئے اور لکھئے

ذیل کی تقسیم پر غور کیجئے۔ وجہ بتلائیے کہ اوپر کی مثال میں مقسوم علیہ 48 میں 8 پر کیوں غور کیا گیا؟

(7

$$\begin{array}{r|l} 4 & 384 \\ & 28 \\ \hline & 104 \\ & 49 = 7^2 \end{array}$$

(8

$$\begin{array}{r|l} 4 & 384 \\ & 32 \\ \hline & 64 \\ & 64 = 8^2 \end{array}$$

(9

$$\begin{array}{r|l} 4 & 384 \\ & 36 \\ \hline & 24 \\ & 81 = 9^2 \end{array}$$

اب ہم چند اور مثالوں پر غور کریں گے۔

مثال 1: 1296 کا جذر المربع معلوم کیجئے۔

حل:

مرحلہ 1

$\overline{12}\,\overline{96}$

مرحلہ 2

3	$\overline{12}\,\overline{96}$	3
	9	

مرحلہ 3

3	$\overline{12}\,\overline{96}$	3
	-9	

مرحلہ 4

3	$\overline{12}\,\overline{96}$	3
	-9	
6	396	

مرحلہ 5

3	$\overline{12}\,\overline{96}$	36
	-9	
66	396	
	- 396	
	0	

a	$a^2+2ab+b^2$	$a+b$
a	a^2	
$2a+b$	$2ab+b^2$	$b(2a+b)=2ab+b^2$
	$2ab+b^2$	
	0	

غور کیجئے

(6

$$\begin{array}{r|l} 6 & 396 \\ & 36 \\ \hline & 36 \\ & 36 = 6^2 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$\therefore \sqrt{1296} = 36$$

SCERT TELANGANA

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20

مثال:2 8281 کا جذر المربع معلوم کیجیے۔

حل:

9	$\overline{82}\ \overline{81}$	91
	-81	
181	181	
	-181	
	0	

اس طرح $\sqrt{8281} = 91$

غور کیجیے

$$18)\overline{181}(1$$
18
―――
1
$1 = 1^2$
―――
0

مثال:3 وہ اعظم ترین چار ہندسی عدد معلوم کیجیے جو کہ کامل مربع ہے۔

حل: اعظم ترین چار ہندسی عدد 9999 ہے۔ ہم 9999 کا تقسیم کے طریقہ سے جذر المربع معلوم کریں گے۔ باقی 198 سے ظاہر ہوتا ہے کہ 198 ' 9999 سے چھوٹا ہے۔ اس کا مطلب یہ ہے اگر ہم 9999 میں سے 198 کو تفریق کریں تو ہم کو ایک کامل مربع حاصل ہوتا ہے۔ جو کہ مطلوبہ کامل مربع ہے۔

9	$\overline{99}\ \overline{99}$	99
	-81	
189	18 99	
	-17 01	
	1 98	

$\therefore 9999 - 198 = 9801$

مثال:4 اقل ترین عدد معلوم کیجیے جس کو 4215 میں سے تفریق کرنے پر وہ کامل مربع بن جاتا ہے؟

حل: تقسیم کے طریقہ سے جذر المربع معلوم کرنے پر ہمیں معلوم ہوا کہ باقی 119 ہے۔ اس کا مطلب ہے اگر ہم 4215 میں سے 119 کو تفریق کریں تو ہم کو ایک کامل مربع حاصل ہوتا ہے۔

$\therefore$ مطلوبہ اقل ترین عدد 119 ہے۔

6	$\overline{42}\ \overline{15}$	64
	-36	
1	6 15	
124	-4 96	
	1 19	

6.8 تقسیمی طریقہ سے اعشاری کسور کے جذر المربع

اب ہم مثال $\sqrt{17.64}$ سے شروع کرتے ہیں

مرحلہ:1 عدد کے صحیح حصہ پر بار لگائیے جو کہ 17 ہے۔ بائیں سے دائیں صحیح حصہ کے ہر جوڑ پر بار لگائیے۔

$\overline{17}.\overline{64}$

مرحلہ:2 بڑے سے بڑا عدد معلوم کیجیے (جو کہ 4) جس کا مربع اصل حصہ کی پہلی جوڑ کے مساوی یا اس سے کم ہو (جو کہ 17) عدد 4 مقسوم علیہ اور پہلی جوڑ 17 مقسوم ہے جبکہ باقی '1' ہے۔ تقسیم کیجیے اور باقی '1' لکھیے۔

4	$\overline{17}\ .\ \overline{64}$	4
	-16	
	1	

مرحلہ:3 164 حاصل کرنے کے لیے باقی کے دائیں جانب اگلا جوڑ لکھیے (جو کہ 64) جو کہ نیا مقسوم بنتا ہے۔

4	$\overline{17}.\overline{64}$	4
	-16	
	1.64	

SCERT TELANGANA

مرحلہ 4: خارج قسمت کو دگنا کیجئے ($2 \times 4 = 8$) اور اس کے دائیں ایک خانہ بنائیے چونکہ 64 اعشاری حصہ ہے اس لیے خارج قسمت میں اعشاریہ لگائیے۔

$$\begin{array}{r|l|l} 4 & \overline{17}.\overline{64} & 4 \\ & -16 & \\ \hline 8\square & -164 & \end{array}$$

مرحلہ 5: بڑے سے بڑا ممکنہ ہندسہ سے خانہ کو اس طرح پر کریں کہ نئے مقسوم علیہ کا حاصل ضرب اور یہ ہندسہ نئے مقسوم یعنی 164 کے مساوی یا اس سے کم ہو۔ یہاں یہ ہندسہ 2 ہے۔

تقسیم کیجئے اور باقی حاصل کیجئے

$$\begin{array}{r|l|l} 4 & \overline{17}.\overline{64} & 4.2 \\ & -16 & \\ \hline 8\boxed{2} & 164 & \\ & -164 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

مرحلہ 6: چونکہ باقی صفر ہے اور کوئی جوڑ بھی نہیں اس طرح $\sqrt{17.64} = 4.2$

اب ہم چند مزید مثالیں حل کریں گے۔

مثال 1: تقسیم کا طریقہ استعمال کرتے ہوئے 42.25 کا جذر المربع معلوم کیجئے۔

مرحلہ 1 $\quad |\overline{42}\,.\,\overline{25}|$

مرحلہ 2

$$\begin{array}{r|l|l} 6 & \overline{42}.\overline{25} & 6 \\ & -36 & \\ \hline & 6 & \end{array}$$

مرحلہ 3

$$\begin{array}{r|l|l} 6 & \overline{42}.\overline{25} & 6.5 \\ 6 & -36 & \\ \hline 125 & 625 & \\ & -625 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

$\therefore \sqrt{42.25} = 6.5$.

مثال 2: $\sqrt{96.04}$ کی قدر معلوم کیجئے۔

حل:

$$\begin{array}{r|l|l} 9 & \overline{96}.\overline{04} & 9.8 \\ 9 & -81 & \\ \hline 188 & 1504 & \\ & -1504 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

اس طرح $\sqrt{96.04} = 9.8$

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20
SCERT TELANGANA

6.9: غیر کامل مربعی اعداد کے جذر المربعوں کا تخمینہ:

اب تک ہم نے کامل مربعوں کے جذر المربعوں کو معلوم کرنا سیکھا۔ اگر بعض اعداد کامل مربعے نہ ہوں تو ان کے جذر صحیح صحیح طور پر معلوم نہیں کئے جاسکتے۔ ایسی تمام صورتوں میں ہمیں جذر المربع کا تخمینہ کرنا پڑتا ہے۔

آیئے اب ہم ایسے ہی غیر کامل مربعی اعداد جیسے $\sqrt{300}$ کا جذر المربع قریب ترین اعداد تک معلوم کریں گے۔

300 کا عدد کامل مربعے 100 اور 400 کے درمیان واقع ہے۔

$$\therefore \quad 100 < 300 < 400$$

$$10^2 < 300 < 20^2$$

$$\text{i.e.} \quad 10 < \sqrt{300} < 20$$

لیکن یہ عدد بھی ہمارے جواب سے قریب تر نہیں ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ $17^2 = 289$ ، $18^2 = 324$

$$289 < 300 < 324$$

$$17 < \sqrt{300} < 18$$

289 وہ کامل مربع ہے جو 300 سے 324 کی نسبت زیادہ قریب ہے۔

$\therefore$ $\sqrt{300}$ کی تخمینی قیمت 17 ہوگی۔

مشق - 6.3

(1 تقسیم کے طریقہ سے ذیل کے اعداد کے جذر المربع محسوب کیجئے۔

(i) 1089 (ii) 2304 (iii) 7744 (iv) 6084 (v) 9025

(2 ذیل کے اعشاری اعداد کے جذر المربع معلوم کیجئے۔

(i) 2.56 (ii) 18.49 (iii) 68.89 (iv) 84.64

(3 وہ اقل ترین عدد معلوم کیجئے جس سے 4000 کو تقسیم کرنے پر کامل مربع بن جاتا ہے؟

(4 اس مربع کا طول کیا ہوگا جس کا رقبہ 4489 مربع سمر ہے۔

(5 ایک باغبان اپنے باغ میں 8289 پودے مربعی حصہ پر لگانا چاہتا ہے۔ ایسا کرنے کے بعد 8 پودے بچ رہتے ہیں۔ بتایئے کہ ہر صف میں کتنے پودے لگائے گئے۔

(6 چار ہندسوں پر مشتمل غیر کامل مربع معلوم کیجئے۔

(7 وہ عدد معلوم کیجئے۔ جسے 6412 میں جمع کرنے پر کامل مربع بن جاتا ہے؟

(8 حسب ذیل اعداد کی قدر اقل ترین مکمل اعداد میں معلوم کیجئے۔

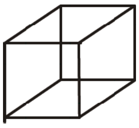
(i) $\sqrt{97}$ (ii) $\sqrt{250}$ (iii) $\sqrt{780}$

SCERT TELANGANA

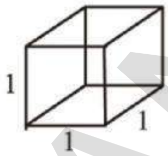
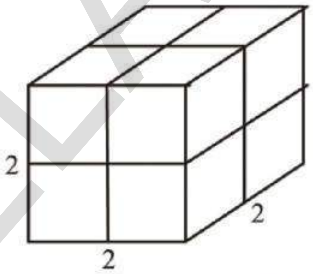
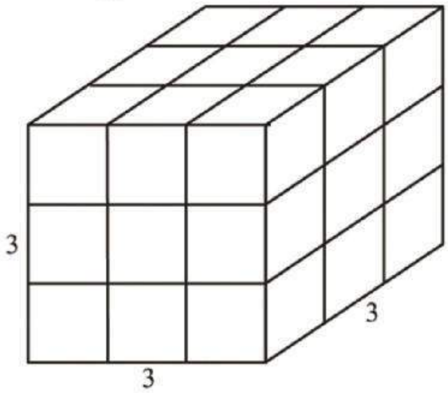
ملعب اور جذرالمکعب

6.10: تعارف

ہم جانتے ہیں کہ ایک مکعب 6 پہلو رکھنے والا مجسم ہوتا ہے۔



اب ہم اکائی مکعبوں کو استعمال کرتے ہوئے مکعب تشکیل دیں گے۔

سلسلہ نشان	شکل	ضلع کی لمبائی	مستعملہ مکعبوں کی تعداد
1		1	1
2		2	8
3		3	27

کیا آپ اگلا مکعب تیار کر سکتے ہیں؟ ایسے مکعب کے لیے جس کے ضلع 5 اکائیاں ہوں کتنے اکائی مکعب درکار ہوں گے؟ اندازہ کیجئے۔

اس طرح ہمیں ایسے مکعب بنانے کے لیے 1، 8، 27، 64 .... درکار ہوں گے۔ ان اعداد کو کامل مکعب یا مکعبی اعداد کہتے ہیں۔

SCERT TELANGANA

7 تعددی تقسیمی جدول اور ترسیمات
Frequency Distribution Tables & Graphs

7.0 تعارف

احمد ٹی وی پر کھیل کی خبریں دیکھ رہا ہے۔ ٹی۔وی پر 2012 اولمپک گیمس میں مختلف مما لک کے جیتے گئے تمغوں کی تفصیلات دکھائی گئیں۔

اولمپکس 2012۔تمغوں کی تعداد

درجہ	ملک	سونا	چاندی	کانسہ	جملہ
1	امریکہ	46	29	29	104
2	چین	38	27	23	88
3	برطانیہ	29	17	19	65
4	روس	24	26	32	82
5	کوریا	13	8	7	28

مندرجہ بالا جدول میں اولمپکس 2012 میں سب سے زیادہ تمغے جیتنے والے پہلے پانچ مما لک کے نام اور ساتھ ہی ساتھ ان تمغوں کی تعداد دی گئی ہے۔

عددی شکل، عبارتی شکل یا ترسیمی شکل میں موجود معلومات جو فیصلہ سازی یا نتیجہ اخذ کرنے میں معاون ہوتی ہیں معطیات (ڈاٹا) کہلاتی ہیں۔

- کس ملک نے سب سے زیادہ تمغے حاصل کیئے؟
- کس ملک نے سب سے زیادہ کانسے کے تمغے حاصل کیئے؟
- جدول میں دی گئی معطیات کی بنیاد پر مزید تین سوالات بنائیے۔

کوشش کیجیے

عبارتی اور عددی شکل میں معطیات (ڈاٹا) کی تین مثالیں دیجیے۔

SCERT TELANGANA

7.1 مرکزی میلانات کی بنیادی پیمائش

جب ہم معطیات کو جمع کرتے ہیں تو اس کی بنیاد پر نتائج کو اخذ کرنا پڑتا ہے۔کبھی حاصل جمع استعمال کرتے ہیں تو کبھی اوسط، وغیرہ۔ پچھلی جماعت میں ہم نے بنیادی پیمائشوں جیسے اوسط، بہتاتیہ اور وسطانیہ کے بارے میں پڑھا ہے۔آیئے ان کا اعادہ کریں۔

7.1.1 اوسط حسابیہ

یہ عام طور پر سب سے زیادہ استعمال ہونے والا مرکزی میلان ہے۔اعداد کے کسی سیٹ کے لیے اوسط حسابیہ ان اعداد کا محض اوسط ہوتا ہے۔یعنی مشاہدات کے مجموعہ کو مشاہدات کی تعداد سے تقسیم کیا جاتا ہے۔

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, ...x_n$ کا اوسط حسابیہ یہ ہے۔

$$\text{اوسط حسابیہ} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ...+ x_n}{N}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} \text{ (مختصر شکل)}$$

$\sum x_i$ تمام x_i کے مجموعے کو ظاہر کرتا ہے۔جہاں i کی قیمت 1 تا n ہوتی ہے۔

مثال 1: ایک یونٹ ٹسٹ میں شاکرنے مختلف مضامین میں 20، 11، 21، 25، 23 اور 14 نشانات حاصل کیے۔اس کے نشانات کا اوسط حسابیہ کیا ہوگا؟

حل: معطیات = 20، 11، 21، 25، 23 اور 14 اوسط حسابیہ $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N}$

$$= \frac{20+11+21+25+23+14}{6} = \frac{114}{6}$$

$$\bar{x} = 19$$

مثال 2: چند مشاہدات کا اوسط حسابیہ 32 پایا گیا۔اگر معطیات میں ایک اور مشاہدہ 48 کا اضافہ کیا جائے تو حاصل ہونے والا حقیقی اوسط حسابیہ کیا ہوگا؟

حل: 7 مشاہدات کا اوسط حسابیہ $\bar{x} = 32$

7 مشاہدات کا مجموعہ $\sum X = 32 \times 7 = 224$

اضافہ کردہ مشاہدہ $= 48$

8 مشاہدات کا مجموعہ $\sum X = 224 + 48 = 272$

8 مشاہدات کا اوسط $x = \frac{\sum X}{N} = \frac{272}{8} = 34$

مثال 3: کسی کلب کے 25 ارکان کی اوسط عمر 38 سال ہے۔اگر 42 سال اوسط عمر والے 5 ارکان کلب چھوڑ دیں تب کلب کے موجودہ ارکان کی اوسط عمر کیا ہوگی؟

حل: کلب کے 25 ارکان کی اوسط عمر = 38 سال

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20
SCERT TELANGANA

25ارکان کی عمر کا مجموعہ $= 38 \times 25 = 950$

کلب چھوڑنے والے 5ارکان کی اوسط عمر $=$ 42 سال

5ارکان کی عمر کا مجموعہ $= 42 \times 5 = 210$

باقی 20ارکان کی عمر کا مجموعہ $= 950 - 210 = 740$

کلب کے موجودہ ارکان کی اوسط عمر $= \frac{\sum x_i}{N} = \frac{740}{20} = 37$ سال

مثال4: 9 مشاہدات کا اوسط حسابیہ 45 حاصل کیا گیا۔ایسا کرتے وقت ایک مشاہدے کو 24 کے بجائے غلطی سے 42 لکھا گیا تب بتائیے صحیح اوسط کیا ہوگا؟

حل:

9مشاہدات کا اوسط $= 45$

9مشاہدات کا مجموعہ $= 45 \times 9 = 405$

حساب کے دوران 24 کے بجائے 42 لکھا گیا۔

لہٰذا 9مشاہدات کا صحیح مجموعہ $= 405 - 42 + 24 = 387$

9مشاہدات کا صحیح اوسط $= \frac{\sum x_i}{N} = \frac{387}{9} = 43$

ہم نے مشاہدہ کیا کہ

- اوپر کے مثالوں سے یہ واضح ہوتا ہے کہ اوسط حسابیہ تمام معطیات کی ایک نمائندہ قدر ہے۔
- معطیات میں اوسط حسابیہ کا انحصار مشاہدات کی تعداد اور ہر ایک مشاہدے کی قدر پر ہوتا ہے۔
- یہ منفرد قدر ہوتی ہے معطیات کی
- اگر معطیات کے تمام مشاہدات کو کسی خاص عدد سے بڑھایا یا گھٹایا جاتا ہے تو اوسط بھی اتنا ہی بڑھتا یا گھٹتا ہے۔
- اگر معطیات کے تمام مشاہدات کو کسی خاص عدد سے ضرب یا تقسیم کیا جاتا ہے تب اوسط بھی اسی عدد سے ضرب یا تقسیم ہوتا ہے۔

7.1.2: انحرافی طریقہ سے اوسط حسابیہ

ایک معطیات میں 5 مشاہدے 7,10.15,21,27 ہیں۔جب استاد نے کہا کہ بغیر حساب کے اوسط کا اندازہ لگائیے تب تین طلبا ارشدؔ کمال اور انجم نے اس طرح اندازہ لگایا۔

- ارشد اندازہ لگاتا ہے کہ یہ سب سے چھوٹی اور سب سے بڑی قدر کے بالکل درمیانی عدد 17 ہے۔
- کمال اندازہ لگاتا ہے کہ معطیات کو (صعودی یا نزولی) ترتیب میں لکھنے پر یہ درمیانی عدد 15 ہے۔
- انجم نے تمام اعداد کو جمع کیا اور ان کی جملہ تعداد سے تقسیم کیا

ہم ان تمام جوابات کو ’’مفروضہ اوسط‘‘ یا ’’تخمینہ اوسط‘‘ کہتے ہیں اور "A" سے تعبیر کرتے ہیں۔

آیئے اب ہم جانچیں گے کہ ان تخمینا جوابات میں کونسا جواب اوسط کے برابر ہے۔

SCERT TELANGANA

مسئلہ 1: غور کیجیے ارشد کا مفروضہ اوسط حسابیہ A = 17

Score	A	in Terms of Deviations
7	17	7 = 17 − 10
10	17	10 = 17 − 7
15	17	15 = 17 − 2
21	17	21 = 17 + 4
27	17	27 = 17 + 10

مشاہدات کا حقیقی اوسط حسابیہ $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{7+10+15+21+27}{5}$

اگر ہر ایک مشاہدے کو مفروضہ اوسط "A" سے انحراف کی شکل میں لکھا جائے تب

$$\bar{x} = \frac{(17-10)+(17-7)+(17-2)+(17+4)+(17+10)}{5}$$

$$= \frac{5\times17}{5}+\frac{-10-7-2+4+10}{5}$$

$$= 17+\frac{-5}{5} = 17-1 = 16$$

لہٰذا اوسط حسابیہ = مفروضہ اوسط + انحراف کا اوسط

مسئلہ 2: غور کیجیے کمال کا مفروضہ اوسط حسابیہ A = 15

مشاہدات کا اوسط حسابیہ $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{7+10+15+21+27}{5}$

انحراف کی شکل میں $\bar{x} = \frac{(15-8)+(15-5)+(15-0)+(15+6)+(15+12)}{5}$

$$= \frac{(5\times15)}{5}+\frac{(-8-5-0+6+12)}{5}$$

$$= 15+\frac{5}{5} = 15+1 = 16$$

مسئلہ 3: انجم کا مفروضہ اوسط حسابیہ A=16

مشاہدات کا اوسط حسابیہ $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{7+10+15+21+27}{5}$

انحراف کی شکل میں $\bar{x} = \frac{(16-9)+(16-6)+(16-1)+(16+5)+(16+11)}{5}$

$$= \frac{(5\times16)}{5}+\frac{(-9-6-1+5+11)}{5}$$

$$= 16+\frac{0}{5} = 16$$

یہ کیجیے

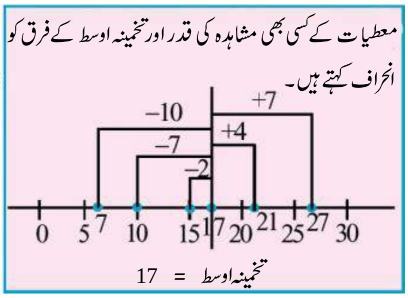
ہر دیئے گئے مسئلہ کے تخمینی اوسط اور حقیقی اوسط کے لئے جدول ترتیب دیجیے حقیقی اوسط اور تخمینی اوسط کے فرق سے انحرافوں کا مشاہدہ کیجیے۔ آپ نے کیا نتیجہ اخذ کیا؟

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 20-2019
SCERT TELANGANA

اوپر کی مثالوں سے یہ بات واضح ہوتی ہے کہ مفروضہ اوسط حسابیہ‘ حقیقی اوسط حسابیہ بن جاتا ہے اگر تمام مشاہدات کے انحراف کا مجموعہ (یا اوسط) صفر '0' ہو۔

ہم اس عمل کی جانچ کو معطیات کے اوسط حسابیہ معلوم کرنے کے لیے بھی استعمال کر سکتے ہیں۔

بیان کردہ مسئلوں سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ اوسط حسابیہ کو مفروضہ اوسط اور تمام مشاہدات کے انحراف کے ذریعہ معلوم کیا جا سکتا ہے۔



اوسط حسابیہ = مفروضہ اوسط + انحراف کا اوسط

$$= \text{مفروضہ اوسط} + \frac{\text{انحراف کا مجموعہ}}{\text{مشاہدات کی تعداد}}$$

$$\bar{x} = A + \frac{\sum (X_1 - A)}{N}$$

مثال 5: دیئے گئے 10 مشاہدات 14,36,25,28,35,32,56,42,50,62 کا اوسط حسابیہ انحرافی طریقہ سے‘ مفروضہ اوسط 40 لے کر معلوم کیجیے اور عام ضابطہ سے بھی معلوم کیجیے۔ کیا ان میں کوئی فرق ہے؟

حل: معطیات کے مشاہدات = 14,36,25,28,35,32,56,42,50,62

فرض کرو کہ مفروضہ اوسط A = 40

$$\text{اوسط حسابیہ} = \bar{x} = A + \frac{\sum (X_1 - A)}{N}$$

$$\bar{x} = 40 + \frac{(14-40)+(25-40)+(28-40)+(32-40)+(35-40)+(36-40)+(42-40)+(50-40)+(56-40)+(62-40)}{10}$$

$$= 40 + \frac{(-26)+(-15)+(-12)+(-8)+(-5)+(-4)+(2)+(10)+(16)+(22)}{10}$$

$$= 40 + \frac{(-70+50)}{10}$$

$$= 40 - \frac{20}{10}$$

$$= 40 - 2 = 38$$

اوسط حسابیہ کے ضابطے سے

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{14+25+28+32+35+36+42+50+56+62}{10}$$

$$= \frac{380}{10} = 38$$

دونوں طریقوں سے ہم کو ایک ہی جواب حاصل ہوا اعشاریہ والے اوسط حسابیہ معلوم کرنے کا یہ انحرافی طریقہ زیادہ اعداد والے اور معطیات کے لیے سہولت بخش ہے۔

SCERT TELANGANA

حسب ذیل مثالوں پر غور کیجیے

مثال 6: ایک حصص کی بازاری قیمت روپیوں میں ایک ہفتہ کے دوران اس طرح بدل رہی ہے 3672، 3657، 3673، 3665، 3668 حصص کی اوسط حسابی قدر معلوم کیجیے۔

حل: معطیات کے مشاہدات = 3670,3657, 3665, 3668, 3673

تخمینی اوسط = 3668

$$\text{اوسط حسابیہ} = \bar{x} = A + \frac{\sum(X_1 - A)}{N}$$

$$= 3668 + \frac{(3657-3668)+(3665-3668)+(3668-3668)+(3672-3668)+(3673-3668)}{5}$$

$$= 3668 + \frac{(-11-3-0+4+5)}{5} = 3668 + \frac{(-5)}{5} = 3668 - 1 = ₹\ 3667.$$

یہ کیجیے

(1) ذیل کے معطیات کے اوسط حسابیہ کا تخمینہ لگائیے۔

(i) 17, 25, 28, 35, 40

(ii) 5, 6, 7, 8,8, 10, 10, 10, 12,12, 13, 19, 19, 19, 20

(2) حقیقی جواب معلوم کیجیے اور اپنے تخمینی جواب کو جانچیے۔

منصوبہ کام

1۔ اپنے ہم جماعت 10 ساتھیوں کے مختلف مضامین کے امتحان میں حاصل کردہ نشانات حاصل کیجیے اور مضمون واری اوسط حسابیہ کا تخمینہ لگائیے اور حقیقی جواب معلوم کرکے تخمینی جواب کو جانچیے۔

آپ کے کتنے تخمینی جوابات حقیقی جوابات کے مساوی ہیں۔

2۔ آپ کی جماعت کے طلبا کا اوسط قد معلوم کیجیے اور اپنے فزیکل ایجوکیشن ٹیچر کے ریکارڈ سے جانچیے۔ کیا آپ نے کوئی فرق محسوس کیا؟

7.1.3: وسطانیہ:

وسطانیہ کثرت سے استعمال ہونے والا دوسرا مرکزی میلان ہے۔ وسطانیہ مشاہدات کی صعودی ترتیب یا نزولی ترتیب کا وسطی نقطہ ہے۔ یعنی اس کے اوپر اور نیچے مشاہدات مساوی تعداد میں ہوتے ہیں۔

اگر معطیات کے n مشاہدات کو صعودی یا نزولی ترتیب میں لکھا جائے

جب n طاق ہو تب $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{th}$ واں مشاہدہ وسطانیہ ہوگا۔

SCERT TELANGANA

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20

جب n جفت ہو تب اوسط حسابیہ دو درمیانی مشاہدات $\left(\frac{n}{2}\right)^{th}$ واں اور $\left(\frac{n}{2}+1\right)^{th}$ واں کا اوسط معطیات کا وسطانیہ ہوگا۔

مثال 7: 9 مشاہدات 14,36,25,28,35,32,56,42,50 کا وسطانیہ معلوم کیجیے۔

حل: مشاہدات کی صعودی ترتیب = 14, 25, 28, 32, 35, 36, 42, 50, 56

مشاہدات کی تعداد (طاق عدد) $n = 9$

معطیات کا اوسط = $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{th}$ مشاہدہ

پانچواں مشاہدہ = 35

اوسط = 35

مثال 8: اگر اوپر کی مثال میں دی گئی معطیات میں ایک اور مشاہدہ 61 شامل کر دیا جائے تو وسطانیہ کیا ہوگا؟

حل: معطیات کی صعودی ترتیب = 14, 25, 28, 32, 35, 36, 42, 50, 56, 61

مشاہدات کی تعداد (جفت عدد) n=10

تب معطیات کے درمیان میں دو اعداد ہوں گے۔

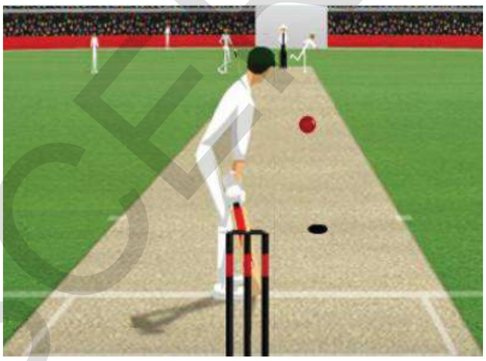
معطیات کا وسطانیہ = $\left(\frac{n}{2}\right)^{th}$ ویں اور $\left(\frac{n}{2}+1\right)^{th}$ ویں مشاہدات کا اوسط

پانچویں اور چھوٹیں مشاہدے کا اوسط = $\frac{35+36}{2} = 35.5$

یہاں پر چند ہندوستانی کرکٹ کھلاڑیوں کے قد دیئے گئے ہیں۔ ٹیم کا وسطانی قد معلوم کیجیے۔

سلسلہ نشان	کھلاڑی کا نام	قد
1	وی وی ایس لکشمن	5' 11"
2	پرتھوی پٹیل	5' 3"
3	ہربجن سنگھ	6' 0"
4	سچن تنڈولکر	5' 5"
5	گوتم گمبھیر	5' 7"
6	یوراج سنگھ	6' 1"
7	رابن اُتپّا	5' 9"
8	وریندر سہواگ	5' 8"
9	ظہیر خان	6' 0"
10	ایم ایس دھونی	5' 11"

"5'10 سے مراد 5 فٹ 10 انچ ہے۔



SCERT TELANGANA

نوٹ:

- وسطانیہ ترتیب شدہ معطیات کی درمیانی قدر ہے
- اس کا انحصار مشاہدات کی تعداد اور درمیانی مشاہدات پر ہوتا ہے۔ طرفین کے مشاہدات میں تبدیلی وسطانیہ پر اثر انداز نہیں ہوتی۔

کوشش کیجیے

(1) معطیات 24, 65, 85, 12, 45, 34, 15 کا وسطانیہ معلوم کیجیے۔

(2) اگر معطیات $x, 2x, 4x$ کا وسطانیہ 12 ہے تب معطیات کا اوسط معلوم کیجیے؟

(3) اگر معطیات 24, 29, 34, 38, x کا وسطانیہ 29 ہے تب 'x' کی قدر ہے۔

(i) $x>58$ (ii) $x<29$ (c) 24 اور 29 کے درمیان میں واقع ہے (iv) کوئی نہیں

7.14 بہتاتیہ

جب ہم جماعت میں طلبا کے پسندیدہ یونیفارم کا رنگ معلوم کرنا چاہتے ہیں یا دوکان میں سب سے زیادہ فروخت ہونے والے شرٹ کا سائز معلوم کرنا چاہتے ہیں تب ہم بہتاتیہ استعمال کرسکتے ہیں۔ بہتاتیہ سب سے زیادہ واقع ہونے والی قدر ہے۔ ذیل کی مثالوں پر غور کیجیے۔

مثال:9 ایک جوتے کی دوکان میں ایک ہفتہ کے دوران فروخت ہونے والے جوتوں کے سائز (انچ میں) اس طرح ہیں۔

7, 9, 10, 8, 7, 9, 7, 9, 6, 3, 5, 5, 7, 10, 7, 8, 7, 9, 6, 7, 7, 7, 10, 5, 4, 3, 5, 7, 8, 7, 9, 7

آئندہ ہفتہ کی فروخت کے لیے کس سائز کے جوتے کو زیادہ تعداد میں رکھنا چاہیے؟۔ وجوہات بتائیے۔

حل: اگر ہم مشاہدات کو ترتیب وار لکھیں تب حاصل ہونے والے اعداد اس طرح ہوں گے۔

3, 3, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 10 معطیات سے یہ واضح ہوتا ہے کہ 7 انچ سائز کے جوتے سب سے زیادہ فروخت ہوئے۔ لہٰذا فروخت کیلئے 7 انچ سائز والے جوتے زیادہ تعداد میں رکھنے چاہئیں۔

مثال:10 کیمپ میں خون کا عطیہ دینے کے لیے حصہ لینے والے 50 افراد کے خون کے گروپس اس طرح ہیں۔ A, AB, B, A, O, AB, O, O, A, AB, B, A, O, AB, O, O, A, B, A, O, AB, O, O, A,AB, B, O, AB, O, B, A, O, AB, O, O, A, AB, B, A, O, AB, O, A, AB, B, A, O, AB, O, O بہتاتیہ معلوم کیجیے۔

حل: معطیات پر غور کرنے سے ہمیں یہ پتہ چلتا ہے کہ A گروپ رکھنے والے افراد کی تعداد 12 ہے اور BC گروپ رکھنے والے افراد کی تعداد 7، AB گروپ رکھنے والے افراد کی تعداد 12 ہے اور O گروپ رکھنے والے افراد کی تعداد 19 ہے۔

لہٰذا معطیات کا بہتاتیہ 'O' گروپ ہے۔

سوچئے، بحث کیجئے اور لکھئے

اگر بہتاتیہ کے مساوی ایک یا دو مزید مشاہدات معطیات میں شامل کرلیے جائیں تو بہتاتیہ پر کیا اثر ہوگا۔

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 20-2019
SCERT TELANGANA

نوٹ:

- دی گئی معطیات میں کثرت سے پائے جانے والا مشاہدہ بہتاتیہ کہلاتا ہے۔
- بہتاتیہ کا انحصار نہ تو مشاہدات کی تعداد پر ہوتا ہے اور نہ تمام مشاہدات کی قدر پر۔
- بہتاتیہ کو عددی اور عبارتی معطیات کے تجزیہ کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔
- معطیات کے دو اور تین اور یا کئی بہتاتیہ ہو سکتے ہیں اور کبھی نہیں بھی ہو سکتے۔

مشق - 7.1

1۔ ایک راشن کی دوکان میں ہفتہ کے ہر دن کی فروخت دی گئی ہے اوسط حسابیہ معلوم کیجیے۔

`10,000, `10250, `9865, `15350, `10110, `10790

2۔ معطیات کا اوسط حسابیہ معلوم کیجیے۔ 10.25, 9,4.75,8,2.65,12,2,35

3۔ 8 مشاہدات کا اوسط حسابیہ 25 ہے۔ اگر ایک مشاہدہ 11 نکال دیا جائے تب باقی مشاہدات کا اوسط حسابیہ کیا ہوگا معلوم کیجیے۔

4۔ 9 مشاہدات کا اوسط حسابیہ 38 معلوم کیا گیا۔ دوران حساب ایک مشاہدہ کو 27 کے بجائے 72 لیا گیا تب معطیات کا حقیقی اوسط حسابیہ معلوم کیجیے۔

5۔ پانچ سال قبل ایک خاندان کی اوسط عمر 25 سال تھی۔ اب اس خاندان کی اوسط عمر کیا ہوگی؟

6۔ 2 سال قبل 40 افراد کی اوسط عمر 11 سال تھی۔ اب اس گروپ سے ایک فرد کے نکل جانے پر اوسط عمر 12 سال ہوگئی۔ گروپ سے نکل جانے والے فرد کی عمر معلوم کیجیے۔

7۔ معطیات کے مشاہدات 22 ,15 ,10 ,8 ,5 ہیں ان مشاہدات کے اوسط سے انحراف کا مجموعہ معلوم کیجیے۔

8۔ اگر 20 مشاہدات کے اوسط انحراف کا مجموعہ 100 ہے تب انحرافی اوسط معلوم کیجیے۔

9۔ ایک یونٹ ٹسٹ میں 12 طلبا کے نشانات اس طرح ہیں۔ 14 ,20 ,12 ,19 ,20 ,10 ,5,9 ,17 ,13 ,21 ,4 ایک مفروضہ اوسط لیجیے اور معطیات کا اوسط حسابیہ معلوم کیجیے۔ ایک دوسرے عدد کو مفروضہ اوسط لے کر دوبارہ اوسط حسابیہ معلوم کیجیے۔ کیا آپ کو یکساں جواب حاصل ہوا؟ رائے دیجیے۔

10۔ 10 طلبا کے نشانات کا اوسط (25 میں سے) 15 ہے۔ ان میں سے ایک طالبہ عرشیہ نے باقی 9 طلبا سے یہ دریافت کیا کہ انہوں نے اس سے کتنے زیادہ یا کم نشانات حاصل کئے۔ اور اس نے انحراف کو اس طرح درج کیا۔ 6 ,4 ,3 ,2 ,0 ,1- ,3- ,6- ,8- تب عرشیہ کے حاصل کردہ نشانات معلوم کیجیے۔

11۔ n مشاہدات کے انحراف کا مجموعہ 25 سے 25 ہے اور ان ہی n مشاہدات کے انحراف کا مجموعہ 35 سے 25- ہے تب مشاہدات کا اوسط معلوم کیجیے۔

12۔ معطیات کا وسطانیہ معلوم کیجیے۔ 3.3, 3.5, 3.1, 3.7, 3.2, 3.8

13۔ ذیل کے مشاہدات کو صعودی ترتیب میں لکھنے پر وسطانیہ 15 حاصل ہوا۔ تب x کی قدر معلوم کیجیے۔

$10, 12, 14, x\text{-}3, x, x\text{+}2, 25$

SCERT TELANGANA

14۔ بہتاتیہ معلوم کیجیے: 10, 12, 11, 10, 15, 20, 19, 21, 11, 9, 10

15۔ چند مشاہدات کا بہتاتیہ x ہے اگر ہر مشاہدے سے 3 کو تفریق کیا جائے تو اعداد کے نئے سلسلہ کا بہتاتیہ معلوم کیجیے۔

16۔ 1 سے 100 تک طبعی اعداد لکھنے کے دوران استعمال ہونے والے تمام ہندسوں کا بہتاتیہ معلوم کیجیے۔

17۔ خام معطیات کے مشاہدات 27, 8, 15, 10, 15, 28, 5 ہیں اس سلسلہ میں مزید 4 اعداد کو اسطرح درج کیجیے کہ معطیات کا اوسط اور وسطانیہ ایک ہی ہو لیکن بہتاتیہ میں 1 کا اضافہ ہو جائے۔

منصوبہ کام

ایک مہینے کے تمام ایام کار کے دوران اپنے مدرسہ کا زیادہ سے زیادہ درجہ حرارت معلوم کیجیے۔ان معطیات کا اوسط' وسطانیہ اور بہتاتیہ معلوم کیجیے۔اور بتائیے کہ آپ کے علاقہ کے موسم کو ظاہر کرنے کے لیے کونسا مرکزی میلان سب سے زیادہ موزوں ہے؟

7.2 گروہی معطیات کی تنظیم کاری

ہم پچھلی جماعت میں گنتی کے نشانات کو استعمال کرتے ہوئے معطیات کی ترتیب سیکھ چکے۔لیکن اگر معطیات بہت زیادہ ہوں تب کیا ہوگا؟ تب ہم اس کی موزوں گروہوں میں درجہ بندی کرتے ہیں۔یہ گروہی معطیات کہلاتے ہے۔آیئے ذیل کی مثالوں پر غور کرتے ہیں۔

ایک تعمیراتی کمپنی نے ملازمین کی سطح آمدنی کے لحاظ سے مختلف اقسام کے مکانات کی تعمیر کا منصوبہ بنایا۔لہٰذا اس نے 100 ملازمین جو اپنے لیے گھر بنوانا چاہتے ہیں کی ماہانہ آمدنی جمع کیں جو کہ (روپیوں میں) اس طرح ہیں۔ 15000, 15750, 16000, 16050, 16400, 16600, 16800, 17000, 17250, 17250, ...75000

یہ مشاہدات پر مبنی وسیع معطیات ہے' جو 15000 ` تا 75000 ` ہے۔اگر ہم ایک مشاہدہ پر تعددی جدول تیار کریں تو بہت بڑا جدول تیار ہوگا۔لہٰذا معطیات کی چھوٹے گروہ میں اس طرح درجہ بندی کی جاسکتی ہے۔ ... ,10001-20000, 20001-30000 70001-80000

یہ چھوٹے گروہ ''وقفہ جماعت'' کہلاتے ہیں۔10001-20000 وقفے میں 10001 سے 20000 تک کے تمام مشاہدات شامل ہوتے ہیں۔جن میں 10001 اور 20000 بھی شامل ہیں۔اس طرح کے وقفہ جماعت کو داخلی شکل کہتے ہیں۔جہاں 10001 نچلی حد اور 20000 اوپری حد ہے۔

7.2.1: گروہی تعددی تقسیم کی تشریح

مثال 11: جدول میں 30 طلبا کے ریاضی کے امتحان میں حاصل کردہ نشانات کی گروہی تعددی تقسیم دی گئی ہے۔

(i) معطیات کی کتنے گروہوں میں درجہ بندی کی گئی ہے۔

سلسلہ نشان	نمبرات	طلباء کی تعداد
1	0 – 5	5
2	5 – 10	7
3	10 – 15	10
4	15 – 20	6
5	20 – 25	2

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 20-2019
SCERT TELANGANA

(ii) تیسرے گروہ میں کتنے طلبا ہیں؟

(iii) اگرایک طالب علم 10 نشانات حاصل کرتا ہے ہوتو کیا اسے دوسرے وقفہ جماعت میں شامل کیا جائے گا یا تیسرے وقفہ جماعت میں؟

(iv) چوتھے وقفہ جماعت میں 6 طلبا کے حاصل کردہ نشانات کیا ہیں؟

(v) پانچویں وقفہ جماعت میں 2 طلبا کے حاصل کردہ انفرادی نشانات کیا ہیں؟

جوابات

(i) معطیات کو 5 گروہ میں یا 5 جماعتوں میں درجہ بندی کی گئی ہے۔

(ii) تیسرے گروہ میں 10 طلبا ہیں۔

(iii) یہاں 10 دوسری جماعت کی اوپری حد اور تیسری جماعت کی نچلی حد ہے۔اس طرح کے موقع پر جماعت کی اوپری حد کو جماعت میں شامل نہیں کیا جاتا۔لہذا 10 کو تیسرے وقفہ جماعت میں شامل کیا جائے گا۔

(iv) چوتھے وقفہ جماعت میں موجود طلبا کے نشانات 15 سے لیکر 20 سے کم ہوں گے۔

(v) تعددی تقسیم سے انفرادی نشانات کی شناخت نہیں کی جاسکتی۔ان کی قدریں 20 سے لیکر 25 سے کم تک ہوسکتی ہیں۔

یہ کیجیے

ایک اپارٹمنٹ میں رہنے والے 90 افراد کی عمر گروہی تعددی جدول میں دی گئی ہے۔

(i) جدول میں کتنی وقفہ جماعتیں ہیں۔

(ii) وقفہ جماعت 30-21 میں کتنے افراد موجود ہیں؟

(iii) اس اپارٹمنٹ میں کس عمر کے گروہ والے افراد زیادہ ہیں؟

(iv) کیا ہم کہہ سکتے ہیں کہ آخری گروہ (70-61) میں موجود دو افراد کی عمر 61، 70 یا کوئی اور عمر؟

عمریں	افراد کی تعداد
1 – 10	15
11 – 20	14
21 – 30	17
31 – 40	20
41 – 50	18
51 – 60	4
61 – 70	2

7.2.2: حدود اور سرحدیں

فرض کرو کہ ہمیں ایک ٹسٹ میں حاصل کردہ نشانات کو ترتیب دینا ہے۔ہم وقفہ جماعت کا تعین اس طرح کر سکتے ہیں 1-10, 11-20,.....

اگرایک طالب علم نے 10.5 نشانات حاصل کئے ہیں تب یہ کس وقفہ میں آئے گا۔وقفہ جماعت 1-10 میں یا 11-20 میں۔ایسی صورت میں ہم حقیقی حدود یا سرحدوں کا استعمال کرتے ہیں۔

SCERT TELANGANA

وقفہ جماعت	
سرحدیں	حدود
0.5 - 10.5	1 – 10
10.5 – 20.5	11 – 20
20.5 – 30.5	21 – 30
30.5 – 40.5	31 – 40

متصلہ جدول میں بتائے گئے وقفہ جماعت پر غور کیجیے۔

- پہلے وقفہ جماعت کی اوپری حد اور دوسرے وقفہ جماعت کی نچلی حد کا اوسط پہلے وقفہ جماعت کی اوپری سرحد اور دوسرے وقفہ جماعت کی نچلی سرحد کہلاتی ہے یعنی $10,11; \frac{10+11}{2} = 10.5$ کا اوسط
- ایسے تمام مشاہدات جو 10.5 سے کم ہو 10-1 میں آئیں گے لیکن 10.5 اگلے وقفہ جماعت میں آئے گا اور 20-11 وقفہ جماعت کی سرحدیں 10.5 تا 20.5 ہوں گی۔
- پہلے وقفہ جماعت سے پہلے کی جماعت کی اوپری حد کو (عام طور پر صفر '0') تصور کیجیے۔ اور پہلے وقفہ جماعت کی نچلی حد کا تعین کیجیے۔ 0 '1 کا اوسط $= \frac{0+1}{2} = 0.5$ لہٰذا 0.5 پہلے وقفہ جماعت کی نچلی سرحد ہوگی۔
- اسی طرح آخری وقفہ جماعت کے بعد کی جماعت کی نچلی سرحد کا تصور کیجیے اور آخری وقفہ جماعت کی اوپری سرحد کا تعین کیجیے۔ 40 '41 کا اوسط $= \frac{40+41}{2} = 40.5$ لہٰذا 40.5 آخری وقفہ جماعت کی اوپری سرحد ہوگی۔
- ان سرحدوں کو "حقیقی جماعتی حدود" بھی کہتے ہیں۔

ذیل کے وقفہ جماعتوں کا مشاہدہ کیجیے۔

وقفہ جماعت داخلی جماعت	حدود		سرحدیں	
	نچلی سرحدیں	اوپری سرحدیں	نچلی حدود	اوپری حدود
1-10	1	10	0.5	10.5
11-20	11	20	10.5	20.5
21-30	21	30	20.5	30.5

وقفہ جماعت خارجی جماعت	حدود		سرحدیں	
	نچلی سرحدیں	اوپری سرحدیں	نچلی حدود	اوپری حدود
0-10	0	10	0	10
10-20	10	20	10	20
20-30	20	30	20	30

یہاں اوپر دی گئی وضاحت کی بنیاد پر ہم یہ مشاہدہ کرسکتے ہیں کہ غیر مسلسل سلسلہ (داخلی وقفہ جماعت) میں حدود اور سرحدیں مختلف ہیں لیکن مسلسل سلسلہ (خارجی وقفہ جماعت) میں حدود اور سرحدیں یکساں ہیں۔ جماعت کی اوپری اور نچلی سرحدوں کا فرق "جماعت کی لمبائی" کہلاتا ہے۔ جسے 'C' سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 20-2019
SCERT TELANGANA

یہ کیجیے

1۔ لمبی چھلانگ کے مقابلے میں حصہ لینے والے ایک جماعت کے 30 طلبا کی تفصیلات ذیل کی جدول میں دی گئی ہے۔

فاصلہ (سنٹی میٹر میں)	101-200	201-300	301-400	401-500	501-600
طلبا کی تعداد	4	7	15	3	1

I دی گئی وقفہ جماعت داخلی ہے یا خارجی؟

II دوسری وقفہ جماعت میں کتنے طلبا ہیں؟

III کتنے طلبا نے 3.01 میٹر یا اس سے زیادہ لمبی چھلانگ لگائی؟

IV 4.005 میٹر لمبی چھلانگ لگانے والے طالب علم کا کس وقفہ جماعت سے تعلق ہے؟

2۔ اوپر دیئے گئے جدول میں وقفہ جماعت کی سرحدوں کا تعین کیجیے؟

3۔ اوپر دیئے گئے جدول میں ہر وقفہ جماعت کی لمبائی کیا ہے؟

7.2.3: گروہی تعددی تقسیم کی تشکیل

مجموعی جانچ-I میں 50 طلبا کے ریاضی میں حاصل کردہ نشانات پر غور کیجیے۔

31, 14, 0, 12, 20, 23, 26, 36, 33, 41, 37, 25, 22, 14, 3, 25, 27, 34, 38, 43, 32, 22, 28, 18, 7, 21, 20, 35, 36, 45, 9, 19, 29, 25, 33, 47, 35, 38, 25, 34, 38, 24, 39, 1, 10, 24, 27, 25, 18, 8.

معطیات دیکھنے کے بعد آپ یہ سوچ رہے ہوں گے کہ معطیات کی کتنے وقفوں میں درجہ بندی کی جاسکتی ہے؟ گروہی تعددی تقسیمی جدول میں کس طرح کی تشکیل کی جاسکتی ہے؟

ذیل میں دیئے گئے مراحل گروہی تعددی تقسیم کی تشکیل میں معاون ہیں۔

مرحلہ 1: معطیات کی وسعت کی نشاندہی کرنا

اقل ترین قدر - اعظم ترین قدر = وسعت

= 47 - 0 = 47

مرحلہ 2: وقفہ جماعت کی تعداد کا تعین کرنا

(عام طور پر وقفہ جماعت کی تعداد 5 تا 8 لی جاتی ہے)

اگر وقفہ جماعت کی تعداد = 6

تقریباً $8 \simeq \frac{47}{6} =$ وقفہ جماعت کی وسعت

وقفہ جماعت (نشانات)	گنتی کے نشان	تعداد (طلباء کی تعداد)
0 – 7	||||	4
08 – 15	~~||||~~ |	6
16 – 23	~~||||~~ ||||	9
24 – 31	~~||||~~ ~~||||~~ |||	13
32 – 39	~~||||~~ ~~||||~~ ||||	14
40 – 47	||||	4

SCERT TELANGANA

مرحلہ 3: مشاہدات کی اقل ترین قدر سے شروع کرتے ہوئے داخلی وقفہ جماعت لکھنا۔یعنی 7-0, 15-8 وغیرہ

مرحلہ 4: گنتی کے نشانات کے استعمال سے ہر وقفہ جماعت میں آنے والے مشاہدوں کی گنتی کرنا معطیات کے مشاہدوں کو مختلف وقفوں میں تقسیم کرنا۔

مرحلہ 5: گنتی کے نشانات کی تعداد معلوم کر کے تعداد کو جدول میں درج کرنا۔

سوچئے ، بحث کیجئے اور لکھئے

1۔ ذیل کے سلسلہ سے تعددی تقسیم تیار کیجیے۔

1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7,

2۔ ذیل میں دیئے گئے اعداد کے سلسلہ سے تعددی تقسیم تیار کیجیے؟

2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 9, 11, 12, 12, 13, 13, 13, 14, 14, 14, 15, 16, 17, 18, 18, 19, 20, 20, 21, 22, 24, 24, 25 (اشارہ: داخلی جماعتوں کو استعمال کیجیے)

3۔ اوپر دیئے گئے دونوں معطیات کے درمیان کیا فرق ہے؟

4۔ کس تعددی تقسیم سے ہم دوبارہ خام معطیات لکھ سکتے ہیں؟

7.2.4 گروہی تعددی تقسیم کی خصوصیات

1۔ یہ معطیات کو سہولت بخش چھوٹے گروہوں میں تقسیم کرتا ہے جس کو وقفہ جماعت کہتے ہیں۔

2۔ ایک وقفہ جماعت 10-5 میں 5 کو نچلی حد اور 10 کو اوپری حد کہا جاتا ہے۔

3۔ وقفہ جماعت جیسے ....,1-10,11-20,21-30 'داخلی وقفہ جماعت کہلاتی ہیں کیوں کہ کسی ایک وقفہ جماعت کے دونوں اوپری حد اور نچلی حد کا تعلق صرف اسی وقفہ جماعت سے ہے۔

4۔ وقفہ جماعت جیسے ....,0-10, 10-20, 20-30 'خارجی وقفہ جماعت کہلاتے ہیں کیوں کہ کسی بھی وقفہ جماعت کی صرف نچلی سرحد یہ اس جماعت سے تعلق رکھتی ہے جبکہ اوپری سرحد اسی جماعت سے متعلق نہیں ہوتی۔

5۔ پہلی جماعت کی اوپری سرحد اور اگلی جماعت کی نچلی حد کا اوسط پہلی جماعت کی اوپری سرحد اور اگلی جماعت کی نچلی سرحد کہلاتی ہے۔

6۔ خارجی وقفہ جماعت میں دونوں حدود اور سرحدیں مساوی ہوتی ہیں لیکن داخلی وقفہ جماعت میں نچلی حد اور اوپری سرحد مساوی نہیں ہوتیں۔

7۔ اوپری اور نچلی سرحدوں کا فرق اس وقفہ ''جماعت کی لمبائی'' کہلاتا ہے۔

8۔ اس جدول سے ہر مشاہدے کی انفرادی قدر کا تعین نہیں کیا جا سکتا لیکن کسی مخصوص وقفہ جماعت اوپری اور نچلی سرحدوں کے اوسط کو اس وقفہ جماعت کے ہر مشاہدے کی انفرادی قدر تصور کیا جا سکتا ہے۔اس قدر کو 'وسطی قدر' (x) یا ''جماعتی نشان'' کہا جاتا ہے۔

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 20-2019
SCERT TELANGANA

مثال 12: ذیل میں سال 2010ء کے ایس ایس سی امتحان میں 30 طلبا کے حاصل کردہ نشانات دیئے گئے ہیں۔

45, 56, 75, 68, 35, 69, 98, 78, 89, 90, 70, 56, 59, 35, 46, 47, 13, 29, 32, 39, 93, 84, 76, 79, 40, 54, 68, 69, 60, 59

تعددی تقسیمی جدول تیار کیجیے جہاں وقفہ جماعت اس طرح لیجیے کہ ناکام (0-34) تھرڈ کلاس (35-49) سیکنڈ کلاس (50-60) فرسٹ کلاس (60-74) امتیازی کامیابی (75-100)۔

حل: وقفہ جماعت کی تفصیلات دی گئی ہیں۔

لہٰذا مرحلہ 3 سے شروع کیجیے۔

مرحلہ 3: دی ہوئی وقفہ جماعت لکھیے

مرحلہ 4: یہ خارجی وقفہ جماعت ہے یاد رہے کہ اوپری حدود کا تعلق بھی اس سے ہے۔ گنتی کے نشان کے استعمال سے معطیات کے مشاہدوں کو مختلف وقفہ جماعتوں میں تقسیم کیجیے۔

مرحلہ 5: گنتی کے نشانات کو محسوب کر کے جدول میں درج کیجیے۔

(نوٹ: وقفہ جماعت کی لمبائی اس مسئلہ میں مساوی نہیں ہوتی)

وقفہ جماعت (نشانات)	گنتی کے نشان	تعدد (طلباء کی تعداد)
0 – 34	|||	3
35 – 49	𝍸 ||	7
50 – 59	𝍸	5
60 – 74	𝍸 |	6
75 – 100	𝍸 ||||	9

مثال 13:

ذیل میں گروہی تعددی تقسیم کا ایک جدول جماعت کی نمائندہ قدر (وقفہ جماعتوں کی وسطی قدریں) کے ساتھ دیا گیا ہے۔ وقفہ جماعت معلوم کیجیے؟

جماعت کی نمائندہ قدریں	7	15	23	31	39	47
تعداد	5	11	19	21	12	6

حل: ہم جانتے ہیں کہ جماعت کی نمائندہ قدریں وقفہ جماعت کی وسطی قدریں ہیں۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ دو متصلہ نمائندہ قدروں کے درمیان جماعت کی سرحدیں ہوں گی۔

مرحلہ 1: دو متواتر جماعتوں کی نمائندہ قدروں کے درمیان فرق معلوم کیجیے؟ h=15-7=8

(معلوم کیجیے کہ ہر دو متواتر جماعتوں کا فرق مساوی ہے یا نہیں؟)

مرحلہ 2: ہر جماعت کی نچلی اور اوپری سرحدوں کو جماعت x کے نشان کے $x-\frac{h}{2}$ اور $x+\frac{h}{2}$ کے طور پر محسوب کیجیے۔

مثال کے طور پر پہلی جماعت کی سرحدیں ہیں $7-\frac{8}{2}=3$ یا $7+\frac{8}{2}=11$

SCERT TELANGANA

جماعت کے نشانات	وقفہ جماعت	تعدد
7	$(7-4)-(7+4)=03-11$	5
15	$(15-4)-(15+4)=11-19$	11
23	$(23-4)-(23+4)=19-27$	19
31	$(31-4)-(31+4)=27-35$	21
39	$(39-4)-(39+4)=35-43$	12
47	$(47-4)-(47+4)=43-51$	6

7.3: یکجائی تعدد

ایک مسابقتی امتحان میں 1000 امیدواروں نے حصہ لیا ان کے حاصل کردہ نشانات کو متصلہ جدول میں گروہی تعددی تقسیم کی شکل میں بتایا گیا ہے۔ دو امیدوار خالد اور ذاکر جدول کو دیکھ کر اس طرح مباحثہ کر رہے ہیں۔

وقفہ جماعت (نشانات)	طلباء کی تعداد
0 – 10	25
10 – 20	45
20 – 30	60
30 – 40	120
40 – 50	300
50 – 60	360
60 – 70	50
70 – 80	25
80 – 90	10
90 – 100	5

خالد: امتحان میں کتنے امیدواروں نے حصہ لیا؟

ذاکر: ایسا لگتا ہے کہ 1000 امیدواروں نے حصہ لیا۔

خالد: دیکھئے 360 امیدواروں نے 60 - 50 کے درمیان نشانات حاصل کئے ہیں؟

ذاکر: اگر حد نشانات 60 مقرر کیئے جائیں تب کتنے امیدوار کال لیٹر حاصل کرنے کے اہل ہوں گے؟

خالد: کیا آپ کل نشانات 60 یا اس سے زیادہ حاصل کرنے والے امیدوار کی تعداد جاننا چاہتے ہیں؟

ذاکر: بالکل ٹھیک اس طرح 5 + 10 + 25 + 50 یعنی 90 امیدوار اہل ہوں گے۔

خالد: لیکن جائیدادیں صرف 105 ہیں۔ کتنے اُمیدوار اہل ہونگے اگر حد نشانات 50 ہو تو

ذاکر: اس صورت میں 5 + 10 + 25 + 50 + 360 یعنی 450 امیدوار انٹرویو کے لیے اہل ہوں گے۔ اس طرح ہم چند اور نتائج اخذ کر سکتے ہیں۔

امیدواروں کی تعداد جو 90 یا اس سے زیادہ نشانات حاصل کئے۔ (نچلی سرحد) = 5

امیدواروں کی تعداد جو 9 ویں وقفہ جماعت کی نچلی سرحد کے مساوی یا زیادہ نشانات حاصل کئے۔ 15 = 10 + 5

امیدواروں کی تعداد جو 8 ویں وقفہ جماعت کی نچلی سرحد کے مساوی یا زیادہ نشانات حاصل کئے۔ 40=25+15

امیدواروں کی تعداد جو 7 ویں وقفہ جماعت کی نچلی سرحد کے مساوی یا زیادہ نشانات حاصل کئے۔ 90=50+40

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20
SCERT TELANGANA

ہم کو متواتر وقفہ جماعتوں کے تعدد کو مسلسل جمع کرنے پر یہ قدریں حاصل ہورہی ہیں۔ یہ یکجائی تعدد کہلاتی ہیں جیسا کہ ہر یکجائی تعدد متعلقہ جماعت کے مساوی یا زیادہ ہوتا ہے۔ یہ زیادہ تر یکجائی تعدد کہلاتا ہے۔

غور کیجیے کہ ہم کس طرح زیادہ تر یکجائی تعدد کو جدول میں درج کر سکتے ہیں۔

وقفہ جماعت (نشانات)	نچلی حد	تعدد (طلباء کی تعداد)	زیادہ تر یکجائی تعدد
0 – 10	0	25	25+975 = 1000
10 – 20	10	45	545+930 = 975
20 – 30	20	60	60+870 = 930
30 – 40	30	120	120+750 = 870
40 – 50	40	300	300+450 = 750
50 – 60	50	360	360+ 90 = 450
60 – 70	60	50	50 + 40 = 90
70 – 80	70	25	25 + 15 = 40
80 – 90	80	10	10 + 5 = 15
90 – 100	90	5	5

1۔ آخری وقفہ جماعت میں موجود تعدد خود اس جماعت کے زیادہ تر یکجائی تعدد ہے۔

2۔ 9 ویں وقفہ جماعت کے زیادہ تر یکجائی تعدد کو حاصل کرنے کے لیے 9 ویں وقفہ جماعت کے تعدد کو 10 ویں وقفہ جماعت کے یکجائی تعدد میں جمع کیجیے۔

3۔ بقیہ زیادہ تر یکجائی تعدد حاصل کرنے کے لیے متواتر اسی طریقہ کو استعمال کیا جاسکتا ہے۔

> معطیات میں موجود مشاہدات کی تعداد جو کسی خاص وقفہ جماعت کی نچلی سرحد کے مساوی یا اعظم تر ہے زیادہ تر یکجائی تعدد کہلاتا ہے۔

اسی طرح بعض مسئلوں میں ہم کو کم تر یکجائی تعدد محسوب کرنے کی بھی ضرورت ہوتی ہے۔

مثال کے طور پر ایک استاد ایسے طلبا کی زائد مدد کرنا چاہتے ہیں جنھوں نے مقررہ حد سے کم نشانات حاصل کئے ہیں تب ہم کو کم تر یکجائی تعدد محسوب کرنے کی ضرورت پڑتی ہے۔

ایک یونٹ ٹسٹ میں 43 کے نشانات کو ظاہر کرنے والے گروہی تعددی تقسیم پر غور کیجیے۔

وقفہ جماعت (نشانات)	اوپری حد	طلباء کی تعداد	کم تر یکجائی تعدد
0 – 5	5	7	7
5 – 10	10	10	10+7 = 17
10 – 15	15	15	15+17 = 32
15 – 20	20	8	8+32 = 40
20 – 25	25	3	3+40 = 43

1۔ پہلے وقفہ جماعت کے تعدد کو کم تر یکجائی تعدد میں راست درج کیا گیا ہے۔

2۔ دوسرے وقفہ جماعت کے کم تر یکجائی تعدد کو حاصل کرنے کے لیے کم تر یکجائی تعدد میں پہلے وقفہ جماعت کے تعدد کو جمع کیجیے۔

3۔ بقیہ کم تر یکجائی تعدد حاصل کرنے کے لیے اس طریقہ کو متواتر استعمال کیجیے۔

SCERT TELANGANA

معطیات کے جملہ مشاہدات کی تعداد جن کی قدر کسی خاص وقفہ جماعت کی اوپری حد سے کم تر ہے اسی وقفہ جماعت کا کم تر یکجائی تعدد کہلاتا ہے۔

یہ کیجیے

1۔ کم تر یکجائی تعدد کا تعلق __________ سے ہے۔

2۔ زیادہ تر یکجائی تعدد کا تعلق __________ سے ہے۔

3۔ ذیل کے جدول کے لیے کم تر یکجائی تعدد اور زیادہ تر یکجائی تعدد لکھیے۔

وقفہ جماعت	1-10	11-20	21-30	31-40	41-50
تعدد	4	7	12	5	2

4۔ اوپر دیا گیا مسئلہ میں ''جملہ تعدد'' اور کم تر یکجائی تعدد تقسیم کے جدول کی شکل میں دیے گئے ہیں متعلقہ جماعتوں کے تعدد کو لکھیے زیادہ یکجائی تعدد بھی لکھیے۔ جدول میں کتنے طلباء کے نشانات دیے گئے ہیں؟۔

مثال 14: ذیل میں کم تر یکجائی تعدد کی تقسیم کی بنیاد پر طلباء کے نشانات دیے گئے ہیں، تب متعلقہ جماعتوں کا تعدد اور زیادہ تر یکجائی تعدد لکھیے۔ ذیل میں کتنے طلباء کے نشانات دیے گئے ہیں؟

وقفہ جماعت (نشانات)	1-10	11-20	21-30	31-40	41-50
طلبا کی تعداد (کم تر یکجائی تعدد)(LCF)	12	27	54	67	75

حل:

وقفہ جماعت (نشانات)	کم تر یکجائی تعدد (LCF)	تعدد (طلبا کی تعداد)	زیادہ تر یکجائی تعدد (GCF)
1 - 10	12	12	12 + 63 = 75
11 - 20	27	27 - 12 = 15	15 + 48 = 63
21 - 30	54	54 - 27 = 27	27 + 21 = 48
31 - 40	67	67 - 54 = 13	13 + 8 = 21
41 - 50	75	75 - 67 = 8	8

دیئے گئے جدول میں طلبا کی تعداد در اصل تعددوں کا مجموعہ یا آخری جماعت کا کم تر یکجائی تعدد یا پہلے وقفہ جماعت کا زیادہ تر یکجائی تعدد ہے جس کی قدر 75 ہے۔

SCERT TELANGANA

مشق - 7.2

1۔ ذیل میں ایک کالونی کے 45 افراد کی عمریں دی گئی ہے۔

33	8	7	25	31	26	5	50	25	48	56
33	28	22	15	62	59	16	14	19	24	35
26	9	12	46	15	42	63	32	5	22	11
42	23	52	48	62	10	24	43	51	37	48
36										

دیئے گئے معطیات کو 6 وقفہ جماعت والے گروہی تعددی تقسیم میں درجہ بند کیجیے۔

2۔ ذیل میں ایک اسکول کے کمرہ جماعت میں 30 طلبا کی تعداد دی گئی ہے۔ان معطیات کا تعددی تقسیمی جدول تشکیل دیجئے جس میں وقفہ جماعت خارجی ہو اور وقفہ 4 (طلباء) کا ہو۔

25	30	24	18	21	24	32	34	22	20	22
32	40	28	30	22	26	31	34	15	38	28
20	16	15	20	24	30	25	18			

3۔ ایک گروہی تعددی تقسیم کی وقفہ جماعت اس طرح ہیں 4 - 11, 12 - 19, 20 - 27, 28 - 35, 36 - 43 ' اگلے دو وقفہ جماعت لکھئے۔ (i) ہر وقفہ جماعت کی لمبائی کیا ہے؟ (ii) اور تمام وقفہ جماعتوں کی سرحدیں لکھئے۔ (iii) ہر جماعت کے جماعتی نشانات کتنے ہیں؟

4۔ ذیل کے گروہی تعددی تقسیمی جدول میں ''جماعت کی نمائندہ قدریں'' دی گئی ہیں۔

جماعتی نشان	10	22	34	46	58	70
تعدد	6	11	20	21	9	5

(i) ذیل کے وقفہ جماعت معلوم کیجیے۔ (خارجی وقفہ جماعت)

(ii) کم ترکیجائی تعدد تشکیل دیجئے۔

(iii) زیادہ ترکیجائی تعدد تشکیل دیجئے۔

5۔ ذیل میں شماریات کے ایک امتحان میں 35 طلبا کے محصلہ نشانات (50 میں سے) دیئے گئے ہیں۔

35	1	15	35	45	23	31	40	21	13	15
20	47	48	42	34	43	45	33	37	11	13
27	18	12	37	39	38	16	13	18	5	41
47	43									

مساوی وقفہ جماعت والا ایک تعددی تقسیمی جدول ترتیب دیجیے۔ جن میں سے ایک 10-20 (20 شامل نہیں ہے)۔

SCERT TELANGANA

6۔ ذیل میں دیئے گئے تعددی تقسیمی جدول کی جماعتی سرحدیں تشکیل دیجیے اور ساتھ ہی کم تر یکجائی اور زیادہ تر یکجائی تعددی جدول بھی تشکیل دیجیے۔

عمریں	1 - 3	4 - 6	7 - 9	10 - 12	13 - 15
بچوں کی تعداد	10	12	15	13	9

7۔ ذیل میں یکجائی تعددی جدول دیا گیا ہے۔اس میں کس قسم کا یکجائی تعدد دیا گیا ہے۔متعلقہ وقفہ جماعت کا تعدد معلوم کرنے کی کوشش کیجیے۔

بنائے گئے رن	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50
کرکٹر کی تعداد	3	8	19	25	30

8۔ ایک لائبریری میں مطالعہ کرنے والوں کی تعداد دی گئی ہے۔متعلقہ وقفہ جماعت کا تعدد لکھئے اور ساتھ ہی کم تر یکجائی تعدد بھی لکھئے۔

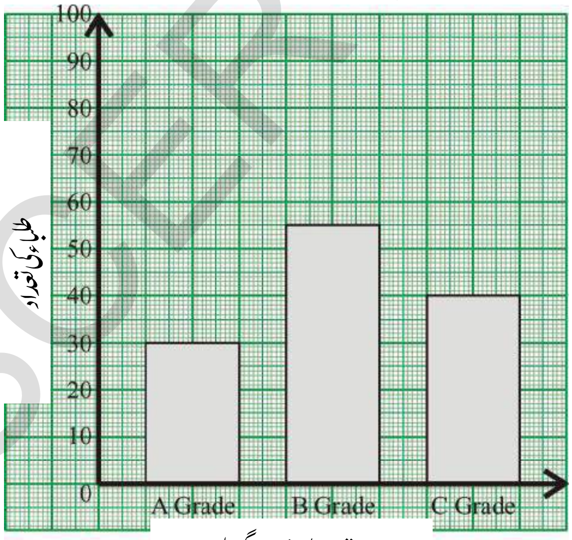
کتابوں کی تعداد	1 - 10	11 - 20	21 - 30	31 - 40	41 - 50
زیادہ تر یکجائی تعدد	42	36	23	14	6

7.4 تعددی تقسیم کا ترسیمی اظہار

تعددی تقسیم کا اظہار'تعددی تقسیم'معطیات کی وقفہ جماعت اور تعدد میں منظّم ترتیب ہے۔غیر مسلسل سلسلہ کی تعددی تقسیم میں ہم تصویری چارٹ'بارگراف دوہرا بارگراف اور دائروی گراف کے ذریعہ اظہار کو پہلے سیکھ چکے ہیں۔

اب ہم اس باب میں ہسٹوگرام سیکھیں گے اس سے قبل ہم بارگراف کا اعادہ کرتے ہیں۔

7.4.1: بارگراف



امتحان میں محصلہ گریڈ

افقی یا انتصابی' مساوی چوڑائی والے بار کے استعمال سے اطلاعات یا معطیات کا اظہار بارگراف کہلاتا ہے۔اس میں بار کی لمبائی کا انحصار متعلقہ جماعت کی قدر پر ہوتا ہے۔

آیئے دیکھتے ہیں کہ ایک بارگراف سے کیا ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

دیئے گئے بارگراف کا مشاہدہ کیجیے۔

(i) یہ بارگراف کیا ظاہر کررہا ہے؟

(ii) کتنے طلبا نے A'B اور C گریڈ حاصل کیا؟

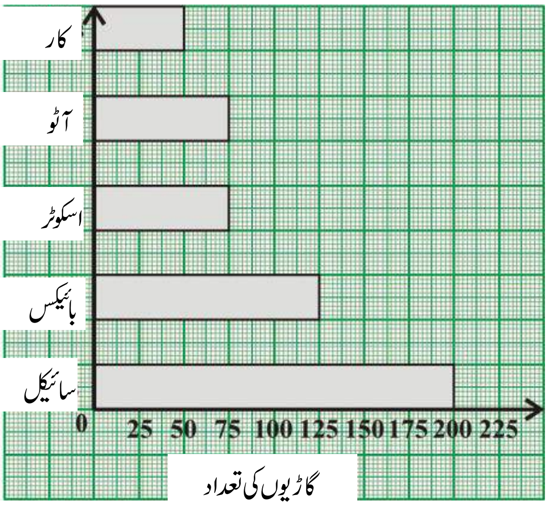
(iii) کونسا گریڈ زیادہ طلبا نے حاصل کیا؟

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 20-2019
SCERT TELANGANA

(iv) جماعت میں کتنے طلبا ہیں؟

ترسیم سے سوالات کے جوابات دینا آسان ہے۔

اسی طرح سے چند بار گراف کو افقی بار کے ذریعہ بھی بنایا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر دیا گیا دوسرا بار گراف دیکھئے۔ اس میں ضلع نیلور کے سنگم گاؤں میں گاڑیوں کی تعداد دی گئی ہے۔



سوچئے ، بحث کیجئے اور لکھئے

1۔ ایک بار گراف میں تمام بار (یا مستطیل) ہوتے ہیں۔

(a) مساوی لمبائی والے (b) مساوی چوڑائی والے (c) مساوی رقبہ والے (d) مساوی قدر والے

2۔ کیا گراف میں ایک بار کی لمبائی کا انحصار دوسرے بار کی لمبائی پر ہوتا ہے؟

3۔ کسی ایک گراف میں کیا ایک بار کی قدر میں تبدیلی دوسرے بار کی قدر پر اثر انداز ہوتی ہے؟

4۔ ہم انتصابی بار گراف اور افقی بار گراف کو کہاں استعمال کرتے ہیں؟

7.5: گروہی تعددی تقسیم کا ترسیمی اظہار

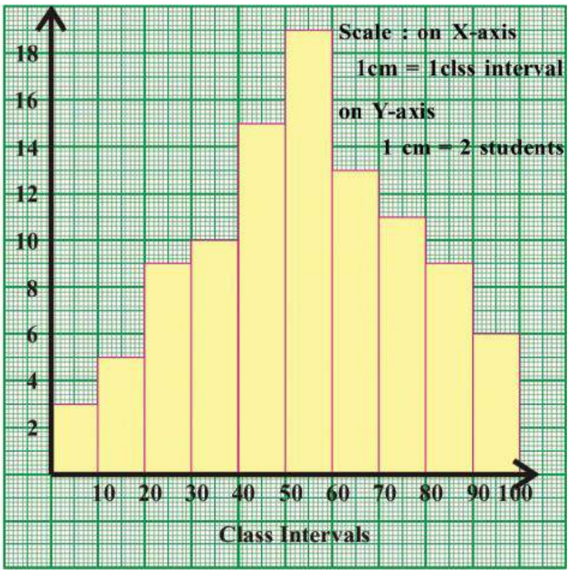
آیئے مسلسل یعنی خارجی وقفہ جماعت والی گروہی تقسیم کا ترسیمی اظہار سیکھتے ہیں۔ اس کی پہلی قسم ہسٹوگرام ہے۔

7.5.1: ہسٹوگرام

7.5.1.1: ہسٹوگرام کی تشریح

ذیل میں دی گئی گروہی تعددی تقسیم کے ہسٹوگرام کا مشاہدہ کیجیے۔

SCERT TELANGANA



وقفہ جماعت

تعدد (طلباء کا تعدد)	وقفہ جماعت (نشانات)
3	0 – 10
5	10 – 20
9	20 – 30
10	30 – 40
15	40 – 50
19	50 – 60
13	60 – 70
11	70 – 80
9	80 – 90
6	90 -100

(i) اس بار گراف میں کتنے بار ہیں؟

(ii) بار کی لمبائی کس تناسب میں لی جاتی ہے۔

(iii) بار کی چوڑائی مساوی ہوتی ہے۔اس کی وجہ کیا ہے؟

(iv) کیا ہم کسی گراف کے دو بارز کو باہم تبدیل کر سکتے ہیں۔

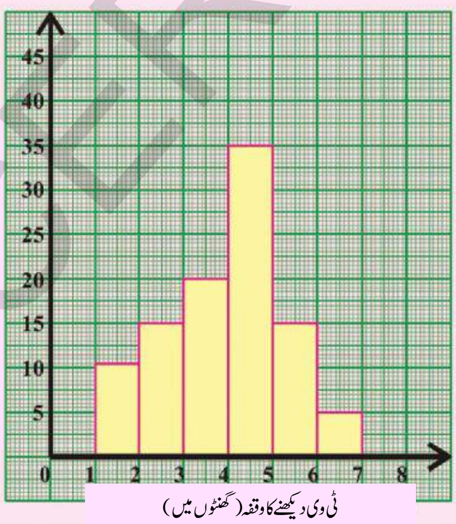
گراف کے ذریعہ آپ یہ سمجھ چکے ہوں گے کہ

(i) یہاں پر 10 بار 10 وقفہ جماعت کو ظاہر کرتے ہیں۔

(ii) بار کی لمبائی متعلقہ وقفہ جماعت سے تناسب میں ہے۔

(iii) بار کی چوڑائی مساوی ہے کیوں کہ یہ وقفہ جمات کو ظاہر کرتی ہے۔خاص طور پر اوپر دی گئی مثال میں وقفہ جماعت کی لمبائی مساوی ہے۔

(iv) چونکہ یہ مسلسل سلسلہ کو ظاہر کرتا ہے (خارجی وقفہ جماعت) ہے۔لہٰذا ہم کسی دو بار کو باہم تبدیل نہیں کر سکتے۔



کوشش کیجیے

متصلہ ہسٹوگرام کا مشاہدہ کیجیے اور ذیل کے سوالات کے جوابات دیجیے۔

(i) اس ہسٹوگرام میں کونسی اطلاعات دی گئی ہیں؟

(ii) کونسے گروپ میں سب سے زیادہ طلبا ہیں؟

(iii) کتنے طلبا 5 گھنٹے یا اس سے زائد ٹی وی دیکھتے ہیں؟

(iv) کل کتنے طلبا کا سروے کیا گیا؟

SCERT TELANGANA

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 20-2019

7.5.12: ہسٹوگرام کی تشکیل

ایک ٹی وی چینل اپنے ناظرین کی عمر کے گروپ کو معلوم کرنا چاہتا ہے۔ جوان کے چینل کو دیکھتے ہیں۔انہوں نے ایک اپارٹمنٹ میں سروے کیا۔معطیات کو ہسٹوگرام میں ظاہر کیجیے۔

وقفہ جماعت (عمر)	تعداد (ناظرین کی تعداد)	وقفہ جماعت
11 – 20	10	10.5 – 20.5
21 – 30	15	20.5 – 30.5
31 – 40	25	30.5 – 40.5
41 – 50	30	40.5 – 50.5
51 – 60	20	50.5 – 60.5
61 – 70	5	60.5 – 70.5
حدود		سرحدیں

مرحلہ 1: اگر دیئے گئے وقفہ جماعت داخلی (حدود) ہوں تو اس کو خارجی میں تبدیل کیجیے۔چونکہ ہسٹوگرام مسلسل پر ہی بنایا جاتا ہے۔

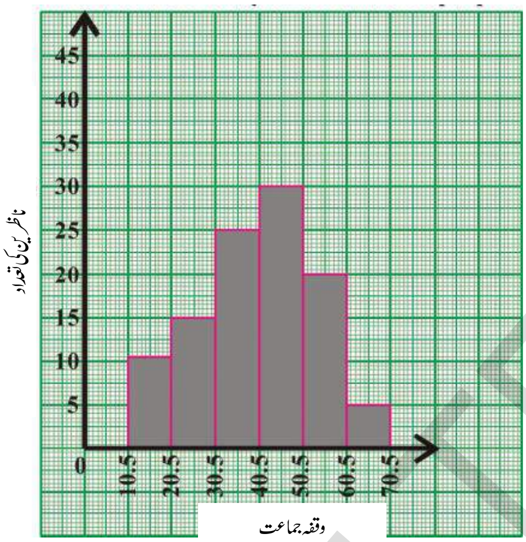
مرحلہ 2: x محور پر ایک موزوں اسکیل لیجیے اوراس پر وقفہ جماعت کے نشان لگائیے۔

مرحلہ 3: y محور پر بھی ایک موزوں اسکیل لیجیے اوراس پر وقفہ جماعت کے نشان لگائیے۔(دونوں محوروں پر لی جانے والی اسکیل علیحدہ علیحدہ بھی ہوسکتی ہے)

پیمانہ: x محور 1 سنٹی میٹر = 1 وقفہ جماعت

y محور 1 سنٹی میٹر = 5 افراد

مرحلہ 4: گراف میں مستطیل بنائیں جس کا قاعدہ وقفہ جماعت اور بلندی کا متعلقہ تعدد ہے۔



7.51.3: جماعتی قاعدہ کی چوڑائی والے ہسٹوگرام

ذیل میں ایک اسکول کی دسویں جماعت کے امتحان میں کامیاب ہونے والے طلبا کا فیصد تعددی تقسیمی جدول میں دیا گیا ہے۔

قسم	وقفہ جماعت (نشانات)	طلبا کا فیصد
ناکام	0 - 35 ناکام	28
درجہ سوم	35 - 50 درجہ سوم	12
درجہ دوم	50 - 60 درجہ دوم	16
درجہ اول	60 - 110 درجہ اول	44

اگر ہم جدول پر غور کریں تب' طلبا کا جنھوں نے درجہ اول میں کامیابی حاصل کی ہے فیصد زیادہ ہے۔لیکن یہ 44% فیصد طلبا وقفہ جماعت کی لمبائی 40(100-60) پر پھیلے ہوتے ہیں۔اسی طرح درجہ دوم 16% طلبا' جماعت کی لمبائی (60-50) پر ہیں۔لہٰذا وقفہ جماعت کی وسعت کا بھی لحاظ رکھنا ضروری ہے۔

SCERT TELANGANA

اسی صورت میں اکائی وقفہ جماعت کا تعدد معلوم کرنا ہوگا اور اس کے مطابق ہسٹوگرام کی بلندی لینی ہوگی۔ کسی بھی ایک وقفہ جماعت کو اکائی وقفہ جماعت تصور کرتے ہوئے تعددی کثافت معلوم کی جاسکتی ہے۔ سہولت کی خاطر سب سے چھوٹے وقفہ جماعت کی اکائی وقفہ جماعت متصور کی گئی۔

لہٰذا ہسٹوگرام کے مستطیل کی ترمیم کردہ لمبائی متعلقہ تعدد سے تناسب میں ہوگی۔

$$\text{کثافت} = \frac{\text{جماعت کا تعدد}}{\text{اس جماعت کی وسعت}} \times \text{سب سے چھوٹے وقفہ جماعت کی لمبائی}$$

مستطیل کی لمبائی	جماعت کی وسعت	طلباء کا فیصد	وقفہ جماعت (نشانات)
$\frac{28}{35} \times 10 = 8$	35	28	0 – 35
$\frac{12}{15} \times 10 = 8$	15	12	35 – 50
$\frac{16}{10} \times 10 = 16$	10	16	50 – 60
$\frac{44}{40} \times 10 = 11$	40	44	60 – 100

اس ترمیم کردہ لمبائی کی بنیاد پر پچھلی مثال میں بتائے گئے طریقے سے ہسٹوگرام تیار کیجیے۔

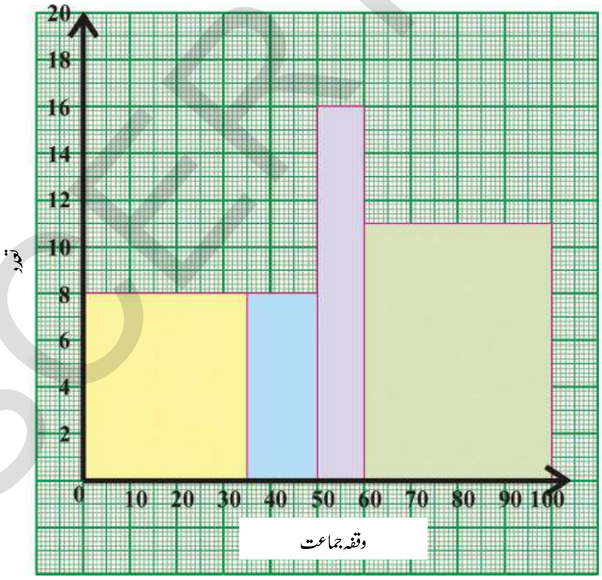
مرحلہ 1: x محور پر ایک موزوں اسکیل کا انتخاب کیجیے اور اس پر نشان لگائیے۔

مرحلہ 2: y محور پر ایک موزوں اسکیل کا انتخاب کیجیے اور اس پر نشانات لگائیے۔

اسکیل: x محور پر 1 سنٹی میٹر = 1 سب سے چھوٹا وقفہ جماعت

y محور پر 1 سنٹی میٹر = 2% فیصد

مرحلہ: وقفہ جماعت کو قاعدہ اور متعلقہ تعدد کو بلندی لے کر گراف پر مستطیل بنائیں۔



SCERT TELANGANA

7.5.1.4 جماعت کی نمائندہ قدروں سے گروہی تعددی تقسیم کا ہسٹوگرام

مثال 15: ذیل میں آٹھویں جماعت کے 65 طلبا کے جملہ نشانات کی تقسیم دی گئی ہے۔ ان معطیات سے ہسٹوگرام بنایئے؟

نشانات وسطی قدریں	150	160	170	180	190	200
طلبا کی تعداد	8	10	25	12	7	3

حل: چونکہ وسطی قدریں دے دی گئی ہیں۔ وقفہ جماعت کو وسطی قدروں سے محسوب کیجیے؟

مرحلہ 1: دو متواتر جماعتوں کے درمیان کا فرق معلوم کیجیے۔

$h = 160 - 150 = 10$ (معلوم کیجیے کہ کیا ہر دو متواتر جماعتوں کا فرق ایک ہی ہے)

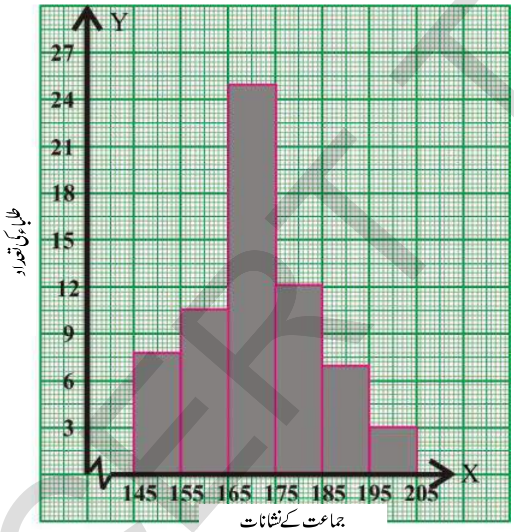
مرحلہ 2: وسطی قدر 'x' سے ہر جماعت کی نچلی اور اوپری سرحدوں کو محسوب کیجیے جیسا کہ $x - \frac{h}{2}$ اور $x + \frac{h}{2}$

مرحلہ 3: موزوں پیمانہ کا انتخاب کیجیے۔

x محور پر 1 سنٹی میٹر = 1 وقفہ جماعت

y محور پر 1 سنٹی میٹر = 4 طلبا

مرحلہ 4: وقفہ جماعت کی بنیاد اور متناظر تعدد کو لمبائی کے طور پر لیکر مستطیل بنایئے۔



جماعت کی نمائندہ قدر (m)	وقفہ جماعت	تعدد طلبا کی تعداد
150	145 - 155	8
160	155 - 165	10
170	165 - 175	25
180	175 - 185	12
190	185 - 195	7
200	195 - 205	3

سوچیے، بحث کیجیے اور لکھیے

1۔ جماعت کی سرحدوں کو x محور پر لیا جاتا ہے۔ جماعت کے حدود کو نہیں لیا جاتا کیوں؟

2۔ کونسی قدر ہسٹوگرام کے ہر مستطیل کی چوڑائی کو متعین کرتی ہے؟

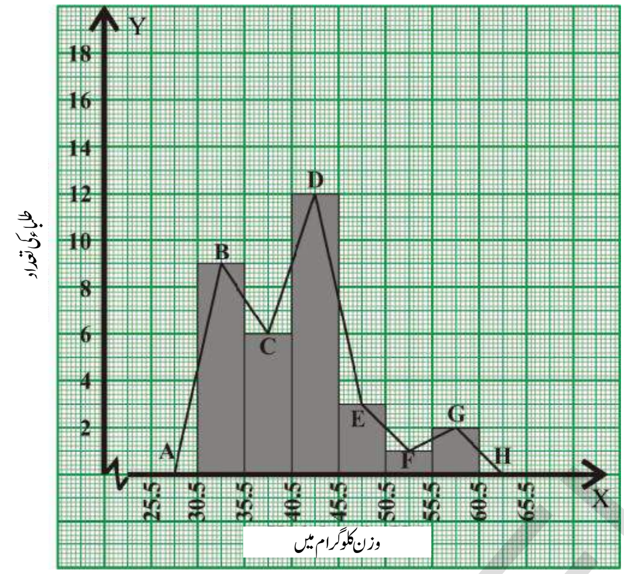
3۔ ہر مستطیل کے طول کا مجموعہ کیا ظاہر کرتا ہے۔

SCERT TELANGANA

7.5.2: تعددی کثیر ضلعی

7.5.2.1: تعددی کثیر ضلعی کی تشریح

کثیر ضلعی، مقداری معطیات اوراس کے تعدد کو ظاہر کرنے کا ایک اور طریقہ ہے۔



آیئے اب اس ترسیم کی خوبیاں دیکھئے۔

متصلہ ہسٹوگرام پر غور کیجیے جو ایک کمپنی کے 33 افراد کے اوزان کو ظاہر کرتا ہے۔ خطی قطعات سے متصلہ مستطیلوں کے اوپری ضلعوں کی وسطی قدروں کو ملایئے۔ ان کی وسطی قدروں کو B, C, D, E, F اور G سے ظاہر کیجیے۔ ان خطی قطعات کو ملانے سے ہم کو شکل B C D E F G حاصل ہوں گی۔ کثیر ضلعی کی شکل کو مکمل کرنے کے لیے ہم کو 35.5 - 30.5 اور 55.5 - 60.5 سے قبل وقفہ جماعت کا تعدد '0' تصور کرنا چاہیے۔ جو بالترتیب ان کی وسطی قدریں ہیں۔

A B C D E F G H ایک کثیر ضلعی ہے۔ حالانکہ سب سے چھوٹی جماعت پہلے اور سب سے بڑی جماعت سے آگے کوئی بھی جماعت وجود نہیں رکھتی۔ دو وقفہ جماعتوں میں '0' ملانے سے ہم کو کثیر ضلعی کا رقبہ بنانے میں مدد ملے گی۔ اس طرح ہم نے جو ہسٹوگرام کا رقبہ بنایا تھا۔ اس طرح کیوں ہے؟

سوچئے ، بحث کیجئے اور لکھئے

1۔ کثیر ضلعی کو ہم کس طرح مکمل کرتے ہیں جبکہ پہلی جماعت سے قبل کوئی بھی جماعت موجود نہیں ہے؟

2۔ ایک معطیات کے ہسٹوگرام کا رقبہ اسکا تعداد اور کثیر ضلعی یکساں ہے۔ کس طرح وجوہات بتایئے۔

3۔ کیا کثیر ضلعی بنانے کے لیے ہسٹوگرام بنانا ضروری ہے؟

4۔ کیا ہم غیر مسلسل معطیات کی تعددی تقسیم سے کثیر ضلعی بنا ئیں گے؟

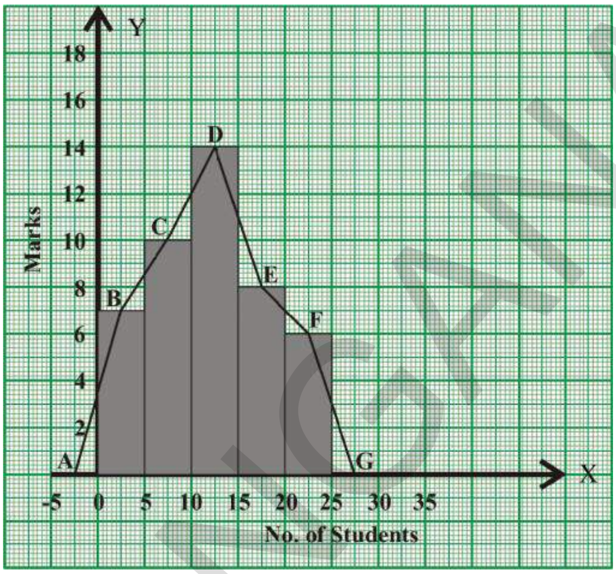
7.5.2.2 کثیر ضلعی کی بناوٹ

ایک امتحان میں 45 طلبا کے حاصل شدہ نشانات (25 میں سے) پر غور کیجیے۔ اس تعددی تقسیم کے جدول سے کثیر ضلعی بنایئے۔

SCERT TELANGANA

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 20-2019

وقفہ جماعت	تعداد (طلباء کی تعداد)	درمیانی قدریں
0-5	7	2.5
5-10	10	7.5
10-15	14	12.5
15-20	8	17.5
20-25	6	22.5
Total	45	



بناوٹ کے مراحل

مرحلہ 1: معطیات میں دیئے گئے ہر وقفہ جماعت کی وسطی قدر محسوب کیجیے۔

مرحلہ 2: دیئے گئے معطیات کے لیے ہسٹوگرام تیار کیجیے اور مستطیل کی اوپری سطح کے درمیان میں وسطی قدر کی نشاندہی کیجیے۔(اس مثال میں B،C،D،E،F دی گئی ہے)

مرحلہ 3: وسطی قدروں کو متواتر جوڑیئے۔

مرحلہ 4: پہلے وقفہ جماعت سے پہلے ایک جماعت اور آخری وقفہ جماعت کے بعد ایک وقفہ جماعت کو تصور کیجیے اور ساتھ ہی ان کی وسطی قدریں A اور H معلوم کیجیے اور x محور پر نشاندہی کیجیے (یہاں پر پہلا وقفہ جماعت 0-5 ہے لہذا پچھلے وقفہ جماعت کو معلوم کرنے کے لیے ہم افقی محور کو منفی سمت میں بڑھاتے ہیں اور خیالی وقفہ جماعت 0-5 کی وسطی قدر معلوم کرتے ہیں)

مرحلہ 5: شروعاتی وسطی نقطہ B سے A کو ملایئے اور اختتامی وسطی نقطہ F سے G کو ملایئے۔اس طرح تعددی کثیر ضلعی حاصل ہوگا۔

تعددی کثیر ضلعی کو آزادانہ طور پر ہسٹوگرام کے بغیر بھی بنایا جاسکتا ہے۔اس کے لیے ہمیں معطیات کے ہر وقفہ جماعت کی وسطی قدر درکار ہوگی۔

یہ کیجیے

1۔ ذیل میں دی گئی تعددی تقسیم کے لیے تعددی کثیر ضلعی بنایئے۔

(i) کرکٹ کے ایک میچ میں طلبا کے رن اس طرح ہیں۔

بنائے گئے رن	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60
طلباء کی تعداد	3	5	8	4	2

(ii) آڈیٹوریم میں ایک ڈرامہ کے ٹکٹوں کی فروخت

ٹکٹ کی قیمت	10	15	20	25	30
فروخت شدہ ٹکٹ کی تعداد	50	30	60	30	20

SCERT TELANGANA

7.5.2.3: تعددی کثیر ضلعی کی خصوصیات

1۔ تعددی کثیر ضلعی، تعددی تقسیم کا ایک ترسیمی اظہار ہے (غیر مسلسل/مسلسل)

2۔ متواتر وقفہ جماعتوں کی نمائندہ قدر یا وسطی قدر x محور پر اور متعلقہ تعدد y محور پر لی جاتی ہے۔

3۔ ایک ہی معطیات کے لیے بنائے گئے ہسٹوگرام اور تعددی کثیر ضلعی کا رقبہ مساوی ہوتا ہے۔

سوچئے ، بحث کیجئے اور لکھئے

1۔ ہسٹوگرام ایک وقفہ جماعت کے تعدد کا اظہار ہے۔ کیا یہ کسی مخصوص نقطہ کی قدر کو بتا سکتا ہے۔

2۔ کیا ایک تعددی کثیر ضلعی مشاہدے کے کسی مخصوص نقطہ پر پائے جانے والے تعدد کو بنا سکتا ہے۔

7.5.2.4: گروہی تعددی تقسیم کے لیے تعددی کثیر ضلعی کی بناوٹ ہسٹوگرام کے بغیر استعمال کے:

ذیابطیس کے مریضوں کے سروے سے ذیل کا جدول بنایا گیا۔

عمر	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60
مریضوں کی تعداد	5	9	16	11	3

آیئے اب ہم ہسٹوگرام کے بغیر ہی ان معطیات پر تعددی کثیر ضلعی بناتے ہیں۔

مرحلہ 1: مختلف وقفہ جماعتوں کی نمائندہ قدریں معلوم کیجیے۔

مرحلہ 2: اسکیل کا انتخاب کریں۔ x محور پر 1 سنٹی میٹر = 1 وقفہ جماعت

y محور پر 1 سنٹی میٹر = 2 نشانات

مرحلہ 3: اگر x جماعت کی نمائندہ قدر اور f اس وقفہ جماعت کا تعدد ہو تو (x,f) پر ترسیم کھینچئے۔

مرحلہ 4: متواتر نقاط کو سلسلہ وار ملائیے۔

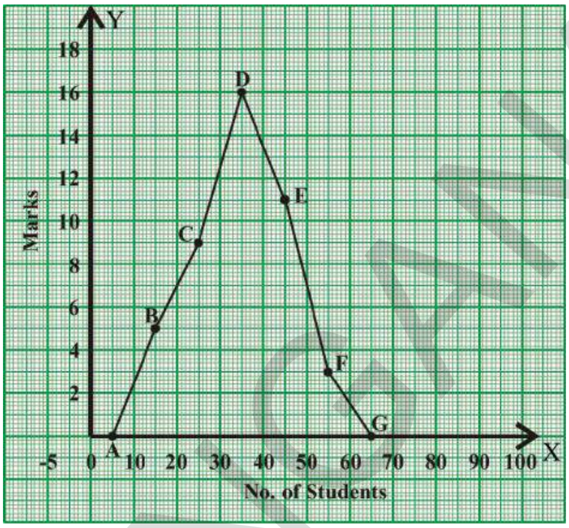
مرحلہ 5: پہلے وقفہ جماعت سے قبل ایک وقفہ جماعت اور آخری وقفہ جماعت کے بعد ایک وقفہ جماعت تصور کیجیے جس کا تعدد صفر ہو۔ اس جماعت کی وسطی قدر معلوم کیجیے اور ترسیم میں نشاندہی کیجیے۔

مرحلہ 6: کثیر ضلعی کو مکمل کیجیے۔

SCERT TELANGANA

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 20-2019

وقفہ جماعت (عمریں)	مریضوں کی تعداد	جماعت کے نشان	مرتب جوڑ
0 – 10	0	5	(5, 0)
10 – 20	5	15	(15, 5)
20 – 30	9	25	(25, 9)
30 – 40	16	35	(35, 16)
40 – 50	11	45	(45, 11)
50 – 60	3	55	(55, 3)
60 – 70	0	65	(65, 0)



7.5.3: گروہی تعددی تقسیم کی منحنی

ہاتھ سے کھینچی گئی سادہ منحنی معطیات کے اظہار کا ایک اور طریقہ ہے۔

آیئے اب اوپر کے معطیات کے لیے بغیر ہسٹوگرام تعددی منحنی بنائیں۔

مرحلہ 1: مختلف جماعتوں کی وسطی قدریں معلوم کیجیے۔

مرحلہ 2: پیمانہ کا انتخاب کیجیے۔

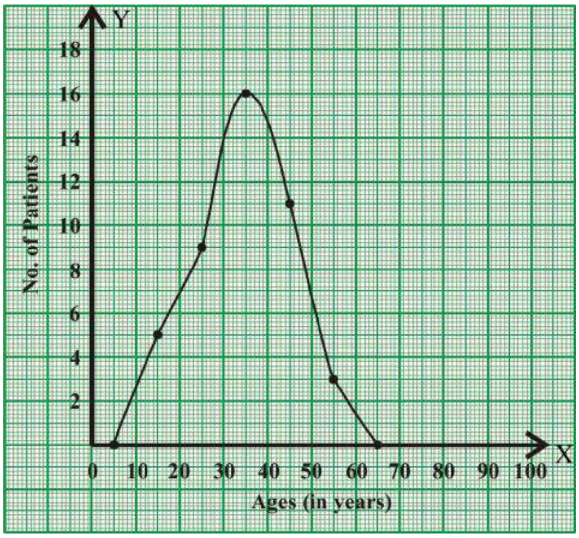
x محور پر 1 سنٹی میٹر = 1 وقفہ جماعت

y محور پر 1 سنٹی میٹر = 2 نشانات

مرحلہ 3: اگر 'x' وسطی نقاط کو ظاہر کرتا ہے اور 'f' مخصوص جماعت کے تعدد کو ظاہر کرتا ہے تب (x,f) ترسیم اتاریئے۔

مرحلہ 4: متصلہ نقاط کو متواتر سادہ منحنی کے ذریعہ ملایئے۔

وقفہ جماعت (عمریں)	مریضوں کی تعداد	جماعت کے نشان	مرتب جوڑ
0 – 10	0	5	(5, 0)
10 – 20	5	15	(15, 5)
20 – 30	9	25	(25, 9)
30 – 40	16	35	(35,16)
40 – 50	11	45	(45,11)
50 – 60	3	55	(55, 3)
60 – 70	0	65	(65, 0)



SCERT TELANGANA

7.5.4 یکجائی تعددی ترسیم

ایک ترسیم جو گروہی تعددی تقسیم کے یکجائی تعدد اور اس جماعت کی نچلی اور اوپری سرحدوں کے استعمال سے اتاری جاتی ہے یکجائی تعددی ترسیم (Ogive Curve) کہلاتی ہے۔

یہ منحنی متواتر سلسلہ کی خاص حد تک پھیلے ہوئے عددی مشاہدات یا سلسلہ میں مزید اضافہ کو سمجھنے میں معاون ہیں۔

7.5.4.1: کم تر یکجائی تعدد کی منحنی

ایک محکمہ مقررہ وقت میں تعمیراتی کام کے لیے کنٹراکٹرس سے حاصل ہونے والے ٹنڈرس کی تعددی تقسیم پر غور کرتا ہے۔

وقفہ جماعت (دن)	0-4	4-8	8-12	12-16	16-20
ٹنڈرس کی تعداد	2	5	12	10	3

مرحلہ 1: اگر دی ہوئی تعددی تقسیم اندرونی شکل میں ہے تب اسے خارجی شکل میں تبدیل کیجیے۔

مرحلہ 2: ''کم تر یکجائی تعدد'' کا جدول بنائیے۔

مرحلہ 3: وقفہ جماعت کی اوپری سرحدوں کو x محور پر اور ان کے یکجائی تعدد کو y محور پر نشاندہی کیجیے۔ پیمانہ کا انتخاب کیجیے؟

x محور پر 1 سنٹی میٹر = 1 وقفہ جماعت

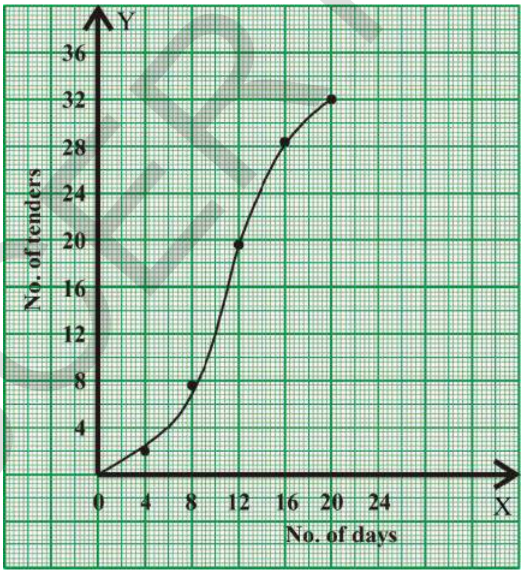
y محور پر 1 سنٹی میٹر = 4 ٹنڈرس

مرحلہ 4: پہلی وقفہ جماعت کی نچلی سرحد (پہلی جماعت سے قبل کی اوپری سرحد) کو یکجائی تعدد 0 لیکر اتاریے۔

مرحلہ 5: ان نقاط کو ہاتھ سے جوڑیے تا کہ مطلوبہ سادہ منحنی حاصل ہو سکے۔

اس طرح ہم زیادہ تر یکجائی تعدد کو y محور پر اور ان کی متناظر نچلی سرحدوں کو x محور پر لیکر زیادہ تر یکجائی تعدد کی منحنی بنا سکتے ہیں۔

وقفہ جماعت (دن)	ٹنڈر کی تعداد	اوپری سرحدیں	کم تر یکجائی تعداد
0 – 4	2	4	2
4 – 8	5	8	7
8 – 12	12	12	19
12 – 16	10	16	29
16 – 20	3	20	32



یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 20-2019

SCERT TELANGANA

مشق - 7.4

1۔ ذیل کے جدولوں میں 45 طلبا کی ذہانتی خارج قسمت Intelligent Quotient (IQ) کی درجہ بندی کی گئی ہے۔معطیات کے لیے ہسٹوگرام بنائیے۔

IQ	60-70	70-80	80-90	90-100	100-110	110-120	120-130
طلباء کی تعداد	2	5	6	10	9	8	5

2۔ جماعت ہشتم کے سالانہ امتحان میں 600 طلبا کے حاصل کردہ نشانات کے لیے ہسٹوگرام تیار کیجیے۔

نشانات	360	400	440	480	520	560
طلباء کی تعداد	100	125	140	95	80	60

3۔ ذیل کے جدول میں ایک فیکٹری کے 250 ملازمین کی ہفتہ واری اجرتیں دی گئی ہیں۔ان معطیات پر ایک ہی گراف میں ہسٹوگرام اور تعددی کثیر ضلعی بنائیے۔

ہفتہ واری اجرتیں	500-550	550-600	600-650	650-700	700-750	750-800
مزدوروں کی تعداد	30	42	50	55	45	28

4۔ ذیل کی تعددی تقسیمی جدول میں ایک منڈل کے پرائمری اسکول کے 60 ٹیچروں کی عمریں دی گئی ہیں۔ان معطیات کا ہر تعددی کثیر ضلعی اور تعددی منحنی بغیر ہسٹوگرام تیار کیجیے۔(علیحدہ ترسیمی کاغذوں پر)

عمریں	24 – 28	28 – 32	32 – 36	36 – 40	40 – 44	44 – 48
اساتذہ کی تعداد	12	10	15	9	8	6

5۔ ذیل کے جدول کے وقفہ جماعت اور تعدد معلوم کیجیے اور ساتھ ہی منحنی بنائیے۔

محصلہ نشانات	5 سے کم	10 سے کم	15 سے کم	20 سے کم	25 سے کم
طلباء کی تعداد	2	8	18	27	35

SCERT TELANGANA

ہم نے کیا تبادلہ خیال کیا

$$\text{اوسط حسابیہ} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots\ldots x_n}{n} \quad \text{یا} \quad \bar{x} = \frac{\sum X}{N}$$

- جہاں پر $\sum x_1$ سے مراد تمام x_i کا مجموعہ ہے اور i کی قدر 1 سے n تک ہوتی ہے۔
- انحراف کا اوسط + مفروضہ اوسط = اوسط حسابیہ یا $\bar{x} = A + \frac{\sum (x - A)}{N}$
- اوسط کا استعمال عددی معطیات کے تجزیہ کے لیے ہوتا ہے۔
- وسطانیہ کا استعمال عددی معطیات کے تجزیہ کے لیے ہوتا ہے خاص طور پر اس وقت جب چند مشاہدات بہت ہی مختلف ہوں۔
- بہتاتیہ کا استعمال عدد اور عبارتی دونوں قسم کے معطیات کے لیے کیا جاتا ہے۔
- معطیات کے مختلف مشاہدات کا تعدد کے ذریعہ اظہار تعددی تقسیم یا تقسیمی جدول کہلاتا ہے۔
- کسی وقفہ جماعت کی اوپری سرحد اور نچلی سرحد کے درمیان کا فرق وقفہ جماعت کی لمبائی کہلاتا ہے جس کو 'C' سے تعبیر کرتے ہیں۔
- اگر معطیات کے تمام مشاہدات اس کے وقفہ جماعت کی نچلی سرحد کے مساوی یا زیادہ ہوں تو اسے ''زیادہ تر یکجائی تعدد'' کہتے ہیں۔
- اگر معطیات کے تمام مشاہدات اس کے وقفہ جماعت کی اوپری سرحد سے کم ہوں تو اس کو ''کم تر یکجائی تعدد'' کہتے ہیں۔
- گروہی تعددی تقسیم میں وقفہ جماعت کی لمبائی مختلف ہو تو ہمیں تعددی کثافت کے اعتبار سے ہسٹوگرام کے مستطیل بنانے چاہئیں۔

$$\text{تعددی کثافت} = \frac{\text{جماعت کا تعدد}}{\text{اس جماعت کی وسعت}} \times \text{سب سے چھوٹے وقفہ جماعت کی لمبائی}$$

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 20-2019
SCERT TELANGANA

- پہلے وقفہ جماعت سے کسی مخصوص کمرہ جماعت کی اوپری سرحد تک کے تعددوں کا تدریجی یا مرحلہ وار مجموعہ کم تر یکجائی تعدد کہلاتا ہے (L.C.F)
- خارجی وقفہ جماعت کی تعددی تقسیم کا ترسیمی اظہار 'ہسٹوگرام' کہلاتا ہے۔
- اگر کسی گروہی تعددوں تقسیم میں موجود وقفہ جماعت کی لمبائی مختلف ہو تو ہم ہندگرام میں مستطیلوں کو تعددی کثافت کی بنیاد بناتے ہیں۔

$$\text{تعددی کثافت} = \frac{\text{وقفہ جماعت کا تعدد}}{\text{وقفہ جماعت کی لمبائی}} \times \text{معطیات میں اقل ترین وقفہ جماعت کی لمبائی}$$

- تعددی کثیر ضلعی، تعددی تقسیم کا ایک ترسیمی اظہار ہے (غیر مسلسل / مسلسل)
- کسی تعددی کثیر ضلعی یا تعددی منحنی میں؛ جماعت کی نمائندہ قدر یا وسطی قدر کو X- محور پر اور ان کے متعلقہ تعددوں کو Y- محور پر لیا جاتا ہے۔
- ایک ہی معطیات کے لیے تیار کئے گئے ہسٹوگرام اور تعددی کثیر ضلعی کا رقبہ مساوی ہوتا ہے۔
- ایک گروہی معطیات کو بتانے والی ترسیم جو یکجائی تعداد اور متعلقہ کمرہ جماعت کی نچلی/اوپری سرحدوں کے درمیان بتائی گئی ہو یکجائی تعددی منحنی یا Ogive curve منحنی کہلاتی ہے۔

تنقیدی سوچ

- چند ترسیمات اور چارٹ اس میں ہوتے ہیں کہ وہ فرد کے انفرادی فہم پر منحصر ہوتے ہیں۔ ذیل میں دیئے گئے تصاویر پر غور کیجئے اور ان سوالات کے جوابات جانچ سے پہلے اور جانچ کے بعد دیجئے۔

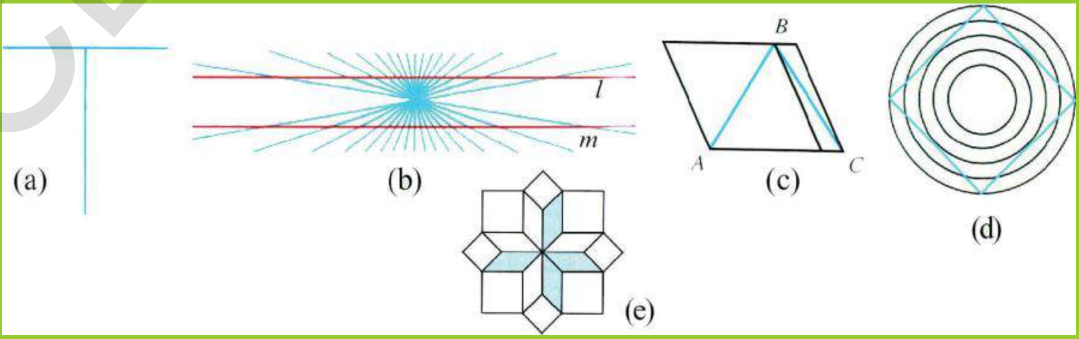
a) کونسی خط بڑی ہے افقی یا عمودی؟

b) کیا خطوط l اور m مستقیم اور متوازی ہیں؟

c) کونسی خط قطعہ بڑی ہے: $\overline{AB}$ یا $\overline{BC}$

d) اس کثیر ضلعی میں کتنے ضلع ہیں؟ کیا یہ مربع ہے؟

e) ذیل میں دی گئی شکل پر ٹکٹکی باندھ کر دیکھئے۔ کیا آپ دیکھ سکتے ہیں کہ چار بڑے کھمبے کاغذ کے اوپر بڑھتے ہوئے دکھائی دے رہے ہیں۔ کچھ دیر اور دیکھئے اور چھوٹے کھمبوں کو بھی دیکھنے کی کوشش کیجئے۔



SCERT TELANGANA

8

علم ہندسہ

Exploring Geometrical Figures

8.0 تعارف

روزمرہ زندگی میں ہمیں علم ہندسہ (جیومیٹری) سے سابقہ پڑتا ہے کئی اشیاء اور اعمال ایسے ہوتے ہیں جن کا تعلق راست یا بالراست یا جومیٹری سے ہوتا ہے۔ یہ اشیاء اور اعمال جیومٹری کی خصوصیات اور اطلاق رکھتی ہیں۔

ذیل میں دی گئی تصاویر پر غور کیجئے۔ ان میں کون کون سی مختلف جومیٹریائی اشکال اور ترتیب ہے؟ آپ نے دیکھا ہوگا بعض اشکال فطرت سے مشابہہ ہوتی ہیں۔

چند اشکال متماثل اور بعض جومیٹریائی اشکال فرش پر بھی ایک ترتیب میں ہوتی ہیں۔

کیا آپ ان تصاویر میں مشابہہ اشکال، متماثل اشکال اور ترتیب کی نشاندہی کر سکتے ہیں؟

Fig. 8.1(b)

Fig. 8.1 (a)

تصویر میں موجود کھڑکیوں کی شکل متماثل ہے، مثلثی وضع قطع مشابہہ ہے اور فرش پر ٹائیلس (Tiles) کی ترتیب تشاکل ہوئی ہے۔

آیئے اب ہم مطالعہ کرتے ہیں کہ جومیٹری کی اشکال اور ترتیب کے اُصول ہماری روزمرہ زندگی میں کس طرح اثر انداز ہوتے ہیں۔

SCERT TELANGANA

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20

8.1 مماثلت

Fig. 8.2

آپ نے غور کیا ہوگا کہ ہماری روز مرہ زندگی میں استعمال ہونے والی ہمہ اقسام کی اشیاء مساوی رقبہ اور مساوی شکل والی ہوتی ہیں۔ مثال کے طور پر ایک فیان کی پتیاں ایک دوسرے سے رقبہ اور شکل میں مساوی ہوتی ہیں۔

روزمرہ زندگی میں مماثلت کی ایک اور مثال

ایک CD کی دوکان کو جائیے اور CDs پر غور کیجئے آپ نے کیا دیکھا؟

CDs کی شکل اور جسامت مساوی ہے۔ اگر آپ ان کو ایک دوسرے پر جمائیں تب وہ ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں۔ ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ CDs ایک دوسرے کے مماثل ہوتے ہیں۔

اب پوسٹ کارڈ لیجئے اور ان کو ایک دوسرے پر رکھئے آپ یہ دیکھیں گے کہ دونوں کی شکل اور جسامت یکساں ہے۔ یہ تمام ایک دوسرے کے مماثل ہیں۔

ایسی تین اشیاء کے نام بتایئے جن کے رُخ متماثل ہیں۔

اشکال کی مماثلت

ذیل کی اشکال پر غور کیجئے

(i)

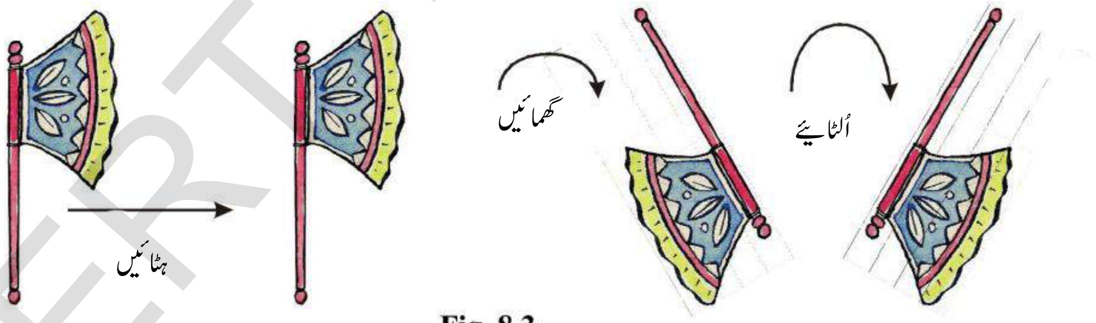


Fig. 8.3

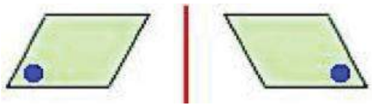
محل وقوع کا لحاظ کئے بغیر کیا اوپر دی ہوئی تمام اشکال ایک ہی شئے کو ظاہر کرتی ہیں؟ یہاں پر ایک ہی شکل کو ہٹایا، گھمایا، اور اُلٹایا گیا ہے۔ یہ تمام اشکال ایک دستی پنکھے کو ظاہر کرتی ہیں۔

اگر ان تمام شکلوں کو ایک دوسرے پر رکھتے ہیں تو آپ کیا حاصل کریں گے؟

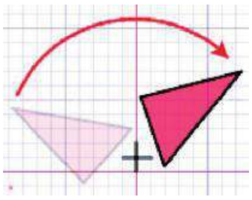
SCERT TELANGANA

کیا آپ کو یاد ہے کہ ہم ایک ہی شکل و جسامت والی اشیاء کو کیا کہتے ہیں؟

مساوی شکل اور جسامت والی اشکال متماثل اشکال کہلاتی ہیں۔



اُلٹائیے: اُلٹنا دراصل وہ تبدیلی ہے جس میں ایک سادہ شکل کو پلٹ کر خط کی دوسری جانب اُس کا عکس حاصل کیا جاتا ہے، حقیقی شکل کا عکس (Mirror Image) بنایا جاتا ہے۔



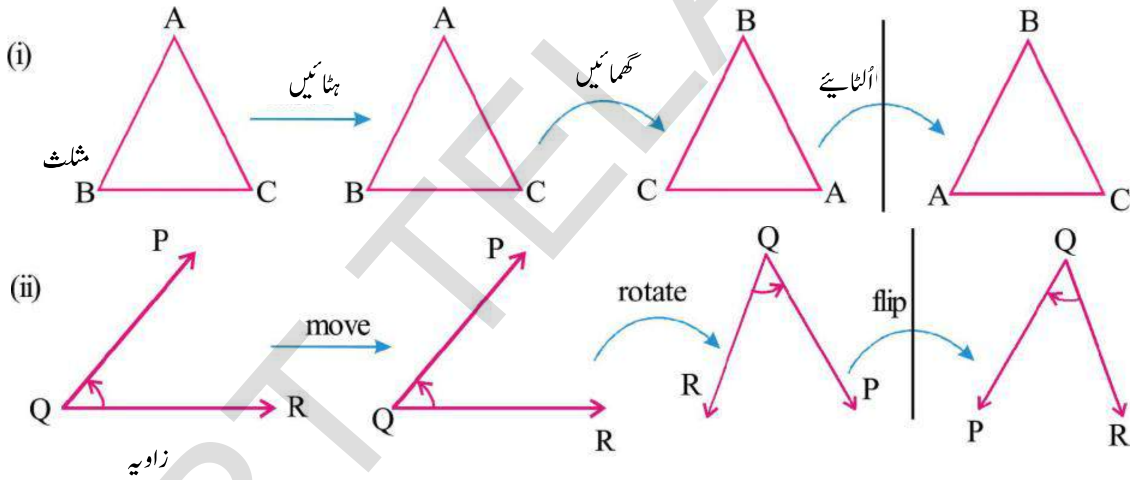
جب کوئی شکل اُلٹتی ہے تب حقیقی شکل اور اُس شکل کے عکس کا ہر نقطہ خط سے مساوی فاصلہ پر ہوتا ہے۔

گھمائیے: گھمانا یعنی مرکز پر گھوم جانا، کسی مستقل شکل میں مرکز سے کسی بھی نقطہ کا فاصلہ تبدیل نہ ہوگا۔ شکل کا ہر نقطہ مرکز کے اطراف دائرہ بنائے گا۔

شکل کا مرکزی نقطہ اپنی جگہ پر جما رہتا ہے اور دیگر تمام نقاط مرکز کے اطراف دائرہ بناتے ہیں۔

ایک مکمل گردش 360^{o} کی ہوتی ہے۔

اب ذیل میں دی گئی جومیٹری اشکال کا مشاہدہ کیجیے۔



ان تمام صورتوں میں اگر پہلی شکل کو ہٹایا یا گھمایا، اُلٹایا جائے تو کیا آپ شکل و جسامت میں کوئی فرق محسوس کر رہے ہیں؟ نہیں، ہر صف میں دی گئی شکل متماثل ہے بلکہ ایک ہی شکل مختلف وضع میں ظاہر کی گئی ہے۔

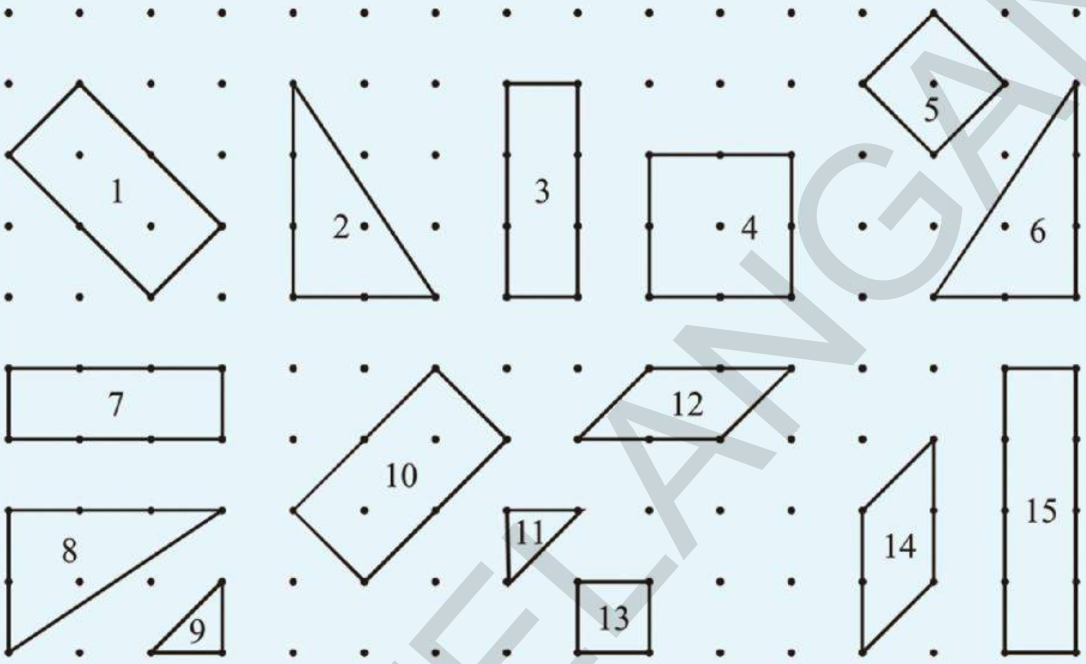
اگر دو متماثل اشکال کو ہٹایا یا گھمایا جائے تب بھی وہ متماثل ہی ہوں گے۔ اور ان اشکال کو آئینہ کے ذریعہ منعکس کرنے پر بھی وہ متماثل ہی ہوں گی۔

ہم مماثلت کو اس $\cong$ علامت کے ذریعہ ظاہر کرتے ہیں

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20
SCERT TELANGANA

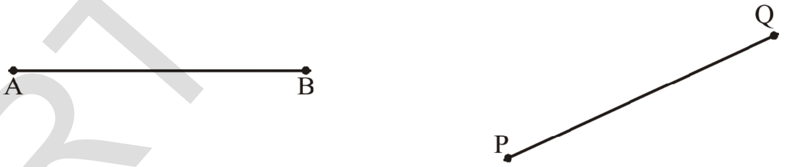
یہ کیجئے

ذیل میں دی گئیں کونسی اشکال متماثل ہیں۔



کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ جب کوئی دو (a) خطی قطعات (b) زاویہ (c) مثلثات متماثل ہوتے ہیں؟

(a) ہم یہ جانتے ہیں کہ کوئی دو مساوی لمبائی والے خطی قطعہ متماثل ہوں گے۔



خطی قطعہ AB = خطی قطعہ PQ تب $AB \cong PQ$

(b) اگر دو زاویوں کی پیمائش مساوی ہو تب یہ زاویے متماثل ہوں گے۔

$\angle AOB \cong \angle PQR$

(c) دو مثلثات $\triangle ABC$ اور $\triangle PQR$ متماثل ہوں گے اگر ان کے تمام نظیری زاویے اور تمام نظیری ضلع مساوی ہوں۔

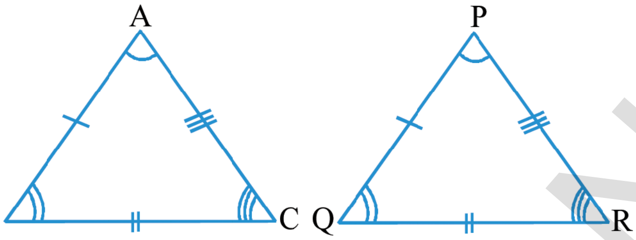
SCERT TELANGANA

یعنی $AB = PQ$ اور $\angle A = \angle P$

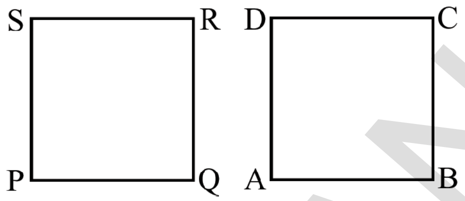
$BC = QR$ $\angle B = \angle Q$

$CA = RP$ $\angle C = \angle R$

$\Delta ABC \cong \Delta PQR$.



آپ یہ کب کہہ سکتے ہیں کہ دو کثیر ضلعی متماثل ہیں؟ آیئے ایک مثال کے ذریعہ بحث کرتے ہیں فرض کیجیے کہ ABCD اور PQRS دو مربعے ہیں۔ اگر ہم ایک مربع ABCD کو دوسرے مربع PQRS پر رکھتے ہیں تب وہ ایک دوسرے کا مکمل احاطہ کرتے ہوں۔

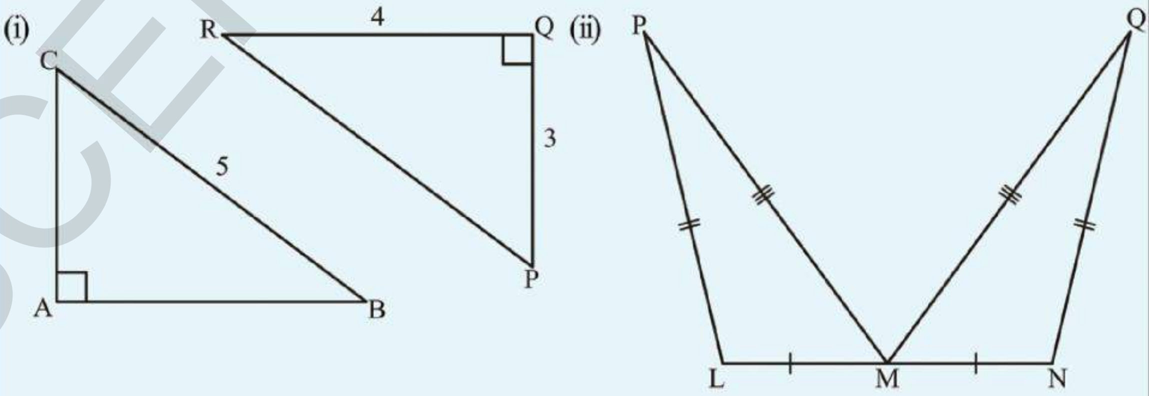


یعنی ان کے کنارے ایک دوسرے پر منطبق ہوں تب ہی ہم کہہ سکتے ہیں کہ وہ مربعے ایک دوسرے کے متماثل ہیں۔

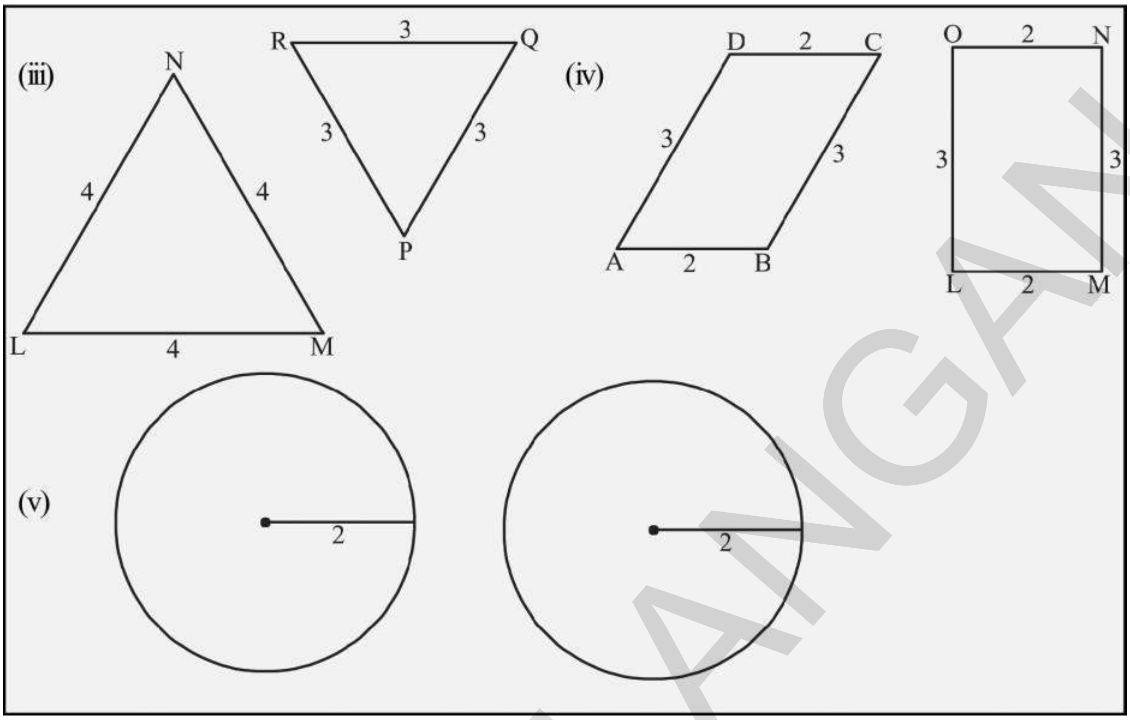
لہٰذا دو جیومٹریائی اشکال اس وقت متماثل ہوں گی جب وہ ایک دوسرے کا مکمل احاطہ کرتے ہوں اور ساتھ ہی دو کثیر ضلعی متماثل ہوں گی اگر ان کے نظیری زاویے مساوی ہوں اور نظیری ضلعے بھی مساوی ہوں۔

یہ کیجیے

ذیل میں دی گئی اشکال کی جوڑی پر غور کیجئے۔ اور بتایئے کہ کیا یہ متماثل ہیں؟ وجوہات بتلایئے۔ ان کے نام دیجیے۔



SCERT TELANGANA



8.1.2 مشابہہ اشکال

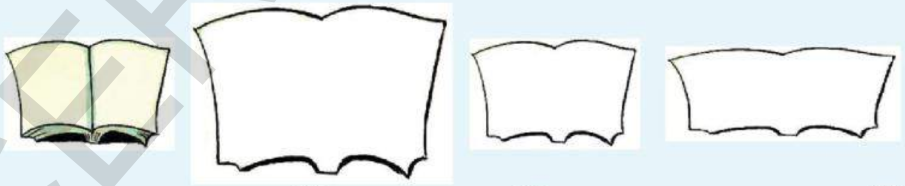
ہماری کتابوں میں ہمارے اطراف واکناف کئی اشیاء کی تصاویر پائی جاتی ہیں۔ مثال کے طور پر ہاتھیوں، شیروں، عمارتوں کی وضع وقطع کے نقشے مائیکرو چپس کی ساخت وغیرہ۔

کیا ان کو اپنی حقیقی جسامت میں اُتارا (بنایا) گیا ہے؟ نہیں یہ ممکن نہیں۔ ان میں سے چند حقیقی جسامت سے چھوٹے ہوتے ہیں چند بڑے۔

یہ کیجئے

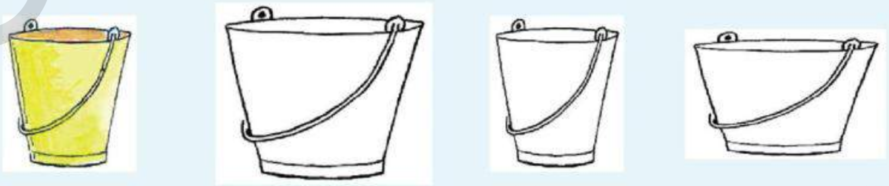
1. ذیل کے کونسے خاکے پہلے خاکے سے مشابہت رکھتے ہیں ان کی شناخت کیجئے۔

(a)



(i) (ii) (iii)

(b)



(i) (ii) (iii)

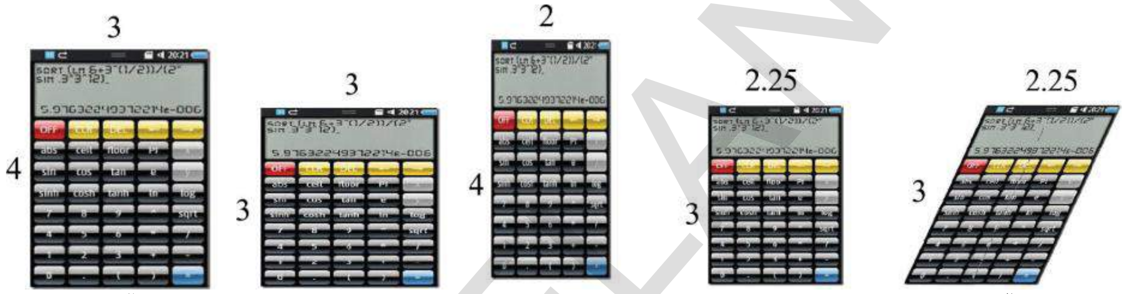
SCERT TELANGANA

ایک کاغذ پر ایک پیڑ کی تصویر بنائی گئی ہے۔اب ہم یہ کس طرح معلوم کریں گے کہ بنائی گئی تصویر حقیقی تصویر کے مشابہ ہے۔

حقیقی

بنائی ہوئی

آیئے معلوم کرتے ہیں۔یہاں ایک شئے ہے جس کی تخفیف مختلف انداز میں کی گئی ہے۔ذیل میں سے کون سی تخفیف حقیقی شئے سے مشابہت رکھتی ہے۔



حقیقی شئے   تخفیف -1   تخفیف -2   تخفیف -3   تخفیف -4

ہم ان تمام پر غور کرنے کے بعد اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ تخفیف 3 حقیقی شئے سے مشابہت رکھتی ہے۔کیوں؟

اب حقیقی شئے اور تخفیف 3 کے نظیری ضلعوں کی نسبت معلوم کیجیے۔آپ نے کیا غور کیا۔

$$\frac{\text{حقیقی شئے کا طول}}{\text{تخفیف 3 کا طول}} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{\text{حقیقی شئے کا عرض}}{\text{تخفیف 3 کا عرض}} = \frac{3}{2.25} = \frac{3\times 4}{2.25\times 4} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

ہم نے یہ غور کیا کہ نظیری ضلعوں کی نسبت مساوی ہوتی ہے۔یہاں پر تمام نظیری زاویے قائمہ ہیں اور مساوی ہیں۔

لہٰذا ہم نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ اگر دو کثیر ضلعی کے نظیری زاویے متماثل اور ان کے ضلعوں میں تناسب ہو تو وہ کثیر ضلع مشابہ ہوں گے۔اور ساتھ ہی تمام تخفیف کردہ اشکال کے نظیری ضلعوں کا تناسب معلوم کیجیے۔

8.1.3: ہم مشابہت کے اُصول کا اطلاق کہاں کرتے ہیں؟

تعمیر کی جانے والی عمارت کے لئے انجینئر Elevation Plan تیار کرتے ہیں۔ڈی ٹی پی آپریٹر کمپیوٹر پر خاکے اُتارتے ہیں جو کہ بنائے جانے والے پیانے کے تناسب سے بڑے کر لئے جا سکتے ہیں۔فوٹو گرافر تصاویر اس طرح تیار کرتے ہیں کہ وہ حقیقی شئے سے تناسب میں ہوتی ہیں۔سائنسی آلات کے خاکے اور ممالک وغیرہ کے نقشے تناسب میں ہوتے ہیں یعنی حقیقی شئے کے مشابہ ہوتے ہیں۔

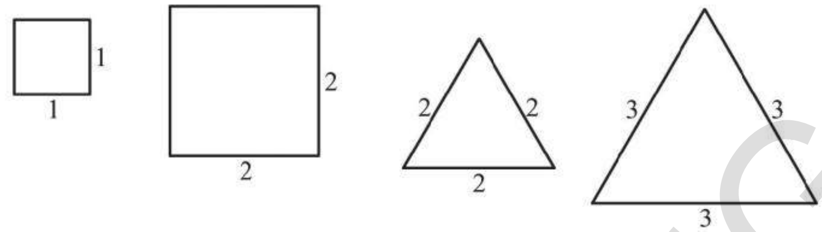
SCERT TELANGANA

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20

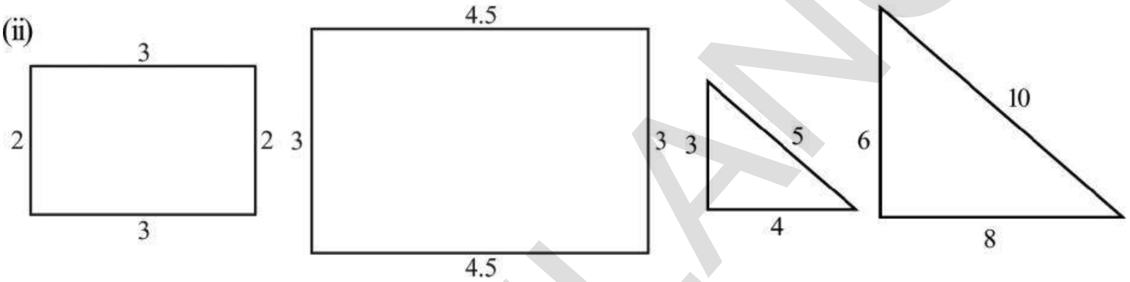
مشابہت کی جانچ

ذیل میں دی گئی مشابہہ تصاویر کی جوڑیوں پر غور کیجئے۔ ان کے ضلعوں کی پیمائش کیجئے۔ اور ان کے نظیری ضلعوں کے درمیان نسبت معلوم کیجئے اور ساتھ ہی نظیری زاویوں کو بھی معلوم کیجئے۔ آپ نے کیا مشاہدہ کیا؟

(i)



(ii)



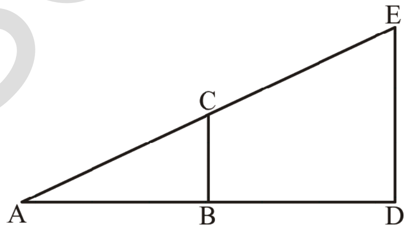
ذیل میں دیئے گئے جدول کو پچھلے صفحہ کی اشکال کی بنیاد پر مکمل کیجئے۔

نظیری ضلعوں کی نسبت	نظیری زاویوں کی نسبت
(i) مربع = $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$(90^o,90^o,90^o,90^o) = (90^o,90^o,90^o,90^o)$
(ii) مساوی الاضلاع مثلث = $\frac{2}{3} = \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$	$(60^o,60^o,60^o) = (60^o,60^o,60^o)$
(iii) مستطیل .... = $\frac{2}{3}$	$(90^o,90^o,90^o,90^o) = (90^o,90^o,90^o,90^o)$
(iv) قائمۃ الزاویہ مثلث ..... = $\frac{3}{6}$	(........, ..., ...,) = (........, ..., ...,)

دی گئی ان جوڑیوں کی مثالوں میں نظیری ضلعوں کی نسبت مساوی ہے اور نظیری زاویئے مساوی ہیں۔

ایک اور مثال پر غور کیجئے

متصلہ شکل میں $\triangle ABC$ اور $\triangle ADE$ دو مشابہہ مثلثات ہیں۔ ہم ان کو $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ سے ظاہر کرتے ہیں اس میں ایک کو دوسرے پر رکھا جاتا ہے۔



$\angle A \cong \angle A$

$\angle B \cong \angle D$ کیوں

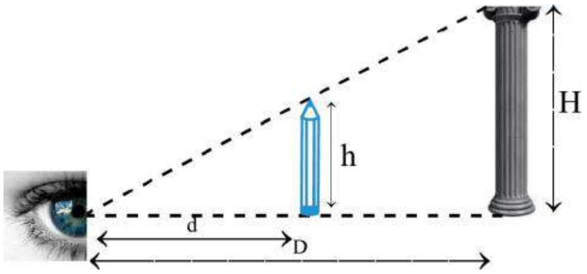
$\angle C \cong \angle E$ کیوں

SCERT TELANGANA

اور ہم یہ بھی کہہ سکتے ہیں کہ

$$\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{DE}=\frac{AC}{AE}$$

مثال: ایک لڑکی اپنے ہاتھ میں ایک پنسل انتصاباً پکڑ کر ایک ستون کی طرف اپنا ہاتھ بڑھاتی ہے جو کہ اس سے کچھ فاصلہ پر ہے۔ وہ دیکھتی ہے کہ پنسل اُس ستون کا مکمل احاطہ کرتا ہے جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔ اگر ہم اس وضاحت کا پچھلی مثال سے تقابل کریں تو ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ



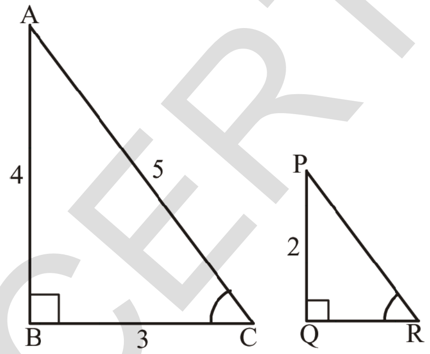
$$\frac{\text{ستون کی اونچائی (H)}}{\text{پنسل کی لمبائی (h)}}=\frac{\text{ستون سے لڑکی کا فاصلہ (D)}}{\text{اس کے ہاتھ کا فاصلہ (d)}}$$

پنسل کی لمبائی اور لڑکی کے ہاتھ کی لمبائی اور ستون سے فاصلہ کی پیائش کر کے ستون کی اونچائی محسوب کر سکتے ہیں۔

کوشش کیجیے

چھڑی کو اپنے ہاتھ میں انتصاباً پکڑ کر اپنے ہاتھ کو پھیلا کر اپنی اسکول کی عمارت کو چھپانے کی کوشش کیجیے (اسکول کی عمارت سے اپنا فاصلہ درست کیجیے تا کہ عمارت مکمل طور پر چھڑی میں چھپ جائے) اس کا خاکہ اُتاریئے اور اسکول کی عمارت کی اونچائی کا اندازہ لگایئے۔

مثال 1: متصلہ شکل میں $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ اور $\angle C = 53^0$ تب ضلع P R اور $\angle P$ معلوم کیجیے۔



حل: $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ اگر دو مثلثات مشابہہ ہیں تو ان کے نظیری زاویے مساوی ہوتے ہیں اور متناظر اضلاع تناسب میں ہوتے ہیں۔

$$\frac{PR}{AC}=\frac{PQ}{AB} \Rightarrow \frac{PR}{5}=\frac{2}{4}$$

$$PR=\frac{2}{4}\times 5=2.5$$

دوبارہ

$$\angle R=\angle C=53^0$$

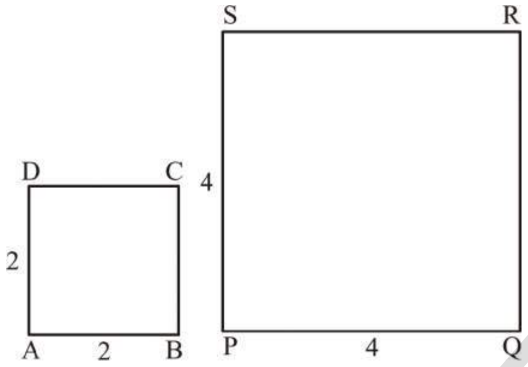
یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20

مثلث کے تینوں زاویوں کا مجموعہ 180^{o} ہوتا ہے۔

$$\angle P + \angle Q + \angle R = 180^{o}$$
$$\angle P + 90^{o} + 53^{o} = 180^{o}$$
$$\angle P = 180^{o} - 143^{o} = 37^{o}$$

مثال2: مختلف ضلعوں کے دو مربع کھینچئے۔ کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ یہ مشابہ ہیں؟ وضاحت کیجئے؟ ان کے احاطے، رقبے، اوران کے درمیان نسبت معلوم کیجئے۔ آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟

حل: 2 سم اور 4 سم ضلع کے دو مربعے بنائیے۔



جیسا کہ ان کے اضلاع تناسب میں ہیں

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CD}{RS} = \frac{DA}{SP} = \frac{2}{4}$$
$$= \frac{1}{2}$$

اوران کے تمام نظیری زاویوں کے جوڑ 90^{o} ہیں۔

اس طرح مربع PQRS ~ مربع ABCD

سم ABCD = 4 x 2 = 8 □ کا احاطہ

سم PQRS = 4 x 4 = 16 □ کا احاطہ

ان کے احاطوں کی نسبت = 8 : 16 = 1 : 2

یہ ان کے متناظر اضلاع کی نسبت ہے

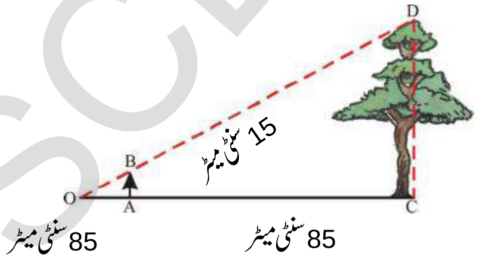
مربع سم ABCD = 2 x 2 = 4 □ کا رقبہ

مربع سم PQRS = 4 x 4 = 16 □ کا رقبہ

ان کے رقبوں کی نسبت = $4 : 16 = 1 : 4 = 1^{2} : 4^{2}$

= متناظر ضلعوں کے مربعوں کی نسبت

مثال3: حامد ہاتھ میں پڑی عموداً پکڑ کر ایک فاصلے سے ایک درخت کی اونچائی کا اندازہ لگانے کی کوشش کرتا ہے۔ بتائی گئی شکل اُتاریئے اگر پڑی پر درخت کی اونچائی 85 سنٹی میٹر ہے اور حامد اور درخت کا درمیانی فاصلہ 15 میٹر ہے تب درخت کی حقیقی اونچائی معلوم کیجئے۔



حل: شکل کے مطابق $\triangle AOB \sim \triangle OCD$

دومشابہہ مثلثات کے نظیری ضلعے متناسب ہوتے ہیں۔

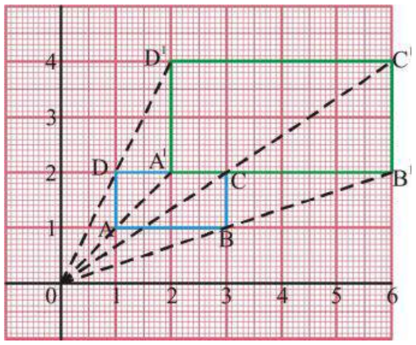
SCERT TELANGANA

$$\therefore \frac{OA}{OC} = \frac{AB}{CD} = \frac{OB}{OD}$$

$$\therefore \frac{1}{15} = \frac{0.85}{CD} \Rightarrow CD = 0.85 \times 15 = 12.75\text{ m}$$

$\therefore$ پیڑ کی اونچائی $= 12.75$ m

وسعت Dilations:



بعض اوقات Cut Outs بنانے کے لئے تصویروں کو بڑا کرنا پڑتا ہے بعض اوقات بڑی بڑی تصاویر کو چھوٹی تصویر میں ڈھال کر ڈیزائین کرتے ہیں دونوں صورتوں میں اشکال، اصل شکل کے مشابہہ ہوتی ہیں اس کا مطلب روزمرہ زندگی میں مشابہہ اشکال کو پھیلانا یا چھوٹا کرنا پڑتا ہے ڈرائنگ میں مشابہہ اشکال کو چھوٹا کرنا یا بڑھانا وسعت Dilation تقسیم کہلاتا ہے۔

ذیل کی وسعت ABCD کا مشاہدہ کیجئے یہ ایک مستطیل ہے جو ترسیم پر اُتارا گیا ہے۔

تمام راس A، B، C، D نقطہ O پر ملتے ہیں اگر ان کے طول کو دگنا کیا جائے تو A'، B'، C' اور D' ترتیب وار حاصل ہوتے ہیں A'، B'، C' اور D' کو ملانے پر مستطیل بنتا ہے جس کے اضلاع ABCD کے دگنے ہیں۔ یہاں O مرکز وسعت Centre of Dilation کہلاتا ہے۔

جز پیمانہ $\frac{OA^1}{OA} = \frac{2}{1} = 2$

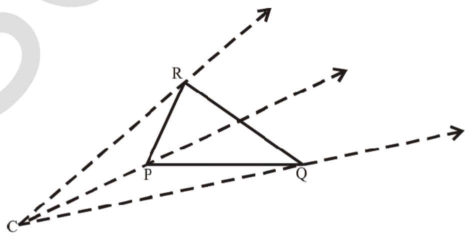
کوشش کیجئے

1. ترسیم شیٹ پر ایک مثلث اُتاریئے اور 3 جز پیمانے سے اس توسیع کیجئے۔ کیا یہ دونوں اشکال مشابہہ ہیں۔
2. دوسری شکل آگے بڑھاتے ہوئے کوشش کیجئے 4، 5 جز پیمانے سے مربعوں کو اُتاریئے۔ آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟

8.2.1 وسعت (Dilation) کی بناوٹ:

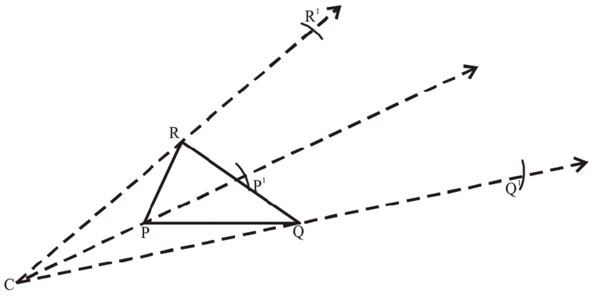
مثال 4: مثلث کی توسیع کیجئے جہاں K=2 (جز پیمانہ) صرف رولر اور پرکار کا استعمال کیجئے۔

مرحلہ 1: $\triangle PQR$ بنایئے اور C کو مرکز توسیع مان کر جو مثلث نہیں ہے C سے مثلث کے ہر ایک راس کو ملایئے۔



یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20

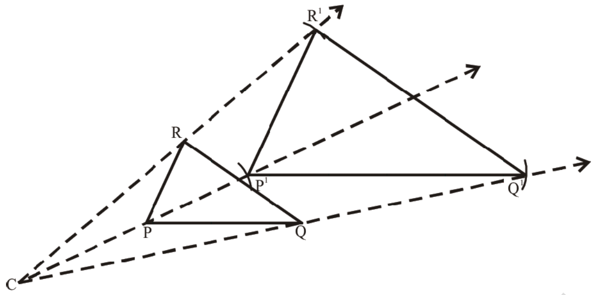
مرحلہ 2: پرکارکو استعمال کرتے ہوئے تین نقاط P^1، Q^1 اور R^1 کی نقشہ پر نشاندہی کیجیے اس طرح کہ



$CP^1 = k\,(CP) = 2\,CP$

$CQ^1 = 2\,CQ$

$CR^1 = 2\,CR$



مرحلہ 3: P'Q'، Q'R' اور R'P' کو ملایئے ہم دیکھتے ہیں کہ

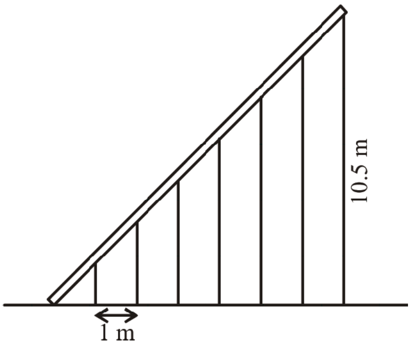
$\triangle P'Q'R' \sim \triangle PQR$

مشق - 8.1

1. کوئی پانچ متماثل اشیاء کے نام لکھیے جنھیں آپ روزانہ استعمال کرتے ہیں؟
2. (a) دو متماثل اشکال اُتاریئے۔ کیا یہ مشابہ ہیں؟ سمجھایئے۔
   (b) دو مشابہ اشکال لیجیے آپ انھیں ہٹائیں، گھمائیں یا اُلٹانے پر کیا یہ اب بھی مشابہ ہیں؟
3. $\triangle ABC \cong \triangle NMO$ میں اس کے متماثل اضلاع اور زاویے لکھیے۔
4. ذیل کے بیانات آیا صادق ہیں یا کاذب وجہ بتلایئے۔
   (i) 3 سم ضلع کے دو مربع ہیں اگر ان میں سے ایک کو 45^o پر گھمایا جائے تب بھی یہ متماثل ہوتے ہیں۔
   (ii) دو قائم الزاویہ مثلثات جن کے وتر 5 سم ہیں متماثل ہوتے ہیں۔
   (iii) دو دائرے جن کے نصف قطر 4 سم ہیں متماثل ہوتے ہیں۔
   (iv) دو مثلث مساوی الاضلاع جن کا ہر ضلع 4 سم ہے جو $\triangle ABC$ اور $\triangle LHN$ ہیں مگر متماثل نہیں ہیں۔
   (v) آئینے میں کثیر ضلعی کا عکس اس کے طول کے متماثل ہوتا ہے۔
5. مربعی نقاط والی شیٹ پر ایک کثیر ضلعی اُتاریئے اور مختلف سمتوں میں متماثل اشکال اُتاریئے اور ان کا آئینی عکس بھی۔
6. ترسیم یا نقاط والے شیٹ کو استعمال کرتے ہوئے ایک مستطیل اُتاریئے اور مشابہ شکل اور دونوں کا احاطہ اور رقبہ معلوم کیجیے۔ ان کی نسبت

SCERT TELANGANA

اوران کے نظیری اضلاع کی نسبت میں تقابل کیجئے۔



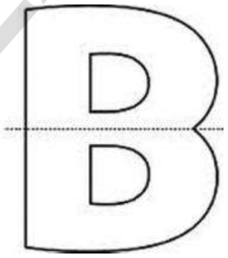
.7 لوہے کی ترچھی گذر کے لئے 7 ستونوں کو استعمال کیا گیا ہے جیسا کہ متصلہ شکل میں بتلایا گیا ہے۔ اگر دو ستونوں کا درمیانی فاصلہ 1 میٹر ہے اور آخری ستون کی لمبائی 10.5 میٹر ہے تب ایک ستون کی اونچائی معلوم کیجئے۔

.8 3 میٹر اونچے کھمبے سے ساجدہ 5 میٹر دور کھڑی ہوکر کھمبے کے عقب میں موجود عمارت کا مشاہدہ کرتی ہے۔ کھمبے اور عمارت کے درمیان کا فاصلہ 10 میٹر ہو تو عمارت کی بلندی معلوم کیجئے۔(یہاں ساجدہ کا قد قابل نظرانداز ہے)

.9 کوئی بھی پیمائشات لے کر چار ضلعی بنائیے۔ 3 کے جز پیمانے سے اس کو وسعت دیجئے اوران کے متناظر ضلع کی پیمائش کیجئے اور تصدیق کیجئے کہ یہ مشابہہ ہیں۔

تشاکل

ذیل کی اشکال پر غور کیجئے اگر ہم ان کو نصف پر موڑیں تب اس کا ہر آدھا حصہ دوسرے حصہ سے منطبق ہوتا ہے۔

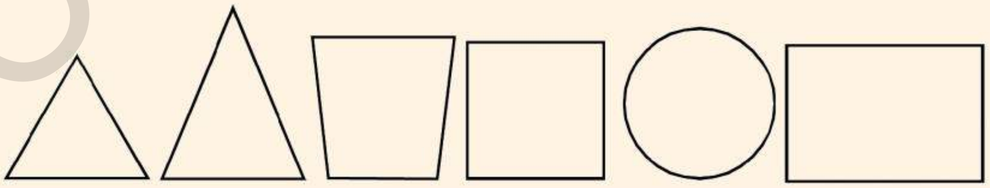


ایسی اشکال کو ہم کیا کہتے ہیں؟ ہم اس خط کو کیا کہتے ہیں؟ جس پر شکل کو موڑنے پر اسکا ہر آدھا حصہ دوسرے سے منطبق ہوتا ہے؟ کیا آپ اس سے متعلق اعادہ کر سکتے ہیں۔

یہ متشاکل اشکال کہلاتی ہیں اور جو خط اس کو مساوی حصوں میں تقسیم کرتا ہے خط تشاکل کہلاتا ہے۔

یہ کیجئے

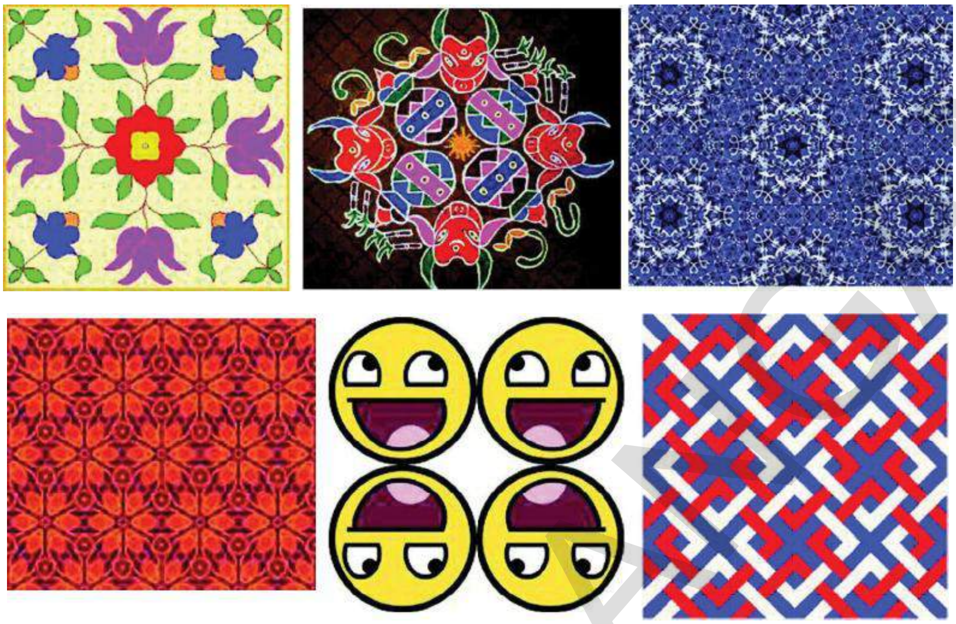
ذیل کی اشکال میں تمام ممکن خطوط تشاکل اُتاریئے۔



یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20

SCERT TELANGANA

ذیل کے تشاکلی نمونوں پر غور کیجئے جو ہم اطراف دیکھتے ہیں۔



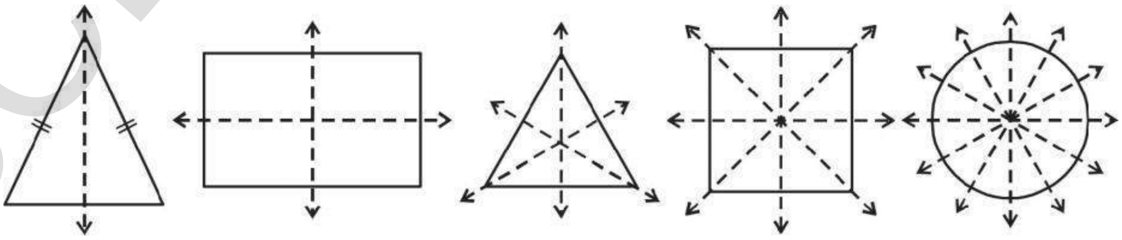
یہ تمام نمونے مختلف اقسام کے تشاکل ہیں۔

یہاں دی گئی تصویر میں کتے کے رُخ کو خط تشاکل کی مدد سے ظاہر کیا گیا ہے اور اسے خط آئینہ بھی کہتے ہیں ہم اس تشاکل کو منعکس تشاکل یا آئینہ تشاکل بھی کہہ کہتے ہیں۔

ایک اور مثال پر غور کیجئے پہاڑ کے عکس کو جھیل میں بتایا گیا ہے یہ بھی منعکس تشاکل ہے اور یہ افقی خط ہے جو پہاڑ اور اس کے عکس کو علیحدہ کر رہا ہے۔
یہ مکمل نہیں ہوسکتا کیوں کہ اس کا نچلا حصہ جھیل کی سطح کی وجہ سے دھندلا نظر آ رہا ہے۔

8.3.1 گردشی تشاکل

ذیل میں دی گئی اشکال میں خطوط تشاکل پر غور کیجئے



مختلف جومیٹری اشکال میں تشاکل کے محوروں کی تعداد بھی مختلف ہوتی ہے۔

اوپر دی گئی اشکال میں ہر ایک کو اس کے محور پر گردش دیجئے اور معلوم کیجئے کہ ایک گردش کے دوران یہ کتنی مرتبہ اپنی اصلی حالت کے برابر دکھائی دیتا ہے۔

مثال کے طور پر ایک مستطیل میں تشاکل کے دو خطوط یا دو محور پائے جاتے ہیں۔ جب ایک مستطیل کو اس کے مرکز پر گردش دیا جاتا ہے تب اس کی اصلی شکل سے دو مرتبہ مشابہت رکھتا ہے اسے گردش کے ابعاد (Order of rotation) کہتے ہیں۔

ذیل کے جدول میں اپنے نتائج کو درج کیجئے۔

جیومٹریائی اشکال	تشاکلی محوروں کی تعداد	اصلی حالت سے مشابہت رکھنے والی شکل کی تعداد	گردش کے ابعاد
مثلث مساوی الساقین	....	....	....
مستطیل	2	2	2
مساوی الاضلاع مثلث	....	....	....
مربع	....	....	....
دائرہ	....	....	....

سوچئیے ، مباحثہ کیجئے اور لکھئے

8.3.2 نقطئی تشاکل

متصلہ شکل پر غور کیجئے۔ کیا اس میں خطی تشاکل پایا جاتا ہے؟ اس میں خطی تشاکل نہیں پایا جاتا ہے۔ مگر اس میں دوسری قسم کی مشابہت پائی جاتی ہے۔ اس شکل کو اوپر سے یا نیچے سے دیکھنے پر ایک ہی طرح کی دکھائی دیتی ہے یعنی دو مخالف سمتوں سے دیکھنے پر معلوم ہوگا کہ اس کے ہر حصہ میں مشابہہ نقاط موجود ہیں۔ اگر آپ اس کے مرکز سے ایک خط کھینچیں تو یہ شکل کو دو مساوی فاصلہ پر تقسیم کرتا ہے۔ مرکز سے چند اور خطوط کھینچئے اور تصدیق کیجئے۔ اب ہم کہہ سکتے ہیں کہ اس شکل میں نقطہ تشاکل موجود ہے۔

ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ انگریزی کے حروف میں بھی نقطہ تشاکل پایا جاتا ہے

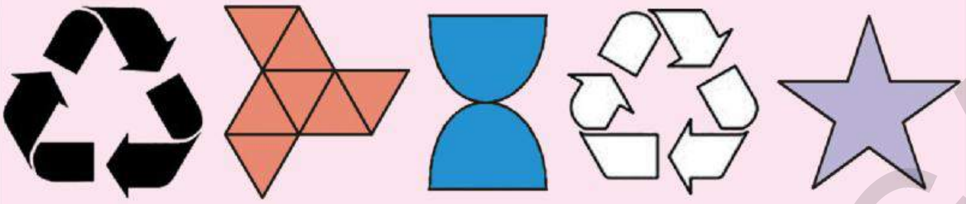
X H I S N Z

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20

SCERT TELANGANA

کوشش کیجیے

1. نشاندہی کیجیے کہ ذیل کی کس شکل میں نقطہ تشاکل ہے۔



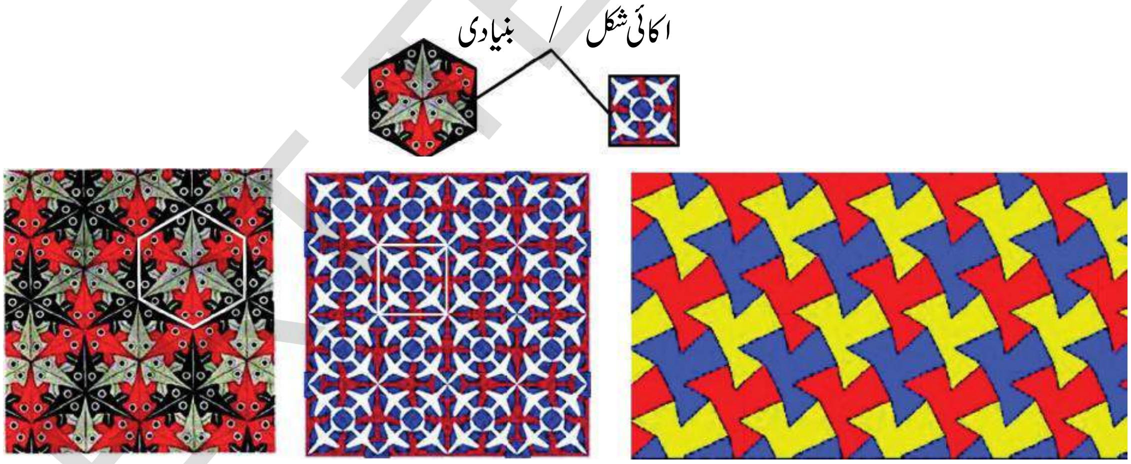
2. اوپر کی کونسی اشکال متشاکل ہیں؟
3. آپ کی رائے میں خطی تشاکل اور نقطہ تشاکل کے درمیان کیا رشتہ ہے؟

8.3.3 تشاکل کا اطلاق

☆ ان میں زیادہ تر اجسام جنھیں ہم استعمال کرتے ہیں کم از کم ایک قسم کا تشاکل پایا جاتا ہے۔

☆ مشین سے بنائے گئے زیادہ تر اجسام متشاکل ہوتے ہیں۔اس سے پیداوار کی رفتار میں اضافہ ہوتا ہے۔

اس ترتیب پر غور کیجیے



یہ ترتیب آپ کہاں دیکھتے ہیں؟ یہ ترتیب ہم کو فرش کے ڈیزائین اور کپڑوں کے نقش ونگار وغیرہ میں نظر آتی ہیں۔ یہ کس طرح ترتیب پاتے ہیں؟اس طرح کے نمونے ہم کو کسی رقبہ میں متماثل اشکال یا عکسوں کو تمام رخوں میں بغیر کسی انطباق کے پھیلانے سے حاصل ہوتے ہیں یہ پچی کاری (Tesselation) کہلاتی ہے۔اس سے اشکال کی خوبصورتی میں اضافہ ہوتا ہے۔کیا یہ مجموعی طور پر متشاکل ہیں؟

کیا بنیادی شکل جو پچی کاری کے لئے استعمال کی جاتی ہے وہ متشاکل ہے؟ آپ بنیادی اشکال کے ذریعہ متشاکل پر غور کر سکتے ہیں چند نمونے مجموعی طور پر متشاکلت رکھتے ہیں جیسا کہ شکل (b) میں دکھایا گیا ہے اور دوسرے مجموعی طور پر متشاکل نہیں ہیں جیسا کہ شکل (a) میں بتلایا گیا ہے۔

SCERT TELANGANA

ذیل کی پچی کاری پر دوبارہ غور کیجیے

اس پچی کاری میں بنیادی اشکال کونسی ہیں؟

Fig. (a)

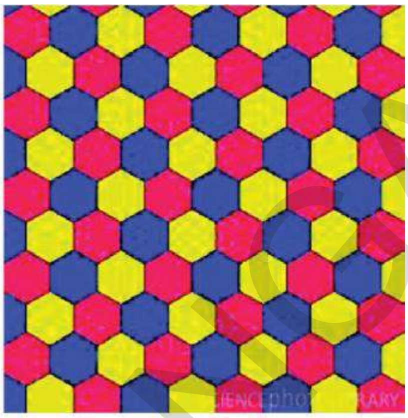


Fig. (b)

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ پچی کاری میں بنیادی اشکال مستطیل، نصف مستطیل مربع، نصف مربع، مساوی الاضلاع، نصف مساوی الاضلاع استعمال کئے گئے ہیں۔

مشق - 8.2

1. انگریزی کے بڑے حروف کو کاٹ کر اپنی نوٹ بک میں چسپاں کیجئے اور ہر حرف سے بننے والے تمام ممکن خطوط اتاریئے۔

(i) کتنے حروف خطی تشاکل نہیں رکھتے ہیں؟

(ii) کتنے حروف صرف ایک ہی خطی تشاکل رکھتے ہیں؟

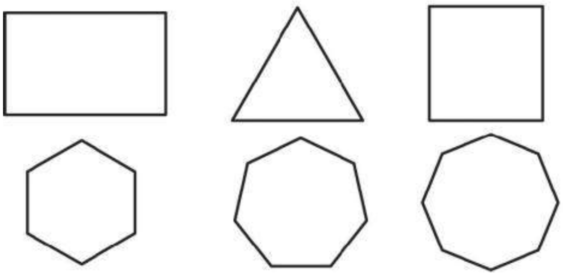
(iii) کتنے حروف دو خطی تشاکل رکھتے ہیں؟

(iv) کتنے حروف دو سے زیادہ خطی تشاکل رکھتے ہیں؟

(v) ان میں سے کتنے حروف محوری تشاکل رکھتے ہیں؟

(vi) ان میں سے کتنے حروف نقطہ تشاکل رکھتے ہیں؟

2. ذیل میں دی گئیں اشکال کے لئے خطوط تشاکل اتاریئے اور نشاندہی کیجئے کہ ان میں سے کونسی اشکال میں نقطہ تشاکل پایا جاتا ہے۔ کیا خطی تشاکل اور نقطہ تشاکل میں کوئی تعلق ہے؟



SCERT TELANGANA

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20

3. قدرت میں پائے جانے والے ایسے اجسام کا جن کی سطحوں پر صرف ایک ہی خط متشاکل ہوتا ہے نام بتایئے۔

4. پچی کاری کے تین نمونے اُتاریئے اوران میں استعمال ہونے والی بنیادی اشکال کے نام لکھئے۔

ہم نے کیا سیکھا

☆ اشکال کو اس وقت متشاکل کہا جاسکتا ہے جب ان کی شکل اور جسامت یکساں ہوں۔

☆ شکل کو اس وقت یکساں کہا جاسکتا ہے جب ان کی شکل یکساں ہو جبکہ جسامت مختلف ہو۔

☆ اگر ہم متشاکل/ یکساں اشکال کو پلٹتے، پھیلاتے یا موڑتے ہیں تو ان کی متشاکلت/ یکسانیت باقی رہتی ہے۔

☆ اشکال متشاکل یا غیر متشاکل ہوتی ہیں۔

☆ اشکال میں ایک سے زائد متشاکلت پائی جاتی ہے۔

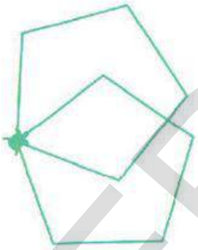
☆ متشاکلت تین قسم کی ہوتی ہے خطی تشاکل، محوری تشاکل، نقطئی تشاکل

☆ تشاکل گردش کے ساتھ شکل کو مرکزی نقطہ کے اطراف گھمایا جاتا ہے کہ یہ دو یا دو سے زائد مرتبہ ایسا ہی نظر آتا ہے جیسا کہ حقیقت میں ہے یعنی جتنی مرتبہ یہ گھومتی ہے یہ وہی دکھائی دیتی ہے اس کو ترتیب (Order) کہا جاتا ہے۔

☆ مشابہہ اشکال کو بڑھانے یا گھٹانے کے طریقہ کو وسعت یا Dialation کہا جاتا ہے۔

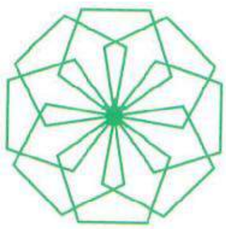
☆ ایسی اشکال کے نمونے جو ایک مستوی شکل میں بغیر کوئی خلاء اور انطباق کے پر کرنے کے لئے دہرائے جاتے ہیں پچی کاری (Tesselation) کہلاتے ہیں۔

کثیر ضلعی کو گھمانا



ذیل میں دیئے گئے طریقہ سے ایک منتظم کثیر ضلع بنایا جاسکتا ہے جس کے ضلعوں کی لمبائی اور ضلعوں کی تعداد n ہے۔

ان گردشوں کو دہراتے ہوئے ایک مکمل دائرے پر گھمانے سے دلچسپ تصاویر حاصل ہوتے ہیں۔ گردشی زاویہ معلوم کرنے کے لیئے 360^o کو گردشوں کی تعداد سے تقسیم کیا جاتا ہے۔ ذیل کی شکل میں 8 مرتبہ گردش کو دہرایا گیا ہے۔



اگر ہم ایک مربع کو لے کر اس کے کسی ایک راس اور وتر کے وسطی نقطہ کو گردش دیں اور اس گردش کو دہرائیں تب کونسی شکل حاصل ہوگی؟

SCERT TELANGANA

مستوی اشکال کے رقبے

Area of Plane Figures

9

9.0 تعارف

اکبرا یک پلاٹ خریدنا چاہتا ہے تاکہ وہ اپنا مکان تعمیر کر سکے۔اس نے بعض پلاٹ دیکھے جو نیچے کی اشکال سے ظاہر کئے گئے ہیں۔

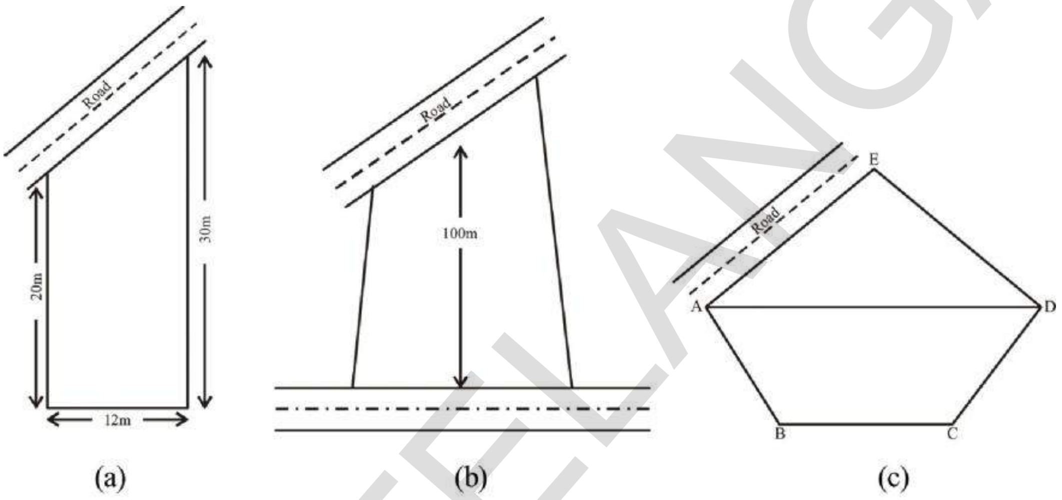


Fig. 9.1

پلاٹ (a) منحرف کی شکل میں ہے۔ پلاٹ (b) چارضلعی کی شکل میں ہےاور پلاٹ (c) مخمس کی شکل میں ہے۔میدان میں وہ اپنے مکان کی تعمیر کے لیےایسی اشکال کے رقبوں کا تخمینہ کرنا چاہتا ہے۔

ہم ایک مستطیل، مربع، متوازی الاضلاع، مثلث اور معین کا رقبہ معلوم کرنا سیکھ چکے ہیں۔اس باب میں ہم ایک منحرف، چارضلعی، دائرہ اورقطاع کا رقبہ معلوم کرنا سیکھیں گے۔پہلے ہم جو مستطیل، مربع، متوازی الاضلاع اور معین کا رقبہ معلوم کرنا سیکھ چکے ہیں یہاں اس کا اعادہ کریں گے۔

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20
SCERT TELANGANA

یہ کیجئے

1. حسب ذیل اشکال کا رقبہ معلوم کیجئے

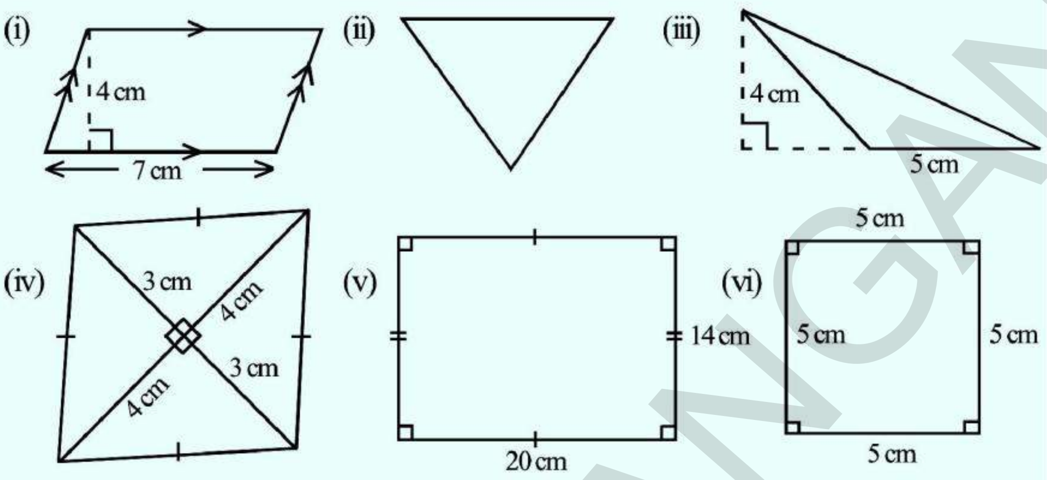
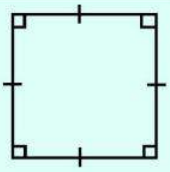
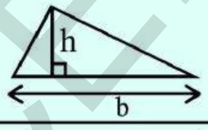
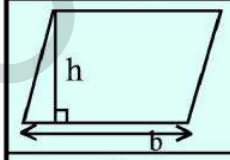
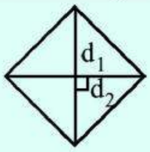


Fig. 9.2

2. ذیل کے جدول میں کچھ مستوی اشکال کی پیمائشیں دی گئی ہیں جو نامکمل ہیں انہیں مکمل کیجئے۔

شکل	پیمائشات	رقبہ معلوم کرنے کے لئے ضابطہ	دی گئی شکل کا رقبہ
 مربع	مربع کا ضلع 15 سمر	A = ضلع × ضلع	....
مستطیل	طول = 20 سمر عرض = ...	A = طول × عرض	$280cm^2$
 مثلث	قاعدہ = 5 سمر بلندی = ...	A = ...	$60cm^2$
 متوازی الاضلاع	بلندی = 7.6 سمر قاعدہ = ...	A = بلندی × قاعدہ	$38cm^2$
 معین	$d_1 = 4$ cm $d_2 = 3$ cm	....	....

SCERT TELANGANA

9.1 منحرف کا رقبہ

(شکل:9.3) سڑک سے قریب احمد کا ایک پلاٹ ہے۔اس کے پڑوس میں بعض مستطیلی پلاٹس کے علاوہ دیگر پلاٹس میں متوازی اضلاع کا صرف ایک ہی جوڑ ہے۔ایسے پلاٹس منحرف کی شکل میں ہیں کیا آپ اس کا رقبہ معلوم کر سکتے ہیں؟

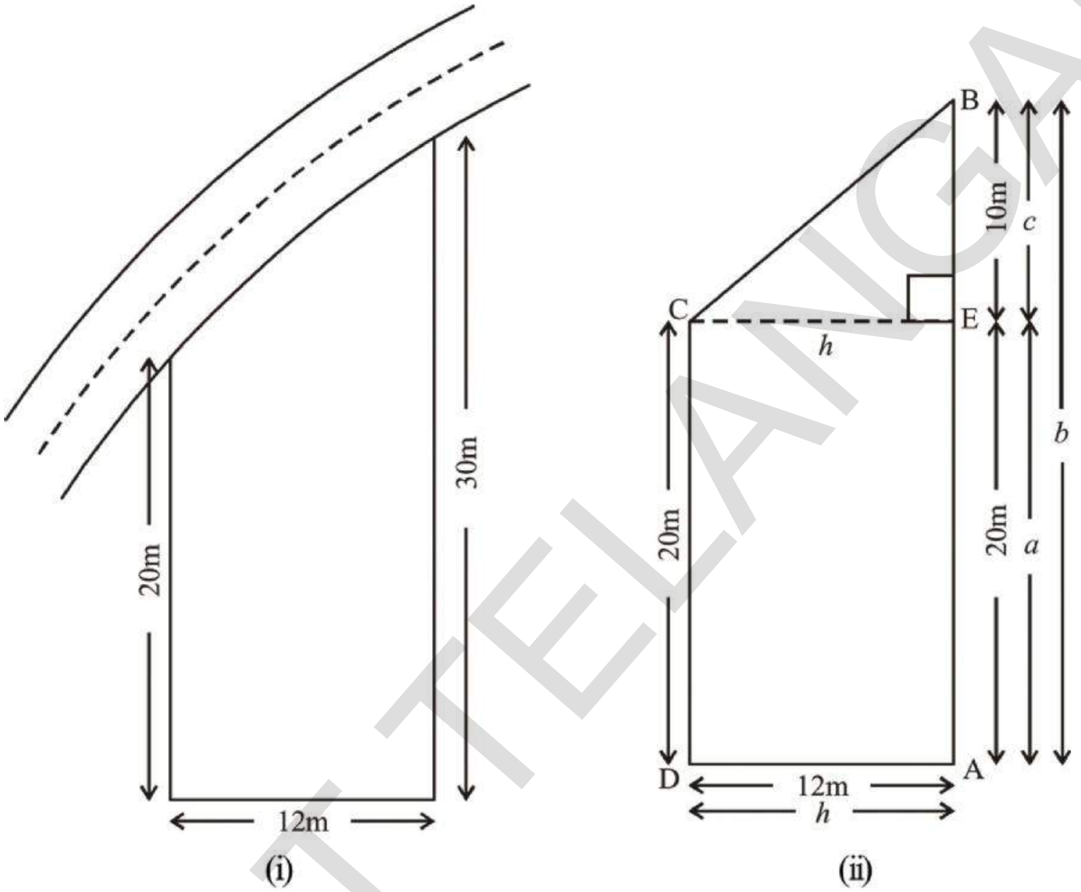


Fig. 9.3

ہم اس پلاٹ کے راس کے نام دیں گے جیسا کہ شکل 9.3(i) میں بتلایا گیا ہے۔ $CE \perp AB$ کھینچ کر ہم اس کو دو حصوں میں تقسیم کر سکتے ہیں (جو کہ قائمہ زاویہ ہے) جیسا کہ 9.3(ii) میں بتلایا گیا ہے۔

شلث ECB کا رقبہ = $\frac{1}{2}$ hc = $\frac{1}{2}\times 12\times 10 = 60$ مربع میٹر

مستطیل ADCE کا رقبہ = $AE\times AC = 20\times 12 = 240$ مربع میٹر

منحرف ABCD کا رقبہ = $\triangle ECB$ کا رقبہ + مستطیل ADCE کا رقبہ

$60 + 240 = 300$ مربع میٹر

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20
SCERT TELANGANA

$\overline{AD} = \overline{EC} = h$
$\overline{AE} = a,\ \overline{AB} = b = a + c$

ہم دورقبوں کو جمع کرتے ہوئے اس کا رقبہ معلوم کرسکتے ہیں۔

$\therefore$ ABCD کا رقبہ = ADCE کا رقبہ + ECB کا رقبہ

$$= (h \times a) + \frac{1}{2}(h \times c)$$

$$= h(a + \frac{1}{2}c)$$

$$= h\left(\frac{2a+c}{2}\right)$$

$$= h\left(\frac{2a+c}{2}\right) = \frac{h}{2}(a+a+c)$$

$$= \frac{1}{2}h\,(a+b)\ (\because\ c+a=b)$$

$= \frac{1}{2}$ بلندی (متوازی اضلاع کا مجموعہ)

اوپر کی عبارت میں h‘b اور a کی قدروں کو درج کرنے پر

جہاں
h = 12
a = 20
b = 30

منحرف ABCD کا رقبہ $= \frac{1}{2}h(a+b)$

$\frac{1}{2} \times 12 \times (30+20) = 300$ مربع میٹر

مثال:1 یہاں ایک میدان کی شکل دی گئی ہے۔میدان کا رقبہ معلوم کیجیے۔

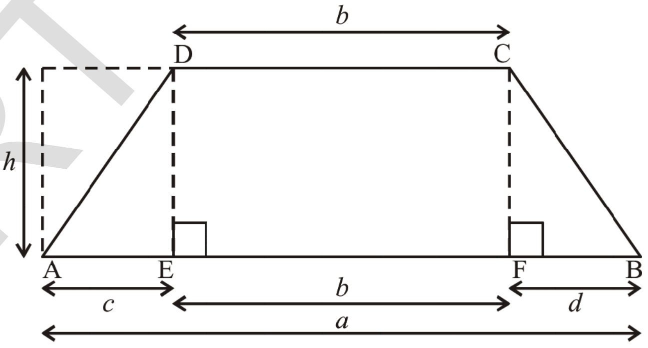


Fig. 9.4

حل: یہاں ہم شکل کو ایک مستطیل اور ایک مثلث میں تقسیم نہیں کرسکتے بجائے اس کے ہم اس کو ایک مستطیل اور دومثلثات میں آسانی سے تقسیم کرسکتے ہیں۔ $CF \perp AB$ اور $DE \perp AB$ کھینچیے۔اس طرح منحرف ABCD تین حصوں میں تقسیم ہوتا ہے۔ایک مستطیل DEFC اور دوسرے دومثلثات $\triangle ADE$ اور $\triangle CFB$ ہیں۔

SCERT TELANGANA

منحرف ABCD کا رقبہ = ADE کا رقبہ + مستطیل DEFC کا رقبہ + CFB کا رقبہ

$$= (\frac{1}{2} \times h \times c) + (b \times h) + (\frac{1}{2} \times h \times d)$$

$$= h\left[\frac{1}{2}c + b + \frac{1}{2}d\right]$$

$$= h\left[\frac{c + 2b + d}{2}\right]$$

$$= h\left[\frac{c + b + d + b}{2}\right]$$

$$= h\left[\frac{a + b}{2}\right] \qquad (\because c + b + d = a)$$

اس طرح منحرف کے رقبہ کے لیے ہم ضابطہ لکھ سکتے ہیں۔

$$= \text{بلندی} \times \left[\frac{\text{متوازی ضلعوں کا مجموعہ}}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\ (\text{متوازی ضلعوں کا مجموعہ}) \times (\text{دو متوازی ضلعوں کا درمیانی فاصلہ})$$

مشغلہ

1۔ ایک ترسیمی کاغذ پر منحرف WXYZ اتاریئے جیسا کہ شکل میں بتلایا گیا ہے اور اسے تراشیئے جیسا کہ شکل (i)9.5 میں بتلایا گیا ہے۔

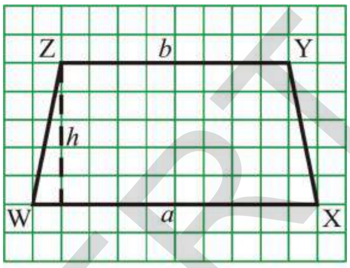


Fig. 9.5 (i)

2۔ ضلع کو موڑ کر XY کا وسطی نقطہ معلوم کیجیے اور اس کو A کا نام دیجیے۔

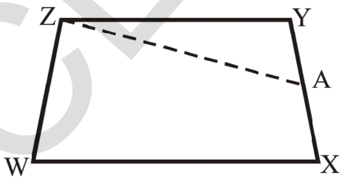


Fig. 9.5 (ii)

3۔ خط AZ کھینچئے۔

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20
SCERT TELANGANA

4۔ ZA کے ساتھ کاٹتے ہوئے منحرف WXAZ کو دو ٹکڑوں میں کاٹیئے۔ ZYA Δ کو جگہ دیجئے جیسا کہ شکل (iii)9.5 میں بتلایا گیا ہے جبکہ AY کو AX پر اس طرح جگہ دیجئے کہ Y اور X ایک ہی جگہ منطبق ہوں۔ ہم WZB Δ حاصل کرتے ہیں بڑے مثلث پر قاعدہ کا طول کیا ہے؟ شکل (iii)9.5 اس مثلث کے رقبہ کے لیے عبارت لکھئے۔

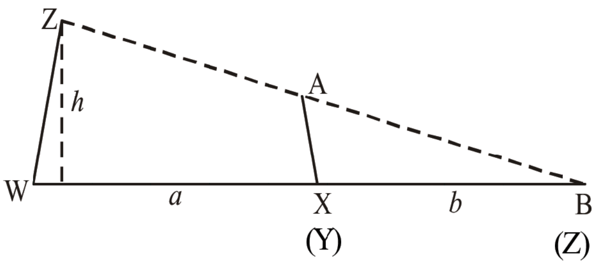


Fig. 9.5 (iii)

5۔ کیا مثلث WZB کا رقبہ اور منحرف WXAZ کا رقبہ یکساں ہے؟ (کیسے)

WZB Δ کا رقبہ = WXAZ منحرف کا رقبہ

$$= \frac{1}{2} \times \text{بلندی} \times \text{قاعدہ} = \frac{1}{2} \times h \times (a+b)$$

نوٹ: ترسیم کے مربعوں کو گنتے ہوئے رقبہ کی جانچ کیجیے

یہ کیجیے

.1 ذیل کے منحرف کے رقبہ معلوم کیجئے۔

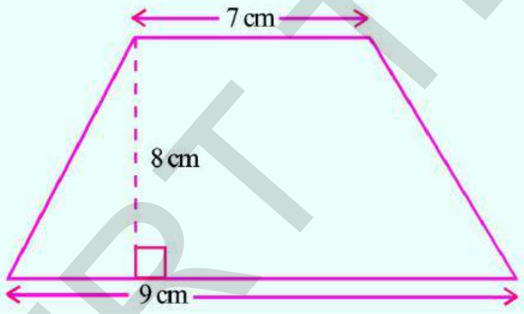


Fig.9.6 (i)

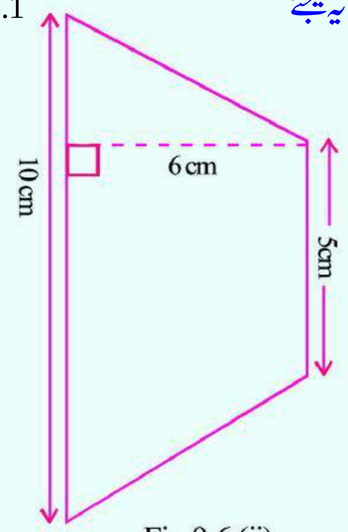
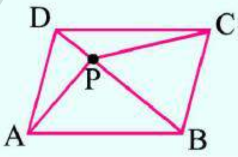


Fig.9.6 (ii)

2۔ منحرف کا رقبہ 16 مربع سمر ہے۔ایک متوازی ضلع کا طول 5 سمر اور دو متوازی ضلعوں کا درمیانی فاصلہ 4 سمر ہے۔دوسرے متوازی ضلع کا طول معلوم کیجیے۔

ایک ترسیمی کاغذ پر اس منحرف کو اتارنے کی کوشش کیجیے اور رقبہ کی جانچ کیجیے۔



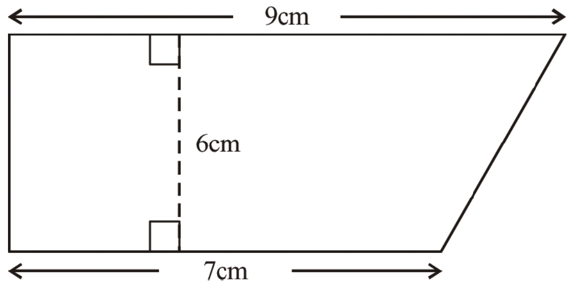
حل کیے ہوئے مثالیں:

مثال:2 ایک منحرف کے متوزی ضلعوں کی لمبائی 9 سمر اور 7 سمر ہے اور ان کا درمیانی فاصلہ 6 سمر ہے۔ منحرف کا رقبہ معلوم کیجیے۔

حل: منحرف کے متوازی ضلعے 9 سمر اور 7 سمر ہیں۔

متوازی ضلعوں کا مجموعہ = (9 + 7) سمر = 16 سمر

درمیانی فاصلہ = 6 سمر



منحرف کا رقبہ = $\frac{1}{2}$ (متوزی ضلعوں کا مجموعہ) x (درمیانی فاصلہ)

$$= (\frac{1}{2} \times 16 \times 6)\ cm^2$$

$$= 48cm^2$$

مثال:3 منحرف کا رقبہ $480cm^2$ ہے۔ ایک متوازی ضلع کا طول 24 سمر اور متوازی ضلعوں کا درمیانی فاصلہ 8 سمر ہے۔ دوسرے متوازی ضلع کا طول معلوم کیجیے۔

حل: ایک متوازی ضلع = 24 سمر

فرض کیجیے دوسرا متوازی ضلع = x سمر

منحرف کا رقبہ = 480 سمر

متوازی ضلعوں کا درمیانی فاصلہ = 8 سمر

منحرف کا رقبہ = $\frac{1}{2}$ (متوزی ضلعوں کا مجموعہ) x (درمیانی فاصلہ)

$$\therefore \quad 480 = \frac{1}{2} \times (24 + x) \times 8$$

$$\Rightarrow \quad 480 = 96 + 4x$$

$$\Rightarrow \quad 480 - 96 = 4x$$

$$\Rightarrow \quad 4x = 384$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{384}{4} = 96$$ سمر

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20
SCERT TELANGANA

مثال 4: ایک منحرف کے متوازی ضلعوں میں نسبت 4:1 ہے۔ان کا درمیانی فاصلہ 10 سمر ہے۔اگر منحرف کا رقبہ 500 مربع سمر ہو تو متوازی اضلاع کے طول معلوم کیجیے۔

حل: منحرف کا رقبہ = 500 مربع سمر

متوازی ضلعوں کا درمیانی فاصلہ = 10 سمر

متوازی ضلعوں کے طولوں میں نسبت = 4 : 1

فرض کیجیے کہ منحرف کے متوازی ضلعے 4x اور x سمر ہیں۔

منحرف کا رقبہ = $\frac{1}{2}$ (متوازی ضلعوں کا مجموعہ) x (درمیانی فاصلہ)

$$\Rightarrow \quad 500 = \frac{1}{2}(x + 4x) \times 10$$

$$\Rightarrow \quad 500 = (x + 4x)\, 5$$

$$\Rightarrow \quad 500 = 25x$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{500}{25} = 20$$ سمر

∴ پہلا متوازی ضلع = 20 سمر

∴ دوسرا متوازی ضلع = 80 سمر = 4x = 4 x 20 (متوازی ضلعوں میں نسبت 4:1 ہے)

مثال 5: دی گئی شکل میں ABED ایک متوازی الاضلاع ہے جس میں AB = DE = 10 سمر اور Δ BEC کا رقبہ 72 مربع سمر ہے۔اگر CE = 16 سمر ہو تو منحرف ABCD کا رقبہ معلوم کیجیے۔

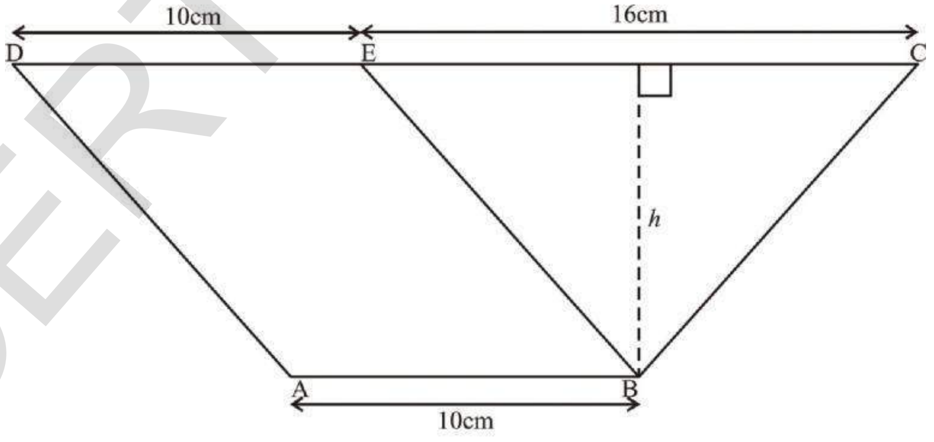


Fig.9.7

حل: $\triangle BEC$ کا رقبہ = $\frac{1}{2}$ قاعدہ x ارتفاع

$$72 = \frac{1}{2} \times 16 \times h$$

$$h = \frac{72 \times 2}{16} = 9 \text{ سمر}$$

منحرف ABCD میں

$$AB = 10 \text{ سمر}$$

$$DC = DE + EC \quad (\because DE = AB)$$

$$= 10 \text{ cm} + 16 \text{ cm} = 26 \text{ cm}$$

منحرف ABCD کا رقبہ $= \frac{1}{2}$ (متوزی ضلعوں کا مجموعہ) x (درمیانی فاصلہ)

$$= \frac{1}{2}(AB + DC)\, h$$

$$= \frac{1}{2}(10 + 26) \times 9 \text{ مربع سمر}$$

$$= 18 \times 9 \text{ مربع سمر}$$

$$= 162 \text{ مربع سمر}$$

مثال 6: موہن ندی کی جانب ایک میدان خریدنا چاہتا ہے۔ متصلہ شکل میں میدان کا ایک پلاٹ فروخت کے لیے دستیاب ہے۔ ندی کی جانب کا طول، سڑک کی جانب کے طول کا دوگنا ہے اور متوازی ہے۔

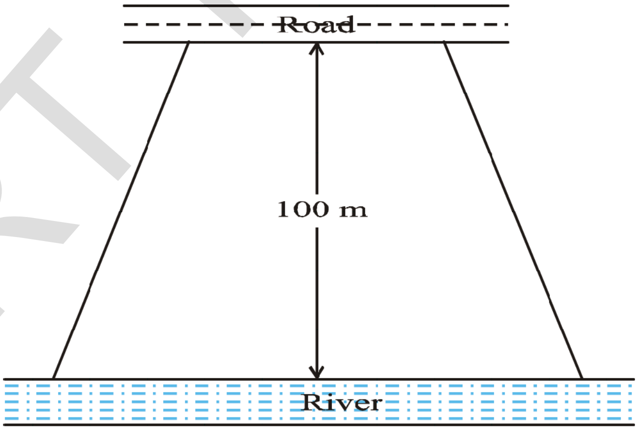


Fig.9.8

اس میدان کا رقبہ 10,500 مربع میٹر ہے، ندی اور سڑک کا درمیانی فاصلہ 100 میٹر ہے۔ ندی کے متوازی پلاٹ کے ضلع کا طول معلوم کیجیے۔

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20

حل: فرض کیجیے کہ سڑک کے برابر میدان کے ضلع کا طول x میٹر ہے۔

تب ندی کے برابر اس کے ضلع کا طول = 2x میٹر

ان کے درمیان فاصلہ = 100 میٹر

میدان کا رقبہ = $\frac{1}{2}$ (متوزی ضلعوں کا مجموعہ) x (درمیانی فاصلہ)

$$10,500 = \frac{1}{2}(x + 2x) \times 100$$

$$10,500 = 3x \times 50$$

$$x = \frac{10,500}{3 \times 50} = 70$$ میٹر

∴ ندی کی جانب پلاٹ کا طول = $2x = (2 \times 70)$ میٹر

= 140 میٹر

9.2: چار ضلعی کا رقبہ

ایک چار ضلعی کو اس کا ایک وتر کھینچنے پر اسے دو الگ الگ مثلثات میں تقسیم کیا جاسکتا ہے۔ یہ مثلثی طریقہ ہم کو چار ضلعی کا رقبہ معلوم کرنے میں مدد دیتا ہے۔

گوپال چار ضلعی ABCD کے وتر AC کھینچ کر دو الگ الگ مثلثات میں تقسیم کرتا ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ مثلث کا رقبہ دو پیمائشوں کے ذریعہ معلوم کیا جاسکتا ہے' گوپال نے D اور B سے AC پر دو عمود کھینچے اور ان کے طولوں کو علی الترتیب h_1 اور h_2 کا نام دیا۔

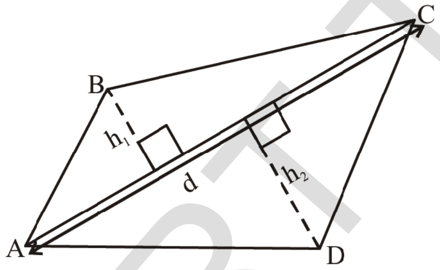


Fig.9.9

چار ضلعی ABCD کا رقبہ = (ΔABC کا رقبہ) + (ΔADC کا رقبہ)

$$= \left(\frac{1}{2} \times AC \times h_1\right) + \left(\frac{1}{2} AC \times h_2\right)$$

$$= \frac{1}{2} AC[h_1 + h_2]$$

چار ضلعی ABCD کا رقبہ = $\frac{1}{2}d(h_1 + h_2)$

جہاں 'd' وتر AC کے طول کو ظاہر کرتا ہے۔

SCERT TELANGANA

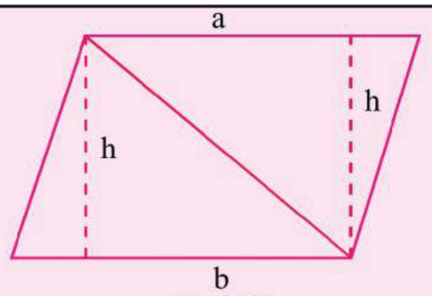


Fig.9.10

کوشش کیجئے

ہم جانتے ہیں کہ متوازی الاضلاع بھی ایک چار ضلعی ہے اب ہم اس چار ضلعی کو دو مثلثات میں تقسیم کریں گے۔ ان کے رقبے معلوم کیجیے اور متوازی الاضلاع کا رقبہ بھی معلوم کیجیے۔ کیا یہ طریقہ راست ضابطہ کے طریقہ جیسا ہے۔

چار ضلعی کا رقبہ = $\frac{1}{2}$ x وتر کا طول x وتر پر باقی دوراسوں سے عمودوں کے طولوں کا مجموعہ

مثال 7: چار ضلعی ABCD کا رقبہ معلوم کیجیے۔

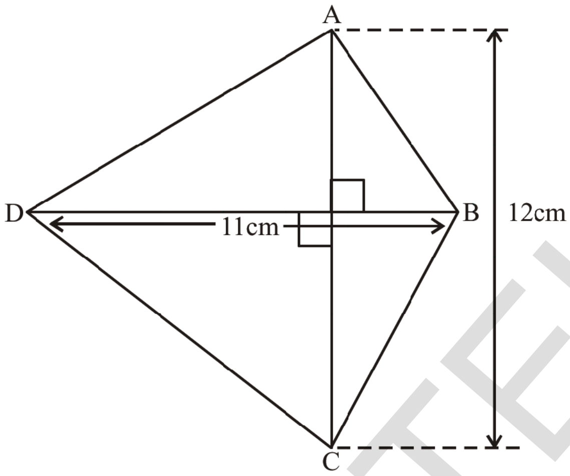


Fig.9.11 (i)

حل: چار ضلعی ABCD کا رقبہ =

$\frac{1}{2}$ x وتر کا طول x وتر پر باقی دوراسوں سے عمودوں کے طول کا مجموعہ

وتر AC پر باقی دوراسوں سے عمودوں کے طول کا مجموعہ =

$AC = (h_1 + h_2)$

$h_1 + h_2 = 12$ سم

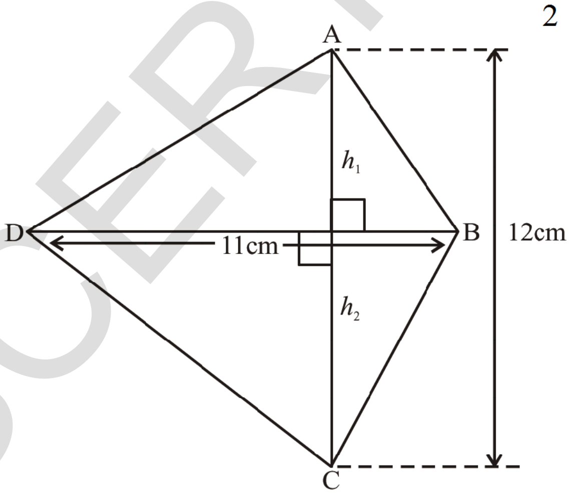


Fig.9.11 (ii)

SCERT TELANGANA

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20

وتر BD کا طول = 11 سم

چار ضلعی کا رقبہ = $\frac{1}{2}d(h_1+h_2)$ مربع سم $\frac{1}{2}\times 12\times 11 = 6\times 11 = 66$

9.3 معین کا رقبہ

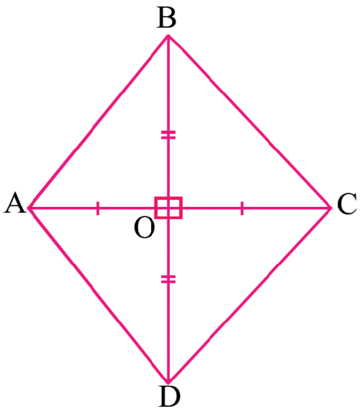


Fig.9.12

ہم مثلثات کی تقسیم کا یہی طریقہ (جس کو ہم مثلثی طریقہ کہتے ہیں) معین کا ضابطہ معلوم کرنے کے لیے بھی استعمال کرسکتے ہیں۔

شکل میں ABCD ایک معین ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ معین کے وتر ایک دوسرے کے عمودی ناصف ہوتے ہیں۔

$\therefore$ OA = OC, OB = OD

اور $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle AOD = 90^0$

معین ABCD کا رقبہ = Δ ABC کا رقبہ + Δ ADC کا رقبہ

$$= \frac{1}{2}\times AC\times OB + \frac{1}{2}\times AC\times OD$$

$$= \frac{1}{2}\times AC\,(OB+OD)$$

$$= \frac{1}{2}\times AC\times BD \qquad (\because OB + OD = BD)$$

اس طرح معین کا رقبہ = $\frac{1}{2}\times d_1 d_2$ جہاں d_1 اور d_2 وتر ہیں

بہ الفاظ دیگر معین کا رقبہ وتروں کے حاصل ضرب کا نصف ہوتا ہے۔

مثال 8: معین کا رقبہ معلوم کیجیے جس کے وتروں کے طول 10 سم اور 8.2 سم ہیں۔

حل: معین کا رقبہ = $\frac{1}{2}\times d_1 d_2$ جہاں d_1 اور d_2 وتر ہیں

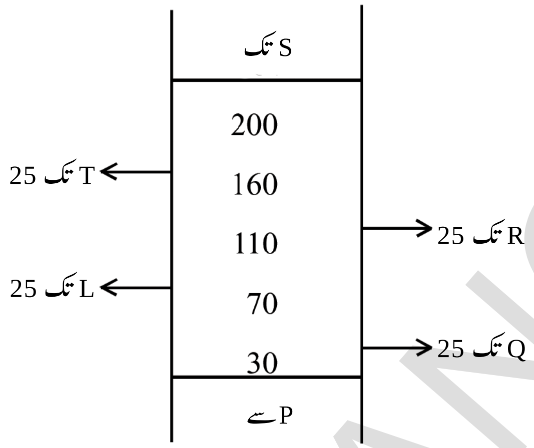
= $\frac{1}{2}\times 10\times 8.2$ مربع سم

= 41 مربع سم

SCERT TELANGANA

میدان کا سروے

ایک سرویر کی فیلڈ بک میں حسب ذیل پیمائش درج کی گئی ہیں۔ میدان کا رقبہ معلوم کیجیے۔



اوپر دی ہوئی پیمائشوں سے ہمیں حسب ذیل معلومات حاصل ہوتی ہیں۔

1۔ میدان مسدسی شکل میں ہے جس کے راس P,Q,R,S,T اور L ہیں۔

2۔ PS کو وتر کے طور پر لیا گیا ہے۔

3۔ راس Q اور راس R وتر کی ایک جانب اور راس T اور راس L وتر کی دوسری جانب ہیں۔

4۔ Q سے جو عمود کھینچا گیا ہے 40 سمر ہے۔ اسی طرح R‘T‘L سے ماباقی عمود کھینچے گئے۔

5۔ فیلڈ بک میں حقیقی طور پر پیمائشیں نیچے سے اوپر کی طرف درج کی گئیں ہیں۔

6۔ میدان کو چار مثلثات، ایک منحرف اور ایک مستطیل میں تقسیم کیا گیا ہے۔

دی گئی شکل سے ہم حسب ذیل پیمائشات معلوم کر سکتے ہیں۔

$AC = PC - PA = 110 - 30 = 80$ میٹر

$CS = PS - PC = 200 - 110 = 90$ میٹر

$DS = PS - PD = 200 - 160 = 40$ میٹر

$BD = PD - PB = 160 - 70$ میٹر

$= 9$ میٹر

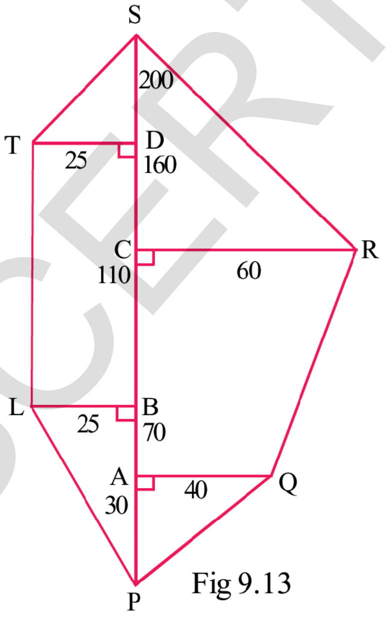


Fig 9.13

SCERT TELANGANA

$\triangle$ APQ کارقبہ $= \frac{1}{2} \times b \times h$

$= \frac{1}{2} \times 30 \times 40 = 600$ مربع میٹر

مخرف AQRC کارقبہ $= \frac{1}{2} \times h(a+b)$

$= \frac{1}{2} \times AC\,(AQ + CR)$

$= \frac{1}{2} \times 80 \times (40 + 60)$

$= \frac{1}{2} \times 80 \times 100$

$= 4000$ مربع میٹر

$\triangle$ CRS کارقبہ $= \frac{1}{2} \times CR \times CS = \frac{1}{2} \times 60 \times 90 = 2700$ مربع میٹر

مخرف PLTS کارقبہ $= \frac{1}{2} \times h(a+b)$

$= \frac{1}{2} \times LB\,(TL + SP)$

$= \frac{1}{2} \times 25(90 + 200) \qquad (\because TL = BD = 90)$

$= \frac{1}{2} \times 25 \times 290$

$= 3625$ مربع میٹر

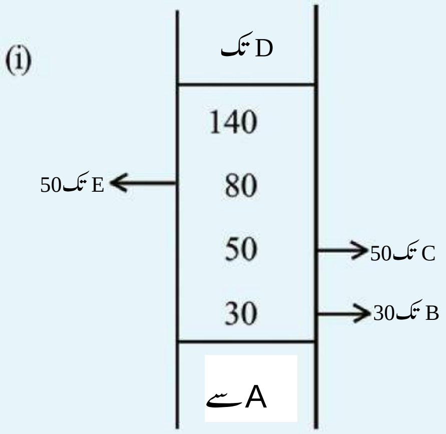
$= 600 + 4000 + 2700 + 3625$

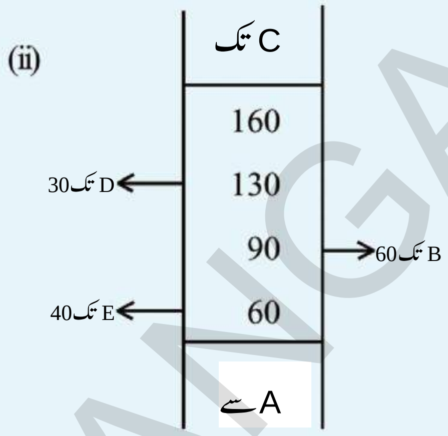
زمین کارقبہ $= 10{,}925$ مربع میٹر

SCERT TELANGANA

یہ کیجئے

ایک سرویر کی فیلڈ بک میں حسب ذیل پیمائشیں درج کی گئی ہیں۔ میدانوں کے رقبے معلوم کیجیے۔





سوچئے اور بحث کیجئے

ایک متوازی الاضلاع پر ایک وتر کھینچتے ہوئے اسے دو مماثل مثلثات میں تقسیم کیا گیا۔ کیا ہم ایک منحرف کو دو مماثل مثلثات میں تقسیم کر سکتے ہیں؟

کوشش کیجئے

ذیل میں دیئے گئے چار ضلعی کے رقبے معلوم کرو۔

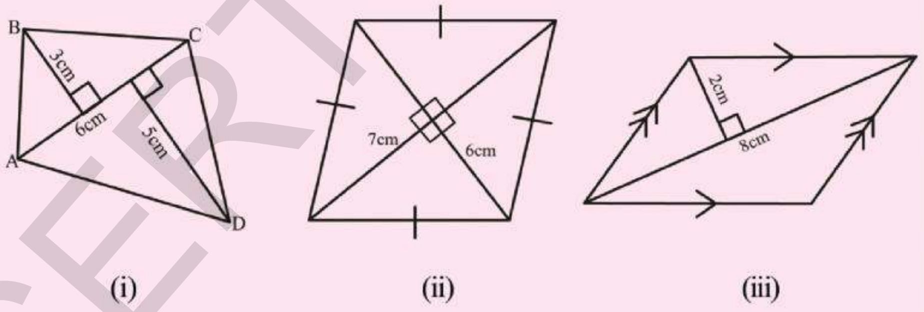


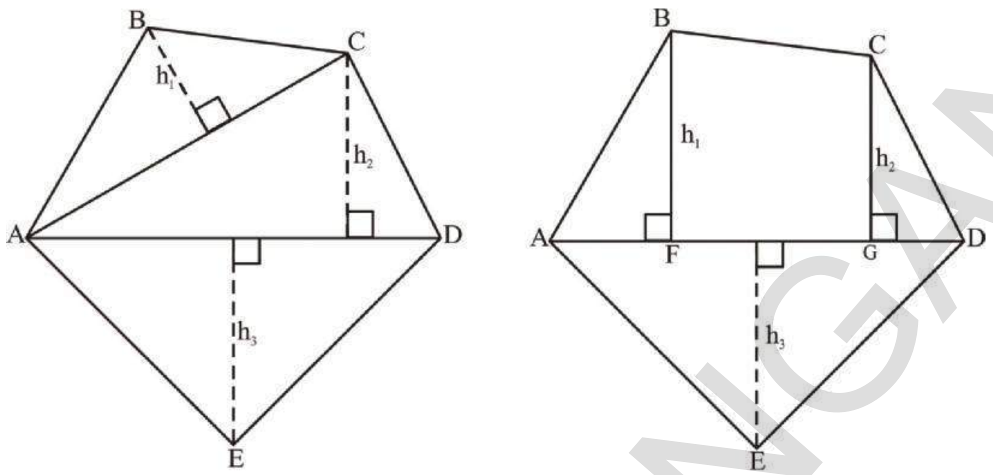
Fig.9.13

9.4 کثیر ضلعی کا رقبہ

ایک کثیر ضلعی کو کئی مختصر اشکال (مثلث، مستطیل وغیرہ) میں تقسیم کر کے اس کا رقبہ حاصل کیا جاسکتا ہے۔ ہر ایک کے رقبوں کو جمع کر کے مطلوبہ رقبہ معلوم کیا جاتا ہے۔

SCERT TELANGANA

حسب ذیل مخمس پر غور کیجیے۔



شکل (i)   شکل (ii)

شکل 9.14

شکل (i): دو وتر AC اور AD کھینچتے ہوئے مخمس ABCDE کو تین حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ اس طرح

ABCDE کا رقبہ = Δ ABC کا رقبہ + Δ ACD کا رقبہ + Δ AED کا رقبہ

شکل (ii): ایک وتر AD اور دو عمود BF اور CG کھینچتے ہوئے مخمس ABCDE کو چار حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ اس طرح

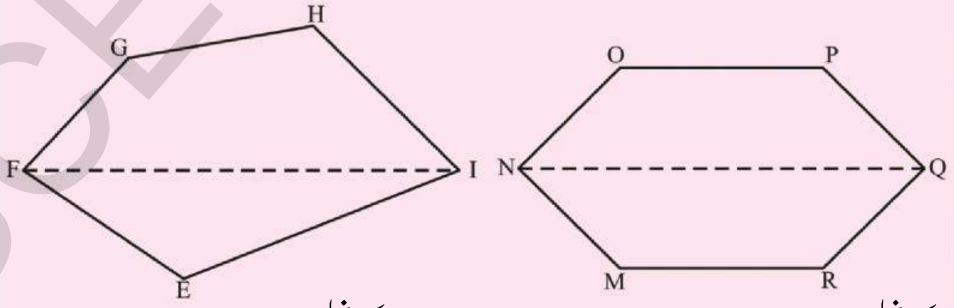
ABCDE کا رقبہ = قائمۃ الزاویہ Δ AFB کا رقبہ + منحرف BFGC کا رقبہ

+ قائمۃ الزاویہ Δ CGD کا رقبہ + Δ AED کا رقبہ

ایسا کیوں؟ (منحرف BFGC کے متوازی ضلعوں کی نشاندہی کیجیے)

یہ کیجیے

(i) حسب ذیل کثیر ضلعی کو اس کا رقبہ معلوم کرنے کے لیے دو حصوں (مثلث اور منحرف) میں تقسیم کیجیے۔



کثیر ضلعی MNOPQR کا ایک وتر NQ ہے   کثیر ضلعی EFGHI کا ایک وتر FI ہے

Fig.9.15

SCERT TELANGANA

(ii) جیسا کہ شکل 9.16 میں بتلایا گیا ہے کثیر ضلعی ABCDE کو مختلف حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ رقبہ معلوم کیجیے۔

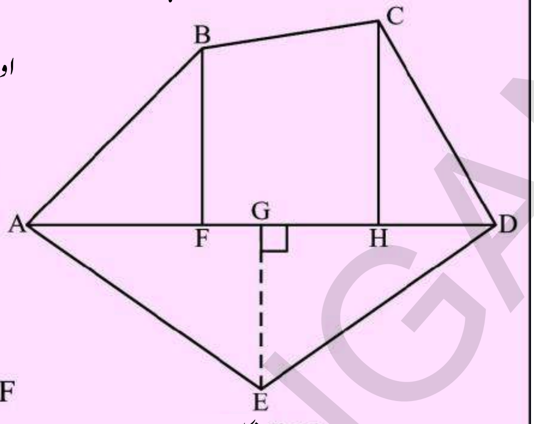
جبکہ $AD = 8$ سم،

$AH = 6$ سم، $AF = 3$ سم اور

اور عمود

$BF = 2$ سم، $CH = 3$ سم

$EG = 2.5$ سم



شکل 9.16

کثیر ضلعی ABCDE کا رقبہ

$\Delta AFB +$ ______

ΔAFB کا رقبہ $= \frac{1}{2} \times AF \times BF$

$= \frac{1}{2} \times 3 \times 2 =$ ______

مخرف FBCH کا رقبہ $= FH \times \frac{(BF + CH)}{2}$

$= 3 \times \frac{(2+3)}{2}$ $[\because FH = AH - AF]$

ΔCHD کا رقبہ $= \frac{1}{2} \times HD \times CH =$ ______

ΔADE کا رقبہ $= \frac{1}{2} \times AD \times GE =$ ______

اس طرح

کثیر ضلعی ABCDE کا رقبہ = ...

(iii) (شکل 9.17) کثیر ضلعی MNOPQR کا رقبہ اگر $MP = 9$ سم، $MD = 7$ سم،

$MA = 2$ سم، $MB = 4$ سم، $MC = 6$ سم

NA، OC، QD اور

RB وتر MP کے عمود ہیں۔

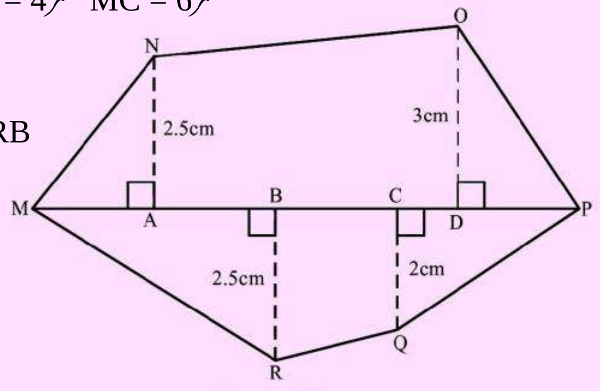


Fig. 9.17

SCERT TELANGANA

مثال:9 میدان کا رقبہ معلوم کیجیے جبکہ ضلعے دیئے گئے ہیں۔تمام ابعاد میٹر میں ہیں۔

حل:

کارقبہ ABCDE = کارقبہ Δ ABH+ کارقبہ Δ BCFH+ کارقبہ Δ CDF+

کارقبہ Δ DEF+ کارقبہ Δ AEG

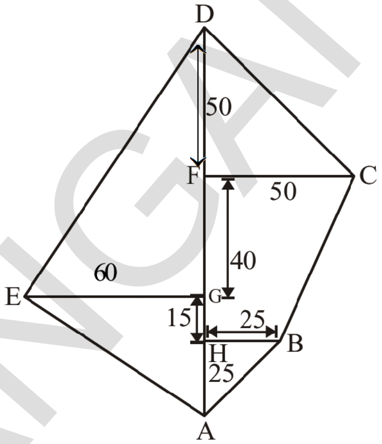


Fig. 9.18

کارقبہ $\Delta ABH = \frac{1}{2} \times AH \times HB$

$= \frac{1}{2} \times 25 \times 25$

$= \frac{625}{2} m^2 = 312.5$ مربع میٹر

کارقبہ BCFH $= \frac{1}{2} \times (HB + FC) \times HF$

$= \frac{1}{2}(25 + 50) \times 55 m^2$

$= \frac{75 \times 55}{2} m^2 = 2062.5\ m^2$

مثلث کارقبہ Δ CDF $= \frac{1}{2} \times FC \times DF$

$= \frac{1}{2} \times 50 \times 50\ m^2 = 1250\ m^2$

مثلث کارقبہ Δ AED $= \frac{1}{2} \times AD \times EG$

$= \frac{1}{2} \times 130 \times 60$

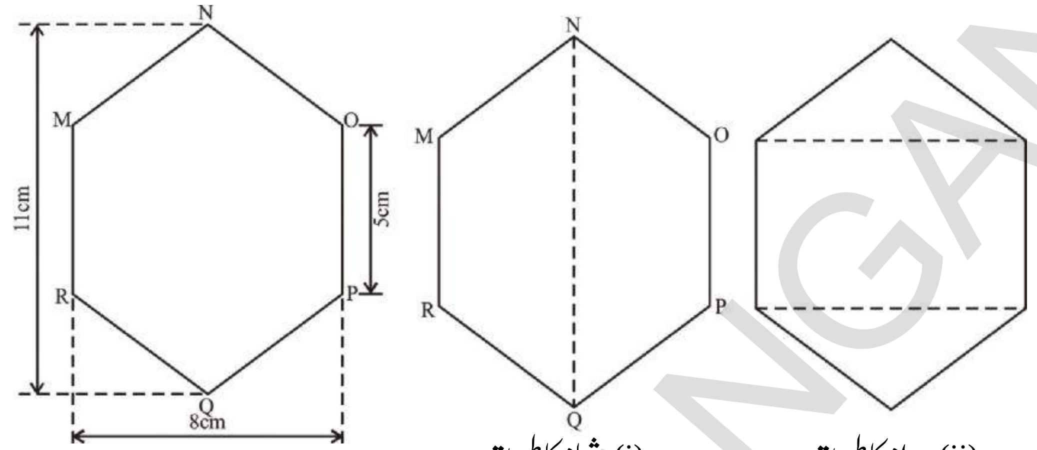
$= 3900\ m^2$

کارقبہ ABCDE $= 312.5\ m^2 + 2062.5\ m^2 + 1250\ m^2 + 3900\ m^2$

$= 7525 m^2$

SCERT TELANGANA

مثال:10   MNOPQR ایک مسدس ہے جس کا ہر ضلع 5 سمر ہے اور NQ پر تشاکلی ہے۔ (شکل 9.19) رام اور شیام نے انہیں مختلف طریقوں سے تقسیم کیا۔ (شکل 9.19) دونوں طریقوں کو استعمال کرتے ہوئے اس مسدس کا رقبہ معلوم کیجیے۔



(i) شیام کا طریقہ   (ii) رام کا طریقہ

حل: **رام نے اس طریقہ کو استعمال کیا:**

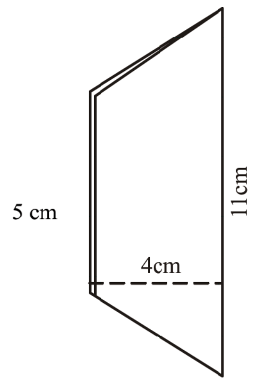


Fig.9.20

چونکہ یہ ایک منتظم مسدس ہے۔ اس لیے مسدس کو NQ دو مماثل منحرفوں میں تقسیم کرتا ہے۔ آپ اسے کاغذ کو موڑ کر ثابت کر سکتے ہیں۔

اب منحرف MNQR کا رقبہ مساوی ہے۔

$$= 4 \times \frac{11+5}{2}$$

$= 2 \times 16 = 32$ مربع سمر

اس طرح   مسدس MNOPQR کا رقبہ $= 2 \times 32 = 64$ مربع سمر

شیام نے اس طریقہ کو استعمال کیا:

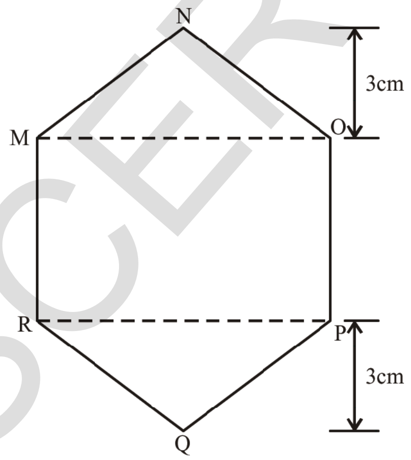


Fig.9.21

Δ MNO اور Δ PQR مماثل مثلثات ہیں جس کا ارتفاع 3 سمر ہے (شکل 9.21)
آپ ان دو مثلثات کو کاٹ کر ایک دوسرے پر رکھتے ہوئے اس کو ثابت کر سکتے ہیں۔

ΔMNO کا رقبہ $= \frac{1}{2} \times 8 \times 3 = 12$ مربع سمر

Δ RPQ کا رقبہ =

مستطیل MOPR کا رقبہ $= 8 \times 5 = 40$ مربع سمر

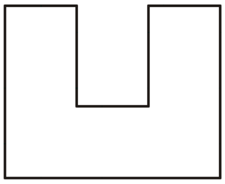
اب مسدس MNOPQR کا رقبہ $= 40 + 12 + 12 = 64$ مربع سمر

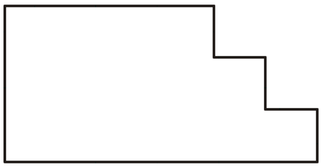
SCERT TELANGANA

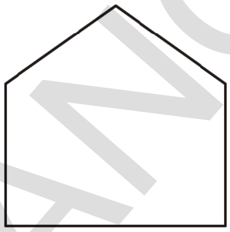
مشق - 9.1

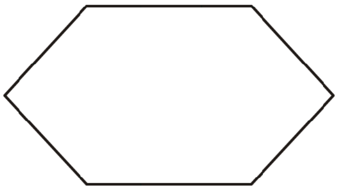
1۔ دی گئیں اشکال کو ہدایت کے مطابق تقسیم کیجیے۔

2 منحرف میں

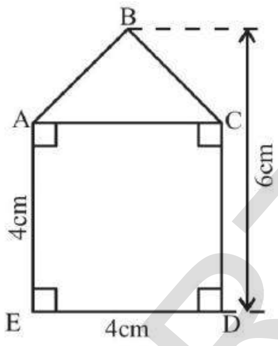

3 مستطیلوں میں


3 مستطیلوں میں

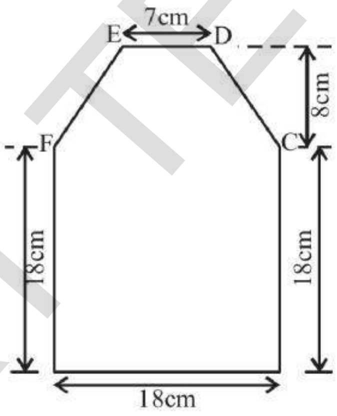

2 مثلثوں میں


2 مثلثوں اور ایک مستطیل میں

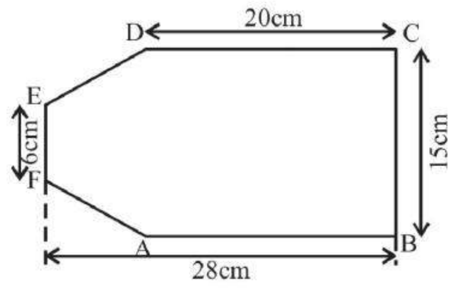
2۔ حسب ذیل اشکال کا رقبہ معلوم کیجیے۔



(i)



(ii)



(iii)

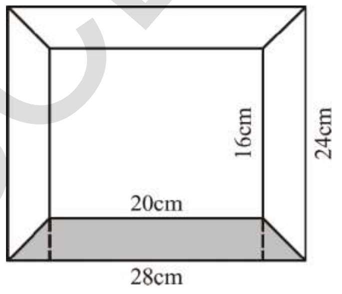
3۔ چار ضلعی ABCD کا رقبہ معلوم کیجیے جبکہ وتر AC کا طول 10 سمر ہے اور AC پر B اور D سے عمود کے طول ترتیب وار 5 سمر اور 6 سمر ہیں۔

4۔ متصلہ تصویری فریم کا خاکہ

بیرونی ابعاد 28cm x 24cm

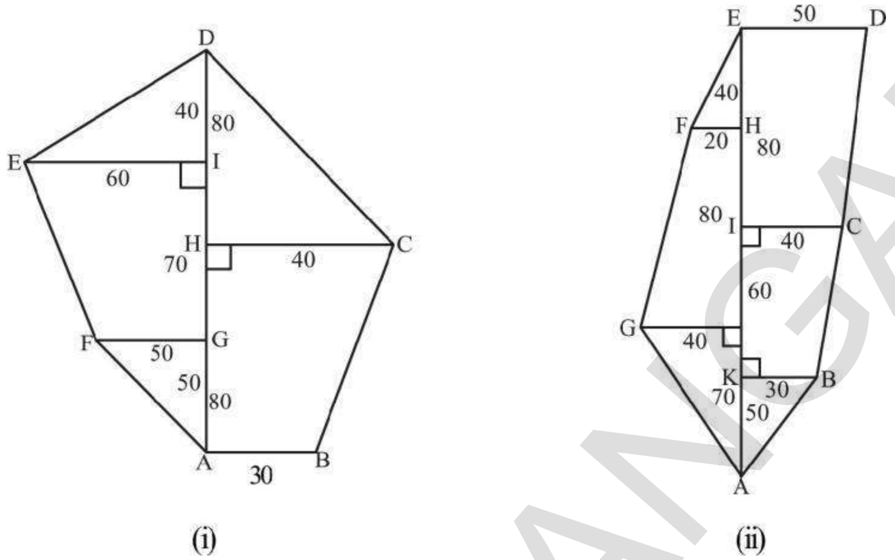
اور اندرونی ابعاد 20cm x 16cm

رکھتا ہے اگر ہر خط کی چوڑائی یکساں ہو تو فریم کے سایہ دار حصہ کا رقبہ معلوم کیجیے۔



SCERT TELANGANA

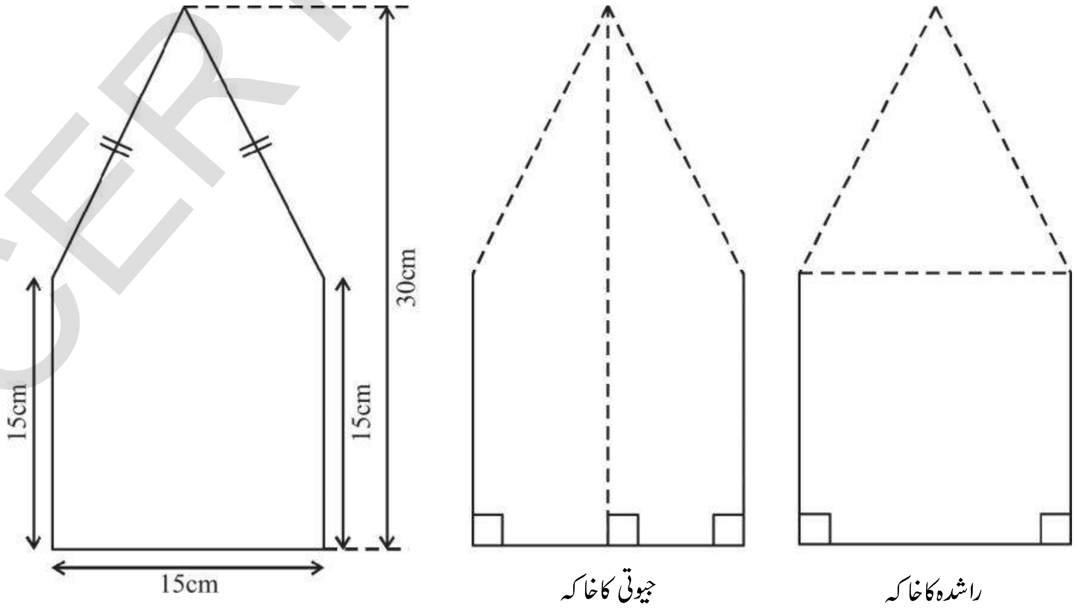
5۔ حسب ذیل میدانوں کے رقبے معلوم کیجیے۔ تمام ابعاد میٹروں میں ہیں۔



6۔ ایک منحرف کے متوازی ضلعوں کے طولوں میں نسبت 5:3 ہے اور ان کا درمیانی فاصلہ 16 سمر ہے۔ اگر منحرف کا رقبہ 960 مربع سمر ہوتو متوازی ضلعوں کے طول معلوم کیجیے۔

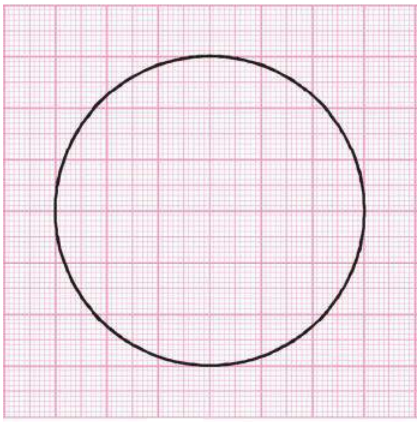
7۔ ایک عمارت کا فرش جو کہ لگ بھگ 3000 معین نما ٹائلس پر مشتمل ہے جن کے وتروں کی لمبائی 45 سمر اور 30 سمر ہے۔ ہر ٹائل پر 20 روپئے فی مربع میٹر کے حساب سے فرش کروانے کا جملہ خرچ کتنا ہوگا؟

8۔ ذیل میں ایک مخمس کی شکل کے حصوں کو بتلایا گیا ہے۔ اس کا رقبہ معلوم کرنے کے لیے جیوتی اور راشدہ نے ان کو دو مختلف طریقوں سے تقسیم کیا۔



یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20

9.5 دائرہ کا رقبہ



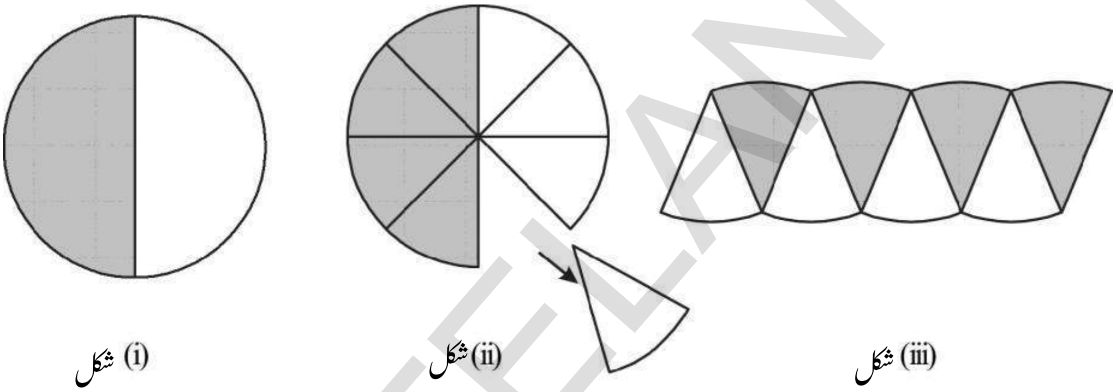
شکل .9.22

ایسے موقعوں پر ہم کو دائروی خطہ کا رقبہ معلوم کرنے کی ضرورت پڑتی ہے۔

اب ہم ترسیمی کاغذ کا استعمال کرتے ہوئے دائرہ کا رقبہ معلوم کریں گے۔

ایک ترسیمی کاغذ پر 4 سمر نصف قطر لے کر ایک دائرہ بنایئے۔ دائرہ میں گھرے ہوئے مربعوں کی تعداد گنتے ہوئے رقبہ معلوم کیجیے۔

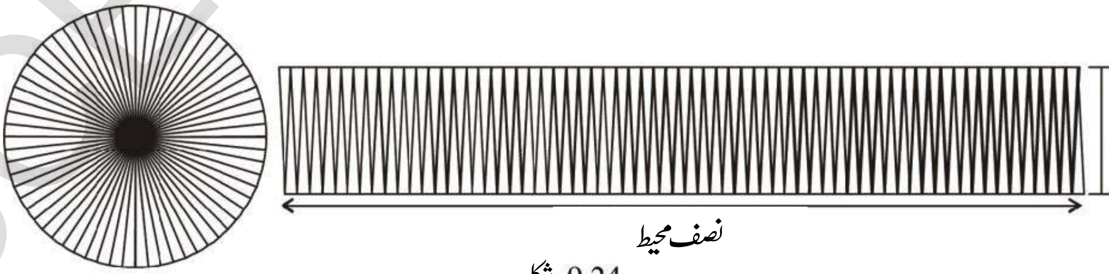
چونکہ دائرے کا کنارہ سیدھا نہیں رہتا ہم اس طریقہ سے دائرہ کے رقبہ کا تعین کر سکتے ہیں۔ دائرہ کا رقبہ معلوم کرنے کے لیے دوسرا طریقہ بھی اپنایا جاسکتا ہے۔



شکل (i) شکل (ii) شکل (iii)

شکل .9.23

ایک دائرہ بنا کر اس کے نصف کو سایہ دار کیجیے۔ اب دائرہ کو 8 مساوی حصوں میں موڑ کر کاٹئے۔
علیحدہ شدہ ٹکڑوں کو ترتیب دیجیے جیسا کہ شکل 2 میں بتلایا گیا ہے۔ حاصل ہونے والی شکل متوازی الاضلاع جیسی ہے۔ ہمارے ہاں جتنے زیادہ قطاع ہوں گے حاصل ہونے والی شکل متوازی الاضلاع سے اتنی ہی مشابہہ ہوگی۔ اگر ہم دائرہ کو 64 قطاع میں تقسیم کریں اور ان کو ترتیب سے رکھیں تب وہ مستطیل کے مشابہہ ہوگی۔



شکل .9.24

اس مستطیل کا عرض کیا ہے؟ اس مستطیل کا عرض دائرہ کا نصف قطر 'r' ہوتا ہے جیسا کہ مکمل دائرہ کو 64 قطاع میں تقسیم کرنے پر ہمیں ہر ایک جانب 32 قطاع حاصل ہوتے ہیں' مستطیل کا طول 32 قطاع کا طول ہوگا جو کہ محیط کا نصف ہے۔

مستطیل کا رقبہ جیسا کہ پایا گیا = دائرہ کا رقبہ

= l x b

= (محیط کا نصف) x نصف قطر

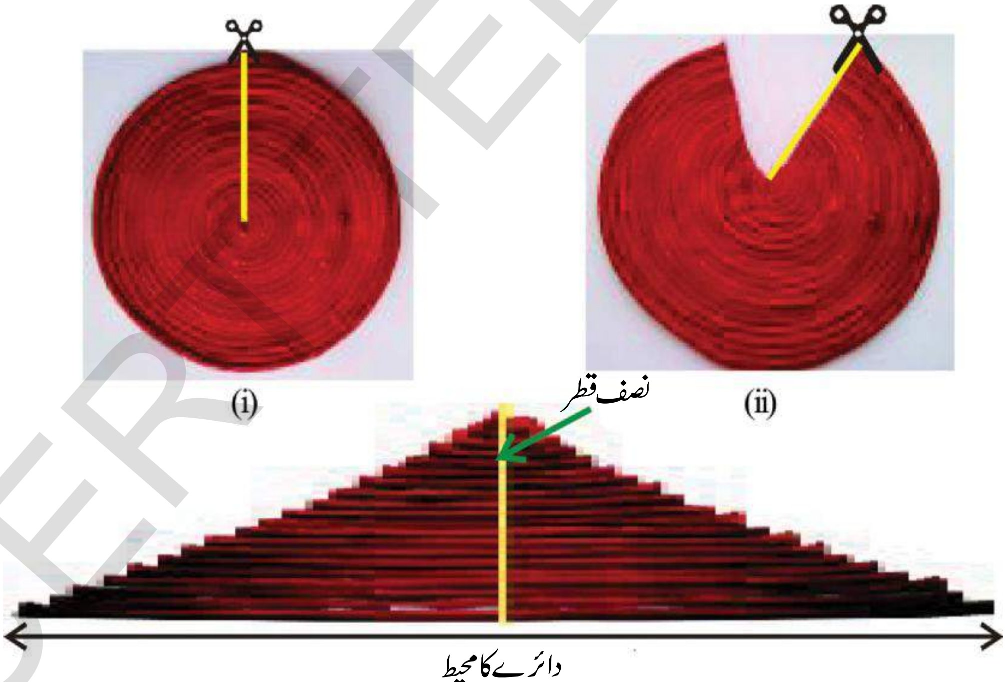
$$\frac{1}{2} \times 2\pi r \times r = \pi r^2$$

اس طرح دائرے کا رقبہ = πr^2

دھاگے سے مشغلہ

یہودیوں کے مقدس صحیفہ 'تلمود' میں دائرے کا رقبہ محسوب کرنے کا ایک دلچسپ طریقہ بتایا گیا ہے۔ $A = \pi r^2$

فرض کیجیے کہ دائرہ کا اندرونی حصہ ڈوری کے ہم مرکزی دائروں پر مشتمل ہے۔ ایک کنارے سے ڈوری کو مرکز تک کاٹئے' ہر ڈوری کو سیدھی کیجئے اور خاکہ میں بتائے گئے طریقہ کے مطابق اس طرح ترتیب دیجئے کہ وہ مساوی الساقین مثلث کی شکل اختیار کریں۔



(iii)

مساوی الساقین مثلث کا قاعدہ دائرہ کے محیط کے مساوی ہوتا ہے اور بلندی دائرہ کے نصف قطر کے مساوی ہوتی ہے۔

مثلث کا رقبہ = $\frac{1}{2}$ x قاعدہ x بلندی

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20
SCERT TELANGANA

$$= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times r$$

$$= \pi r^2$$

جہاں r دائرے کا نصف قطر ہے πr^2 = دائرے کا رقبہ

کوشش کیجیے: ایک ترسیمی کاغذ پر مختلف نصف قطر والے دائرے بنائیے۔ مربعوں کی تعداد کی گنتی کر کے رقبہ معلوم کیجیے۔ ضابطہ کو استعمال کرتے ہوئے بھی رقبہ معلوم کیجیے۔ دونوں جوابات کا تقابل کیجیے۔

مثال:11 ایک تار کو 27.5 میٹر ضلع والے مربع کی شکل میں موڑا گیا۔ تار کو سیدھا کیا گیا اور دائرہ کی شکل میں موڑا گیا۔ تشکیل دیئے گئے دائرہ کا ج نصف قطر کیا ہوگا؟

حل: مربع کا احاطہ = تار کا طول

سمر 110 = سمر (27.5 x 4) =

تار کو دائرہ کی شکل دینے پر وہ دائرہ کے محیط کو ظاہر کرے گا جو 110 سمر ہوگا۔ مان لیجیے اس دائرہ کا نصف قطر 'r' ہے۔ تب دائرے کا محیط

$$= 2\pi r = 2 \times \frac{22}{7} \times r \text{ cm}$$

$$= \frac{44}{7} r \text{ cm}$$

$$\therefore \quad 110 = \frac{44}{7} r$$

$$\Rightarrow \quad r = \frac{110 \times 7}{44} \text{ cm}$$

$$= 17.5 \text{ cm}$$

مثال:12 دائرہ کا محیط 22 سمر ہے۔ رقبہ معلوم کیجیے۔

حل: مان لیجیے دائرہ کا نصف قطر 'r' ہے۔

تب محیط = $2\pi r$

SCERT TELANGANA

$$\therefore \quad 2\pi r = 22$$

$$2 \times \frac{22}{7} \times r = 22$$

$$r = 22 \times \frac{7}{22} \times \frac{1}{2} = 3.5\text{ cm}$$

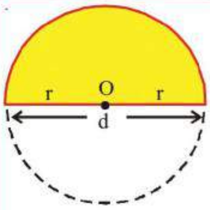
نصف دائرے کا رقبہ = 3.5cm

دائرہ کا قطر πr^2 = $\left(\frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2}\right)$ مربع سمر

= 38.5 مربع سمر

نصف دائرے کا رقبہ = $\frac{1}{2}\pi r^2$

= $\frac{1}{2} \times 38.5 = 19.25$ مربع سمر



نصف دائرے کا رقبہ کیا ہوگا؟

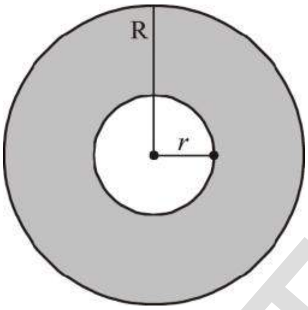
تصور کیجئے کہ دائرے کا سایہ دار علاقہ، دائرے کو اُس کے قطر پر موڑنے پر حاصل ہوا ہے۔ کیا ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ یہ علاقہ دائرے کے کل رقبے کا نصف ہے؟
اس کا رقبہ دائرے کے رقبے کا نصف ہوتا ہے۔

$$= \frac{1}{2}\pi r^2$$

نصف دائرے کا محیط کیا ہوگا؟

9.6 دائروی راستہ کا رقبہ (دائروی حلقہ کا رقبہ)

ایک چمن میں دائروی راستہ بنایا گیا ہے جیسا کہ شکل میں بتلایا گیا ہے۔ اس کے بیرونی اور اندرونی دائرے ہم مرکز ہیں۔ اب ہم اس دائروی راستہ کا رقبہ معلوم کریں گے۔



دائروی راستہ کا رقبہ، بیرونی دائرہ کا رقبہ اور اندرونی دائرہ کے رقبہ کا فرق ہوتا ہے۔
اگر ہم بیرونی دائرہ کے نصف قطر کو 'R' اور اندرونی دائرہ کے نصف قطر کو 'r' کہتے ہیں تب

اندرونی دائرہ کا رقبہ - بیرونی دائرہ کا رقبہ = دائروی راستہ کا رقبہ

$$= \pi R^2 - \pi r^2$$

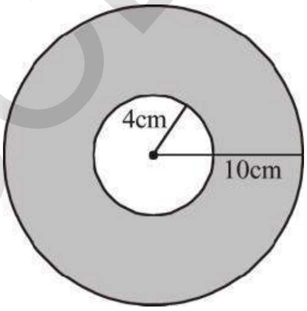
$$= \pi (R^2 - r^2)$$

چنانچہ

دائروی راستہ کا رقبہ یا حلقہ کا رقبہ = $\pi(R^2 - r^2)$ یا $\pi(R+r)(R-r)$

جہاں R اور r ترتیب وار بیرونی اور اندرونی دائروں کے نصف قطر ہیں۔

مثال 13: متصلہ شکل پر غور کیجیے۔ یہ ایک ہی مرکز پر دو دائرے ظاہر کرتا ہے۔ بڑے دائرہ کا نصف قطر 10 سمر اور چھوٹے دائرہ کا نصف قطر 4 سمر ہے۔



معلوم کیجیے

(i) بڑے دائرہ کا رقبہ

(ii) چھوٹے دائرہ کا رقبہ

(iii) دو دائروں کے درمیان کا سایہ دار رقبہ

(اشارہ: $\pi = 3.14$ لیجے)

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20
SCERT TELANGANA

حل:

(i) بڑے دائرہ کا نصف قطر = 10 سم

بڑے دائرہ کا رقبہ = πR^2

$3.14 \times 10 \times 10 = 314$ مربع سم

(ii) چھوٹے دائرہ کا نصف قطر = 4 سم

چھوٹے دائرہ کا رقبہ = πr^2

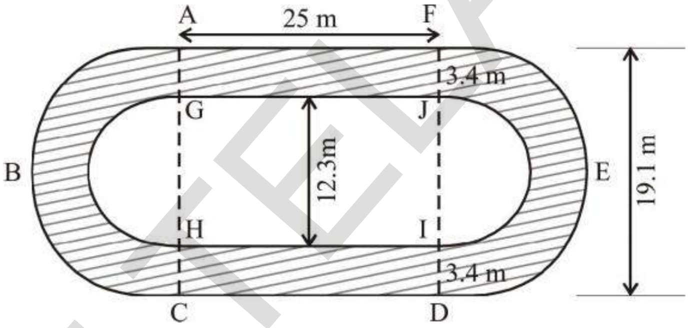
$3.14 \times 4 \times 4 = 50.24$ مربع سم

(iii) سایہ دار خطے کا رقبہ = بڑے دائرہ کا رقبہ − چھوٹے دائرہ کا رقبہ

= (314 - 50.24) مربع سم

= 263.76 مربع سم

مثال 14: ذیل میں دی گئی شکل کے سایہ دار حصہ کا رقبہ معلوم کیجیے۔



حل:

مستطیل EFHG کا رقبہ + مستطیل ABCD کا رقبہ + نیم دائروی حلقہ CLHGD کا رقبہ + نیم دائروی حلقہ AKFEB کا رقبہ = سایہ دار رقبہ

مستطیل کا رقبہ $AGJF = 25 \times 3.4 = 85$ مربع میٹر

مستطیل کا رقبہ $HCDI = 25 \times 3.4 = 85$ مربع میٹر

حلقہ کا رقبہ $ABCHG = \frac{\pi}{2}[(R^2 - r^2)] = \frac{22}{2\times7}[(9.55)^2 - (6.15)^2]$

حلقہ کا رقبہ $DEFJI = \frac{\pi}{2}[(R^2 - r^2)] = \frac{22}{2\times7}[(9.55)^2 - (6.15)^2]$

$= (25 \times 3.4) + (25 \times 3.4) + \frac{1}{2}\pi[(9.55)^2 - (6.15)^2] + \frac{1}{2}\pi[(9.55)^2 - (6.15)^2]$

$= [85 + 85 + \frac{22}{7} \times 15.7 \times 3.4]$ مربع میٹر

$= (170 + 167.77)$ مربع میٹر

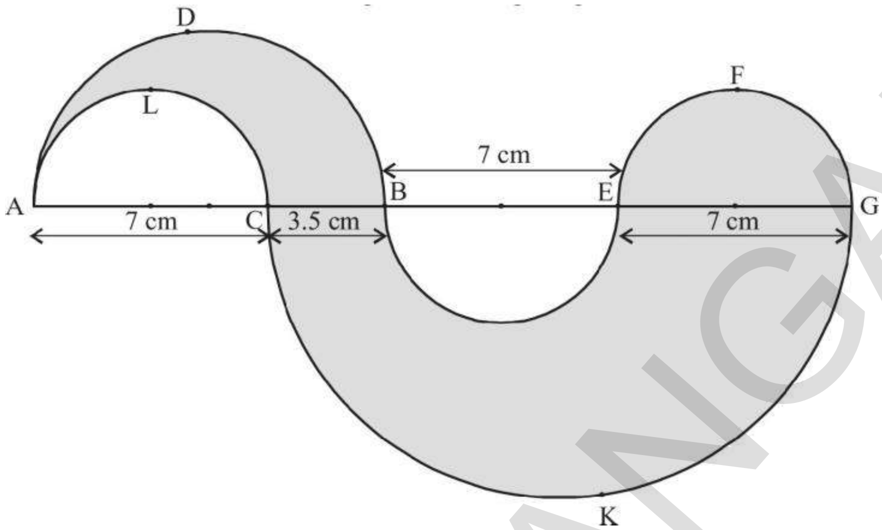
$= 337.77$ مربع میٹر

$R = \frac{19.1}{2} = 9.55$

$r = \frac{12.3}{2} = 6.15$

SCERT TELANGANA

مثال:15 ذیل میں دی گئی شکل کے سایہ دار خطہ کا رقبہ معلوم کیجیے۔



حل: BEGKCB کا رقبہ + EFGE کا رقبہ + ADBCLA کا رقبہ = سایہ دار حصہ کا رقبہ

$$= \frac{1}{2}\times\pi\left[\left(\frac{10.5}{2}\right)^2-\left(\frac{7}{2}\right)^2\right]+\frac{1}{2}\pi\left(\frac{7}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\pi\left[\left(\frac{17.5}{2}\right)^2-\left(\frac{7}{2}\right)^2\right]\text{cm}^2$$

$$= \left(\frac{1}{2}\times\frac{22}{7}\times\frac{35}{4}\times\frac{7}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{22}{7}\times\frac{49}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{22}{7}\times\frac{21}{4}\times\frac{49}{4}\right)\text{cm}^2$$

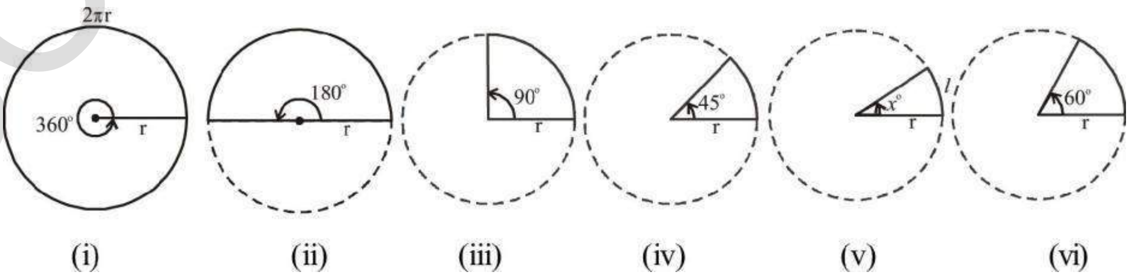
$$= \left(\frac{385}{16}+\frac{77}{4}+\frac{1617}{16}\right)$$ مربع سمر،

$$= \left(\frac{2310}{16}\right)$$ مربع سمر

$= 144.375$ مربع سمر

9.7 قوس کا طول

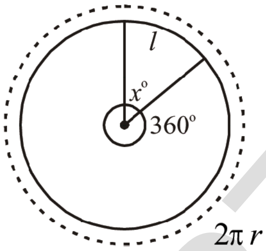
حسب ذیل دائروں پر غور کیجیے اور جدول کو مکمل کیجیے۔



یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20

شکل	زاویۓ	قوس کا طول	زاویہ اور قوس کے طول میں رشتہ
(i)	360^0	$2\pi r$	$\frac{360^0}{360^0} \times 2\pi r = 2\pi r$
(ii)	180^0	πr	$\frac{180^0}{360^0} \times 2\pi r = \pi r$
(iii)	90^0	$\frac{\pi r}{2}$	________
(iv)	45^0	$\frac{\pi r}{4}$	________
(v)	x^o	l	$\frac{x^0}{360^0} \times 2\pi r = l$
(vi)	60^0	$\frac{\pi r}{3}$	________

مندرجہ بالا مشاہدات سے ٔایک قطاع کے قوس کا طول l، $\frac{x^o}{360^o} \times 2\pi r$ ہے جہاں 'r' دائرہ کا نصف قطر اور 'x' قطاع کے قوس سے مرکز پر کا زاویہ ہوتا ہے۔



اگر قطاع کے قوس کا طول 'l' ہے۔

$$\frac{2\pi r}{l} = \frac{360^0}{x^0}$$

$$l = \frac{x^\circ}{360^\circ} \times 2\pi r$$

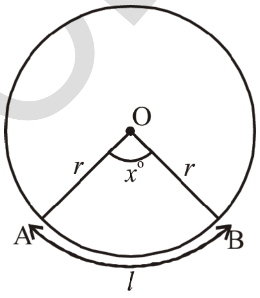
9.8 قطاع کا رقبہ

ہم جانتے ہیں کہ ایک دائرہ کا حصہ جو دو نصف قطر اور ایک قوس سے گھرا ہوتا ہے قطاع کہلاتا ہے۔

نصف قطر 'r' کے ساتھ دائرہ کا رقبہ $= \pi r^2$

دائرہ کے مرکز پر قطاع کے قوس سے بننے والا زاویہ $= x^0$

قطاع کا رقبہ اور اس کا زاویہ راست تناسب میں ہیں۔



$\therefore$ قطاع کا رقبہ: دائرہ کا رقبہ $= x^0 : 360^0$

قطاع کا رقبہ OAB $=$ دائرے کا رقبہ $\times \frac{x^o}{360^o}$

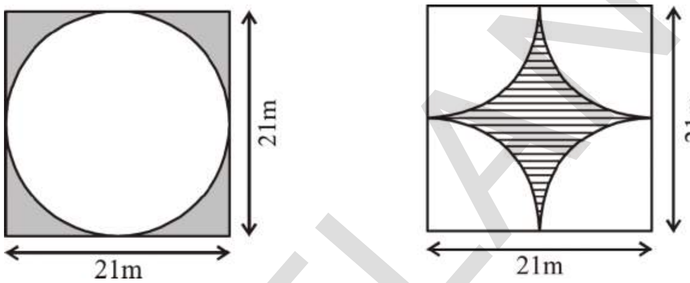
قطاع کا رقبہ $OAB = \frac{x^\circ}{360^\circ} \times \pi r^2 \quad [\pi r^2 = \pi r \times \frac{2r}{2}]$

$$= \frac{x^0}{360^0} \times 2\pi r \times \frac{r}{2}$$

$$= l \times \frac{r}{2}$$

$A = \frac{lr}{2}$ جہاں l قطاع کا طول ہے

مثال 13: حسب ذیل میں سایہ دار خطہ کا رقبہ معلوم کیجیے۔



حل: (i) سایہ دار خطہ کا رقبہ = {21 میٹر قطر والے دائرہ کا رقبہ} - {21 میٹر ضلع والے مربع کا رقبہ}

اگر دائرہ کا قطر 21 میٹر ہو تب $\frac{21}{2} = 10.5$ میٹر

تب دائرے کا نصف قطر $= \frac{21}{2} = 10.5$ میٹر

سایہ دار قطاع کا رقبہ $= (21 \times 21) - \left(\frac{22}{7} \times \frac{21}{2} \times \frac{21}{2}\right)$ مربع میٹر

$= 441 - 346.5$

$= 94.5$ مربع میٹر

(ii) سایہ دار خطہ کا رقبہ = {4 x قطاع کا رقبہ} - {21 میٹر ضلع والے مربع کا رقبہ}

$= (21 \times 21) - \left(4 \times \frac{90}{360} \times \frac{22}{7} \times \frac{21}{2} \times \frac{21}{2}\right)$ مربع میٹر

(اگر قطر 21 میٹر ہو تب نصف قطر $\frac{21}{2}$ میٹر ہوگا)

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 20-2019
SCERT TELANGANA

$$= (21 \times 21) - \left(4 \times \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times \frac{21}{2} \times \frac{21}{2}\right)$$

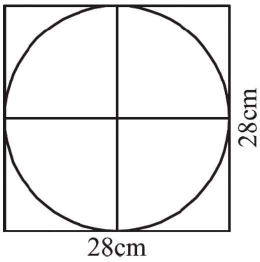
$= (441 - 346.5)$ مربع میٹر

$= 94.5$ مربع میٹر

مشق - 9.2

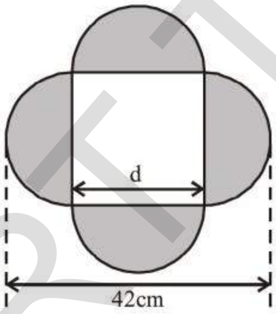
1۔ ایک مستطیلی پلاسٹک شیٹ 25 سمر x 36 سمر کی ہے۔اس شیٹ سے 3.5 سمر قطر والے 56 بٹن بنائے گئے۔باقی شیٹ کا رقبہ معلوم کیجیے۔

2۔ 28 سمر ضلع والے مربع میں بنائے دائرہ کا رقبہ معلوم کیجیے۔



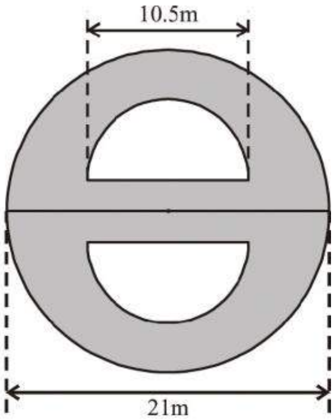
(اشارہ: دائرہ کا قطر مربع کے ضلع کے مساوی ہے)

3۔ ذیل کی اشکال میں سایہ دار خطہ کا رقبہ معلوم کیجیے۔



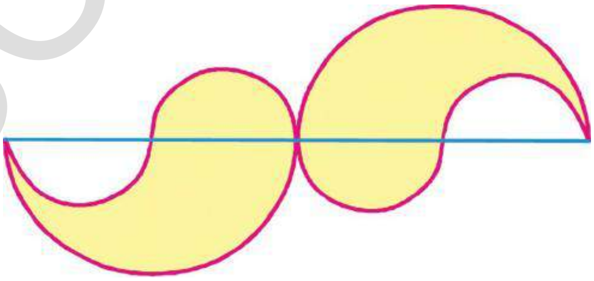
[Hint: $d + \frac{d}{2} + \frac{d}{2} = 42$]

$d = 21$



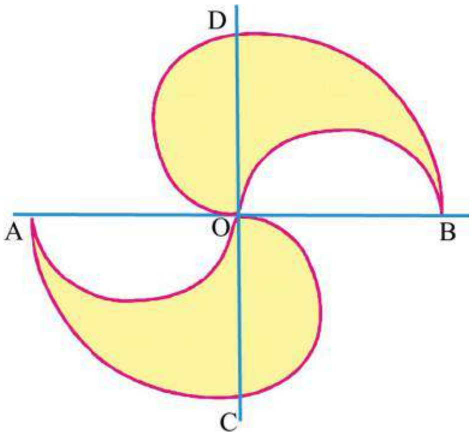
∴ مربع کا ضلع = 21 سمر

4۔ متصلہ شکل، مساوی نصف قطر والے چار چھوٹے نیم دائروں اور مساوی نصف قطر والے دو بڑے نیم دائروں پر مشتمل ہے۔(ہر ایک 42 سمر)۔سایہ دار خطہ کا رقبہ معلوم کیجیے۔

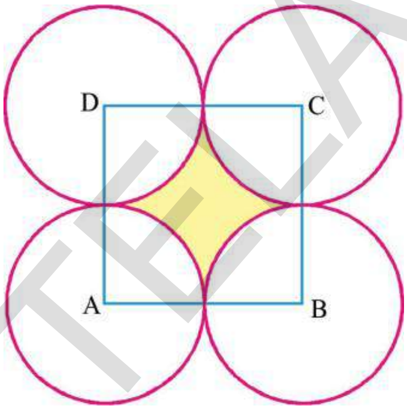


SCERT TELANGANA

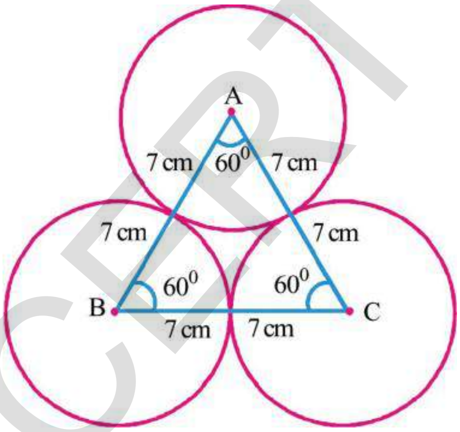
5۔ متصلہ شکل چار نصف دائروں اور دو ربع دائروں پر مشتمل ہے۔ اگر $OA = OB = OC = OD = 14$ سمر ہو تو سایہ دار خطہ کا رقبہ معلوم کیجیے۔



6۔ متصلہ شکل میں چار مساوی قطر والے ایسے دائرے بنائے گئے ہیں جو خارجاً مس کرتے ہیں۔ A،B،C اور D ان کے مرکز ہیں۔ ABCD 7 سمر ضلع والا مربع ہے۔ سایہ دار خطہ کا رقبہ معلوم کیجیے۔



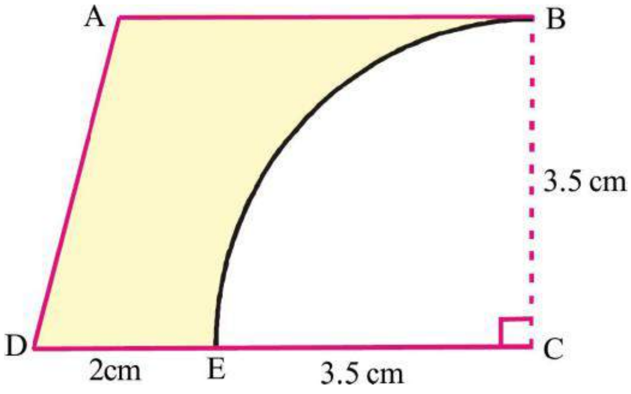
7۔ مساوی الاضلاع مثلث کا رقبہ $49\sqrt{3}$ مربع سمر ہے۔ ہر زاوئی نقطہ کو مرکز مانتے ہوئے ایک دائرہ بنایا گیا۔ جس کا نصف قطر مثلث کے ضلع کا نصف ہے جیسا کہ شکل میں بتلایا گیا ہے۔ مثلث کا رقبہ معلوم کیجیے۔ جو دائرہ میں شامل نہیں ہے۔



8۔ (i) 'a' نصف قطر والے چار مساوی دائرے ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں۔ ان کا درمیانی رقبہ معلوم کیجیے۔

(ii) چار مساوی دائرے جو ایک مربع کے چار کناروں سے بیرونی طور پر بنائے گئے ہیں اس طرح ہیں کہ ہر دائرہ دو دوسرے دائروں کو مس کرتا ہے۔ دائروں کے محیط کے درمیان گھری ہوئی جگہ کا رقبہ معلوم کیجیے۔ مربع کا ہر ضلع 14 سمر ہے۔

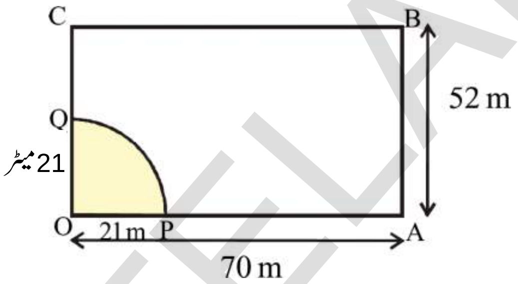
SCERT TELANGANA



9۔ ایک مقوے کے منحرفی ٹکڑے ABCD سے جس میں AB//CD اور $\angle BCD = 90^0$ ہے۔ ربع دائرہ کاٹا گیا۔ دیا گیا ہے کہ AB = BC = 3.5 سمر اور سمر DE = 2 مقوے کے بقیہ حصے کا رقبہ معلوم کیجیے۔

(π کی قدر $\frac{22}{7}$ لیجیے)

10۔ ایک مستطیلی میدان جس کا طول 70 میٹر اور عرض 52 میٹر ہے۔ اندر کے ایک کنارے سے ایک گھوڑے کو گھاس چرنے کے لیے 21 میٹر لمبی رسی سے باندھا گیا ہے۔ کتنے رقبہ پر گھوڑا گھاس چر سکتا ہے؟



ہم نے کیا سیکھا

منحرف کا رقبہ = $\frac{1}{2}$ (متوازی ضلعوں کے طولوں کا مجموعہ) x (ان کا درمیانی فاصلہ)

چار ضلعی کا رقبہ = $\frac{1}{2}$ x (وتر کا طول) x (وتر پر باقی دو راسوں سے عمودوں کا مجموعہ)

معین کا رقبہ = وتروں کے حاصل ضرب کا نصف

دائرہ کا رقبہ = πr^2 جہاں 'r' دائرہ کا نصف قطر ہے

دائروی راستہ کا رقبہ یا دائروی حلقہ کا رقبہ = $\pi(R+r)(R-r)$ یا $\pi(R^2-r^2)$

جہاں R، r علی الترتیب بیرونی اور اندرونی دائرہ کے نصف قطر ہیں۔

قطاع کا رقبہ = $\frac{x^0}{360^0} \times \pi r^2$

جہاں x^0 دائرہ کے مرکز پر قطاع کے قوس سے بننے والا زاویہ اور 'r' کا نصف قطر ہے۔

$$A = \frac{lr}{2}$$

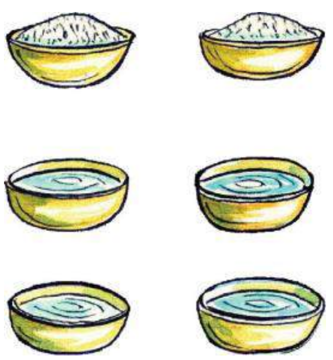
SCERT TELANGANA

راست اور معکوس تناسب

10

Direct and Inverse Proportion

10.0 تعارف



گوپی، روزانہ 2 کپ چاول پکانے کے لیے 4 کپ پانی استعمال کرتا ہے۔ آج جبکہ اس کے مکان میں کچھ مہمان آئے ہیں اسے 6 کپ چاول پکانا ہوگا۔ بتاؤ کہ 6 کپ چاول پکانے کے لیے اسے کتنے کپ پانی چاہئے؟

روزمرہ کی زندگی میں ہمیں بعض دفعہ ایسے مواقع آتے ہیں جبکہ ہمیں کسی ایک شئے کی مقدار میں کمی بیشی کرنے پر دوسری شئے کی مقدار تبدیل کرنی پڑتی ہے۔ مثلاً

1) اگر ہمارے اسکول میں زیادہ طلبا شریک ہوں تو دوپہر کے کھانے کے لیے چاول کی مقدار میں کیا تبدیلی ہوگی۔ کیا ہمیں زیادہ مقدار میں کھانے کی ضرورت ہوگی؟

2) اگر ہم کسی بینک میں کچھ زیادہ رقم جمع کرائیں تو اس پر سود کی رقم کے بارے میں آپ کیا کہیں گے؟ یقیناً سود کی رقم میں اضافہ ہوگا۔

3) خریدی جانے والی اشیا میں کمی واقع ہو تو جملہ قیمت پر کیا اثر پڑے گا؟ یقینی طور پر جملہ قیمت بھی گھٹ جائے گی۔

4) اگر چائے کی 40 پیکٹوں کا وزن 1.6 کیلوگرام ہو تو ایسی 20 پیکٹوں کا وزن کتنا ہوگا؟ واضح ہے کہ چائے کی 20 پیکٹوں کا وزن کم ہوگا۔

اوپر دی گئی مثالوں میں ہمیں پتہ چلتا ہے کہ کسی ایک شئے کی مقدار میں تبدیلی پر دوسری شئے کی مقدار بھی بدل جاتی ہے۔

یہ کیجئے

ایسی اور 5 مثالیں دیجئے جہاں کے ایک شئے کی مقدار میں تبدیلی پر دوسری شئے کی مقدار بھی بدلتی ہے۔

ہم یہ کیسے معلوم کریں گے کہ گوپی کو کتنے پانی کی ضرورت ہے؟ اس سوال کا جواب معلوم کرنے کے لیے ہمیں بعض تبدیلیوں کا مشاہدہ کرنے پڑے گا۔

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20
SCERT TELANGANA

10.1 راست تناسب

شجرکاری کے ایک موقع پر ماحولیات پر اسکول کی ٹیم کے ذمہ دار نے چاہا کہ پودے لگائے جائیں۔ ذیل میں ماحولیات کے کلب کے ارکان کی تعداد دی گئی ہے۔

ہر ایک طالب علم کو 2 پودے لگانے ہیں۔ بتاؤ کہ ہر کلاس کے لیے کتنے پودوں کی ضرورت ہوگی؟

جماعت	VI	VII	VIII	IX	X
ماحولیات ٹیم کے طلبا کی تعداد	5	7	10	12	15

مطلوبہ پودوں کی تعداد کے بارے میں آپ کی کیا رائے ہے؟ پودوں کی تعداد اور طلبا کی تعداد کے درمیان کیا فرق واقع ہوتا ہے؟ کیا دونوں کی تعداد گھٹے گی یا پھر بڑھے گی؟

جماعت	VI	VII	VIII	IX	X
ماحولیات ٹیم کے طلبا کی تعداد	5	7	10	12	15
پودوں کی تعداد	10	14	20	24	30

$$\frac{\text{پودوں کی تعداد}}{\text{طلبا کی تعداد}} = \frac{10}{5} = \frac{14}{7} = \frac{20}{20} = \ldots\ldots = \frac{2}{1} = 2$$

جو کہ ایک مستقل عدد ہے اسے مستقل تناسب کہتے ہیں۔ چونکہ نسبت مساوی ہے اسے راست تناسب بھی کہا جاتا ہے۔

اگر x اور y ایسی دو مقداریں ہیں کہ دونوں ایک ساتھ بڑھتی ہیں یا گھٹتی ہیں اور $\frac{x}{y}$ مستقل رہتا ہے۔ (مثلاً k) تب ہم کہتے ہیں کہ x اور y راست تناسب میں ہیں۔ اسے اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔ $x \alpha y$ اور x راست طور پر y کے متناسب ہوتا ہے' پڑھتے ہیں۔

اگر y_1 اور y_2، x_1 اور x_2 کی متعلقہ قیمتیں ہیں تب $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$

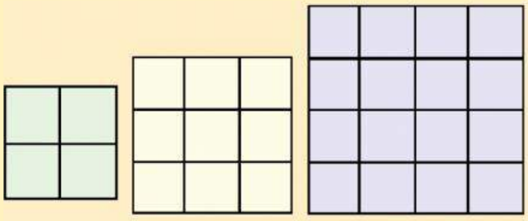
SCERT TELANGANA

یہ کیجئے

ایسی تین مثالیں دیجئے جہاں کے راست تناسب حاصل ہوتا ہے۔

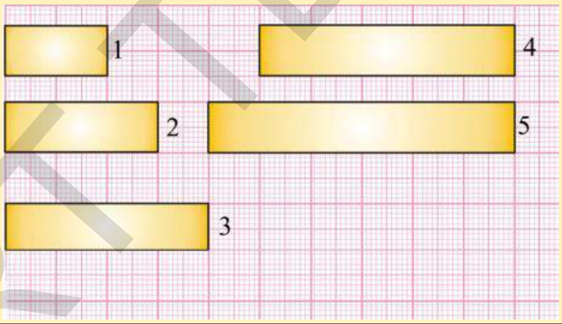
2) 2 سمِ، 3 سمِ، 4 سمِ اور 5 سمِ اضلاع کے مختلف مربعوں پر غور کیجئے۔ ان کے رقبے معلوم کیجئے اور دیئے گئے جدولوں کو پر کیجئے۔

ضلع سمِ میں	رقبہ مربع سمِ میں
2	
3	
4	
5	



آپ نے مشاہدہ کیا دیکھا؟ کسی مربع کے ضلع کی تبدیلی پر کیا اس کا رقبہ بھی بدل جاتا ہے؟ ایک مربع کا رقبہ معلوم کیجئے جس کا ضلع دیا گیا ہو۔ کیا نسبت وہی رہے گی؟ ظاہر ہے وہی قیمت نہیں ہوگی۔ لہذا یہ تبدیلی راست تناسب نہیں ہے۔

3) ذیل میں ترسیمی کاغذ پر مساوی عرض رکھنے والے مستطیل دیئے گئے ہیں ہر ایک مستطیل کا رقبہ معلوم کیجئے اور ذیل کی خانہ پری کیجئے۔



مستطیل					
طول (سمِ میں)					
رقبہ (مربع سمِ میں)					

کیا رقبہ طول کے راست متناسب میں ہوتا ہے۔

4) ایک ترسیمی کاغذ پر مختلف طول اور مختلف عرض کے چند مستطیل بنائیے۔ ہر ایک کا رقبہ معلوم کیجئے۔ عرض اور رقبہ کے تعلق سے آپ کیا نتیجہ اخذ کرتے ہیں۔

SCERT TELANGANA

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20

مثال 1: اگر 65 چائے کی پیکٹوں کی قیمت ` 2600 ہے تو 75 پیکٹوں کی قیمت کیا ہوگی؟

حل: ہم جانتے ہیں کہ اگر چائے کی پیکٹوں کی تعداد بڑھتی ہے تو قیمت بھی بڑھ جائے گی لہذا چائے کی پیکٹوں کی قیمت ان کی تعداد کے ساتھ راست طور پر تبدیل ہوگی۔

پیکٹوں کی تعداد (x)	65	75
قیمت (y)	2600	؟

لہذا $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ یہاں $x_1 = 65$ $y_1 = 2600$ $x_2 = 75$ $y_2 = ?$

قیمتیں رکھنے پر $\frac{65}{2600} = \frac{75}{y_2} \Rightarrow y_2 = \frac{75 \times 2600}{65} =$ ` 3000

لہذا ایسی 75 پیکٹوں کی قیمت ` 3000 ہوگی۔

مثال 2: ذیل میں کسی قریبی ریلوے اسٹیشن کے پاس کار پارکنگ کے چارجس دیئے گئے ہیں۔

گھنٹے (x)	پارکنگ فیس (y)
4 گھنٹے	` 60
8 گھنٹے	` 100
12 گھنٹے	` 140
24 گھنٹے	` 180

جانچ کرکے بتایئے کہ پارکنگ کے چارجس اور پارکنگ کے گھنٹے راست تناسب میں ہیں یا نہیں؟

حل: ہم دیکھ سکتے ہیں کہ دونوں قیمتیں بتدریج بڑھ رہی ہیں۔ کیا یہ دونوں راست تناسب میں ہیں؟ x/y کی قیمت کیا ہوگی۔ اگر یہ قیمت مستقل ہے تو دونوں راست تناسب میں ہوں گی۔ ورنہ دونوں راست تناسب میں نہیں ہوں گی۔ آیئے جانچ کرکے دیکھتے ہیں۔

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{60}, \frac{8}{100}, \frac{12}{140}, \frac{24}{180}$$

آپ آسانی سے پہچان سکیں گے کہ یہ نسبتیں مساوی نہیں ہیں لہذا یہ قیمتیں راست تناسب میں نہیں ہوں گی۔

مثال 3: 8 میٹر لمبے ایک کھمبے کا سایہ 10 میٹر ہے۔ تو بتائے کہ ایسے ہی حالات میں کسی درخت کا سایہ 40 میٹر ہو تو یہ کتنا اونچا ہوگا؟

SCERT TELANGANA

حل: سایہ کا طول کھمبے کی بلندی کے ساتھ راست طور پر بدلتا ہے۔

لہٰذا $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}$ جہاں $x_1=8m$ $y_1=10m$ $x_2=?$ اور $y_2=40m$

قیمتیں رکھنے پر $\frac{8}{10}=\frac{x_2}{40}\Rightarrow x_2=\frac{8\times 40}{10}=32m$

لہٰذا درخت کی بلندی 32 میٹر ہے۔

مثال 4: اگر ایک پائپ سے 50 لیٹر کی گنجائش رکھنے والے ایک حوض کو پانچ گھنٹوں میں بھرا جاتا ہے تو بتاؤ کہ 75 لیٹر کی گنجائش رکھنے والے حوض کو بھرنے کتنی دیر لگے گی۔

حل: حوض میں پانی کا حجم $\propto$ مطلوبہ وقت کے

لہٰذا $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}$ جہاں $x_1=50l$ $y_1=5hr$ $x_2=75l$ اور $y_2=?$

$$\frac{50}{5}=\frac{75}{y^2}\Rightarrow y^2=\frac{75\times 5}{50}=\frac{\overset{15}{\cancel{375}}}{\underset{2}{\cancel{50}}}=7\frac{1}{2}hr$$

75 لیٹر گنجائش والی ٹانکی کو بھرنے کے لئے $7\frac{1}{2}$ گھنٹے کا وقت درکار ہوگا

مثال 5: 10 میٹر کپڑے کی قیمت ` 1600 ہو تو 24.5 کپڑے کی قیمت کیا ہوگی۔

حل: قیمت کپڑے کے طول کے ساتھ راست طور پر تعلق رکھتی ہے۔ لہٰذا $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}$ جہاں، $x_1=20$ میٹر $y_1=$ ` 1600

$x_2=24.5$ میٹر اور $y_2=?$

قیمت درج کرنے پر $\frac{20}{1600}=\frac{24.5}{y_2}\Rightarrow x_2=\frac{1600\times 24.5}{20}$ =₹1960

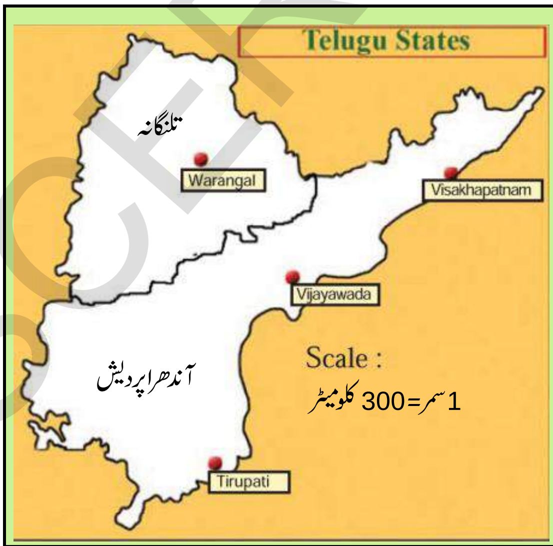
لہٰذا 24.5 میٹر کپڑے کی قیمت 1960 روپے ہوگی۔

ایسا کیجیے

دیئے ہوئے نقشہ میں فاصلہ کی پیمائش کی جائے اور اس کی مدد سے

(i) وجئے واڑہ اور وشاکھا پٹنم کے درمیان کا فاصلہ معلوم کیجیے۔

(ii) تروپتی اور ورنگل کے درمیان کا فاصلہ محسوب کیجئے۔ (پیمانہ دیا گیا ہے)



پیمانہ اسکیل یہ بتاتا ہے کہ دو شہروں کے درمیانی فاصلہ کو کیسے کم کیا جائے۔

اسکیل: 1 سمر = 300 کلومیٹر

اسکیل کو نسبت میں تبدیل کیجیے یا 1 cm : 30000000cm

سنٹی میٹر کو مشترک اکائی کے طور پر استعمال کیا جاتا ہے۔

SCERT TELANGANA

مشق - 10.1

1) ایک کپڑا 5 میٹر خریدنے پر قیمت 210 روپئے ہوتی ہے۔(i) 2 میٹر کپڑے کی قیمت معلوم کیجیے (ii) 4 میٹر (iii) 10 میٹر (iv) 13 میٹر کپڑے کی قیمت کیا ہوگی۔

2) خالی جگہوں کو پر کیجیے۔

سیبوں کی تعداد					
سیبوں کی تعداد روپیوں میں					

3) دھان کے 48 تھیلوں کی قیمت 16800 روپئے ہے تو بتاؤ کہ 36 تھیلوں کی قیمت کیا ہوگی۔

4) 4 ارکان پر مشتمل ایک خاندان کا ماہانہ خرچ 2800 روپئے ہے تو بتاؤ کہ 3 ارکان کے خاندان کا ماہانہ خرچ کیا ہوگا۔

5) 28 میٹر لمبے ایک پانی کے جہاز کی بلندی 12 میٹر ہے اگر کسی اور جہاز کی بلندی 9 میٹر ہو تو اس کی لمبائی کیا ہوگی۔

6) 5 میٹر 60 سمر عمودی کھمبے کا سایہ 3 میٹر 20 سمر ہے۔تو بتاؤ کہ

(i) 10 میٹر 50 سمر اونچے ایک اور کھمبے کا سایہ کتنا لمبا ہوگا۔

(ii) اگر کسی کھمبے کا سایہ 5 میٹر لانبا ہو تو اس کی اونچائی معلوم کیجیے۔

7) سامان سے لدا ہوا ایک ٹرک 25 منٹ میں 14 کیلومیٹر کا فاصلہ طئے کرتا ہے تو بتاؤ کہ اسی رفتار سے 5 گھنٹوں میں یہ کتنا دور جائے گا۔

8) ایک موٹے کاغذ کے 12 شیٹ 40 گرام وزنی ہیں تو محسوب کرو کہ 2/3 16 کیلوگرام وزن میں کتنے شیٹ آئیں گے۔؟

9) ایک ٹرین 75 کیلومیٹر فی گھنٹہ کی یکساں رفتار سے حرکت کرتی ہے

(i) 20 منٹ میں یہ کتنا فاصلہ طئے کرے گی؟

(ii) 250 کیلومیٹر فاصلہ طئے کرنے کے لیے اسے کتنا وقت لگے گا؟

10) ایک مائکروچپ کا اسکیل 40:1 ہے منصوبہ میں اس کی لمبائی 18 سمر ہے تو بتاؤ کہ مائکروچپ کی اصل لمبائی کیا ہوگی۔

11) ڈاکٹروں اور وکلاء کی عمروں کا مجموعی اوسط 40 ہے۔اگر ڈاکٹروں کی عمر کا اوسط 35 اور وکلاء کی عمر کا اوسط 50 ہے تب ڈاکٹروں اور وکلاء کی تعداد کی نسبت معلوم کیجیے۔

منصوبہ کام

1) ہندوستان کا نقشہ لیجیے اور اسی نقشے کا اسکیل استعمال کیجیے اور کوئی دو شہروں کے درمیان نقشے کے اسکیل کا فاصلہ معلوم کیجیے؟ ان شہروں کا اصل فاصلہ کیا ہوگا۔؟

2) 5 افراد کے لیے حلوہ تیار کرنے 250 گرام روا، 300 گرام شکر، 200 گرام گھی، 500 ملی لیٹر پانی درکار ہے۔تناسب کے ذریعہ آپ کی جماعت کے طلبا کے لیے حلوہ تیار کرنے اشیا کی مقدار میں کیا تبدیلی آئے گی؟

SCERT TELANGANA

10.2 معکوس تناسب

کسی کوریئر کمپنی کو بعض پارسل ان کے مقامات پر پہنچانا ہے۔ کمپنی کی جانب سے 12 دنوں کیلئے 36 افراد مامور کیئے جاتے ہیں۔ اگر صرف 18 افراد ہوں تو اس کام کیلئے 24 دن لگیں گے۔ آپ یہ بات نوٹ کریں کہ افراد کی تعداد آدھی کردینے پر درکار وقت دوگنا ہوجائے گا۔

اگر کمپنی 72 افراد سے کام لیتی ہے تو بتاؤ کہ کیا آدھا وقت ہی لگے گا؟

ہاں! اتنا ہی وقت لگے گا۔ آیئے خاکہ میں دیکھتے ہیں۔

÷2 ÷4 ×2 ×3

افراد کی تعداد	36	18	9	72	108
درکار وقت	12	24	48	6	4

×2 ×4 ÷2 ÷3

اگر کوئی کمپنی یہ پارسلس ایک ہی دن میں پہنچادینا چاہتی ہے تو کتنے افراد کی ضرورت ہوگی؟

دومقداریں کچھ اس طرح بدلتی ہیں کہ ایک کے بڑھنے پر دوسری اسی تناسب میں گھٹ جاتی ہے۔ اس تناسب کو معکوس تناسب کہتے ہیں۔ اوپر کی مثال میں افراد کی تعداد اور دنوں کی تعداد معکوس تناسب میں پائی جاتی ہیں۔ علامتی طور پر اسے ایسا لکھا جاتا ہے۔

$$\text{درکار دن} \propto \frac{1}{\text{افراد کی تعداد}}$$

اگر x اور y معکوس تناسب میں ہیں تب $x \propto \frac{1}{y}$

$x = \frac{k}{y}$ جہاں k کو تناسبی مستقل کہا جاتا ہے

اور $xy = k$

اگر y_1 اور y_2، x_1 اور x_2 کی متعلقہ قیمتیں ہیں تب

$x_1y_1 = x_2y_2 (= k)$ یا $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$

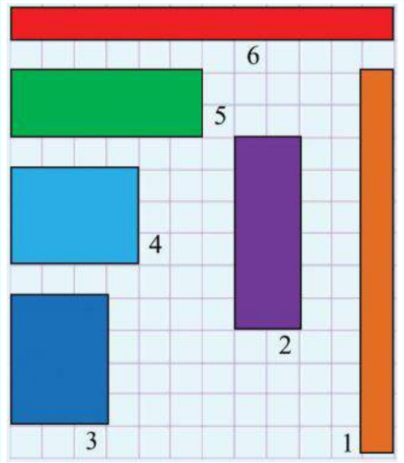
SCERT TELANGANA

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20

یہ کیجئے

1) ایسی تین مثالیں دیجئے جہاں معکوس تناسب پایا جاتا ہو

2) دیئے گئے 12 مربعوں سے مختلف ابعاد کے مختلف مستطیل بنانے کا طریقہ۔ ایسے مستطیلوں کے طول اور عرض محسوب کیجئے اور دیئے گئے جدول میں لکھیے۔



مستطیلوں کی تعداد	طول (سنٹی میٹر میں)	عرض (سنٹی میٹر میں)	رقبہ (مربع سنٹی میٹر میں)
1	L1......	B1......	....
2	L2......	B2......	....
3	L3......	B3......	....
4	L4......	B4......	....
5	L5......	B5......	....
6	L6......	B6......	....

آپ نے کیا مشاہدہ کیا؟ طول کے بڑھنے پر عرض گھٹتا ہے (ایک مستقل رقبہ کے لیے)

کیا طول اور عرض ایک دوسرے کے معکوس تناسب میں ہیں؟

مثال 6: اگر 36 ورکرس ایک دیوار 12 دن میں تعمیر کرتے ہیں تو 16 ورکرس اسے کتنے دن میں تعمیر کریں گے۔

حل: اگر ورکرس کی تعداد کم کی جاتی ہے تو تعمیر کی مدت میں اسی تناسب سے اضافہ ہوگا۔ لہٰذا ورکرس کی تعداد دنوں کی تعداد کے معکوس تناسب میں ہوگی۔

لہٰذا یہاں $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$ جہاں $x_1 = 36$ ورکرس، $y_1 = 12$ دن

ورکرس $x_2 = 16$ اور دن $y_2 = ?$

ورکرس کی تعداد	دنوں کی تعداد
36 ↓	12 ↑
16	y_2

قیمتیں درج کرنے پر $\frac{36}{16} = \frac{y_2}{12} \Rightarrow y_2 = \frac{12 \times 36}{16} = 27$

لہٰذا 16 ورکرس 27 دنوں میں اس دیوار کو تعمیر کریں گے۔

چونکہ ورکرس کی تعداد گھٹا دی گئی ہے

$36 \div x = 16 \Rightarrow x = \frac{36}{16}$

لہٰذا دنوں کی تعداد اسی تناسب میں بڑھ جائے گی

یعنی $x \times 12 = \frac{36}{16} \times 12$

=27 دن

SCERT TELANGANA

سوچئے، بحث کیجئے، اور لکھئے

کیا ہم کہہ سکتے ہیں کہ ہر دو بدل تناسب میں ہوتا ہے۔

ایک کتاب میں 100 صفحات ہیں۔ بتائیے کہ پڑھے گئے صفحات اور وہ صفحات جنہیں نہ پڑھا گیا ہوا ایک دوسرے سے کس طرح تعلق رکھتے ہیں۔

پڑھے گئے صفحات کی تعداد (x)	10	20	30	40	50
وہ صفحات جنہیں چھوڑ دیا گیا (y)	90	80	70	50	30

پڑھے گئے صفحات کی تعداد بتدریج بڑھتی ہو تو باقی چھوڑ دیئے گئے صفحات کی تعداد کیسے تبدیل ہوگی۔ کیا یہ تبدیلی معکوس تناسب میں ہوگی؟ سمجھائیے۔

مشق - 10.2

ذیل کے جدولوں کا مشاہدہ کیجیے اور معلوم کیجیے کہ کونسے دو متغیر یات (x اور y) معکوس تناسب میں ہیں۔

(i)

x	50	40	30	20
y	5	6	7	8

(ii)

x	100	200	300	400
y	60	30	20	15

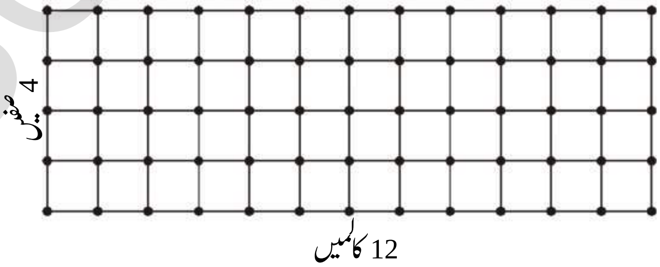
(iii)

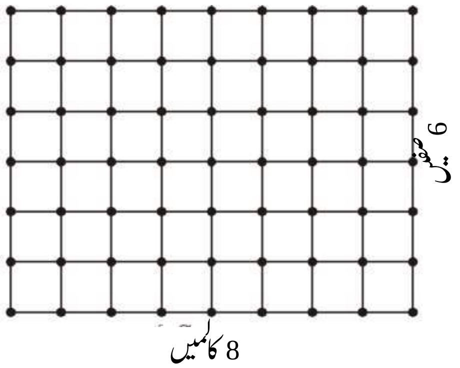
x	90	60	45	30	20	5
y	10	15	20	25	30	25

.2 کتابوں کی خریدی کے لیے ایک مدرسہ کی جانب سے 6000 ` خرچ کیئے جائیں گے۔اسی آنکڑے کو استعمال کرتے ہوئے حسب ذیل جدول کی خانہ پری کیجیے۔

ہر ایک کتاب کی قیمت (روپیوں میں)	40	50		75	
کتابوں کی تعداد جنہیں خریدنا ہے	150		100		75

.3 ایک مربع کی شکل کا ایک کاغذ لیتے ہوئے ذیل کے جدولوں کے مطابق مختلف قطاروں میں 48 ڈبے جمائیے۔





یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20

SCERT TELANGANA

صفوں کی تعداد (R)	2	3	4	6	8
کالموں کی تعداد (C)	---	---	12	8	---

آپ نے کیا مشاہدہ کیا؟ R میں اضافہ ہونے پر C گھٹتا ہے۔

(i) کیا $R_1 : R_2 = C_2 : C_1$?

(ii) کیا $R_3 : R_4 = C_4 : C_3$?

(iii) کیا R اور C ایک دوسرے کے ساتھ معکوس تناسب میں ہیں؟

(iv) اسی عمل کو 36 مربعوں کے ساتھ کیجیے

کلاس پراجکٹ:

☆ ایک ہفتہ کے دوران اپنی جماعت کے حاضر اور غیر حاضر بچوں کا ایک جدول بنائیے۔

☆ اس کام کیلئے اپنے ساتھیوں کے ساتھ نتائج پر گفتگو کیجئے اور مشاہدات کو اپنے ریکارڈ میں نوٹ کیجئے۔

ہفتے کے دن	حاضر طلبا کی تعداد (x)	غیر حاضر طلبا کی تعداد (y)	$x . y$
پیر			
منگل			
چہارشنبہ			
جمعرات			
جمعہ			
ہفتہ			

آیئے چند سوالات حل کریں۔

مثال 7: ایک ہاسٹل میں 100 طلبا کے لیے 40 دن کا راشن دستیاب ہے۔ بتاؤ کہ 4 دن کے بعد ہاسٹل میں مزید 12 طلبا شامل ہوجانے پر یہ راشن کتنے دن چلے گا۔

حل: طلبا کی تعداد بڑھ جانے پر راشن اسی تناسب سے کم دنوں تک چلے گا۔ لہٰذا طلبا کی تعداد اور راشن دونوں معکوس تناسب میں ہوں گے۔

	کتنے دن کا راشن موجود ہے	طلبا کی تعداد
	40	100
4 دن بعد	36 ↓	100 ↑
	x	120

اب سوال یہ پیدا ہوتا ہے کہ اگر 100 طلبا کے لیے 36 دنوں کا چاول رکھا گیا ہے تو یہی چاول 120 طلبا کے لیے کتنے دن چلے گا؟

SCERT TELANGANA

$$\frac{36}{x} = \frac{120}{100}$$

$$x = \frac{\overset{3}{\cancel{36}} \times 10\cancel{0}}{\cancel{12}\cancel{0}} = 30$$

چونکہ طلبا کی تعداد میں اضافہ ہو رہا ہے

$$100 \times x = 120 \Rightarrow x = \frac{120}{100}$$

دنوں کی تعداد اسی تناسب میں گھٹ جائے گی

یعنی $36 \div x$

$$= 36 \div \frac{120}{100}$$

$$\Rightarrow 36 \times \frac{120}{100} = 30$$ دن

مثال 8: 60 کیلومیٹر فی گھنٹے کی رفتار سے ایک کار 4 گھنٹوں میں اپنی منزل پر پہنچ جاتی ہے۔ اگر اس کی رفتار 80 کیلومیٹر فی گھنٹہ ہو تو یہ کتنے وقت میں منزل پر پہنچے گی۔

حل: رفتار بڑھنے پر، اسی تناسب سے درکار وقت میں کمی آئے گی۔

درکار وقت، گاڑی کی رفتار کے معکوس تناسب میں ہوگا، جبکہ فاصلہ مستقل ہو

پہلا طریقہ

رفتار	وقت
60 ↓	4 ↑
80	x

$$\frac{60}{80} = \frac{x}{4}$$

$$60 \times 4 = 80 \times x$$

$$x = \frac{60 \times 4}{80} = 3$$ گھنٹے

یا

دوسرا طریقہ

	رفتار	وقت	
$x \times$	60	4	$\div x$
	80	y	

$$60 \times x = 80 \qquad 4 \div x = y$$

$$x = \frac{80}{60}$$

$$4 \div \frac{80}{60} = y$$

$$y = \frac{4 \times 60}{80} = 3$$ گھنٹے

مثال 9: پانی کے ایک ٹینک کو ایک گھنٹہ 20 منٹ میں بھرنے کیلئے 6 پمپ درکار رہوں گے۔ اگر صرف 5 پمپ ہی استعمال کیئے جائیں تو کتنا وقت لگے گا؟

حل: فرض کیجئے کہ ٹینک کو بھرنے کیلئے x منٹ لگیں گے تب ذیل کا جدول حاصل ہوگا۔

پمپوں کی تعداد	6	5
وقت (منٹوں میں)	80	x

پمپس کی تعداد کم ہو تو ٹینک بھرنے کے لیے زیادہ وقت لگے گا۔

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20
SCERT TELANGANA

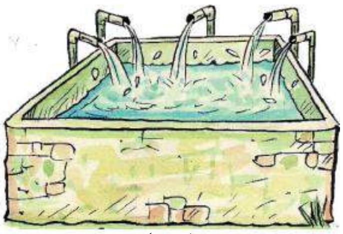
لہٰذا یہ صورت معکوس تناسب کی صورت ہے

اس لئے $[x_1 y_1 = x_2 y_2]$ $80 \times 6 = x \times 5$

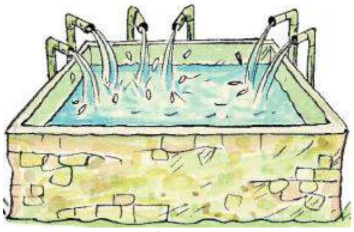
یا $\frac{80 \times 6}{5} = x$

یا $x = 96$ منٹ

لہٰذا 5 پمپ استعمال کرتے ہوئے ٹینک کو 96 منٹ یا ایک گھنٹہ 36 منٹ میں بھرا جا سکتا ہے۔



5 پائپ ایک ٹینک میں



6 پائپ ایک ٹینک میں

مشق - 10.3

1) احمد کے پاس اتنی رقم ہے کہ وہ 8 روپے فی کیلو آلو کے حساب سے 5 کیلو خرید سکے۔ اگر آلو کی قیمت 10 روپے فی کیلو ہو جائے تو اتنی ہی رقم میں کتنے کیلو آلو خریدے جا سکیں گے؟

2) ایک کیمپ میں 500 افراد کے لیے 70 دنوں کے اجناس کا ذخیرہ ہے۔ اگر کیمپ میں مزید 200 لوگ آ جانے پر یہ ذخیرہ کتنے افراد کے لیے کافی ہوگا؟

3) 36 افراد ایک کام 12 دنوں میں کر سکتے ہیں تو بتاؤ کہ 9 افراد اس کام کو کتنے دنوں میں کریں گے؟

4) ایک ٹانکی کو 5 پائپوں کے ذریعے 80 منٹ میں بھرا جا سکتا ہے۔ اُسی سائز کے 8 پائپوں سے اس ٹانکی کو بھرنے کے لئے کتنا وقت درکار ہوگا۔

5) ایک جہاز 16 میل فی گھنٹہ کی رفتار سے ایک مقررہ فاصلہ 10 گھنٹوں میں طئے کرتا ہے اسی فاصلہ کو اگر 8 گھنٹوں میں طے کرنا ہو تو رفتار میں کتنا اضافہ چاہئے؟

6) 5 پمپس کی مدد سے ایک ٹینک کو بھرنے کے لئے ڈیڑھ گھنٹے درکار ہیں۔ اسی ٹینک کو آدھے گھنٹے میں بھرنے کے لئے ایسے کتنے پمپس درکار ہوں گے؟

7) اگر 15 ورکرس ایک دیوار 48 گھنٹے میں تعمیر کرتے ہیں تو بتائیے کہ اسی دیوار کو 30 گھنٹوں میں تعمیر کرنے کے لیے کتنے ورکرس چاہئے؟

8) ایک اسکول میں ہر ایک گھنٹہ 45 منٹ کا رکھا گیا ہے۔ اگر اس اسکول میں کسی دن 6 گھنٹہ چلائے جائیں تو گھنٹہ کا وقت کتنا ہوگا؟

9) x کے بدلنے پر اگر z راست طور پر تبدیل ہوتا ہے اور y کے بدلنے پر معکوس طور پر بدلتا ہے تو x میں 12 فیصد کے اضافہ اور y میں 20 فیصد کی کمی سے z کی قیمت میں کتنا فیصد اضافہ ہوگا۔

SCERT TELANGANA

10) اگر $x+1$ افراد ایک کام کو $x+1$ دن میں کرتے ہیں تو بتاؤ کہ $x+2$ افراد اسی کام کو کتنے دنوں میں کریں گے؟

11) 24 میٹر محیط کے ایک مستطیل کی لمبائی میں ایک میٹر کے اضافہ سے اس کے عرض اور رقبہ میں بھی اسی تناسب میں تبدیلی آئے گی۔ ان معلومات کے ساتھ ذیل کے جدول کی قیمتوں کو استعمال کرتے ہوئے بتایئے کہ طول میں تبدیلی کے ساتھ عرض اور رقبہ کس طرح بدلتا ہے۔ آپ نے کیا دیکھا؟ اپنے مشاہدات نوٹ بک میں درج کیجئے۔

لمبائی (سم میں)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
چوڑائی (سم میں)	11	10	....	....	....	....	....	....	....
رقبہ (مربع سم میں)	11	20	....	....	....	....	....	....	....

10.3 مرکب تناسب

بعض دفعہ کسی قیمت میں تبدیلی 2 یا زائد دیگر مقداروں میں تبدیلی پر منحصر ہوتی ہے۔ ایسی صورت میں پہلی مقدار کی نسبت کا دوسری دو مقداروں کی مرکب نسبت سے تقابل کیا جاتا ہے۔

(i) ایک مقدار کوئی دو مقداروں کے ساتھ راست متناسب میں ہوسکتی ہے۔

(ii) کوئی ایک مقدار کوئی دو مقداروں کے ساتھ معکوس تناسب میں ہوسکتی ہے۔

(iii) کوئی ایک مقدار کوئی دوسری مقدار کے ساتھ راست تناسب میں اور باقی مقدار کے ساتھ معکوس تناسب میں پائی جاسکتی ہے۔

مثال 10: 35 طلبا کے لیے 24 دنوں کے میس چارجس 6300` ہیں۔ تو بتاؤ کہ 25 طلبا کے لیے 18 دنوں کے میس چارجس کیا ہوں گے۔

حل: ہمارے پاس تین مقداریں ہیں یعنی میس چارجس، طلبا کی تعداد اور دن

میس چارجس (روپیوں میں)	طلبا کی تعداد	دنوں کی تعداد
6300	35	24
? (x)	25	18
$6300 : x$	$35 : 25 = 7 : 5$	$24 : 18 = 4 : 3$

میس چارجس طلبا کی تعداد کے راست تناسب میں ہوں گے۔

طلبا کی تعداد $\propto$ میس چارجس

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20

یہی میس چارجس دنوں کی تعداد کے بھی راست تناسب میں ہوں گے۔

دنوں کی تعداد $\propto$ میس چارجس

$$6300 : x = 4 : 3$$

چونکہ میس چارجس دونوں دیگر قیمتوں یعنی طلبا کی تعداد اور دنوں کی تعداد پر منحصر ہوتے ہیں۔ لہٰذا ان دو متغیر مقداروں کی مرکب نسبت لینا ہوگا۔

میس چارجس راست تناسب میں ہیں۔ طلبا کی تعداد اور دنوں کی تعداد کی مرکب تناسب سے

$6300 : x =$ مرکب نسبت $7 : 5$ اور $4 : 3$

$$6300 : x = 7 \times 4 : 5 \times 3$$

$$6300 : x = 28 : 15$$

طرفین کا حاصل ضرب = وسطین کا حاصل ضرب

$$28 \times x = 15 \times 6300$$

$$x = \frac{15 \times 6300}{28}$$

$$x = ₹\ 3375.$$

لہٰذا مطلوبہ میس چارجس ` 3375

مثال 11: 24 ورکرس روزانہ 6 گھنٹے کام کرتے ہوئے ایک کام کو 14 دنوں میں تکمیل کر سکتے ہیں۔ اگر ہر ایک ورکر روزانہ 7 گھنٹے کام کرتا ہو تو بتاؤ کہ 8 دنوں میں اس کام کی تکمیل کے لیے کتنے ورکرس لگیں گے۔

حل: یہاں پر تین مقداریں پائی جاتی ہیں یعنی ورکرس ایک دن میں گھنٹوں کی تعداد اور دنوں کی تعداد

ورکرس کی تعداد	گھنٹوں کی تعداد فی دن	دنوں کی تعداد
24	6	14
? (x)	7	8
$24 : x$	$6 : 7$	$14 : 8 = 7 : 4$

ورکرس کی تعداد ایک دن میں گھنٹوں کی تعداد کی معکوس تناسب میں پائی جاتی ہے۔

$$\text{ورکرس کی تعداد} \propto \frac{1}{\text{گھنٹوں کی تعداد فی دن}}$$

SCERT TELANGANA

$24 : x = 7 : 6$ کی معکوس نسبت یعنی $6 : 7$ کے

$24 : x$ راست متناسب ہوگا $6 : 7$ کے

ایک بار پھر دنوں کی تعداد ورکرس کی تعداد کی معکوس تناسب میں پائی جاتی ہے

ورکرس کی تعداد ∝ $\frac{1}{\text{دنوں کی تعداد}}$

$24 : x = 4 : 7$ کی معکوس نسبت یعنی $7 : 4$ کے

چونکہ ورکرس کی تعداد دو متغیر مقداروں یعنی دنوں کی تعداد اور فی دن گھنٹوں کی تعداد پر منحصر ہوتی ہے لہٰذا

ورکرس کی تعداد ∝ دن میں گھنٹوں کی تعداد کی معکوس نسبت کی مرکب نسبت اور دنوں کی تعداد کی معکوس نسبت کے

$24 : x = 6 : 7$ کی مرکب نسبت اور $7 : 4$ کے

$24 : x = 7 \times 4 : 6 \times 7$

$24 : x = 4 : 6$

$24 : x = 2 : 3$

طرفین کا حاصل ضرب = وسطین کا حاصل ضرب

$2 \times x = 24 : 3$

$x = 36$

اس طرح مطلوبہ ورکرس کی تعداد =36

حل کا ایک اور طریقہ

$$\frac{24}{x} = \frac{7}{6} \times \frac{4}{7}$$

$$\frac{24}{x} = \frac{2}{3}$$

$$2 \times x = 24 \times 3$$

$$x = \frac{72}{2} = 36$$

مثال:12 12 پینٹرس 180 میٹر طویل وال پینٹنگ کو 3 دن میں تکمیل کرتے ہیں تو بتاؤ کہ 5 دنوں میں ایسی 200 میٹر طویل وال پینٹنگ کی تکمیل کے لیے کتنے پینٹرس درکار ہوں گے۔

حل: یہاں پینٹرس کی تعداد دیوار کی لمبائی کے راست تناسب میں اور دنوں کی تعداد کی معکوس تناسب میں پائی جاتی ہے۔

پینٹرس کی تعداد	دیوار کی لمبائی (میٹر)	دنوں کی تعداد
12	180	3
x	200	5
$12 : x$	$180 : 200 = 9 : 10$	$12 : x$

پینٹروں کی تعداد راست متناسب ہیں دیوار کے طول کے

$12 : x = 9 : 10$ ....(1) اور

ورکرس کی تعداد ∝ $\frac{1}{\text{دنوں کی تعداد}}$

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20

SCERT TELANGANA

$3:5 = 12:x$ کی معکوس نسبت کے

$12:x = 5:3 ------(2)$

مساوات(1)اور(2)سے

$9:10 = 12:x$ اور $5:3$ کی مرکب نسبت کے

$12:x = 9 \times 5 : 10 \times 3$

$12:x = 45:30 = 3:2$

طرفین کا حاصل ضرب = وسطین کا حاصل ضرب $12:x = 3:2$

$3 \times x = 12 \times 2$

$x = \frac{24}{3} = 8$

مطلوبہ پینٹروں کی تعداد = 8

$$\frac{12}{x} = \frac{9}{10} \times \frac{5}{3}$$

$$\frac{12}{x} = \frac{3}{2}$$

$$12 \times 2 = 3 \times x$$

$$x = \frac{\overset{4}{\cancel{12}} \times 2}{\cancel{3}} = 8$$

مشق - 10.4

1) 480روپے کے چاول 20دنوں تک 8افراد کے لیے کافی ہوں گے۔ بتاؤ کہ 15دن کے لیے 12افراد کو کتنے روپیوں کا چاول لگے گا؟

2) 10 افراد 75 کیلو میٹر طویل ایک سڑک 5دنوں میں بچھا سکتے ہیں۔ بتاؤ کہ 45 کیلو میٹر طویل سڑک 15افراد کتنے دنوں میں بچھائیں گے؟

3) 24افراد روزانہ 8 گھنٹے کام کرتے ہوئے کسی کام کو 15دن میں مکمل کرسکتے ہیں تو بتائیے کہ 20افراد روزانہ 9 گھنٹے کام کرتے ہوئے اسی کام کو کتنے دنوں میں کریں گے؟

4) 175افراد 3150میٹر طویل ایک کنال 36دنوں میں کھود سکتے ہیں۔ بتائیے کہ 3900میٹر لمبی کنال کی 24دنوں میں کھدائی کے لیے کتنے افراد درکار ہوں گے؟

5) ایک کتاب کے مسودہ کو 14ٹائپسٹ روزانہ 6 گھنٹے کام کرتے ہوئے 12دنوں میں ٹائپ کرسکتے ہیں۔ اگر روزانہ 7 گھنٹے کام کیا جائے تو 4ٹائپسٹ اسی کام کو کتنے دنوں میں کریں گے؟

SCERT TELANGANA

ہم نے کیا سیکھا

☆ اگر x اور y راست تناسب میں ہوں تو دو مقداریں اسی نسبت میں تبدیل ہوں گی۔

یعنی اگر $\frac{x}{y} = k$ یا $x = ky$ ہم اس کو $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ یا $x_1:y_2 = x_2:y_1$ کی شکل میں لکھ سکتے ہیں جہاں y_1 اور y_2، بالترتیب x_1 اور x_2 کی متعلقہ مقداریں ہیں۔

☆ لہٰذا کوئی دو مقداروں x اور y کو اس وقت معکوس تناسب میں کہا جائے گا جبکہ ان کے درمیان $xy=k$ کی نسبت سے تعلق پایا جاتا ہو۔ اگر y_1 اور y_2 بالترتیب x_1 اور x_2 کی متعلقہ مقداریں ہیں تو k کو تناسبی مستقل کہا جائے گا۔

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1} \text{ یا } x_1y_1 = x_2y_2 (= k)$$

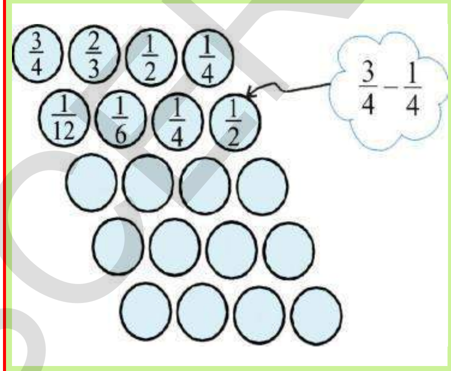
☆ اگر کوئی ایک مقدار دوسری مقدار کے گھٹنے (بڑھنے) سے بڑھتی (گھٹتی) ہے تو کہا جاتا ہے کہ وہ مقداریں اسی تناسب میں پائی جاتی ہیں۔ اسے ایسا بھی کہا جائے گا کہ ایک مقدار دوسری مقدار کی معکوس تناسب میں تبدیل ہوتی ہے۔ پہلی مقدار کی نسبت $(x_1 : x_2)$ مساوی ہوتی ہے دوسری مقدار کی معکوس نسبت $(y_1 : y_2)$ کے۔ چونکہ دونوں نسبتیں مساوی ہیں، ہم اس معکوس تبدیلی کو تناسب کہتے ہیں اور اسے معکوس تناسب کہا جاتا ہے۔

☆ بعض دفعہ کوئی ایک مقدار، کوئی ایک یا دو مقداروں پر اسی تناسب میں منحصر ہوتی ہے۔ ایسی صورت میں ہم پہلی مقدار کی نسبت کو دوسری دو مقداروں کی مرکب نسبت سے جوڑتے ہیں۔

کسروں سے عمل ڈیفّی

مشغلہ اعداد کا ایسا کھیل ہے جس میں اعداد کو ترتیب وار تفریق (difference) کرتے ہیں۔ یہ مشغلہ تفریق کی مہارت کے فروغ کے لیئے مشق فراہم کرتا ہے۔

ہدایت



مرحلہ - 1 : دائروں کی ترتیب بنایئے جیسا کہ شکل میں بتایا گیا ہے کوئی چار کسروں کو منتخب کیجئے۔ اور ان کو اوپر کی صف میں موجود دائروں میں لکھیے۔

مرحلہ - 2 : دوسری صف میں موجود پہلے تین دائروں میں ہر دائرے کے اوپر دائیں اور بائیں جانب پائے جانے والے دائروں میں موجود اعداد کا فرق لکھیے اور ہمیشہ اس بات کا خیال رکھیں کہ بڑے سے چھوٹا عدد تفریق کیا جائے۔ دوسری صف کے بچے ہوئے چوتھے دائرے میں اوپر کی صف کے پہلے اور آخری دائرے میں موجود اعداد کا فرق لکھیئے۔ اور یہاں پر بھی لحاظ رکھا جائے کہ بڑے عدد سے چھوٹا عدد تفریق کیا جائے۔

مرحلہ - 3 : مرحلہ - 2 کو دہرایئے اور نیچے کے دائروں کو پر کیجئے۔ جب آپ کو تمام صف میں صفر حاصل ہو تب عمل کو روک دیجئے۔

مرحلہ - 4 : مرحلہ 1، 2 اور مرحلہ 3 کو کئی مرتبہ دہرایئے اور ہر مرتبہ الگ الگ اعداد کا انتخاب کیجئے۔ پہلی صف میں ان اعداد $\frac{2}{7}, \frac{4}{5}, \frac{3}{2}, \frac{5}{6}$ کو لے کر عمل ڈیفّی کیجئے۔

SCERT TELANGANA

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20

11

الجبرائی عبارتیں

Algebraic Expressions

11.0 تعارف

ان عبارتوں پر غور کیجیے

$$\text{(i) } 3+8-9 \quad \text{(ii) } \frac{1}{3}xy \quad \text{(iii) } 0 \quad \text{(iv) } 3x+5 \quad \text{(v) } 4xy+7 \quad \text{(vi) } 15+0-19 \quad \text{(vi) } \frac{3x}{y}(y \neq 0)$$

(i), (iii) اور (vi) ہندسی عبارتیں ہیں جبکہ (ii), (iv) اور (v) الجبریٰ عبارتیں ہیں۔ کیا آپ دونوں طرح کی عبارتوں میں فرق محسوس کر سکتے ہیں؟

کیا آپ ایسی ہی کئی اور عبارتیں بنا سکتے ہیں؟ جیسا کہ آپ جانتے ہیں الجبراُ کی یہ عبارتیں متغیر مقداروں اور مستقل اعداد سے مل کے بنتی ہیں۔ عبارت $3x+5$ میں x متغیر کہلاتا ہے جبکہ 3,5 مستقل ہیں۔ $3x$ الجبراُ کا رکن اور 5 ہندسی رکن کہلاتا ہے۔ عبارت $4x+7$، متغیرات x اور y کے علاوہ اعداد 4 اور 7 سے مل کر بنی ہے۔

اب $3xy$ ایک ہی رکن ہے جبکہ $2xy+pq-3$ میں تین ارکان ہیں۔

لہٰذا آپ جانتے ہیں کہ ارکان متغیرات اور مستقل سے مل کر تشکیل پاتے ہیں۔

عبارت کی تشکیل کے لیے ارکان کو جمع یا تفریق کیا جاتا ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ عبارت $3x+5$ کی قیمت کوئی ایک عدد ہوسکتا ہے۔ اگر $x=2$ ہو تو عبارت کی قیمت $3(2)+5=6+5=11$

x کی مختلف قیمتوں کے لیے $3x+5$ کی قیمتیں بھی مختلف ہوں گی۔

یہ کیجیے

1) ذیل کی عبارتوں میں ارکان کی تعداد بتائیے

$5xy^2$, $5xy^3-9x$, $3xy+4y-8$, $9x^2+2x+pq+q$

2) x کی مختلف قیمتوں کے لیے $3x+5$ کی قیمت کیا ہوگی۔

آیئے الجبرا کی کچھ اور عبارتوں $5xy^2$, $5xy^3-9x$, $3xy+4y-8$ وغیرہ پر غور کریں۔ یہ واضح ہے کہ $5xy^2$ ایک رکنی عبارت ہے۔ $5xy^3-9x$ دو رکنی عبارت ہے اور $3xy+4y-8$ تین رکنی عبارت ہے۔

جیسا کہ آپ واقف ہیں ایک رکنی عبارت $5xy^2$ کا درجہ 3 ہے۔

اس کے علاوہ $5xy^3-9x$ میں دو رکنی عبارت کا درجہ 4 ہے۔

اسی طرح سہ رکنی عبارت $3xy+4y-8$ کا درجہ 2 ہے۔

کسی ایک رکنی میں تمام متغیرات کے قوت نماؤں کا حاصل جمع اس ایک رکنی کا درجہ ہوگا۔

ایک عبارت میں سب سے زیادہ درجہ رکھنے والے رکن کا درجہ اس عبارت کا درجہ کہلاتا ہے۔

SCERT TELANGANA

ایسی عبارتیں جن میں ایک، دو اور تین ارکان ہوتے ہیں بالترتیب ایک رُکنی، دو رُکنی اور سہ رُکنی کہلاتے ہیں۔ عام طور پر ایسی عبارت جس میں ایک یا زائد ارکان غیر صفری عددی سر کے ساتھ ہوتے ہیں کثیر رُکنی کہلاتی ہے۔

11.1: مشابہہ اور غیر مشابہہ ارکان

حسب ذیل ارکان کا مشاہدہ کیجیے۔

$2x, 3x^2, 4x, -5x, 7x^3$

ان میں $2x$، $4x$ اور $-5x$ ایک ہی متغیر رکھتے ہیں اور ان کا عددی سر بھی یکساں ہے۔ انہیں مشابہہ ارکان کہتے ہیں۔ مشابہہ ارکان میں عددی سروں کا یکساں ہونا ضروری نہیں۔ بتائیے کہ $8p$ اور $8q$ مشابہہ کیوں نہیں ہیں؟ $8p$ اور $8pq$ بھی مشابہہ کیوں نہیں ہیں؟ $8p$ اور $8p^2$ مشابہہ کیوں نہیں ہیں؟

یہ کیجیے

1) حسب ذیل سے مشابہہ ارکان تلاش کیجیے

$ax^2y, 2x, 5y^2, 9x^2, 6x, 7xy, 18y^2$

2) $5pq^2$ کے 3 مشابہہ رکن لکھیے۔

11.2: الجبرئی عبارتوں کا حاصل جمع اور حاصل تفریق لکھیے۔

مثال: $5x^2+3xy+2y^2$ اور $2y^2-xy+4x^2$ کو جمع کیجیے۔

حل: عبارتوں کو ایک دوسرے کے نیچے اس طرح لکھیے کہ مشابہہ ارکان ترتیب وار ہوں پھر انہیں جمع کیجیے۔

$$\begin{array}{rcrcr} 5x^2 & + & 3xy & + & 2y^2 \\ +\ 4x^2 & - & xy & + & 2y^2 \\ \hline 9x^2 & + & 2xy & + & 4y^2 \\ \hline \end{array}$$

سوچئیے، بحث کیجئیے اور لکھئیے

1) شیلا کہتی ہے کہ $2pq$ اور $4pq$ کا مجموعہ $8p^2q^2$ ہوگا۔ کیا وہ صحیح ہے؟ وضاحت کیجیے۔

2) رحمٰن نے $4x$ اور $7y$ کو جمع کرکے $11xy$ لکھا۔ کیا آپ رحمٰن سے متفق ہیں؟

مثال2: $2xy+9x^2$ کو $12xy+4x^2-3y^2$ سے تفریق کیجیے

حل: مشابہہ ارکان کو کالم واری طور پر لکھ کر تفریق کی جانے والی عبارت کو اس عبارت کے نیچے لکھیے جس میں سے اسے تفریق کرنا ہے۔

$$\begin{array}{rcrcr} 12xy & + & 4x^2 & - & 3y^2 \\ 2xy & + & 9x^2 & & \\ (-) & & (-) & & \\ \hline 10xy & - & 5x^2 & - & 3y^2 \\ \hline \end{array}$$

تفریق کی جانے والی عبارت کے ارکان کی علامت تبدیل کرکے جمع کا عمل کیجیے۔

SCERT TELANGANA

(یاد رکھیئے کہ کسی عدد کو تفریق کرنا ایسا ہی جیسے اس کے جمعی معکوس کو جمع کرنا۔ لہٰذا 3- کو تفریق کرنے کا مطلب یہ ہے کہ 3+ کو جمع کیا جائے۔
اسی طرح $9x^2$ کو تفریق کرنا ایسا ہی جیسا $-9x^2$ کو جمع کرنا اور $-3xy$ کو تفریق کرنے کا عمل $+3xy$ کو جمع کرنے جیسا ہوگا۔)

یہ کیجئے

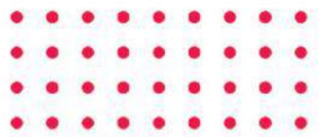
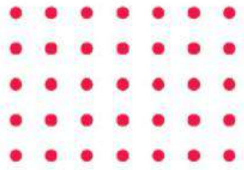
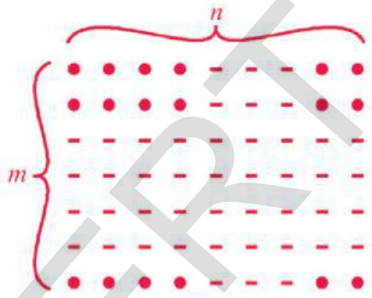
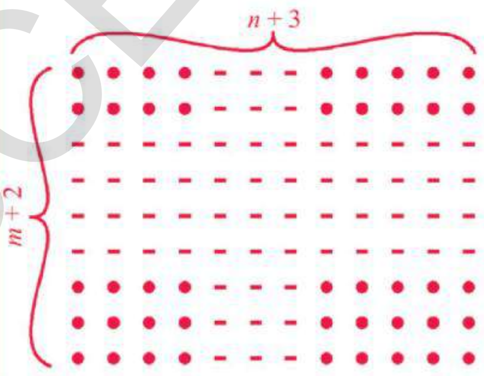
1) اگر $A = 2y^2+3x-x^2$, $B = 3x^2-y^2$ اور $C = 5x^2-3xy$ تب

(i) A + B (ii) A - B (iii) B + C (iv) B - C (v) A + B + C

(vi) A + B - C معلوم کیجئے۔

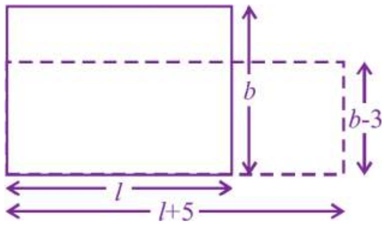
11.3: الجبرئی عبارتوں کا حاصل ضرب

تعارف: نیچے دیئے ہوئے نقاط کے نمونوں کو دیکھئے

نقاط کے نمونے	نقاط کی کل تعداد	
	4×9	
	5×7	
	$m \times n$	نقاط کی جملہ تعداد معلوم کرنے کے لیے صفوں کی تعداد کو کالموں کی تعداد سے ضرب دینا ہوگا۔
	$(m+2) \times (n+3)$	یہاں پر صفوں کی تعداد میں 2 کا اضافہ کیا گیا یعنی (m+2) اور کالموں کی تعداد میں 3 کا اضافہ یعنی (n+3)

SCERT TELANGANA

(ii) کیا آپ ایسی مثال پر غور کر سکتے ہیں جہاں کے الجبرائی کے دو عبارتوں کو ضرب دینا ہوگا۔



آمنہ کہتی ہے کہ ہم ایک مستطیل کے رقبے پر غور کریں گے۔ مستطیل کا رقبہ $l \times b$ ہوگا جہاں l طول اور b عرض کہلاتا ہے۔ اگر کسی مستطیل کے طول میں 5 اکائیوں کا اضافہ یعنی (l + 5) اکائیاں اور عرض میں 3 اکائیوں کی کمی یعنی (b - 3) اکائیاں کردی جائے تو اس مستطیل کا رقبہ $(l+5)\times(b-3)$ مربع اکائیاں ہوگا۔

کسی مستطیل کا رقبہ معلوم کرنے کے لیے ہمیں الجبریٔ عبارت $l \times b$ کی قیمت معلوم کرنی ہوگی۔ ویسے ہی جیسے $(l+5)\times(b-3)$

(iii) کیا آپ کسی مکعب نما کے حجم کا اندازہ کر سکتے ہیں؟ (کسی مستطیلی ڈبے کا حجم اس کے طول اور عرض اور بلندی کا حاصل ضرب ہوتا ہے۔

(iv) سریتا کہتی ہے کہ جب ہم بعض چیزیں خریدتے ہیں تو ہمیں ضرب کا عمل کرنا پڑتا ہے۔ مثلاً اگر ایک درجن موز کی قیمت p ` ہو اور پکنک کے موقع پر اسکول کے طلبا کے لیے z درجن موز چاہئیں تو ہمیں $p \times z$ ` ادا کرنا ہوگا۔

فرض کیجئے کہ ایک درجن موز کی قیمت میں 2 ` کی کمی اور مطلوبہ موز میں 4 درجن کم کردیئے جائیں تو موز کی قیمت فی درجن (p - 2) ہوگی۔

موز کی تعداد = z - 4 درجن ہے لہٰذا ہمیں $(p-2)\times(z-4)$ ` ادا کرنے ہوں گے۔

کوشش کیجیے:

کیا آپ ایسی اور دو مثالیں پیش کر سکتے ہیں جہاں کہ ہم کو الجبریٔ عبارتوں کو ضرب دینا پڑتا ہے۔

(اشارہ: رفتار اور وقت پر غور کیجیے)

☆ ادا کیا جانے والا سود اصل رقم اور شرح سود وغیرہ پر بھی غور کیا جاسکتا ہے۔)

مندرجہ بالا تمام مثالوں میں ہمیں دو یا زائد مقداروں کو ضرب دینا ہوگا۔ اگر مقداریں الجبرا کی عبارتوں کی شکل میں دی جائیں تو ان کا حاصل ضرب بھی محسوب کرنا پڑے گا جس کا مطلب ہے کہ ہمیں یہ معلوم ہو کہ ان کا حاصل ضرب کیسے محسوب کیا جاتا ہے۔ آیئے اس عمل کو ہم صحیح طریقہ سے انجام دیں۔ ابتدا میں ہم دو ایک رکنیوں کا حاصل ضرب معلوم کریں گے۔

SCERT TELANGANA

11.4: ایک رکنی کا ایک رکنی سے ضرب

11.4.1 دو اک رکنیوں کا ضرب

ہم جانتے ہیں کہ

$$4 \times x = x + x + x + x = 4x$$

$$4 \times (3x) = 3x + 3x + 3x + 3x = 12x$$

اب حسب ذیل حاصل ضرب پر غور کیجیے

(i) $x \times 3y = x \times 3 \times y = 3 \times x \times y = 3xy$

(ii) $5x \times 3y = 5 \times x \times 3 \times y = 5 \times 3 \times x \times y = 15xy$

(iii) $5x \times (-3y) = 5 \times x \times (-3) \times y$

$= 5 \times (-3) \times x \times y = -15xy$

(iv) $5x \times 4x^2 = (5 \times 4) \times (x \times x^2)$

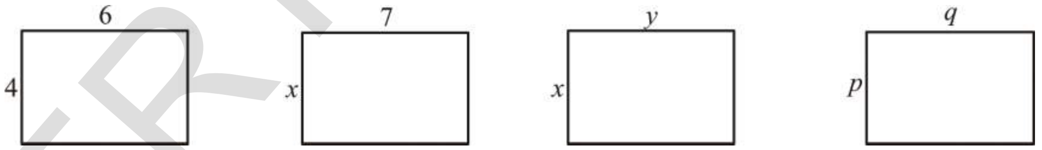
$= 20 \times x^3 = 20x^3$

(v) $5x \times (-4xyz) = (5 \times -4) \times (x \times xyz)$

$= -20 \times (x \times x \times yz) = -20x^2yz$

الجبرا کے ارکان کا حاصل ضرب معلوم کرنے کے لیے ایک ہی اساس رکھنے والے ارکان کے قوت نما جمع کیئے جاتے ہیں یہاں ہم کو قوت نما کے اصول استعمال کرنا ہوتا ہے۔

حسب ذیل کا مشاہدہ کیجیے اور خانہ پری کیجیے۔



رقبہ = 4 x 6 =24 مربع اکائیاں   رقبہ x x 7 = ...   رقبہ x x y = ...   رقبہ ..... x ..... = ...

حسب ذیل حاصل ضرب پر غور کیجیے

1. $7x \times 5y = (7 \times 5) \times (x \times y) = 35xy$
2. $3x \times (-2y) = \{3 \times (-2)\} \times (x \times y) = -6xy$
3. $(-4x) \times (-6y) = (-4) \times (-6) \times (x \times y) = 24xy$
4. $3x \times 5x^2 = (3 \times 5) \times (x \times x^2) = 15x^3$
5. $(-2x^2) \times (-4x^2) = (-2) \times (-4) \times x^2 \times x^2 = 8x^4$

SCERT TELANGANA

نوٹ:
(i) دو مثبت حقیقی اعداد کا حاصل ضرب مثبت حقیقی عدد ہوتا ہے۔
(ii) دو منفی حقیقی اعداد کا حاصل ضرب مثبت حقیقی عدد ہوتا ہے۔
(iii) ایک مثبت اور ایک منفی حقیقی عدد ضرب دیئے جائیں تو حاصل ضرب منفی حقیقی عدد ہوتا ہے۔

یہ کیجئے

1. جدول مکمل کیجئے

پہلی اک رکنی	دوسری اک رکنی	دو اک رکنیوں کا حاصل ضرب
$2x$	$-3y$	$2x \times (-3y) = -6xy$
$-4y^2$	$-2y$	....
$3abc$	$5bcd$	....
mn	$-4m$	....
$-3mq$	$-3nq$	....

2. جانچ کیجئے کہ جب کوئی دو ایک رکنیوں کو ضرب دیا جاتا ہے تو کیا ایک رکنی ہی حاصل ہوتا ہے؟
3. دو ایک رکنیوں کا حاصل ضرب ایک رکنی ہوتا ہے؟ جانچ کریں؟

11.4.2: تین یا زائد ایک رکنیوں کو ضرب دینے کا طریقہ

حسب ذیل مثالوں پر غور کیجئے۔

مثال 3: $5x$ ‘$6y$ اور $7z$ کا حاصل ضرب معلوم کیجئے۔

دوسرا طریقہ

$$5x \times 6y \times 7z = 5 \times x \times 6 \times y \times 7 \times z$$
$$= 5 \times 6 \times 7 \times x \times y \times z$$
$$= 210\,xyz$$

پہلا طریقہ

$$5x \times 6y \times 7z = (5x \times 6y) \times 7z$$
$$= 30xy \times 7z$$
$$= 210xy$$

مثال 4: $3x^2y \times 4xy^2 \times 7x^3y^3$ معلوم کیجئے

حل:
$$= 3 \times 4 \times 7 \times (x^2y) \times (xy^2) \times (x^3y^3)$$
$$= 84 \times x^2 \times y \times x \times y^2 \times x^3 \times y^3$$
$$= 84 \times (x^2 \times x \times x^3) \times (y \times y^2 \times y^3)$$
$$= 84 \times x^6 \times y^6 = 84x^6y^6.$$

مثال 4: $3x, -4xy, 2x^2, 3y^2, 5xy^2$ کا حاصل ضرب معلوم کیجئے

حل:
$$3x \times (-4xy) \times 2x^2 \times 3y^2 \times 5x^3y^2$$
$$= [3 \times (-4) \times 2 \times 3 \times 5] \times (x \times x \times x^2 \times x^3) \times (y \times y^2 \times y^2)$$
$$= -360x^7y^5.$$

SCERT TELANGANA

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20

مشق - 11.1

1. حسب ذیل جوڑیوں کا حاصل ضرب معلوم کیجئے۔

(i) $6, 7k$ (ii) $-3l, -2m$ (iii) $-5t^2, -3t^2$ (iv) $6n, 3m$ (v) $-5p^2, -2p$

2. حسب ذیل حاصل ضرب کے جدول کو مکمل کیجئے۔

X	$5x$	$-2y^2$	$3x^2$	$6xy$	$3y^2$	$-3xy^2$	$4xy^2$	x^2y^2
$3x$	$15x^2$	....	....	....	....	....	....	....
$4y$	....	....	....	....	....	....	....	....
$-2x^2$	$-10x^3$	$4x^2y^2$	....	....	....	....	....	....
$6xy$	....	....	....	....	....	....	....	....
$2y^2$	....	....	....	....	....	....	....	....
$3x^2y$	....	....	....	....	....	....	....	....
$2xy^2$	....	....	....	....	....	....	....	....
$5x^2y^2$	....	....	....	....	....	....	....	....

3. دیئے گئے طول، عرض اور بلندی کی مدد سے مستطیل نما بکسوں کا حجم معلوم کر کے حسب ذیل جدول میں درج کیجئے۔

سلسلہ نشان	طول	عرض	بلندی	حجم $(v) = l \times b \times h$
(i)	$3x$	$4x^2$	5	$v = 3x \times 4x^2 \times 5 = 60x^3$
(ii)	$3a^2$	4	$5c$	$v =$ ....
(iii)	$3m$	$4n$	$2m^2$	$v =$ ....
(iv)	$6kl$	$3l^2$	$2k^2$	$v =$ ....
(v)	$3pr$	$2qr$	$4pq$	$v =$ ....

4) حسب ذیل ایک رکنیوں کے حاصل ضرب معلوم کیجئے۔

(i) xy, x^2y, xy, x (ii) a, b, ab, a^3b, ab^3 (iii) kl, lm, km, klm

(iv) pq, pqr, r (v) $-3a, 4ab, -6c, d$

5) اگر $A = xy$، $B = yz$ اور $C = zx$ تب $ABC =$

6) اگر $T = 5x$, $P = 4x^2$ اور $R = 5y$ تب $\frac{PTR}{100} =$ ....

7) چند ایک رکنیوں کو اپنے طور پر لکھ کر ان کے حاصل ضرب معلوم کیجئے

SCERT TELANGANA

11.5: دو یا سہ رکنی کو ایک رکنی سے ضرب دینے کا عمل

11.5.1 دو رکنی کو ایک رکنی سے ضرب دینے کا عمل

ایک رکنی 5x کو دو رکنی 6y+3 سے ضرب دینے پر

ضرب کے عمل میں یہ مرحلہ واری حسابات شامل ہوں گے:

مرحلہ	ہدایات	طریقہ کار
.1	ایک رکنی اور دو رکنی کا حاصل ضرب، ضرب کی علامت کو استعمال کرتے ہوئے لکھئے	$5x \times (6y+3)$
.2	**تقلیبی قانون کو استعمال کریں:** دو رکنی کے پہلے رکن کو ایک رکنی سے ضرب دیکر دو رکنی کے دوسرے رکن کو ایک رکنی سے ضرب دیجئے اور حاصل ضربوں کو جمع کیجئے۔	$(5x \times 6y)+(5x \times 3)$
.3	مختصر کیجئے	$30xy+15x$

اس طرح سے 5x اور 6y+3 کا حاصل ضرب

$$5x(6y+3) = 5x \times (6y+3)$$
$$= (5x \times 6y) + (5x \times 3)$$
$$= 30xy + 15x$$

مثال 6: $(-4xy)\,(2x-y)$ کا حاصل ضرب معلوم کیجئے

حل:

$$(-4xy)(2x-y) = (-4xy) \times (2x-y)$$
$$= (-4xy) \times 2x + (-4xy) \times (-y)$$
$$= -8x^2y + 4xy^2$$

مثال 7: $(3m - 2n^2)\,(-7mn)$ کا حاصل ضرب معلوم کیجئے

حل:

$$(3m - 2n^2)(-7mn) = (3m - 2n^2) \times (-7mn)$$
$$= (-7mn) \times (3m - 2n^2) \quad \text{تقلیبی خاصیت}$$
$$= ((-7mn) \times 3m) - ((-7mn) \times 2n^2)$$
$$= -21m^2n + 14mn^3$$

یہ کیجئے

.1 حاصل ضرب معلوم کیجئے۔

(i) $3x(4ax+8by)$ (ii) $4a2b(a-3b)$ (iii) $(p + 3q^2)\,pq$

(iv) $(m^3 + n^3)\,5mn^2$

.2 کسی ایک رکنی اور دو رکنی کے حاصل ضرب میں زیادہ سے زیادہ ارکان کی تعداد کیا ہوگی۔

SCERT TELANGANA

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20

11.5.2 سہ رکنی سے ایک رکنی کا ضرب

ایک رکنی اور سہ رکنی کے حاصل ضرب میں کتنے ارکان ہوں گے۔

ایک رکنی $2x$ اور سہ رکنی $3x + 4y - 6$ کے حاصل ضرب پر غور کیجیے۔

ان کا حاصل ضرب $= 2x \times (3x + 4y - 6)$

(تقلیبی قانون) $= (2x \times 3x) + (2x \times 4y) + (2x \times (-6))$

$= 6x^2 + 8xy - 12x$

مشق - 11.2

1. جدول مکمل کیجیے

سلسلہ نشان	پہلی عبارت	دوسری عبارت	حاصل ضرب
1	$5q$	$p+q-2r$	$5q(p+q-2r)=5pq+5q^2-10qr$
2	$kl+lm+mn$	$3k$	....
3	ab^2	$a+b^2+c^3$	....
4	$x-2y+3z$	xyz	....
5	$a^2bc+b^2cd-abd^2$	$a^2b^2c^2$	....

2. مختصر کیجیے $4y(3y+4)$

3. مختصر کیجیے $x(2x^2-7x+3)$ اور $x=1$ (i) $x=0$ (ii) اور قدر معلوم کیجیے۔

4. حاصل ضرب کو جمع کیجیے $a(a - b), b(b - c), c(c - a)$

5. حاصل ضرب کو جمع کیجیے $x(x + y - r), y(x - y + r), z(x - y - z)$

6. $2x(5x - y)$ کے حاصل ضرب کو $3x(x + 2y)$ کے حاصل ضرب سے تفریق کیجیے۔

7. $3k(5k - l + 3m)$ کو $6k(2k + 3l - 2m)$ تفریق کیجیے۔

8. $a^2(a - b + c) + b^2(a + b - c) - c^2(a - b - c)$ کو مختصر کیجیے۔

11.6: کسی دو رکنی کو دو رکنی یا سہ رکنی سے ضرب

11.6.1: کسی دو رکنی کو دوسرے دو رکنی سے ضرب دینے کا طریقہ

دی گئیں دو دو رکنیوں پر غور کیجیے۔ $3x - 2y$ اور $5x + 6y$

آیئے اب ہم ان دونوں دو رکنیوں کا حاصل ضرب معلوم کریں گے۔

SCERT TELANGANA

ضرب دینے کا طریقہ کار

اقدام	ہدایات	طریقہ کار
1.	دؤدورکنیوں کوحاصل ضرب کی شکل میں لکھئے	$(\underline{5x}+\underline{6y})(3x-2y)$
2.	تقلیبی قانون استعمال کیجئے : پہلے دو رکنی کے پہلے رکن کودوسرے دو رکنی سے ضرب دیجئے، پہلے دو رکنی کے دوسرے رکن کو دوسرے دورکنی سے ضرب دے کر حاصل ضربوں کوجمع کردیجئے۔	$\underline{5x}(3x-2y)+\underline{6y}(3x-2y)$ $=(5x\times 3x)-(5x\times 2y)+(6y\times 3x)-(6y\times 2y)$
3.	مختصر کیجئے۔	$(5x\times 3x)-(5x\times 2y)+(6y\times 3x)-(6y\times 2y)$ $=15x^2-10xy+18xy-12y^2$
4.	ایک جیسے ارکان کوجمع کیجئے۔	$15x^2+8xy-12y^2$

اس طرح $5x+6y$ اور $3x-2y$ کا حاصل ضرب

$$= (5x+6y)(3x-2y)$$

$$= 5x(3x-2y)+6y(3x-2y)$$ تقسیمی خاصیت کے استعمال پر

$$= (5x\times 3x)-(5x\times 2y)+(6y\times 3x)-(6y\times 2y)$$

$$= 15x^2-10xy+18xy-12y^2$$

$$= 15x^2+8xy-12y^2$$

1. حاصل ضرب محسوب کیجئے

(i) $(a-b)(2a+4b)$ (ii) $(3x+2y)(3y-4x)$

(iii) $(2m-l)(2l-m)$ (iv) $(k+3m)(3m-k)$

2. دؤدورکنیوں کے حاصل ضرب میں ارکان کی تعداد کیا ہوگی۔

11.6.2: ایک رکنی کو سہ رکنی سے ضرب دینے کا عمل

دورکنی $2x+3y$ اور سہ رکنی $3x+4y-5z$ پر غور کیجئے۔

اب ان دونوں کو ضرب کرتے ہیں۔ $2x+3y$ اور $3x+4y-5z$

ضرب دینے کا طریقہ کار

اقدام	ہدایات	طریقہ کار
1.	ضرب کی علامت استعمال کرتے ہوئے دورکنیوں اور سہ رکنیوں کو حاصل ضرب کے طور پر لکھئے	$(2x+3y)(3x+4y-5z)$
2.	تقلیبی قانون کا استعمال: دورکنی کے پہلے رکن کو سہ رکنی سے ضرب دیجئے اور دورکنی کے دوسرے رکن کو سہ رکنی سے ضرب دیجئے ور پھر دونوں حاصل ضربوں کو جمع کیجئے۔	$2x(3x+4y-5z)+3y(3x+4y-5z)$
3.	مختصر کیجئے	$(2x\times 3x)+(2x\times 4y)-(2x\times 5z)+$ $(3y\times 3x)+(3y\times 4y)-(3y\times 5z)$
4.	ایک جیسے ارکان کو جمع کیجئے	$6x^2+8xy-10xz+9xy+12y^2-15yz$ $6x^2+17xy-10xz+12y^2-15yz$

لہٰذا $(2x+3y)$ اور $(3x+4y-5z)$ کا حاصل ضرب

$= (2x+3y)(3x+4y-5z)$

$= 2x(3x+4y-5z)+3y(3x+4y-5z)$ تقلیبی خاصیت کے استعمال پر

$= (2x\times 3x)+(2x\times 4y)-(2x\times 5z)+(3y\times 3x)+(3y\times 4y)-(3y\times 5z)$

$= 6x^2+8xy-10xz+9xy+12y^2-15yz$

$= 6x^2+17xy-10xz+12y^2-15yz$

دورکنی اور سہ رکنی کے حاصل ضربوں میں زیادہ سے زیادہ کتنے ارکان حاصل ہوتے ہیں۔

مشق - 11.3

1. ایک رکنی کو ضرب دیجئے

(i) $2a-9$ and $3a+4$ (ii) $x-2y$ and $2x-y$

(iii) $kl+lm$ and $k-l$ (iv) m^2-n^2 and $m+n$

2. حاصل ضرب معلوم کیجئے

(i) $(x+y)(2x-5y+3xy)$ (ii) $(a-2b+3c)(ab^2-a^2b)$

(iii) $(mn-kl+km)(kl-lm)$ (iv) $(p^3+q^3)(p-5q+6r)$

3. مختصر کیجئے

(i) $(x-2y)(y-3x)+(x+y)(x-3y)-(y-3x)(4x-5y)$

SCERT TELANGANA

(ii) $(m+n)(m^2-mn+n^2)$

(iii) $(a-2b+5c)(a-b)-(a-b-c)(2a+3c)+(6a+b)(2c-3a-5b)$

(iv) $(pq-qr+pr)(pq+qr)-(pr+pq)(p+q-r)$

.4 اگر a,b,c مثبت حقیقی اعداد اس طرح ہیں کہ $\frac{-a+b+c}{a}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{a+b-c}{c}$ تب $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$ کی قدر معلوم کیجئے

11.7: متماثلہ کیا ہے؟

مساوات $a(a-2)=a^2-2a$ پر غور کیجئے۔

a کی کسی بھی قیمت کے لیے مساوات کے دونوں طرف کی قیمتیں محسوب کیجئے

اگر $a=5$

$LHS = 5(5-2) = 5\times 3 = 15$

$RHS = 5^2-2(5) = 25-10 = 15$

لہٰذا دی گئی مساوات $LHS = RHS$ $a=-2$ کے لیے بھی صحیح ہے۔

$LHS = (-2)(-2-2) = (-2)\times(-4) = 8$

$RHS = (-2)^2-2(-2) = 4+4 = 8$

ہم کہہ سکتے ہیں کہ یہ مساوات a کی کسی بھی قیمت کے لیے صحیح ہے۔لہٰذا اس مساوات کو متماثلہ کہا جاتا ہے۔

مساوات $a(a+1)=6$ پر غور کیجئے۔

یہ مساوات $a=2$ اور $a=-3$ کے لیے تو صحیح ہے لیکن دیگر قیمتوں کے لیے صحیح نہیں ہوگی۔اس طرح اس مساوات $a(a+1)=6$ کو متماثلہ نہیں کہا جائے گا۔

کسی مساوات کو اس وقت متماثلہ کہیں گے جبکہ اس کی قیمت اس کے متغیرات کی تمام قیمتوں کے لیے درست ہو۔

کوئی مساوات کسی متغیر کی بعض قیمتوں کے لیے صحیح ہوسکتی ہے جبکہ ایک متماثلہ متغیر یات تمام قیمتوں کے لیے درست ہونی چاہئے۔

لہٰذا ایک متماثلہ کو آفاقی اعتبار سے صحیح مساوات کہا جاسکتا ہے۔

ہم متماثلہ کی علامت کے طور پر علامت $\equiv$ استعمال کرتے ہیں (اس علامت کو ہر طرح سے مساوی ہے پڑھا جاتا ہے)

11.8: بعض اہم متماثلات

اکثر و بیشتر ہم کو متماثلات استعمال کرنا پڑتا ہے۔ یہ متماثلات حسابی ''مسئلے'' حل کرنے میں بہت مددگار ہوتی ہیں۔ جب انہیں ضرب میں استعمال کیا جاتا ہے تو خصوصی حاصل ضرب کہا جاتا ہے۔انہیں میں سے اب ہم تین اہم متماثلات کا مطالعہ کریں گے جو کہ دو رکنیوں کا حاصل ضرب ہیں۔

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20

SCERT TELANGANA

غور کیجئے $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

اب

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$$
$$= a(a+b) + b(a+b)$$

چونکہ $ab=ba$

$$= a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + ab + ab + b^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad \text{(I)}$$

اب $a = 2$، $b = 3$ قیمتیں درج کرنے پر $(a+b)^2 = (2+3)^2 = 5^2 = 25 = \text{(LHS)}$

$a^2+2ab+b^2 = 22 + 2\,(2)\,(3) + 32 = 4 + 12 + 9 = 25 = \text{(RHS)}$

مندرجہ بالا میں LHS اور RHS کا مشاہدہ کیجئے۔ LHS اور RHS کی عبارتوں کی قیمت مساوی ہے۔

متماثلہ نمبر ایک کی تصدیق کسی مثبت حقیقی عدد، منفی حقیقی عدد کے علاوہ کسی کسر سے کیجئے۔

یہ کیجئے

حسب ذیل متماثلات کی جانچ کیجئے

(i) $(a-b)^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2$

(ii) $(a+b)(a-b) \equiv a^2 - b^2$

(iii) $(a+b+c)^2 \equiv a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

ایک اور متماثلہ پر غور کریں۔ $(x+a)(x+b) \equiv x^2 + (a+b)x + ab$,

$$(x+a)(x+b) = x(x+b) + a(x+b)$$
$$= x^2 + bx + ax + ab$$
$$= x^2 + (a+b)x + ab$$

یہ کیجیے

اب $x = 2$، $a = 1$ اور $b = 3$ لیجئے اور پھر اس متماثلہ کی جانچ کیجئے۔

☆ آپ نے کیا دیکھا؟ کیا LHS = RHS؟

☆ اوپر کی متماثلہ میں جانچ کے لیے x، a اور b کی مختلف قیمتیں لیجئے۔

☆ کیا a اور b کی تمام قیمتوں کے لیے LHS = RHS؟

SCERT TELANGANA

یہ کیجئے

غور کیجئے $(x + p)(x + q) = x^2 + (p + q)x + pq$

(i) p کی جگہ پر q لکھئے اور مشاہدہ کیجئے۔

(ii) q کی جگہ پر p لکھئے اور مشاہدہ کیجئے۔

11.9: متماثلات کا اطلاق

مثال 8: $(3x + 4y)^2$ کی قدر معلوم کیجئے۔

حل: $(3x + 4y)^2$ دو دو رکنیوں کا حاصل ضرب ہے جہاں $(3x + 4y)$ اور $(3x + 4y)$ دونوں ارکان مساوی ہیں۔ کسی دو رکنی کو دو رکنی سے ضرب دے کر اسے پھیلایا جاسکتا ہے۔ اس حاصل ضرب میں $a = 3x$ اور $b = 4y$ ہے۔ $3x$ اور $4y$ کی جگہ بالترتیب a اور b درج کرنے پر ہم حاصل ضرب کا نتیجہ حاصل کرسکتے ہیں۔

جہاں $a = 3x$ اور $b = 4y$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

اس طرح $(3x + 4y)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(4y) + (4y)^2$

$= 9x^2 + 24xy + 16y^2$

مثال 9: 204^2 کی قدر معلوم کیجئے۔

جہاں $a = 200$ اور $b = 4$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$204^2 = (200 + 4)^2$

$= (200)^2 + 2(200)(4) + 4^2$

$= 40000 + 1600 + 16$

$= 41616$

یہ کیجئے قدر معلوم کیجئے

(i) $(5m + 7n)^2$ (ii) $(6kl + 7mn)^2$ (iii) $(5a^2 + 6b^2)^2$ (iv) 302^2

(v) 807^2 (vi) 704^2

(vii) متماثل کی جانچ کیجئے: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ جہاں $a = 3m$ اور $b = 5n$

مثال 10: $(3m - 5n)^2$ کی قدر معلوم کیجئے۔

جہاں $a = 3m$ اور $b = 5n$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(3m - 5n)^2 = (3m)^2 - 2(3m)(5n) + (5n)^2$

$= 9m^2 - 30mn + 25n^2$

SCERT TELANGANA

مثال 11: 196^2 کی قدر معلوم کیجیے۔

جہاں $a = 200$ اور $b = 4$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$196^2 = (200 - 4)^2$$
$$= 200^2 - 2(200)(4) + 4^2$$
$$= 40000 - 1600 + 16$$
$$= 38416$$

یہ کیجیے

قدر معلوم کیجیے

(i) $(9m - 2n)^2$ (ii) $(6pq - 7rs)^2$ (iii) $(5x^2 - 6y^2)^2$

(iv) 292^2 (v) 897^2 (vi) 794^2

مثال 12: $(4x + 5y)(4x - 5y)$ کی قدر معلوم کیجیے۔

جہاں $a = 4x$ اور $b = 5y$

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

$$(4x + 5y)(4x - 5y) = (4x)^2 - (5y)^2$$
$$= 16x^2 - 25y^2$$

مثال 13: 407×393 کی قدر معلوم کیجیے۔

جہاں $a = 400$ اور $b = 7$

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

$$407 \times 393 = (400 + 7)(400 - 7)$$
$$= 400^2 - 7^2$$
$$= 160000 - 49$$
$$= 159951$$

مثال 14: $987^2 - 13^2$ کی قدر معلوم کیجیے۔

جہاں $a = 987$ اور $b = 13$

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$$987^2 - 13^2 = (987 + 13)(987 - 13)$$
$$= 1000 \times 974 = 974000$$

یہ کیجیے

قدر معلوم کیجیے

(i) $(6m + 7n)(6m - 7n)$ (ii) $(5a + 10b)(5a - 10b)$

(iii) $(3x^2 + 4y^2)(3x^2 - 4y^2)$ (iv) 106×94 (v) 592×608 (vi) $92^2 - 8^2$

(vii) $984^2 - 16^2$

مثال 15: 300×308 کی قدر معلوم کیجیے۔

جہاں $x = 300$، $a = 2$ اور $b = 8$

$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

$$302 \times 308 = (300 + 2)(300 + 8)$$
$$= 300^2 + (2 + 8)(300) + (2)(8)$$
$$= 90000 + (10 \times 300) + 16$$
$$= 90000 + 3000 + 16 = 93016$$

SCERT TELANGANA

مثال16: 93 x 104 کی قدر معلوم کیجئے۔

جہاں$x = 100$، $a = -7$ اور $b = 4$
$(x + a)(x + b) = x^2+(a + b)x + ab$

$$93 \times 104 = (100 + (-7))(100 + 4)$$
$$93 \times 104 = (100 - 7)(100 + 4)$$
$$= 100^2 + (-7 + 4)(100) + (-7)(4)$$
$$= 10000 + (-3)(100) + (-28)$$
$$= 10000 - 300 - 28$$
$$= 10000 - 328 = 9672$$

آپ نے کیا؟ متماثلات استعمال کرتے ہوئے حاصل ضرب محسوب کرنا راست طور پر ضرب دے کر ایسا کرنے سے زیادہ آسان ہے۔

مشق - 11.4

1. ایک موزوں متماثلہ منتخب کرتے ہوئے حسب ذیل حاصل ضرب معلوم کیجئے۔

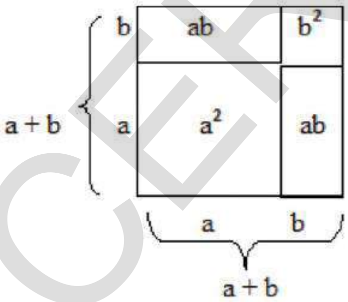
(i) $(3k + 4l)(3k + 4l)$ (ii) $(ax^2 + by^2)(ax^2 + by^2)$
(iii) $(7d - 9e)(7d - 9e)$ (iv) $(m^2 - n^2)(m^2 + n^2)$
(v) $(3t + 9s)(3t - 9s)$ (vi) $(kl - mn)(kl + mn)$
(vii) $(6x + 5)(6x + 6)$ (viii) $(2b - a)(2b + c)$

2. موزوں متماثلات استعمال کرتے ہوئے حسب ذیل کی قیمت محسوب کیجئے۔

(i) 304^2 (ii) 509^2 (iii) 992^2 (iv) 799^2
(v) 304×296 (vi) 83×77 (vii) 109×108 (viii) 204×206

11.10 متماثلات کی جامیٹری کے ذریعہ جانچ

11.10.1: متماثلہ $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ کی جامیٹری کے طریقہ سے تصدیق کا طریقہ



حسب ذیل مربع پر غور کیجئے۔

ایک ایسے مربع کا مشاہدہ کیجئے جس کا ضلع $(a + b)$ ہے۔

کیا رقبہ = ضلع کا مربع $= (a + b)^2$

دیئے گئے خاکہ کے مطابق مربع کو چار حصوں میں تقسیم کرو۔

بالترتیب a اور b ضلعوں کے ساتھ یہ مربع دو مربعوں اور a اور b کے اضلاع کے دو مستطیلوں پر مشتمل ہے۔ یہ واضح ہے کہ دیئے ہوئے مربع کا رقبہ تقسیم کردہ چار حصوں کے رقبوں کے حاصل جمع کے مساوی ہے۔

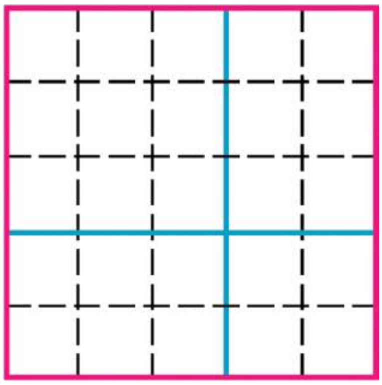
یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20
SCERT TELANGANA

دیئے ہوئے مربع کا رقبہ = ضلع a کے مربع کا رقبہ + ضلع b کے مربع کا رقبہ + a اور b کے اضلاع کے مستطیل کا رقبہ + a اور b کے اضلاع کے مستطیل کا رقبہ

$$= a^2 + ab + ba + b^2$$

$$= a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$$



مثال 17: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ متماثلہ کی جانچ جامیٹری کے طریقہ سے کیجئے۔ a=3 اور b=2 لیجئے۔

حل: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

ضلع $a+b$ کی لمبائی کا ایک مربع بنایئے یعنی 3+2

LHS کل مربع کا رقبہ

$$= (3+2)^2 = 5^2 = 25$$

RHS = تین اکائیوں کے ضلع کے مربع کا رقبہ

+ دو اکائیوں کے ضلع کے مربع کا رقبہ

+ 3'2 اکائیوں والے اضلاع کے مستطیل کا رقبہ

+ 3'2 والے اکائیوں والے اضلاع کے مستطیل کا رقبہ

$$= 3^2 + 2^2 + 3 \times 2 + 3 \times 2$$

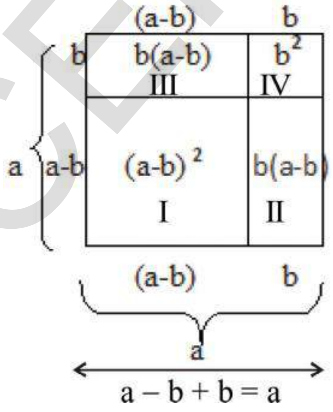
$$= 9 + 4 + 6 + 6 = 25$$

L.H.S. = R.H.S.

∴ متماثلہ کی تصدیق ہوئی

11.10.2: متماثلہ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ کی جامیٹری کے طریقہ سے

تصدیق کیجئے



ضلع کا طول a رکھنے والے مربع پر غور کیجئے۔

☆ مربع کا رقبہ = ضلع x ضلع

☆ مربع کو چار حصوں میں تقسیم کیا گیا۔

☆ دو مربعے جن کے اضلاع کی لمبائی a - b اور b ہے۔ اور دو مستطیل جن کے طول اور عرض بالترتیب a - b اور b ہیں۔

دی ہوئی شکل کا رقبہ = ضلع کا طول a کے مربع کا رقبہ

- خاکہ دو II کا رقبہ

- خاکہ تین III کا رقبہ

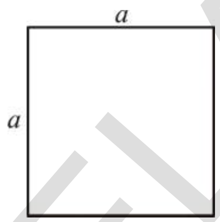
- خاکہ چار IV کا رقبہ

$$(a-b)^2 = a^2 - b(a-b) - b(a-b) - b^2$$
$$= a^2 - ab + b^2 - ab + b^2 - b^2$$
$$= a^2 - 2ab + b^2$$

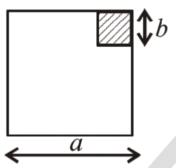
11.10.3: متماثلہ $(a + b)(a + b) = a^2 - b^2$ کی جامیٹری کے طریقہ سے جانچ

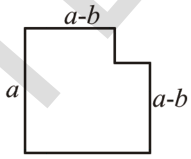
ضلع a کے مربع کا رقبہ - ضلع b کے مربع کا رقبہ $= a^2 - b^2$

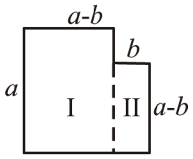
ذیل کے مربع پر غور کیجیے۔



ضلع b رکھنے والے مربع کو کاٹئے $(b < a)$







لہٰذا $a^2 - b^2$ = I شکل کا رقبہ + II شکل کا رقبہ

$$= a(a-b) + b(a-b)$$
$$= (a-b)(a+b)$$
$$a^2 - b^2 \equiv (a-b)(a+b)$$

مشق - 11.5

1. حسب ذیل کو استعمال کرتے ہوئے $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ متماثلہ کی جامیٹری کے طریقہ سے تصدیق کیجیے۔

(i) $a = 2$ اکائی $b = 4$ اکائی

(ii) $a = 3$ اکائی $b = 1$ اکائی

(iii) $a = 5$ اکائی $b = 2$ اکائی

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20

SCERT TELANGANA

2. حسب ذیل کواستعمال کرتے ہوئے $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ متماثلہ کی جامیٹری کے طریقہ سے تصدیق کیجئے۔

(i) $a = 3$ اکائی $b = 1$ اکائی

(ii) $a = 5$ اکائی $b = 2$ اکائی

3. حسب ذیل کواستعمال کرتے ہوئے $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ متماثلہ کی جامیٹری کے طریقہ سے تصدیق کیجئے۔

(i) $a = 3$ اکائی $b = 2$ اکائی

(ii) $a = 2$ اکائی $b = 1$ اکائی

ہم نے کیا سیکھا

1) کئی موقعوں پر ہم کو الجبر اُ کی عبارتوں کا حاصل ضرب معلوم کرنے کی ضرورت ہوتی ہے: مثال کے طور پر مستطیل کا رقبہ معلوم کرنے کے لیے جس کے اضلاع کی لمبائی الجبر اُ کی عبارتوں میں ہو۔

2) ایک ایک رکنی کو کسی دوسرے ایک رکنی سے ضرب دینے پر ایک رکنی ہی حاصل ہوتا ہے۔

3) کسی کثیر رکنی کو ایک ایک رکنی سے ضرب دیتے ہوئے ہم کثیر رکنی کے ہر رکن کو ایک رکنی سے ضرب دیتے ہیں۔

4) دو رکنی (یا سہ رکنی) سے کسی کثیر رکنی کو ضرب دینے کے دوران ہم ہر رکن کو ہر رکن سے ضرب دیتے ہیں۔ یاد رکھیئے کہ ایسے ضربی عمل کے دوران ہم کو حاصل ضرب میں ایک جیسے ارکان حاصل ہوتے ہیں جنہیں جمع کرنا پڑتا ہے۔

5) ایک متماثلہ ایک ایسی مساوات ہے جو متغیرات کی تمام قیمتوں کے لیے درست ہوتی ہے جبکہ ایک مساوات اس کے متغیرات کی بعض قیمتوں کے لیے ہی صحیح ہوتی ہے۔ ایک مساوات ایک متماثلہ نہیں ہوسکتی۔

6) متماثلات ذیل میں دی گئی ہیں۔

I. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

II. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

III. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

IV. $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

7) اوپر دی گئیں متماثلات مربعوں اور الجبر اُ کی عبارتوں کو محسوب کرنے میں مددگار ہوتی ہیں۔ ان سے اعداد کے حاصل ضرب معلوم کرنے کے مختلف طریقے بھی اپنائے جاسکتے ہیں۔

---------☆☆☆-------

SCERT TELANGANA

12

اجزائے ضربی

Factorization

12.0 تعارف:

عدد 42 پر غور کیجیے۔ عدد '42' کو دو اعداد کے حاصل ضرب میں لکھنے کی کوشش کیجیے۔

$$42 = 1 \times 42$$
$$= 2 \times 21$$
$$= 3 \times 14$$
$$= 6 \times 7$$

اسی لیے عدد 42 کے اجزائے ضربی 1، 2، 3، 6، 7، 14، 21 اور 42 ہیں۔ ان تمام اجزائے ضربی میں کون سے مفرد اعداد ہیں۔
کیا آپ 42 کو دو مفرد اعداد کے حاصل ضرب میں لکھ سکتے ہیں؟ کوشش کیجیے۔

اکبر نے اس طرح کیا	صبا نے اس طرح کیا	رفیع نے اس طرح کیا
$42 = 6 \times 7$	$42 = 3 \times 14$	$42 = 2 \times 21$
$= 2 \times 3 \times 7$	$= 2 \times 3 \times 7$	$= 2 \times 3 \times 7$

آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟ ہر موقع پر ہم دیکھتے ہیں کہ 7×3×2 ہی مفرد اجزائے کا حاصل ضرب ہے۔
اب ایک اور عدد 70 لیجیے۔
عدد 70 کو 7×5×2 مفرد اعداد کے حاصل ضرب کے طور پر لکھا جا سکتا ہے۔
اجزائے ضربی کی وہ شکل جہاں تمام اجزاء مفرد ہوتے ہیں مفرد اجزائے ضربی کا حاصل ضرب کہلاتا ہے۔

$$70 = 1 \times 70$$
$$= 2 \times 35$$
$$= 5 \times 14$$
$$= 7 \times 10$$

کوشش کیجیے

دیے گئے اعداد کو مفرد اجزائے ضربی کی شکل میں لکھیے۔

(i) 48 (ii) 72 (iii) 96

جیسا کہ ہم نے اعداد کے لیے اجزاء معلوم کیے اسی طرح ہم الجبرئی عبارتوں کو بھی مفرد اجزائے ضربی کی شکل میں ظاہر کر سکتے ہیں۔ اس باب میں ہم مختلف الجبرئی عبارت کے اجزائے ضربی کے بارے میں پڑھیں گے۔

SCERT TELANGANA

12.1 الجبرئی عبارتوں کے اجزائے ضربی

ذیل میں دی گئی مثالوں پے غور کیجیے۔

$7yz = 7(yz)$ ⟶ (7 اور yz اجزاء ہیں)

$= 7y(z)$ ⟶ (7y اور z اجزاء ہیں)

$= 7z(y)$ ⟶ (y اور 7z اجزاء ہیں)

$= 7\times y\times z$ ⟶ (7، y اور z اجزاء ہیں)

دیے گئے اجزا میں 7,y,z نا قابل تخفیف اجزاء ہیں دی گئی الجبرئی عبارت میں "مفرد" کے لیے دوسرا لفظ "نا قابل تخفیف" استعمال کیا گیا ہے اس طرح ہم کہہ سکتے ہیں کہ $7\times y\times z$ کی تخفیفی شکل $7yz$ ہے۔ اس بات کو نوٹ کیجیے کہ $7y(z)$ یا $7z(y)$ دی گئی عبارت کی تخفیفی شکل نہیں ہے۔

> $7yz$ کا جز ضربی 1 ہے چونکہ $1\times 7\times y\times z$۔ حقیقتاً 1 ہر رکن کا جز ضربی ہے لیکن جب تک اس کی ضرورت نہ ہو الگ نہیں بتایا جاتا۔

آیئے اب ہم اس عبارت پر غور کرتے ہیں $7y(z+3)$۔ اس عبارت کو ہم اس طرح بھی $7y(z+3) = 7\times y\times(z+3)$ لکھ سکتے ہیں۔ یہاں 7، y اور $(z+3)$ غیر تخفیفی اجزاء ہیں

یہ کیجیے

ذیل کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

(i) $8x^2yz$ (ii) $2xy(x+y)$ (iii) $3x+y^3z$

12.2 اجزائے ضربی کی ضرورت

جب ایک الجبرئی عبارت تحویل ہوتی ہے تو اسے اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کے طور پر لکھا جا سکتا ہے دی ہوئی عبارت پر غور کیجیے۔

$23a+23b+23c$، اسے اس طرح لکھا جا سکتا ہے۔

$23(a+b+c)$ یہاں پر تخفیفی اجزا 23 اور $(a+b+c)$ ہیں، 23 ایک عددی جز ہے اور $(a+b+c)$ الجبری اجزاء ہیں۔

دی ہوئی عبارتوں پر غور کیجیے۔

(i) x^2y+y^2x+xy (ii) $(4x^2-1)\div(2x-1)$

پہلی عبارت میں $x^2y+y^2x+xy = xy(x+y+1)$

اس لیے اوپر دی ہوئی عبارت مختصر شکل میں لکھی گئی ہے۔

SCERT TELANGANA

دوسری عبارت میں $(2x-1)\ \div\ (4x^2-1)$

$$\frac{(4x^2-1)}{2x-1}=\frac{(2x)^2-1^2}{2x-1}$$
$$=\frac{(2x-1)(2x+1)}{2x-1}$$
$$=2x+1$$

اوپر کی تصریحات میں ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ اجزائے ضربی الجبرئی عبارتوں کو مختصر کرنے میں اور الجبرئی عبارت کی تقسیم میں مددگار ہے۔
اب ہم الجبرائی عبارتوں کی تقسیم کے کچھ مزید طریقوں پر بحث کریں گے۔

12.2 مشترک اجزائے ضربی کے طریقے

آیئے $(3x+12)$ کے اجزائے ضربی معلوم کریں

اجزاء کے تخفیفی حاصل ضرب کے ہر رکن کو اس طرح لکھ سکتے ہیں

$$3x+12=(3\times x)+(2\times 2\times 3)$$

ان دو اعداد کے مشترک جز کون سے ہیں؟

دونوں عبارتوں کے مشترک اجزاء 3 ہے تب

$$3\times[x+(2\times 2)]=3\times(x+4)=3(x+4)$$

عبارت $(3x+12)$، مساوی ہے $3(x+4)$

عبارت $(3x+12)$ کے اجزائے ضربی $(x+4)$ اور 3 ہیں اور یہ بھی نوٹ کریں کے یہ اجزائے ضربی تخفیفی ہیں۔

اب ہم دوسری عبارت $6ab+12b$ کے اجزائے ضربی معلوم کریں گے۔

$$6ab+12b=(\underline{2\times 3}\times a\times \underline{b})+(2\times \underline{2\times 3\times b})$$
$$=\underline{2\times 3\times b}\times(a+2)\quad =6b(a+2)$$
$$\therefore\ 6ab+12b=6b(a+2)$$

نوٹ کیجیے کہ $6ab$ اور $12ab$ کا عادِ اعظم مشترک $6ab$ ہے

مثال 1: اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

(i) $6xy+9y^2$ (ii) $25a^2b+35ab^2$

حل: (i) $6xy+9y^2$

$6xy=2\times 3\times x\times y$ اور $9y^2=3\times 3\times y\times y$

دونوں ارکان کے مشترک اجزائے ضربی 3 اور y ہیں۔

SCERT TELANGANA

ایک عبارت کی جزوی شکل کو ایک ہی	لہٰذا $6xy + 9y^2$

$= (2 \times \underline{3} \times x \times \underline{y}) + (3 \times \underline{3 \times y} \times y)$ (3y کو مشترک جز ضربی لیا گیا)

$= \underline{3 \times y} \times [(2 \times x) + (3 \times y)]$

$\therefore\ 6xy + 9y^2 = 3y(2x + 3y)$

(ii) $25a^2b + 35ab^2 = (5 \times \underline{5} \times a \times \underline{a \times b}) + (\underline{5} \times 7 \times \underline{a \times b} \times b)$

$= \underline{5 \times a \times b} \times [(5 \times a) + (7 \times b)]$

$= 5ab\,(5a + 7b)$

$\therefore\ 25a^2b + 35ab^2 = 5ab\,(5a + 7b)$

مثال 2: اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

$3x^2 + 6x^2y + 9xy^2$

$3x^2 + 6x^2y + 9xy^2 = (\underline{3 \times x} \times x) + (2 \times \underline{3 \times x} \times x \times y) + (3 \times \underline{3 \times x} \times y \times y)$

$= \underline{3 \times x}\,[x + (2 \times x \times y) + (3 \times y \times y)]$

$= 3x\,(x + 2xy + 3y^2)$ (3x کو مشترک جز لینے پر)

$\therefore\ 3x^2 + 6x^2y + 9xy^2 = 3x\,(x + 2xy + 3y^2)$

یہ کیجیے

ذیل کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

(i) $9a^2 - 6a$	(ii) $15a^3b - 35ab^3$	(iii) $7lm - 21lmn$

12.4 ارکان کو گروپ میں لکھتے ہوئے اجزائے ضربی معلوم کرنا

دی ہوئی عبارت کا مشاہدہ کیجیے $ax+bx+ay+by$ آپ کو معلوم ہوگا کہ پہلے دو ارکان کے مشترک جز x آخری دو ارکان کے مشترک جز y ہیں لیکن ان میں ایک مشترک جز نہیں ہے جو دونوں ارکان میں موجود ہو ہم ایسے ہی چند عبارتوں کے اجزائے ضربی معلوم کریں گے۔

$(ax + bx) + (ay + by) = x\,(a+b) + y(a+b)$ (ہر گروپ میں سے مشترک اجزاء نکالنے پر)

$= (a+b)(x+y)$ (ہر گروپ میں سے مشترک اجزاء نکالنے پر)

عبارت $ax+bx+ay+by$ کو اُس کے اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کے طور پر ظاہر کریں گے $(a+b)$ اور $(x+y)$ یہ ایسے اجزاء ہیں جو نا قابل تخفیف ہیں۔ گروپنگ کے دوسرے طریقے سے بھی ہم اوپر دی ہوئی عبارت کے اجزائے ضربی حسب ذیل طریقے سے بھی معلوم کر سکتے ہیں

$ax + ay + bx + by = (ax + ay) + (bx + by)$

$= a\,(x + y) + b\,(x + y)$

$= (x + y)\,(a + b)$

ہم یہ مشاہدہ کرتے ہیں کہ سوائے ترتیب کے اجزاء مساوی ہوتے ہیں

SCERT TELANGANA

یہ کیجیے

ذیل کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

(i) $5xy+5x+4y+4$ (ii) $3ab+3a+2b+2$

مثال 3: $6ab+b^2-2bc+12ac$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

حل مرحلہ 1: جانچیے کہ کیا تمام ارکان میں کوئی مشترک جز ضربی ہے۔

یقیناً نہیں

مرحلہ 2: دوبارہ گروپنگ کرنے پر ہمیں پہلے دو ارکان یہ حاصل ہوں گے

$$6ab - b^2 = b(6a - b) \quad \text{———I}$$

نوٹ کیجیے کہ عبارت کے آخری دو ارکان کی ترتیب کو بدلنے کی ضرورت ہے جیسا کہ $12ac-12bc$

اس لیے $12ac - 2bc = 2c(6a - b)$ ———II

مرحلہ 3: I اور II کو ملانے پر

$$6ab - b^2 - 2bc + 12ac = b(6a - b) + 2c(6a - b)$$

$= (6a - b)(b + 2c)$ (مشترک جز $(6a-b)$ نکالنے پر)

اسی لیے $6ab+b^2-2bc+12ac$ کے اجزاء $(6a-b)$ اور $(b+2c)$ ہیں۔

مشق 12.1

1۔ دیے گئے ارکان کے مشترک اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

(i) $8x, 24$ (ii) $3a, 21ab$ (iii) $7xy, 35x^2y^3$ (iv) $4m^2, 6m^2, 8m^3$

(v) $15p, 20qr, 25rp$ (vi) $4x^2, 6xy, 8y^2x$ (vii) $12x^2y, 18xy^2$

2۔ دیے گئے عبارتوں کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

(i) $5x^2 - 25xy$ (ii) $9a^2 - 6ax$ (iii) $7p^2 + 49pq$

(iv) $36a^2b - 60a^2bc$ (v) $3a^2bc + 6ab^2c + 9abc^2$

(vi) $4p^2 + 5pq - 6pq^2$ (vii) $ut + at^2$

3۔ ذیل کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

(i) $3ax - 6xy + 8by - 4bx$ (ii) $x^3 + 2x^2 + 5x + 10$

(iii) $m^2 - mn + 4m - 4n$ (iv) $a^3 - a^2b^2 - ab + b^3$ (v) $p^2q - pr^2 - pq + r^2$

SCERT TELANGANA

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20

12.5 مماثلت (ضابطوں) کے استعمال سے اجزائے ضربی معلوم کرنا

ہم جانتے ہیں کہ یہ

$(a+b)^2 \equiv a^2+2ab+b^2$

$(a-b)^2 \equiv a^2-2ab+b^2$

$(a+b)(a-b) \equiv a^2-b^2$ الجبرئی مماثلات (ضابطے) ہیں۔

ہم ان متماثلات کو اجزائے ضربی معلوم کرنے کے لیے استعمال کرتے ہیں۔ اگر دی گئی عبارت متماثلات کے دائیں جانب (RHS) کی شکل میں ہو تو ہم اُس مخصوص مماثلہ کے استعمال سے دی گئی عبارت کے اجزاء معلوم کرسکتے ہیں۔ آیئے چند مثالوں کا مشاہدہ کرتے ہیں:

مثال 4: $(x^2+10x+25)$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

حل: دی گئی عبارت تین ارکان پر مشتمل ہے۔ پہلا رکن اور تیسرا رکن کامل مربع ہے جو x^2 اور 25 ’$(5)^2$ اور عبارت کا درمیانی رکن بھی مثبت علامت رکھتا ہے۔ یہ اشارہ کرتا ہے کہ دی ہوئی عبارت کو $a^2+2ab+b^2$ کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔

اس لیے $x^2+10x+25=(x)^2+2(x)(5)+(5)^2$

ہم تقابل کرسکتے ہیں کہ $a^2+2ab+b^2$ کو پلٹانے پر متماثلہ کی مساوات کا بائیں جانب (LHS) کے مساوی ہوتا ہے۔ یعنی $(a+b)^2$ کے۔

لہٰذا $x^2+10x+25=(x+5)^2=(x+5)(x+5)$

مثال 5: $(16z^2+48z+36)$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

حل: دی گئی عبارت کو مشترک اعداد کے اجزائے ضربی کے طور پر نکالنے پر۔

$$16z^2-48z+36=(4\times 4z^2)-(4\times 12z)+(4\times 9)=4(4z^2-12z+9)$$

نوٹ کیجیے $12z=2(2z)3$ اور $4z^2=(2z)^2; 9=(3)^2$

$$4z^2-12z+9=(2z)^2-2(2z)3+(3)^2 \quad (\because a^2-2ab+b^2=(a-b)^2)$$

تقابل کرنے پر $16z^2-48z+36=4(4z^2-12z+9)=4(2z-3)^2$

$$=4(2z-3)(2z-3)$$

مثال 6: $25p^2-49q^2$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

حل: ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ دی ہوئی عبارت دو کامل اعداد کے مربعوں کا فرق ہے اس لئے عبارت کی شکل (a^2-b^2) ہوگی۔

چنانچہ متماثلہ $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$$25p^2-49q^2=(5p)^2-(7q)^2$$

$$=(5p+7q)(5p-7q)$$

لہٰذا $25p^2-49q^2=(5p+7q)(5p-7q)$ $[a^2-b^2=(a+b)(a-b)]$

SCERT TELANGANA

مثال 7: $48a^2 - 243b^2$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

حل: ہم دیکھتے ہیں کہ دی ہوئی عبارت میں دونوں ارکان کامل مربع نہیں ہیں۔لیکن دونوں کا مشترک جز 3 ہے جیسا کہ

$$48a^2 - 243b^2 = 3\,[16a^2 - 81b^2]$$

$$= 3\,[(4a)^2 - (9b)^2] \quad \text{دوبارہ} \quad a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$= 3\,[\,(4a + 9b)\,(4a - 9b)]$$

$$= 3\,(4a + 9b)\,(4a - 9b)$$

مثال 8: $x^2 + 2xy + y^2 - 4z$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

حل: $(x + y)^2$ کی شکل میں لکھنے پر دی ہوئی عبارت کے پہلے تین ارکان حاصل ہوں گے اور چوتھا رکن ایک کامل مربع ہے۔

چناچہ $x^2 + 2xy + y^2 - 4z^2 = (x + y)^2 - (2z)^2$

$$= [(x + y) + 2z]\,[(x + y) - 2z]$$

$$= (x + y + 2z)\,(x + y - 2z)$$

$a^2 - b^2 = (a+b)\,(a-b)$

مثال 9: $p^4 - 256$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

حل: $p^4 = (p^2)^2$ اور $256 = (16)^2$

$$p^4 - 256 = (p^2)^2 - (16)^2$$

$$= (p^2 - 16)\,(p^2 + 16)$$

$$= (p+4)\,(p-4)\,(p^2 + 16) \quad \because \quad \boxed{p^2 - 16 = (p+4)\,(p-4)}$$

12.6 $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

دی گئی عبارتوں کا مشاہدہ کیجیے $x^2 + 12x + 35, x^2 + 6x - 27, a^2 - 6a + 8, 3y^2 + 9y + 6$ وغیرہ، پہلے استعمال کی ہوئی مماثلات سے ہم ان دی گئی عبارتوں کے اجزائے ضربی نہیں معلوم کر سکتے کیونکہ مستقل ارکان کامل مربع نہیں ہیں۔

غور کیجیے $x^2 + 12x + 35$

یہ تمام ارکان اجزائے ضربی کے لیے گروپ نہیں کیے جا سکتے آیئے درمیانی رکن اور مستقل رکن کو استعمال کرتے ہوئے گروپ بنانے کی کوشش کریں، تا کہ دی گئی عبارت اس متماثلہ $x^2 + (a+b)x + ab$ کی شکل میں ہو۔

مستقل رکن کو دو اجزاء کے حاصل ضرب کے تمام ممکنہ طریقوں سے لکھنے پر

$35 =$	1×35	$1 + 35 = 36$
	$(-1) \times (-35)$	$-1 - 35 = -36$
	5×7	$5 + 7 = 12$
	$(-5) \times (-7)$	$-5 - 7 = -12$

کونسے ارکان کی جوڑی کا مجموعہ درمانی رکن کا ضریب بن جاتا ہے؟ یہ یقیناً 5+7=12 ہوگا۔

SCERT TELANGANA

$$\therefore\ x^2 + 12x + 35 = x^2 + (5+7)x + 35$$
$$= x^2 + 5x + 7x + 35 \qquad (\because\ 12x = 5x + 7x)$$
$$= x(x+5) + 7(x+5) \qquad$$ دونوں کے مشترک اجزاء کو علحدہ طور پر باہر نکالنے پر
$$= (x+5)(x+7) \qquad$$ مشترک جز ضربی (x+5) کو باہر نکالنے پر

اوپر دی ہوئی تشریح سے ہم یہ نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ $x^2 + (a+b)x + ab$ اس شکل کی عبارت کو $(x+a)(x+b)$ میں تحویل کیا جاسکتا ہے۔

مثال 10: $m^2 - 4m - 21$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

حل: دی گئی عبارت $m^2 - 4m - 21$ کو متماثلہ $x^2 + (a+b)x + ab$ سے تقابل کرنے پر

$ab = -21$, اور $a+b = -4$. اسلئے $(-7) + 3 = -4$ اور $(-7)(3) = -21$

$$m^2 - 4m - 21 = m^2 - 7m + 3m - 21$$
$$= m(m-7) + 3(m-7)$$
$$= (m-7)(m+3)$$

لہذا $m^2 - 4m - 21 = (m-7)(m+3)$

21 کے اجزائے ضربی اور حاصل جمع	
$-1 \times 21 = -21$	$-1 + 21 = 20$
$1 \times (-21) = -21$	$1 - 21 = -20$
$-7 \times 3 = -21$	$-7 + 3 = -4$
$-3 \times 7 = -21$	$-3 + 7 = 4$

مثال 11: $4x^2 + 20x - 96$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

حل: ہم یہ دیکھتے ہیں کہ تمام ارکان کا مشترک جز ضربی 4 ہے۔

اسلئے $4x^2 + 20x - 96 = 4[x^2 + 5x - 24]$

اس عبارت پر غور کیجیے $x^2 + 5x - 24$

$$= x^2 + 8x - 3x - 24$$
$$= x(x+8) - 3(x+8)$$
$$= (x+8)(x-3)$$

لہذا $4x^2 + 20x - 96 = 4(x+8)(x-3)$

$-1 \times 24 = -24$	$-1 + 24 = 23$
$1 \times (-24) = -24$	$1 - 24 = -23$
$-8 \times 3 = -24$	$3 - 8 = -5$
$-3 \times 8 = -24$	$-3 + 8 = 5$

مشق 12.2

1۔ ذیل میں دی گئی عبارتوں کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

(i) $a^2 + 10a + 25$ (ii) $l^2 - 16l + 64$ (iii) $36x^2 + 96xy + 64y^2$

(iv) $25x^2 + 9y^2 - 30xy$ (v) $25m^2 - 40mn + 16n^2$

(vi) $81x^2 - 198xy + 121y^2$ (vii) $(x+y)^2 - 4xy$ [اشارہ: پہلے $(x+y)^2$ کو پھیلائیے]

(viii) $l^4 + 4l^2m^2 + 4m^4$

SCERT TELANGANA

2۔ ذیل کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

(i) $x^2 - 36$ (ii) $49x^2 - 25y^2$ (iii) $m^2 - 121$

(iv) $81 - 64x^2$ (v) $x^2y^2 - 64$ (vi) $6x^2 - 54$

(vii) $x^2 - 81$ (viii) $2x - 32x^5$ (ix) $81x^4 - 121x^2$

(x) $(p^2 - 2pq + q^2) - r^2$ (xi) $(x+y)^2 - (x-y)^2$

3۔ عبارتوں کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

(i) $lx^2 + mx$ (ii) $7y^2 + 35Z^2$ (iii) $3x^4 + 6x^3y + 9x^2Z$

(iv) $x^2 - ax - bx + ab$ (v) $3ax - 6ay - 8by + 4bx$ (vi) $mn + m + n + 1$

(vii) $6ab - b^2 + 12ac - 2bc$ (viii) $p^2q - pr^2 - pq + r^2$ (ix) $x(y+z) - 5(y+z)$

4۔ ذیل کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

(i) $x^4 - y^4$ (ii) $a^4 - (b+c)^4$ (iii) $l^2 - (m-n)^2$

(iv) $49x^2 - \dfrac{16}{25}$ (v) $x^4 - 2x^2y^2 + y^4$ (vi) $4(a+b)^2 - 9(a-b)^2$

5۔ ذیل میں دی گئی عبارتوں کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

(i) $a^2 + 10a + 24$ (ii) $x^2 + 9x + 18$ (iii) $p^2 - 10q + 21$ (iv) $x^2 - 4x - 32$

6۔ m کی قیمت محسوب کیجیے جبکہ عبارت $x^2 + 3xy + x + my - m$ میں x اور y میں دو خطّی اجزائے ضربی ہیں جس کے ضریب حقیقی اعداد ہیں۔

12.7 الجبرئی عبارت کی تقسیم

ہم جانتے ہیں کے عمل تقسیم، عمل ضرب کا معکوس ہے

آیئے غور کریں

$$3x \times 5x^3 = 15x^4$$

$$15x^4 \div 5x^3 = 3x \quad \text{اور} \quad 15x^4 \div 3x = 5x^3$$

تب $6a(a+5) = (6a^2 + 30a)$

اسی طرح سے

$$(6a^2 + 30a) \div 6a = a + 5$$

اور اس کے ساتھ ساتھ

$$(6a^2 + 30a) \div (a+5) = 6a.$$

12.8 ایک رکنی سے ایک رکنی کی تقسیم

$24x^3 \div 3x$

$$\therefore\ 24x^3 \div 3x$$

$$= \frac{2\times2\times2\times3\times x\times x\times x}{3\times x}$$

$$= \frac{(3\times x)(2\times2\times2\times x\times x)}{(3\times x)} = 8x^2$$

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20

SCERT TELANGANA

مثال 12: ذیل کی تقسیم کیجیے

(i) $70x^4 \div 14x^2$ (ii) $4x^3y^3z^3 \div 12xyz$

حل:

(i) $70x^4 \div 14x^2 = \dfrac{2\times5\times7\times x\times x\times x\times x}{2\times7\times x\times x}$

$= \dfrac{5\times x\times x}{1}$

$= 5x^2$

(ii) $4x^3y^3z^3 \div 12xyz = \dfrac{4\times x\times x\times x\times y\times y\times y\times z\times z\times z}{12\times x\times y\times z}$

$= \dfrac{1}{3}x^2y^2z^2$

12.9 ایک رُکنی سے دی گئی عبارت کی تقسیم

سہ رُکنی تقسیم پر غور کیجیے

$6x^4+10x^3+8x^2$ کو $2x^3$ سے تقسیم کیجیے۔

$6x^4 + 10x^3 + 8x^2 = [2 \times 3 \times x \times x \times x \times x] + [2 \times 5 \times x \times x \times x] + [2 \times 2 \times 2 \times x \times x]$

$= \underline{(2x^2)}(3x^2) + \underline{(2x^2)}(5x) + \underline{2x^2}(4)$

$= 2x^2[3x^2 + 5x + 4]$

نوٹ کیجیے کہ یہاں $2x^2$ مشترک جز ضربی ہے

$(6x^4 + 10x^3 + 8x^2) \div 2x^2$

$= \dfrac{6x^4+10x^3+8x^2}{2x^2} = \dfrac{2x^2(3x^2+5x+4)}{2x^2}$

$= (3x^2 + 5x + 4)$

دوسرے طریقے تقسیم میں عبارت کے ہر رُکن کو ایک رُکنی سے تقسیم کیا جاتا ہے

$(6x^4 + 10x^3 + 8x^2) \div 2x^2$

$= \dfrac{6x^4}{2x^2}+\dfrac{10x^3}{2x^2}+\dfrac{8x^2}{2x^2}$

$= 3x^2 + 5x + 4$

'یہاں ہم عبارت کے ہر رُکن کو شمار کنندہ اور ایک رُکنی کو نسب نما میں لکھ کر تقسیم کرتے ہیں۔

مثال 13: $30(a^2bc+ab^2c+abc^2)$ کو $6abc$ سے تقسیم کیجیے۔

$$30\,(a^2bc + ab^2c + abc^2)$$

$$=2 \times 3 \times 5\,[(a \times a \times b \times c) + (a \times b \times b \times c) + (a \times b \times c \times c)]$$

$$= 2 \times 3 \times 5 \times a \times b \times c\;(a + b + c)$$

$$30\,(a^2bc + ab^2c + abc^2) \div 6abc$$

$$= \frac{2\times3\times5\times abc(a+b+c)}{2\times3\times abc}$$

$$= 5\,(a + b + c)$$

اس طرح $30\,(a^2bc+ab^2c+abc^2)\div 6abc$

$$= \frac{30a^2bc}{6abc}+\frac{30ab^2c}{6abc}+\frac{30abc^2}{6abc}$$

$$= 5a + 5b + 5c$$

$$= 5\,(a + b + c)$$

12.10 الجبرئی عبارت سے الجبرئی عبارت کی تقسیم

عبارت $3a^2+21a\div a+7$ پر غور کیجیے۔

$3a^2+21a$ کے اجزائے ضربی معلوم کریں اور ان کی نسب نما سے جانچ کریں

$$(3a^2 + 21a) \div (a+7) = \frac{3a^2+21a}{a+7}$$

$$= \frac{3a\,(a+7)}{a+7} = 3a$$

$$= 3a$$

مثال 14: $39y^3(50y^2-98)$ کو $26y^2(5y+7)$ سے تقسیم کیجیے۔

$$39y^3(50y^2 - 98) = 3 \times 13 \times y \times y \times y \times [2\,(25y^2-49)]$$

$$=2\times 3 \times 13 \times y \times y \times y \times [(5y)^2-(7)^2]$$ $\boxed{a^2-b^2 = (a+b)(a-b)}$

$$=2\times 3 \times 13 \times y \times y \times y \times [(5y + 7)\;(5y - 7)]$$

$$= 2\times 3 \times 13 \times y \times y \times y \times (5y+7)\,(5y - 7)$$

اور $26y^2(5y + 7) = 2\times 13 \times y \times y \times ((5y + 7)$

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20
SCERT TELANGANA

$\therefore \quad [39y^3(50y^2 - 98)] \div [26y^2(5y + 7)]$

$$= \frac{[2 \times 3 \times 13 \times y \times y \times y(5y+7)(5y-7)]}{[2 \times 13 \times y \times y \times (5y+7)]}$$

$= 3y(5y - 7)$

مثال15: $m^2 - 14m - 32$ کو $m + 3$ سے تقسیم کیجیے۔

حل:

$m^2 - 14m - 32 = m^2 - 16m + 2m - 32$

$= m(m - 16) + 2(m - 16)$

$= (m - 16)(m+2)$

$(m^2 - 14m - 32) \div m+2 = (m - 16)(m+2) \div (m+2)$

$= (m - 16)$

مثال16: $42(a^4 - 13a^3 + 36a^2)$ کو $7a(a - 4)$ سے تقسیم کیجیے۔

حل:

$42(a^4 - 13a^3 + 36a^2) = 2 \times 3 \times 7 \times a \times a \times (a^2 - 13a + 36)$

$= 2 \times 3 \times 7 \times a \times a \times (a^2 - 9a - 4a + 36)$

$= 2 \times 3 \times 7 \times a \times a \times [a(a - 9) - 4(a - 9)]$

$= 2 \times 3 \times 7 \times a \times a \times [(a - 9)(a - 4)]$

$= 2 \times 3 \times 7 \times a \times a \times (a - 9)(a - 4)$

$42(a^4 - 13a^3 + 36a^2) \div 7a(a - 4) = 2 \times 3 \times 7 \times a \times a \times (a - 9)(a - 4) \div 7a(a - 4)$

$= 6a(a - 9)$

مثال17: $x(3x^2 - 108)$ کو $3x(x - 6)$ سے تقسیم کیجیے۔

حل:

$x(3x^2 - 108) = x \times [3(x^2 - 36)]$

$= x \times [3(x^2 - 6^2)]$

$= x \times [3(x + 6)(x - 6)]$

$= 3 \times x \times [(x + 6)(x - 6)]$

$x(3x^2 - 108) \div 3x(x - 6) = 3 \times x \times [(x + 6)(x - 6)] \div 3x(x - 6)$

$= (x + 6)$

SCERT TELANGANA

مشق 12.3

1۔ ذیل کی تقسیم کیجیے۔

(i) $48a^3$ by $6a$ (ii) $14x^3$ by $42x^2$

(iii) $72a^3b^4c^5$ by $8ab^2c^3$ (iv) $11xy^2z^3$ by $55xyz$ (v) $-54l^4m^3n^2$ by $9l^2m^2n^2$

2۔ دی گئی کثیر رکنیوں کو یک رُکنی سے تقسیم کیجیے۔

(i) $(3x^2 - 2x) \div x$ (ii) $(5a^3b - 7ab^3) \div ab$

(iii) $(25x^5 - 15x^4) \div 5x^3$ (iv) $(4l^5 - 6l^4 + 8l^3) \div 2l^2$

(v) $15\,(a^3b^2c^2 - a^2b^3c^2 + a^2b^2c^3) \div 3abc$ (vi) $(3p^3 - 9p^2q - 6pq^2) \div (-3p)$

(vii) $(\frac{2}{3}a^2b^2c^2 + \frac{4}{3}ab^2c^2) \div \frac{1}{2}abc$

3۔ مندرجہ ذیل کو تقسیم کیجیے۔

(i) $(49x - 63) \div 7$ (ii) $12x\,(8x - 20) \div 4(2x - 5)$

(iii) $11a^3b^3(7c - 35) \div 3a^2b^2(c - 5)$

(iv) $54lmn\,(l + m)\,(m + n)\,(n + l) \div 81mn\,(l + m)\,(n + l)$

(v) $36\,(x + 4)\,(x^2 + 7x + 10) \div 9\,(x + 4)$ (vi) $a\,(a + 1)\,(a + 2)\,(a + 3) \div a\,(a + 3)$

4۔ عبارتوں کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے اور ہدایت کے مطابق تقسیم کیجیے۔

(i) $(x^2 + 7x + 12) \div (x + 3)$ (ii) $(x^2 - 8x + 12) \div (x - 6)$

(iii) $(p^2 + 5p + 4) \div (p + 1)$ (iv) $15ab\,(a^2 - 7a + 10) \div 3b\,(a - 2)$

(v) $15lm\,(2p^2 - 2q^2) \div 3l\,(p + q)$ (vi) $26z^3(32z^2 - 18) \div 13z^2(4z - 3)$

سوچیے اور تبادلہ خیال کیجیے

مختلف عمل رکھنے والی الجبرئی عبارتوں کے سوالات کو چند طلبا نے حل کیا جس کو ذیل میں دیا گیا ہے۔ کیا آپ ان کی غلطیوں کی نشاندہی کر سکتے ہیں؟ ہر سوال کا صحیح جواب معلوم کیجیے۔

ذیل میں دی گئی مساوات کو عائشہ نے اس طرح حل کیا؟

$3x + 4x + x + 2x = 90$

$9x = 90$ لہٰذا $x = 10$

اس سوال کے حل کی درستگی سے متعلق آپ کیا کہیں گے؟

کیا آپ بتا سکتے ہیں کہاں اس سوال کے حل میں عائشہ نے غلطی کی؟

SCERT TELANGANA

2۔ ابراہیم نے اس طرح حل کیا۔

$x = -4,\ 7x = 7 - 4 = -3$

3۔ ریاض اور زیبا نے چند الجبرئی عبارتوں کو ذیل کے طریقوں سے ضرب دیا؟ تصدیق کیجیے کہ کس کا طریقہ درست ہے؟

زیبا کا طریقہ	ریاض کا طریقہ
$3(x-4) = 3x - 12$	(i) $3(x-4) = 3x - 4$
$(2x)^2 = 4x^2$	(ii) $(2x)^2 = 2x^2$
$(2a-3)(a+2) = 2a^2 + a - 6$	(iii) $(2a-3)(a+2) = 2a^2+a-6$
$(x+8)^2 = x^2 + 16x + 64$	(iv) $(x+8)^2 = x^2 - 64$

4۔ علی نے اس طرح تقسیم کیا $(a+5) \div 5 = a+1$

علی کے دوست اکبر نے اس طرح کیا $(a+5) \div 5 = a$

اور ان دونوں کے دوست ماجد نے اس طرح حل کیا $(a+5) \div 5 = \frac{a}{5} + 1$

کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ ان میں سے کس نے صحیح طریقہ سے تقسیم کیا؟ ثابت کیجیے

مشق 12.4

ذیل کے حسابی بیانات میں پائی جانے والی غلطیوں کی نشاندہی کیجیے اور انہیں درست کیجیے۔

(i) $3(x-9) = 3x - 9$

(ii) $x(3x+2) = 3x^2 + 2$

(iii) $2x + 3x = 5x^2$

(iv) $2x + x + 3x = sx$

(v) $4p + 3p + 2p + p - 9p = 0$

(vi) $3x + 2y = 6xy$

(vii) $(3x)^2 + 4x + 7 = 3x^2 + 4x + 7$

(viii) $(2x)^2 + 5x = 4x + 5x = 9x$

(ix) $(2a+3)^2 = 2a^2 + 6a + 9$

(x) ذیل کی عبارتوں میں $x = -3$ درج کیجیے۔

(a) $x^2 + 7x + 12 = (-3)^2 + 7(-3) + 12 = 9 + 4 + 12 = 25$

(b) $x^2 - 5x + 6 = (-3)^2 - 5(-3) + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$

(c) $x^2 + 5x = (-3)^2 + 5(-3) + 6 = -9 - 15 = -24$

SCERT TELANGANA

(xi) $(x-4)^2 = x^2 - 16$ (xii) $(x+7)^2 = x^2 + 49$

(xiii) $(3a+4b)(a-b) = 3a^2 - 4a^2$ (xiv) $(x+4)(x+2) = x^2 + 8$

(xv) $(x-4)(x-2) = x^2 - 8$ (xvi) $5x^3 \div 5x^3 = 0$

(xvii) $2x^3 + 1 \div 2x^3 = 1$ (xviii) $3x + 2 \div 3x = \frac{2}{3x}$

(xix) $3x + 5 \div 3 = 5$ (xx) $\frac{4x+3}{3} = x+1$

1۔ اجزائے ضربی کا طریقہ ایک ایسا عمل ہے جس میں کسی عبارت کو اس کے جز ضربی کے حاصلِ ضرب میں لکھا جاتا ہے۔

2۔ ایک جز ضربی جس کو مزید اجزاء کے حاصل ضرب میں نہیں لکھا جاسکتا" نا قابل تخفیف" جز ضربی کہا جاتا ہے۔

3۔ ایک عبارت کو مماثلات: $a^2+2ab+b^2$ ؛ $a^2-2ab+b^2$ ؛ a^2-b^2 اور $x^2+(a+b)x+ab$

کے اجزائے ضربی میں تحویل کیا جاسکتا ہے۔

4۔ اگر دی گئی عبارت $x^2+(a+b)x+ab$ کی شکل میں ہو تو اس کے اجزائے ضربی $(x+a)(x+b)$ ہوں گے۔

5۔ عمل تقسیم، عمل ضرب کا معکوس ہوتا ہے۔ یہ تصور الجبرئی عبارتوں کی تقسیم کے لیے درست ہے۔

گولڈ بیک کا اقتباس

گولڈ بیک نے اپنے مشاہدات کی بنا پر یہ معلوم کیا کہ ہر طاق عدد، مفرد لگتا ہے یا مفرد اعداد کا مجموعہ ہوتا ہے یا ایک طاق عدد اور اس کے مربع کے دُگنا کا مجموعہ ہوتا ہے۔

لہٰذا 21=19+2 یا 21=13+8 یا 21=3+18

یہ بیان کیا گیا ہے کہ عدد 9000 تک صرف ایک عدد ایسا ہے جو نا تو خود مفرد ہے اور نا مفرد عدد اور اس کے مربع کے دُگنے کا مجموعہ ہوتا ہے۔ 5993=12×641 اور 5777=53×109

جو کہ نہ ہی مفرد ہے نہ ہی مفرد کا مجموعہ ہیں اور نہ ہی مربع کا دُگنا

SCERT TELANGANA

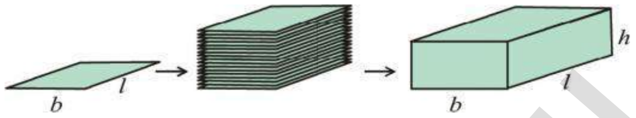
13 سہ ابعادی (3D) اشکال کی دو ابعادی (2D) اشکال میں منظر کشی

Visualising 3D in 2D

13.0 تعارف:

ہم سہ ابعادی دنیا میں زندگی گزار رہے ہیں۔ ہمارے اطراف و اکناف پائی جانے والی اشیا سہ ابعادی ہوتی ہیں۔ ہم مشاہدے کے ذریعہ دو ابعادی اشکال اور سہ ابعادی اشکال میں فرق محسوس کر سکتے ہیں۔ دیوار پر چسپاں کیے گیے پوسٹر کو دیکھیے' اس کی سطح مستطیلی ہے یہ کتنے ابعاد رکھتا ہے؟ اس کے دو ابعاد ہیں وہ طول اور عرض ہیں' کتاب کا مشاہدہ کیجیے اس کی شکل کیسی ہے؟ یہ مکعب نما کی شکل میں ہے۔اس کے 3 ابعاد ہیں۔اس میں طول اور عرض کے علاوہ بلندی ہے۔

مثلث' مربع' مستطیل دو ابعادی مسطح اشکال ہیں۔جبکہ مکعب' مکعب نما سہ ابعادی اشکال ہیں دو ابعادی اجسام کو ایک دوسرے پر ترتیب دینے پر یہ تھوڑی سی جگہ گھیرتے ہیں اور سہ ابعادی اجسام میں تبدیل ہوجاتے ہیں جیسا کہ متصلہ شکل میں بتلایا گیا ہے۔اس میں حجم بھی پایا جاتا ہے۔



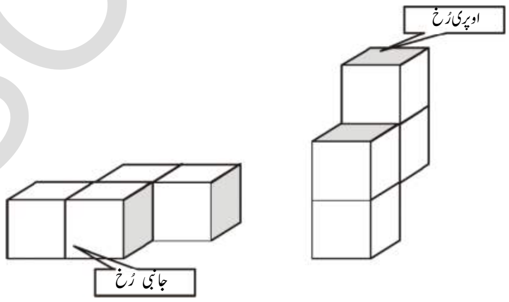
یہ کیجیے

1۔ چند سہ ابعادی اجسام کے نام لکھیے۔
2۔ چند دو ابعادی اجسام کی مثالیں دیجیے۔
3۔ اپنی نوٹ بک میں ایک پتنگ اُتاریئے۔کیا یہ دو ابعادی جسم ہے یا سہ ابعادی جسم؟
4۔ چند ایسے اجسام کی شناخت کیجیے جو مکعب اور مکعب نما کی شکل میں ہوتی ہیں۔
5۔ ایک دائرہ اور ایک کرہ کے کتنے ابعاد ہوتے ہیں؟

13.1 مکعبوں کے ذریعہ سہ ابعادی اجسام کی تیاری:

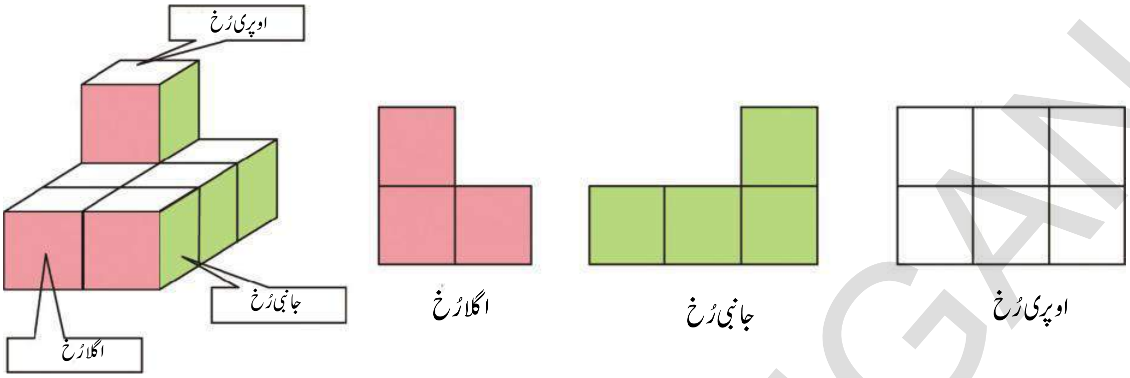
حسب ذیل ٹھوس اجسام کا مشاہدہ کیجیے۔یہ دونوں چار اکائی مکعبوں کے ذریعہ تشکیل دیے گیے ہیں۔

اگر ہم ان کا مختلف مقامات سے مشاہدہ کرتے ہوں تب یہ مختلف نظر آتے ہیں۔ لیکن شئے ایک ہی ہے۔



SCERT TELANGANA

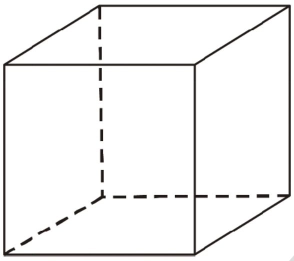
بالکل اسی طرح ایک ٹھوس شئے کو مختلف سمتوں سے دیکھنے پر وہ مختلف اشکال میں نظر آتی ہے۔مثلاً



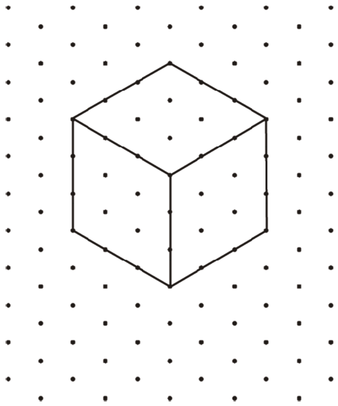
سوچیے اور تبادلہ خیال کیجیے

مندرجہ بالا اشکال کے اوپری رُخ اور قاعدے کا رقبہ اور احاطہ کس طرح معلوم کریں گے؟

13.2 : سہ ابعادی اشکال کا دوابعادی پر اظہار

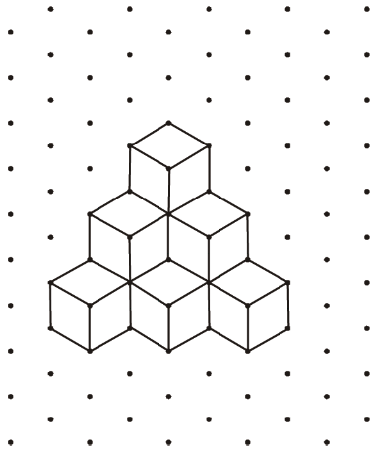


ہم سہ ابعادی اشکال کو کاغذ پر اُتارتے ہیں جو کہ دوابعادی ہوتے ہیں تیسرا ابعاد صرف تخیلی ہوتا ہے۔ہم بخوبی جانتے ہیں کہ سہ ابعادی مکعب نما شئے کو متصلہ شکل کے ذریعہ ظاہر کرتے ہیں مکعب کے تمام کنارے طول میں مساوی ہوتے ہیں لیکن متصلہ شکل میں یہ مساوی نہیں ہیں۔ یہ ہماری نظر کے مطابق اُتارا گیا ہے ۔اس مسئلے پر قابو پانے کے لیے ہم ”ہم پیائشی“ نقاط والا کاغذ استعمال کرتے ہیں جس میں ہم سہ ابعادی ٹھوس اشیا کے طول، عرض اور بلندی کی بالکل درست پیائش کرسکتے ہیں۔



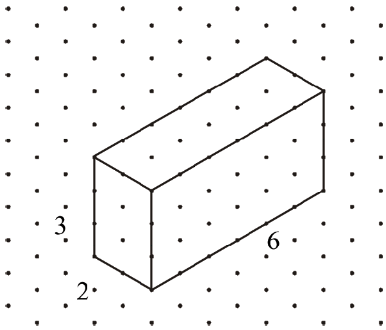
SCERT TELANGANA

مثال1: متصلہ شکل میں مکعبوں کی تعداد کی شناخت کیجیے۔



حل: یہاں مکعبوں کی تین تہہ (پرتیں) موجود ہیں اوپر کی تہہ میں صرف ایک مکعب ہے دوسری تہہ میں تین مکعب ہیں (ایک چھپا ہواہے) اور نچلی تہہ میں چھ مکعب ہیں (جہاں تین چھپے ہوئے ہیں)۔اس طرح کل مکعبوں کی تعداد =1+3+6 = 10 مکعب

مثال2: متصلہ شکل میں مکعب نما کی پیمائشات معلوم کیجیے۔دو متصلہ نقاط کے درمیان موجود فاصلے کو 1 اکائی تصور کریں۔

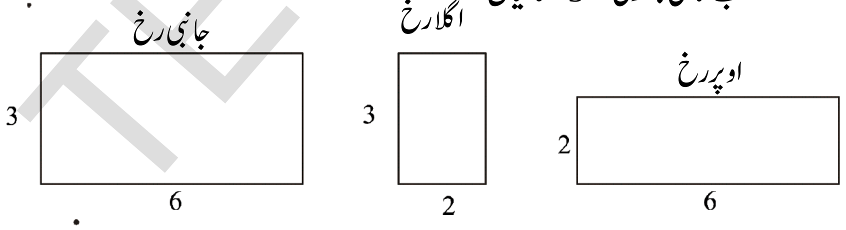


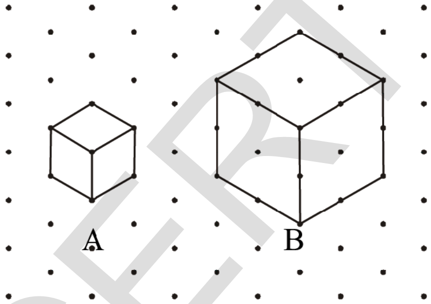
اس کے ساتھ ساتھ جانبی رُخ، اگلا رُخ اور اوپری رُخ کو اُتاریئے اور انکی پیمائش کیجیے۔

حل: مکعب نما کا طول = 6، اکائیاں

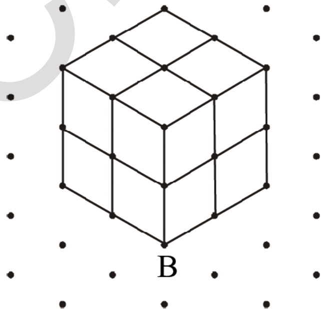
مکعب نما کا عرض = 2، اکائیاں

مکعب نما کی بلندی= 3، اکائیاں





مثال3: متصلہ شکل کو دیکھیے۔مکعب 'A' اور مکعب 'B' میں اکائی مکعبوں کی تعداد معلوم کیجیے۔اور انکی نسبت معلوم کیجیے۔

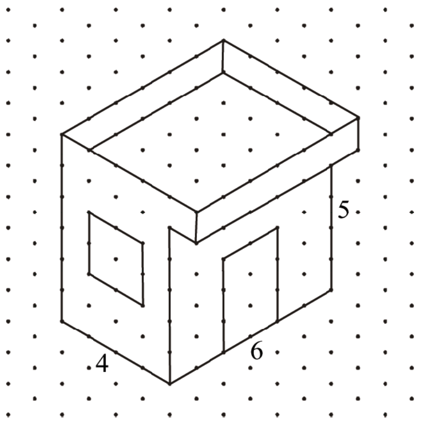


حل: 'A' میں صرف ایک اکائی مکعب ہے۔شکل 'B' میں تمام اضلاع کے متوازی خطوط کھینچ کر اب ہم اس کو دو اکائی مکعبوں میں تقسیم کریں گے اور شمار کریں گے۔

اس طرح 'B' میں اکائی مکعبوں کی تعداد = 8، A اور B کے اکائی مکعبوں کی نسبت = 1:8

SCERT TELANGANA

مثال 4:   متصلہ شکل میں ایک ''ہم پیمائشی نقاط' والے کاغذ پر ایک مکان کا نقشہ دیا گیا ہے مکان کے طول' عرض اور بلندی کی پیمائش کیجیے چھت کو آگے تک بڑھایا گیا ہے۔ چھت کا رقبہ معلوم کیجیے۔



حل: مکان کا طول = 6' اکائیاں

مکان کا عرض = 4' اکائیاں

مکان کی بلندی = 5' اکائیاں

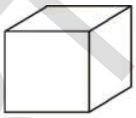
چھت کو 1' اکائی بڑھایا گیا۔

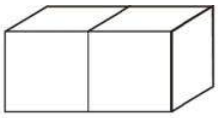
چھت کے ابعاد = 5 x 6 اکائیاں

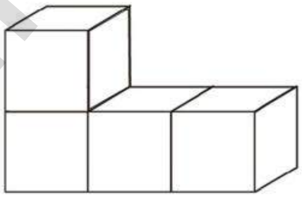
چھت کا رقبہ = 5 x 6 = 30 مربع اکائیاں

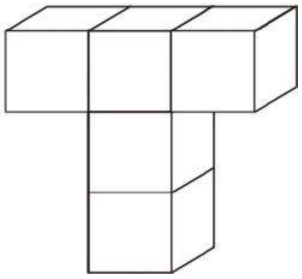
مشق 13.1

1۔   حسب ذیل سہ ابعادی اشکال کو "ہم پیمائشی نقاط" والے کاغذ پر اُتاریئے۔

(i)


(ii)


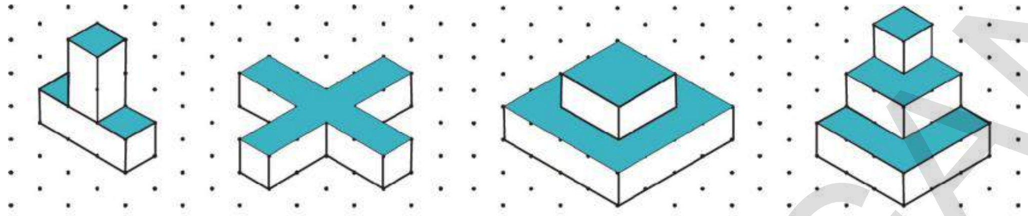
(iii)


(iv)


2۔   ایک مکعب نما تو ''ہم پیمائشی نقاط' والے کاغذ پر اُتاریئے جس کی پیمائشات 5' اکائیاں x 3' اکائیاں x 2' اکائیاں ہیں۔

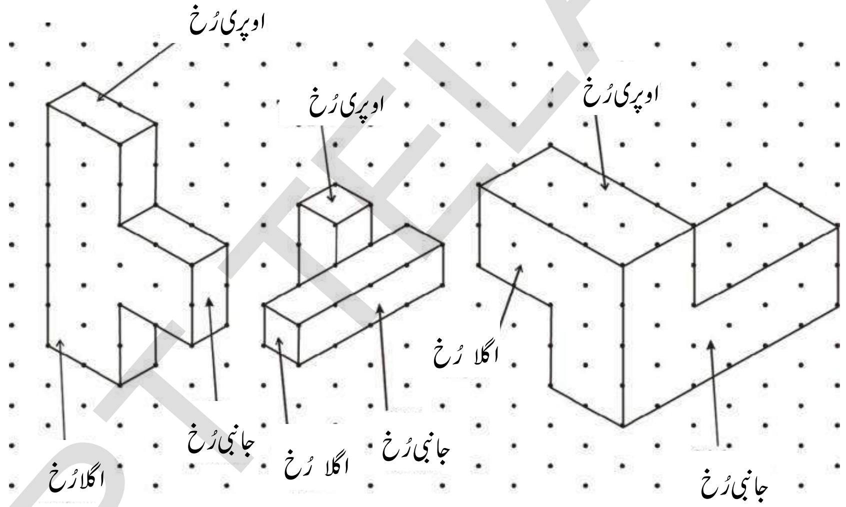
یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 20-2019

3۔ حسب ذیل سہ ابعادی اشکال میں اکائی مکعبوں کی تعداد معلوم کیجیے۔



4۔ سوال نمبر 3 میں دی گئیں اشکال میں سائے دار خطّے کا رقبہ معلوم کیجیے۔

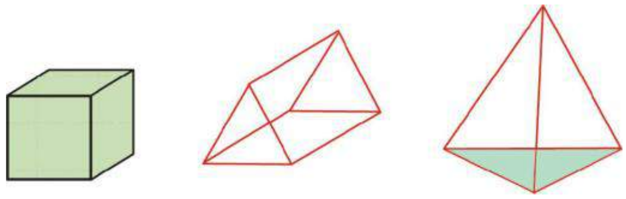
5۔ دو متصلہ نقاط کے درمیانی فاصلہ کو 1 اکائی لیتے ہوئے حسب ذیل سہ ابعادی اشکال کے-اگلے رُخ، جانبی رُخ اور اوپری رُخ اُتاریے۔



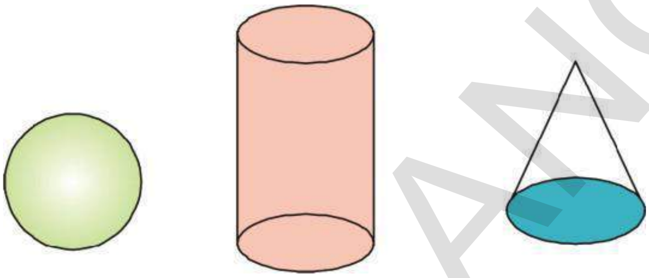
13.3: مختلف جیومٹریائی ٹھوس اجسام

ہم اپنے اطراف و اکناف مختلف ٹھوس اجسام دیکھتے ہیں ان میں چند ٹھوس اجسام منحنی رُخ والے اور چند مسطح رُخ والے۔ سہ ابعادی اجسام جیسے صندوق، کتاب، پانسہ وغیرہ مسطح رُخ کے ہوتے ہیں۔ چند سہ ابعادی اجسام جیسے گیند، پائپ، وغیرہ منحنی رُخ والے ہوتے ہیں اس خصوصیت کی بنیاد پر ہم سہ ابعادی ٹھوس اجسام کی درجہ بندی کثیر پہلوئی (polyhedra) اور غیر کثیر پہلوئی (non-polyhedra) میں کرتے ہیں۔

حسب ذیل اجسام کا مشاہدہ کیجیے۔



کیا مندرجہ بالا ٹھوس کے رُخ منحنی ہیں؟ نہیں! تمام اجسام کے رُخ مسطح ہیں۔اس قسم کے تمام کثیرالاضلاع اجسام کثیر پہلوئی (polyhedra) کہلاتے ہیں۔(polyhedra کا واحد polyhedron ہے)۔



اوپر دیے گیے اجسام کے رُخ منحنی ہیں۔اس قسم کے ٹھوس اجسام (Non-polyhedron) کہلاتے ہیں۔

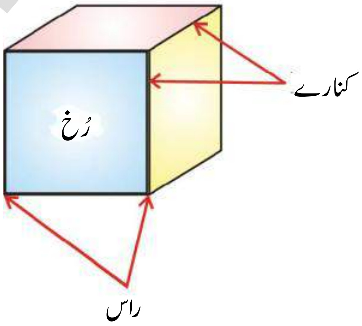
کوشش کیجیے

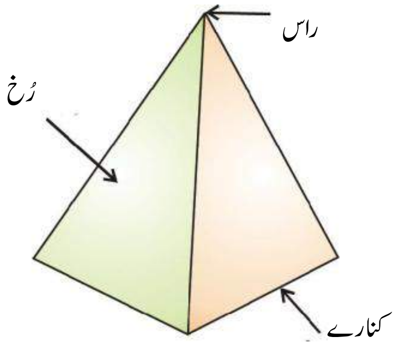
1۔ کوئی تین اشیا کے نام لکھیے جو کثیر پہلوئی (polyhedra) کی مثالیں ہیں۔

2۔ کوئی تین اشیا کے نام لکھیے جو غیر کثیر پہلوئی (Non-polyhedra) کی مثالیں ہیں۔

13.4 : سہ ابعادی اجسام کے رُخ، کنارے اور راس

اپنے رہائشی کمرہ کی دیواروں، کھڑکیوں، دروازوں، فرش، چھت وغیرہ کا مشاہدہ کیجیے اور میز، صندوق وغیرہ کا بھی مشاہدہ کیجیے ان کے رُخ مسطح ہو تے ہیں۔ مسطح رُخ ایک دوسرے سے ان کے کناروں پر ملتے ہیں۔ دو یا دو سے زائد کنارے، کونوں پر ملتے ہیں۔اس کا ہر ایک کونا راس کہلاتا ہے۔ایک مکعب لیجیے اور اس بات کا مشاہدہ کیجیے کہ اُس کے رُخ کہاں ملتے ہیں؟ اور اس کے کنارے کہاں ملتے ہیں۔

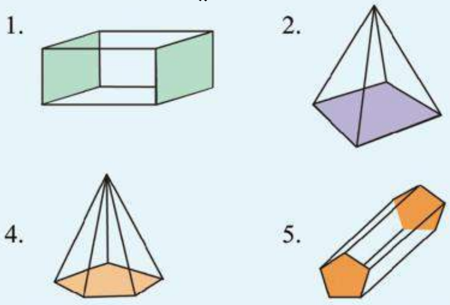




SCERT TELANGANA

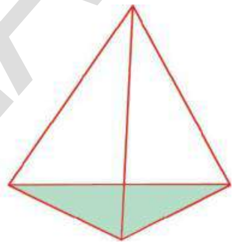
یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20

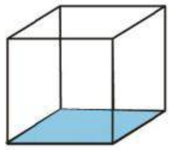
یہ کیجیے
دی گئیں اشکال کے کنارے، رُخ اور راس کی نشاندہی کیجیے۔



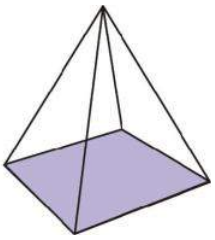
13.5 منتظم کثیر پہلوئی ٹھوس (Regular Polyhedron)

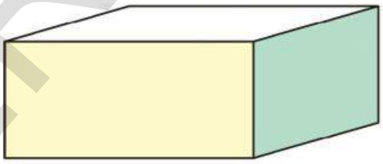
ذیل کی اشکال کے کنارے، رُخ اور راس کا مشاہدہ کیجیے۔


مثلثی مخروط (چار پہلوئی ٹھوس)


مکعب

اوپر دیے گیے دونوں اجسام میں، ان کے تمام رُخ ایک دوسرے کے مماثل ہیں۔ ان کے تمام کنارے مماثل ہیں اور ان کے ہر راس پر ملنے والے کناروں کی تعداد مساوی ہے۔ اس طرح تمام ٹھوس اجسام منتظم کثیر پہلوئی ٹھوس کہلاتے ہیں۔ اب ذیل کی اشکال کا مشاہدہ کیجیے!


مربعی مخروط

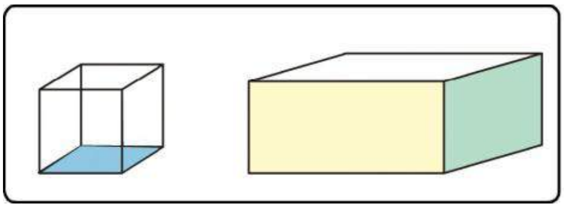

مکعب نما

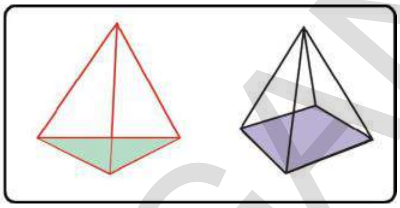
مکعب نما ایک غیر منتظم کثیر پہلوئی ٹھوس ہے کیونکہ اس کے تمام رُخ مماثل نہیں ہیں اور مربعی مخروط میں ایک راس چار کناروں سے مل کر بنا ہے اور ایک راس تین کناروں سے مل کر بنا ہے۔ اس کے ساتھ ساتھ مربعی مخروط کے تمام رُخ متماثل نہیں ہیں لہٰذہ مربعی مخروط بھی ایک غیر منتظم کثیر پہلوئی ٹھوس ہے۔ اس طرح کے ٹھوس اجسام غیر منتظم کثیر پہلوئی ٹھوس کہلاتے ہیں۔

لہٰذہ کثیر پہلوئی ٹھوس اجسام کی درجہ بندی منتظم کثیر پہلوئی ٹھوس اور غیر منتظم کثیر پہلوئی ٹھوس میں کی جاسکتی ہے۔

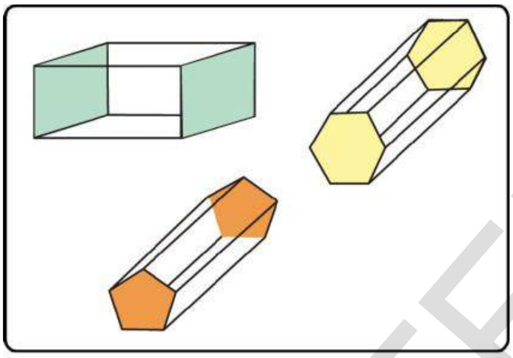
13.5.1: منشور اہرام اور مخروط ضلعی

حسب ذیل اجسام کا مشاہدہ کیجیے۔

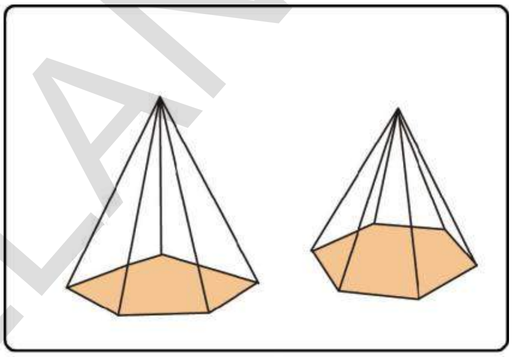




پہلے صندوق میں موجود اجسام کے اوپری رُخ اور قاعدے کے رُخ یکساں ہیں، دوسرے صندوق میں موجود اجسام کے قاعدے کے رُخ یکساں ہیں لیکن اوپر ایک مشترک راس ہے۔ آیئے اب ہم اس طرح چند مزید اجسام کا مشاہدہ کریں گے۔



(a)



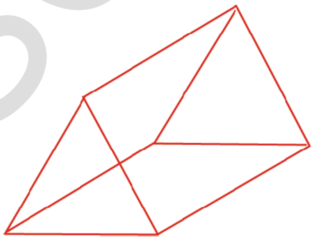
(b)

شکل (a) میں ہر جسم کے دو متوازی اور مماثل کثیر ضلعی رُخ ہیں اور اس کے طرفی رُخ مستطیل ہیں (یا متوازی الاضلاع) شکل (b) میں قاعدہ کثیر ضلعی ہے اور طرفی رُخ مثلثی ہیں یہ ایک مشترک راس پر ملتے ہیں ٹھوس اجسام جن میں دو متوازی اور مماثل کثیر ضلعی رُخ مستطیل نما متوازی الاضلاع ہوں منشور کہلاتے ہیں۔

ایک ٹھوس مجسم جس کا قاعدہ کثیر ضلعی اور اس کے طرفی رُخ مثلث ہوں اہرام کہلاتا ہے۔ مماثل کثیر ضلعی رُخ اور قاعدے کی شکل کی بنیاد پر ہم انھیں "منشور" یا "اہرام" سے موسوم کرتے ہیں۔

A۔ مثلثی منشور

متصلہ شکل میں متماثل اور متوازی رُخ کس وضع کے ہیں اور اس کے طرفی رُخ کی وضع کیسی ہے؟ اس کے دو مماثل اور متوازی رُخ مثلث ہیں اور اس کے طرفی رُخ متوازی الاضلاع ہیں۔ یہ مثلثی منشور کہلاتا ہے

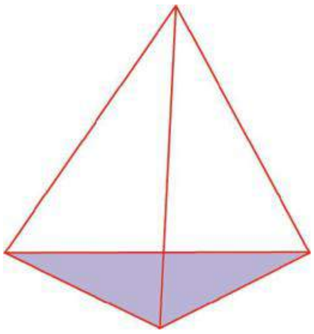


اگر اس کا قاعدہ مربع ہو تو یہ مربعی منشور کہلاتا ہے۔

اگر اس کا قاعدہ مخمس ہو تب یہ مخمسی منشور کہلاتا ہے۔

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 20-2019

SCERT TELANGANA

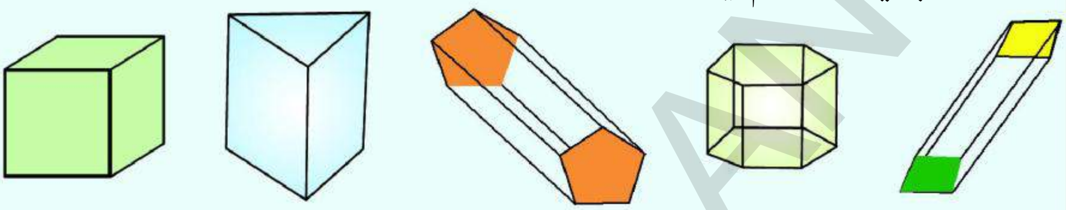


B۔ مثلثی اہرام

ایسا اہرام جس کا قاعدہ مثلث ہو مثلثی اہرام کہلاتا ہے۔اور چار سطحی جسم (tetrahydron) کہلاتا ہے (tetra کا مطلب چار پہلو یا رُخ والا جسم) اگر کسی اہرام کا قاعدہ مربع ہو تب وہ مربعی اہرام کہلاتا ہے۔ اگر کسی اہرام کا قاعدہ مخمس ہو تب وہ مخمسی اہرام کہلاتا ہے۔

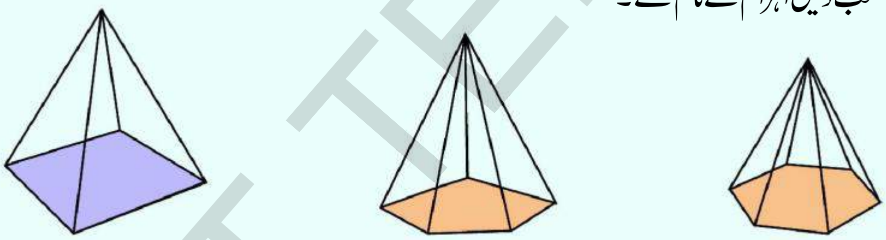
یہ کیجیے۔

1۔ حسب ذیل منشور کے نام لکھیے۔



(i) (ii) (iii) (iv) (v)

2۔ حسب ذیل اہرام کے نام لکھئے۔



(i) (ii) (iii)

3۔ ذیل کے جدول کی خانہ پُری کیجیے۔

قاعدے کے اضلاع کی تعداد	منشور کا نام	اہرام کا نام
منشور/اہرام		
3اضلاع		
4اضلاع		
5اضلاع		
6اضلاع		
8اضلاع		

4۔ منشور اور اہرام کے درمیان فرق کی وضاحت کیجیے۔

SCERT TELANGANA

سوچئے، تبادلہ خیال کیجیے اور لکھئے

ایک منتظم اہرام کے قاعدے کے کثیر اضلاع کی تعداد کو لامتناہی بڑھانے پر وہ اہرام کونسی شکل اختیار کر لیتا ہے۔

13.6 : کثیر ضلعی کے کنارے، رُخ اور راس

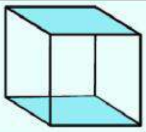
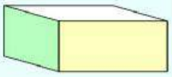
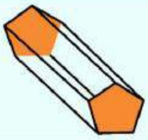
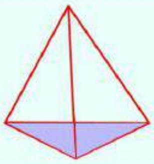
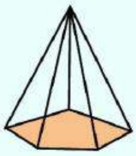
ہم کثیر ضلعی کے رُخ، کنارے اور راس کی تعداد کی گنتی کریں گے۔

رُخوں کی تعداد = 5

کناروں کی تعداد = 9

راسوں کی تعداد = 6

مشاہدہ کیجیے اور جدول کو مکمل کیجیے۔

جسم کا خاکہ	جسم کا نام	رُخوں کی تعداد (f)	راسوں کی تعداد (v)	کناروں کی تعداد (c)	F+V	E+2
	مکعب	6	8	12	6+8=12	12+2=14
	مکعب نما					
	خمسی منشور					
	چار سطحی یا مجسم					
	خمسی ہرم					

مندرجہ بالا آخری دو مشاہدوں سے ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ:

تمام کثیر ضلعی ٹھوس اجسام کے لیے E+2=F+V ہوں گے۔

SCERT TELANGANA

لیونارڈ یولر
(1707-1783)

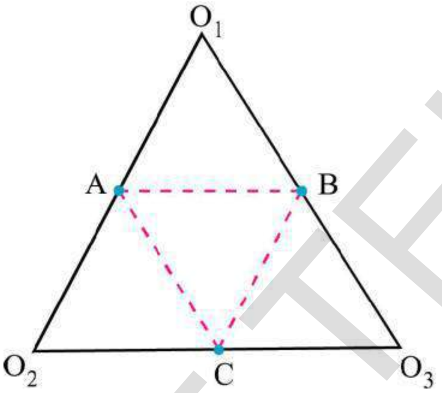
اس رشتہ کو سب سے پہلے ریاضی داں لیونارڈ یولر نے پیش کیا
اس نے اس کو اس طرح بیان کیا : $F+V = E+2$
یہ رشتہ یولر کا رشتہ کہلاتا ہے۔

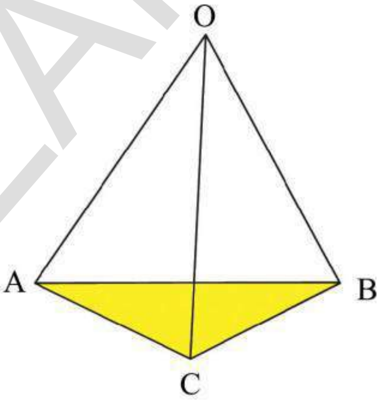
13.7: جال کے خاکے

جال دوابعادی میں ایک قسم کے بنیادی خطوط کا ڈھانچہ ہوتا ہے جب جال کو تہہ کیا جاتا ہے تب وہ سہ ابعادی ہو جاتا ہے اس طرح ہم جال نما خاکوں کو استعمال کرتے ہوئے منشور اور اہرام بنا سکتے ہیں۔

حسب ذیل میں مثلثی اہرام کی تشکیل کا مشغلہ دیا گیا ہے مشاہدہ کیجیے۔

کاغذ کا ایک ٹکڑا لیجیے اور اس کو مثلث کی شکل میں تراشیئے۔ راس O_1, O_2, O_3 کی نشاندہی کیجیے اور وسطی نقاط کی C, B, A سے نشاندہی کیجیے۔

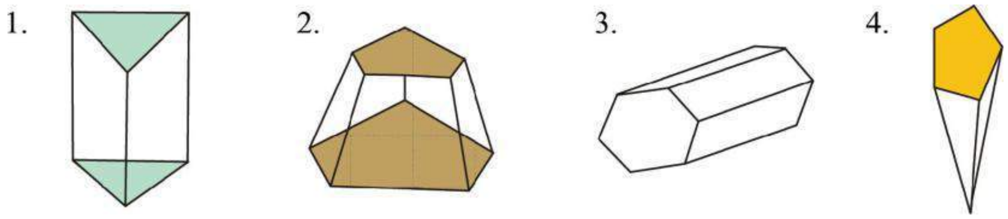




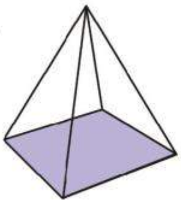
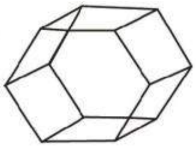
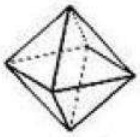
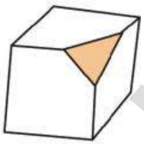
کاغذ کو نقاطی خطوط AB، BC اور CA کے مطابق موڑیئے اور مڑی ہوئی تہہ کو اس طرح اُٹھایئے کہ O_1, O_2, O_3 ایک دوسرے سے مل جائیں (اسکا نام O دیں) اس سے AO_1، AO_2 پر BO_1، BO_3 پر CO_2، CO_3 پر منطبق ہو جائیں گے اس طرح بننے والی شئے اہرام کہلاتی ہے۔ O_1, O_2, O_3 کیا ہرم کے جال نما خاکے ہیں۔

مشق 13.2

1۔ دی گئیں کثیر ضلعی اشکال کے رُخ، راس اور کنارے گنیے کیجیے اور یولر کے ضابطے سے تصدیق کیجیے



SCERT TELANGANA

5.  6.  7.  8. 

2۔ کیا مربعی منشور اور مکعب ایک ہی ہوتے ہیں؟ سمجھائیے۔

3۔ کیا کثیر پہلوئی ٹھوس (Polyhedra) میں 3 مثلثی رُخ ہو سکتے ہیں؟ سمجھائیے۔

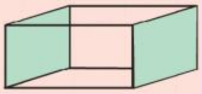
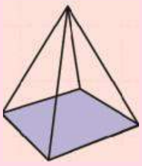
4۔ کیا کثیر پہلوئی ٹھوس (polyhedra) میں 4 مثلثی رُخ ہو سکتے ہیں؟ سمجھائیے۔

5۔ یولر کے ضابطے کو استعمال کرتے ہوئے ذیل کے جدول کو مکمل کیجیے۔

رُخ	8	5	؟
راس	6	؟	12
کنارے	؟	9	30

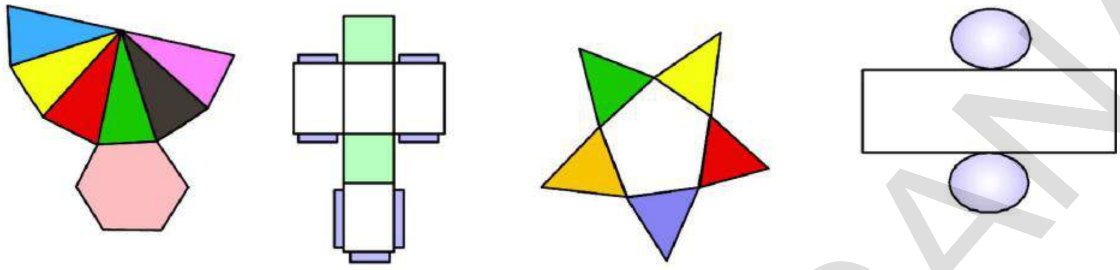
6۔ کیا کثیر پہلوئی ٹھوس (polyhedra) میں 10 رُخ، 20 کنارے اور 15 راس ہو سکتے ہیں؟

7۔ حسب ذیل جدول کو مکمل کیجیے۔

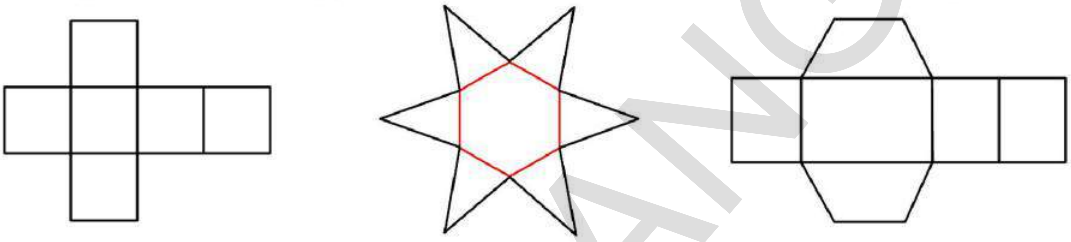
اجسام	راسوں کی تعداد	کناروں کی تعداد
		
		

SCERT TELANGANA

8۔ ان ہمہ ابعادی اجسام یا اشکال کے نام لکھیے جو ذیل میں دی گئی جالیوں کی بنائی جاسکتی ہوں۔



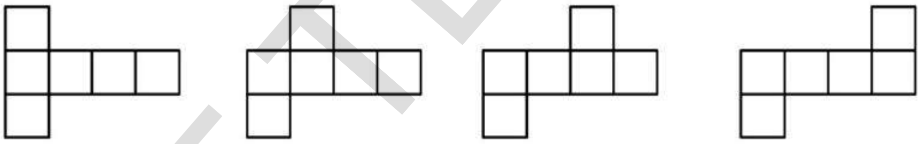
(i) (ii) (iii) (iv)



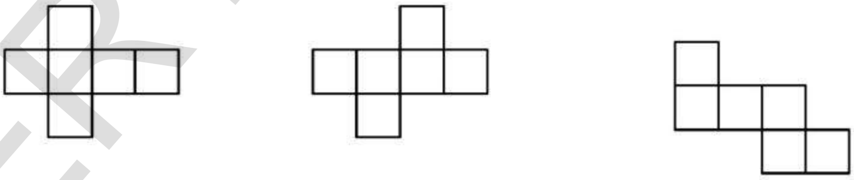
(v) (vi) (vii)

9۔ حسب ذیل خاکوں کو مربعی خانوں والی نوٹ بک میں اُتاریئے اور یہ معلوم کیجیے کہ ان میں کون سے خاکے مکعب بناتے ہیں؟

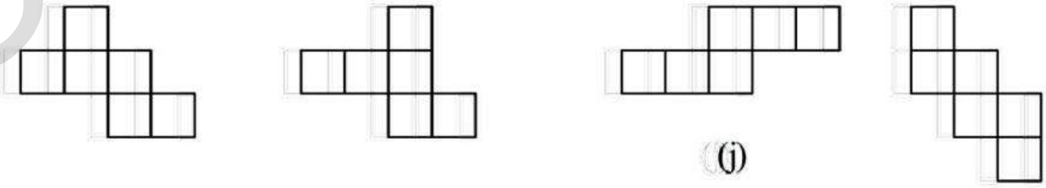
(i)



(a) (b) (c) (d)



(e) (f) (g)



(h) (i) (j) (k)

SCERT TELANGANA

(ii) ذیل کے سوالات کے جوابات دیجیے۔

(a) اس کثیر پہلوئی ٹھوس شکل (Polyhedra) کا نام بتلایئے جس کے 4 رُخ اور 4 راس ہوتے ہیں؟

(b) ٹھوس جسم کا نام بتلایئے جس میں راس نہیں ہوتا؟

(c) اس کثیر پہلوئی ٹھوس شکل (Polyhedra) کا نام بتلایئے جس کے 12 کنارے ہوتے ہیں؟

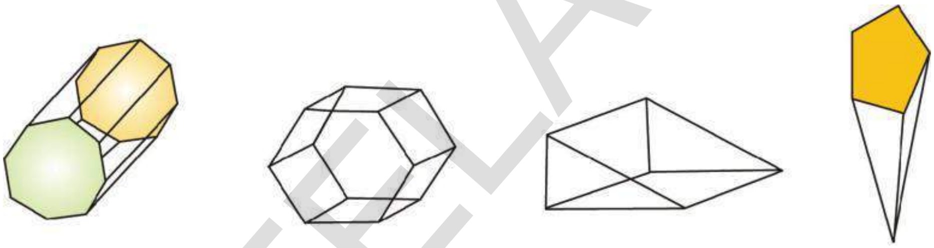
(d) ٹھوس جسم کا نام بتلایئے جس میں سطح نہیں ہوتی؟

(e) ایک مکعب اور ایک مکعب نما میں کیا فرق ہوتا ہے؟

(f) وہ کون سی دو اشکال ہیں جن کے رُخوں، کناروں اور راسوں کی تعداد مساوی ہوتی ہے

(g) اس کثیر پہلوئی ٹھوس شکل (Polyhedra) کا نام بتلایئے جس کے 5 رُخ اور 5 راس ہوتے ہیں؟

(iii) ذیل میں دیے گئے اجسام کے نام لکھیے۔



(a) (b) (c) (d)

ہم نے کیا سیکھا

1۔ ہم پیمائشی نقاط والے کاغذ پر ایک سہ ابعادی شکل کو دو ابعادی شکل میں اُتارنا۔

2۔ سہ ابعادی اشکال میں تین رُخ ہوتے ہیں: اوپری رُخ، جانبی رُخ اور اگلا رُخ۔

3۔ کثیر پہلوئی جسم: ہموار سطح والے ٹھوس اجسام کثیر پہلوئی جسم کہلاتے ہیں۔

4۔ منشور: ایسا کثیر پہلوئی ٹھوس جس کا قاعدہ اور اوپری رُخ مماثل (ایک ہی کثیر ضلعی) ہو اور باقی رُخ مستطیلی (متوازی الاضلاع) ہوں تو یہ ٹھوس "منشور" کہلاتا ہے۔

5۔ ہرم: ایسا کثیر پہلوئی ٹھوس جس میں ایک قاعدہ اور ایک راس ہو اور باقی رُخ مثلثی ہوں تو یہ ٹھوس "اہرام" کہلاتا ہے۔

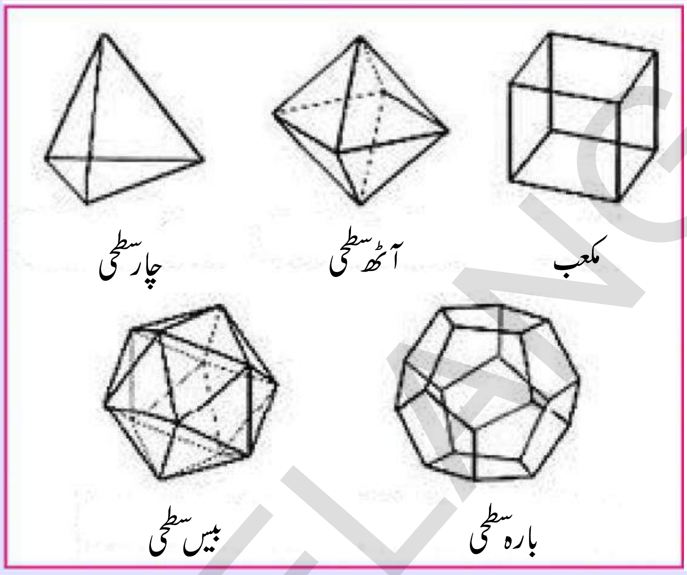
6۔ دو ابعادی جالیوں کے استعمال سے سہ ابعادی اجسام بنائے جاسکتے ہیں۔

7۔ یولر کا ضابطہ برائے کثیر پہلوئی ٹھوس: **F+V = E+2**

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20
SCERT TELANGANA

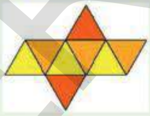
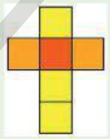
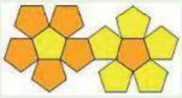
کیا آپ جانتے ہیں۔

عام طور پر صرف 5 قسم کے منتظم کثیر پہلوئی ٹھوس ہوتے ہیں ان تمام کو جو پیچیدہ ٹھوس ہوتے ہیں افلاطونی ٹھوس (Platonic) کہا جاتا ہے یہ اجسام افلاطون کے نام سے موسوم ہیں۔



مکعب ہی حرف کثیر پہلوئی ٹھوس شکل ہے جو خلاء کو بھرتا ہے۔

افلاطونی ٹھوس اجسام کی جالی دار شکلیں

کثیر پہلوئی ٹھوس کا نام	کثیر ضلعی کے رُخ کی شکل	جالی دار شکل
چار پہلوئی	چار مثلثات	
آٹھ پہلوئی	آٹھ مثلثات	
مکعب	چھ مربعے	
بیس پہلوئی	بیس مثلثات	
بارہ پہلوئی	بارہ مخمس	

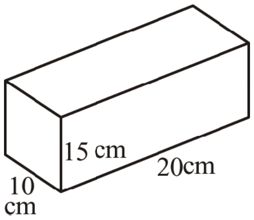
SCERT TELANGANA

14

سطحی رقبے اور حجم (مکعب اور مکعب نما)

Surface Areas and Volume (Cube and Cuboid)

14.0: تعارف



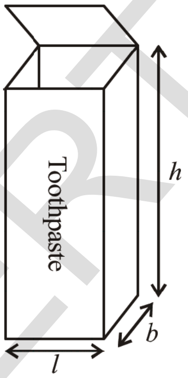
احمد اپنے گفٹ باکس پر گفٹ پیپر چپکانا چاہتا ہے۔ اس کے کسی دوست نے بتایا کہ اسے 100 مربع سمر کاغذ خریدنا پڑے گا جبکہ ایک اور دوست نے کہا کہ 200 مربع سمر گفٹ کے کاغذ کی ضرورت ہوگی۔ بتائیے کہ کس کی بات درست ہے؟ احمد کو یہ کیسے پتہ چلے کہ اسے کتنا کاغذ خریدنا ہے۔

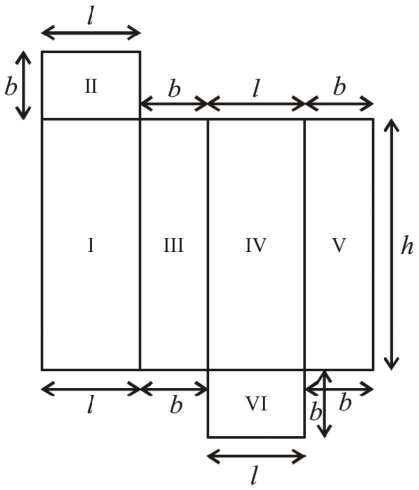
ظاہر ہے کہ گفٹ باکس کی سطح کا رقبہ جتنا ہوگا اتنے ہی کاغذ کی ضرورت ہوگی۔

ایسے موقعوں پر حسابات کرنے کے لیے ہمیں مختلف ٹھوس اشیا کی سطح کے رقبہ کو محسوب کرنا ہوتا ہے۔

14.1 مکعب نما

موٹے کاغذ یا کارڈ بورڈ سے مکعب نما کی شکل کا ایک ڈبہ تیار کیجیے۔ اس کے لیے ٹوتھ پیسٹ کا ڈبہ لیا جا سکتا ہے۔ شکل میں جیسا کہ بتایا گیا ہے اس ڈبے کو کاٹئے اور اس کی سطحوں کا مشاہدہ کیجیے۔ کتنی مساوی سطحیں آپ نے دیکھیں؟





اشکال کو دیکھیے اگر طول l ہو، عرض b ہو جبکہ بلندی h پائی گئی ہو تو آپ مساوی سطحوں کی تین جوڑیوں کو حاصل کر سکتے ہیں۔

SCERT TELANGANA

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20

اب ہم یہ دیکھتے ہیں کہ مکعب نما کی کل سطحوں کا رقبہ

رقبہI+ رقبہ II+ رقبہ III+ رقبہ IV+ رقبہ V+ رقبہ VI

$= h \times l + l \times b + b \times h + l \times h + b \times h + l \times b$

اس طرح کل سطحی رقبہ $= 2\,(h \times l + b \times h + b \times l)$

$= 2\,(lb + bh + hl)$

احمد کے گفٹ باکس کی بلندی 20 سم طول 10 سم اور عرض 15 سم میٹر ہے۔

لہٰذا ڈبے کی تمام سطحوں کا رقبہ مساوی ہے۔

$= 2(20 \times 10 + 10 \times 15 + 15 \times 20)$

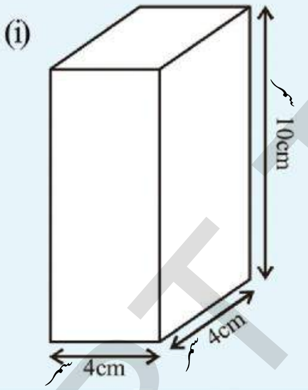
$= 2\,(200 + 150 + 300)$

$= 2\,(650) = 1300$ مربع سم

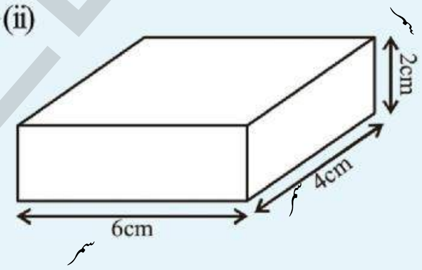
یہ کیجئے

1. حسب ذیل مکعب نماؤں کی کل سطحوں کا رقبہ معلوم کیجئے۔

(i)

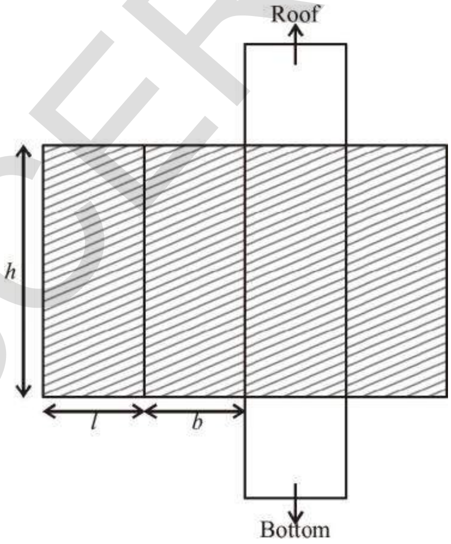


(ii)



14.1.2: پہلوی سطح کا رقبہ

مکعب نما کی پہلوی سطحوں (اوپر اور قاعدہ کی سطحوں کو شامل نہ کرتے ہوئے) کے رقبہ کو پہلوی سطح کا رقبہ کہتے ہیں۔ مثال کے طور پر آپ کے کمرہ کی چار دیواروں کا رقبہ جس میں آپ رہتے ہیں پہلوی سطح کا رقبہ کہلاتا ہے۔



لہٰذا کسی مکعب نما کی پہلوی سطح کا رقبہ =

$= (l \times h) + (b \times h) + (l \times h) + (b \times h)$

$= 2lh + 2bh$

$= 2h\,(l + b)$

SCERT TELANGANA

کوشش کیجئے

(i) آپ کی جماعت میں استعمال کیا جانے والا ڈسٹر لیجئے جو کہ مکعب نما ہوتا ہے۔اسکیل کی مدد سے اس کے ابعاد معلوم کیجئے اوراس کی سطحوں کا رقبہ محسوب کیجئے۔

(ii) اس ڈسٹر کو ترسیمی کاغذ سے لپیٹ دیجئے اس طرح سے کہ کاغذ ڈسٹر کی سطح کو برابر ڈھانکے۔اس کی سطحوں پر مربعوں کی گنتی کرتے ہوئے اس رقبہ کی جانچ کیجئے جو آپ نے محسوب کیا ہے۔

(iii) اپنے کمرہ جماعت کا طول٬عرض اور بلندی کی پیائش کیجئے اور

a) روم کی کل سطح کا رقبہ محسوب کیجئے۔کھڑکیوں اور دروازوں کے رقبوں کو نظر انداز کیجئے۔

b) کمرہ کی پہلوی سطح کا رقبہ معلوم کیجئے۔

c) کمرہ کی تمام سطحوں کا رقبہ معلوم کیجئے جس کی آہک پاشی کرنی ہے۔

سوچئے ، بحث کیجئے

1) کیا ہم کہہ سکتے ہیں کہ کسی مکعب نما کی کل سطح کا رقبہ = پہلوی سطحوں کا رقبہ + 2 x قاعدہ کا رقبہ

2) بتائی گئی اشکال کے مطابق شکل نمبر 1 سے شکل نمبر 2 کے انداز پر رکھنے کی صورت میں کیا مکعب نما کی پہلوی سطحوں کا رقبہ مساوی ہوگا؟

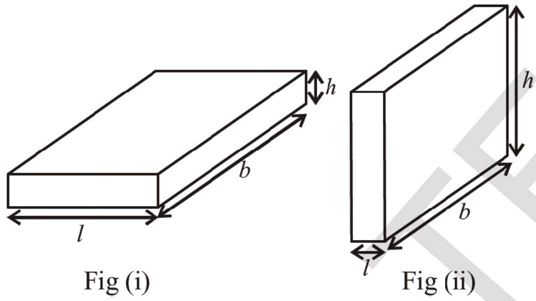
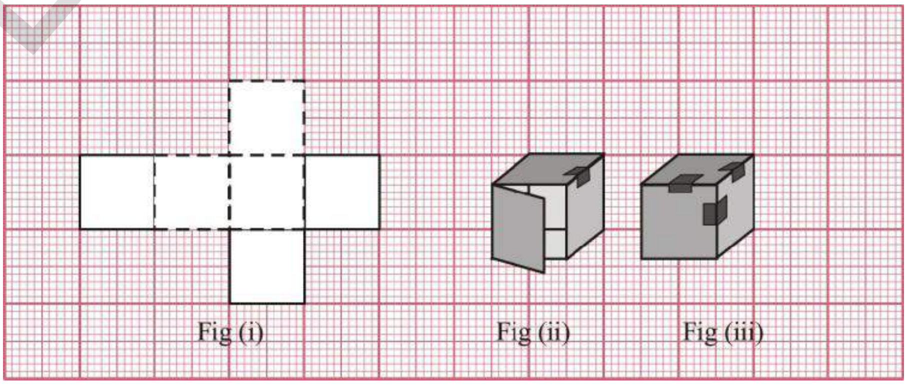


Fig (i) Fig (ii)

3) اگر مکعب نما کے ابعاد ($l = b = h$) مساوی ہوں تو شکل اتاریئے اور کل سطحوں کے رقبہ اور پہلوی سطحوں کے رقبہ کا ضابطہ تدوین کیجئے۔

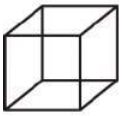
14.2: مکعب

گرڈ پیپر پر جس پر مربع بنے ہوئے ہیں شکل نمبر (i) بنایئے اوراسے کاٹ کر علیحدہ کیجئے۔اس کے کناروں کو جیسا کہ شکل (i) میں بتایا گیا ہے موڑیئے اورانہیں (ii) اور (iii) کے مطابق مکعب نما کی شکل میں لایئے۔آپ کو کیسی جسامت حاصل ہوئی؟ اس کے پہلوؤں اور ابعاد کا مطالعہ کیجئے۔

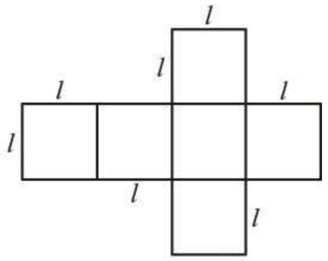


یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20
SCERT TELANGANA

اس مکعب کا اس مکعب نما سے تقابل کر کے دیکھئے جو آپ نے پہلے تیار کیا تھا۔ دونوں میں آپ نے کیا فرق محسوس کیا۔



(i)



(ii)

a) اشکال (iv) اور (v) کا مشاہدہ کیجئے۔ کیا مکعب کی تمام سطحیں مربع ہیں؟ کیا مکعب کی لمبائی، بلندی اور چوڑائی مساوی ہے؟

b) مکعب کے کتنے پہلو ہیں؟ کیا تمام پہلو مساوی ہیں؟

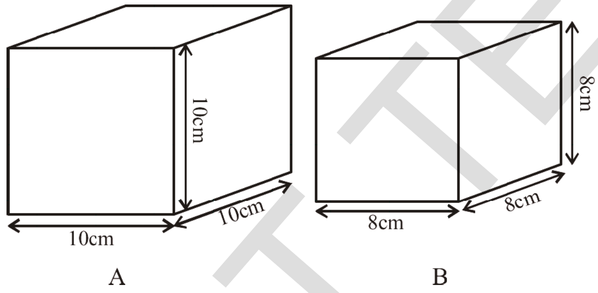
c) اگر مکعب کا ہر ضلع l اکائیاں ہے تو بتاؤ کہ ہر سطح کا رقبہ کیا ہوگا؟ (شکل (v))

d) مکعب کی کل سطح کا رقبہ محسوب کیجئے۔

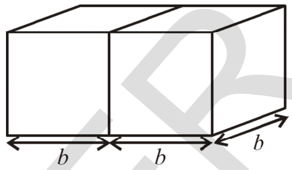
e) مکعب کی پہلوی سطحوں کا رقبہ معلوم کیجئے۔

کوشش کیجئے

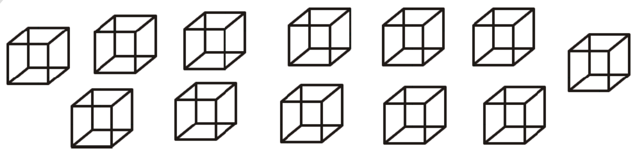
(i) نیچے دی گئیں اشکال میں مکعب 'A' کا رقبہ اور مکعب 'B' کی پہلوی سطح کا رقبہ معلوم کیجئے۔



(ii) دو مکعبوں کو جن میں سے ہر ایک کی سطح 'b' اکائیاں ہے ملالیا گیا جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔ بتاؤ کہ اس مکعب نما کی کل سطح کا رقبہ کیا ہوگا۔



(iii) بتائیے کہ آپ 12 مکعبوں کو جن کے ابعاد مساوی ہیں کم سے کم سطح پر مکعب نما کی شکل میں ترتیب دے سکیں گے؟



(iv) ایک مکعب جس کے ابعاد 4 x 4 x 4 ہیں کی سطح کو رنگین کیا گیا ہے۔ اس مکعب کو 64 مساوی مکعبوں میں کاٹا گیا۔ بتاؤ کہ کتنے مکعب (a) 1 سطح پر رنگین ہوئے؟ (b) 2 سطحوں پر رنگین ہوئے؟ (c) 3 سطحوں پر رنگین ہوئے؟ (d) کسی بھی سطح پر رنگین نہیں ہوئے۔

SCERT TELANGANA

مثال:1 ایک مکعب نما کی سطح کا رقبہ معلوم کیجئے جس کا طول، عرض اور بلندی بالترتیب 15 سمر، 12 سمر اور 10 سمر ہیں۔

مکعب نما کا طول(l) = 15cm

مکعب نما کا عرض(b) = 12cm

مکعب نما کی بلندی(h) = 10cm

مکعب نما کی سطح کا رقبہ = $2\,(lb + bh + hl)$

= $2\,(15 \times 12 + 12 \times 10 + 10 \times 15)$ مربع سمر

= $2\,(180 + 120 + 150)$ مربع سمر

= $2\,(450)$ مربع سمر

= 900 مربع سمر

مثال:2 اگر ایک مکعب کے کنارے کو دوگنا کر دیا گیا تو بتاؤ کہ اس کی سطح کے کل رقبہ میں کتنے گنا اضافہ ہوگا۔

حل: فرض کیجئے کہ مکعب کے کنارے کا طول x ہے

دوگنا کرنے کے بعد طول = $2x$

اصل مکعب کی سطح کا رقبہ = $6x^2$

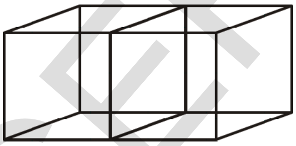
نئے مکعب کی سطح کا رقبہ جس کا کنارہ دوگنا کر دیا گیا = $6(2x)^2 = 24x^2 = 4 \times 6 \times x^2$

نئے مکعب کی سطح کا رقبہ = 4 اصل مکعب کی سطح کا رقبہ

لہٰذا نئے مکعب کی سطح کا رقبہ اصل مکعب کی سطح کے رقبہ کا 4 گنا ہوگا۔

مثال: 3 دو مکعبوں کو جن کے ضلع کی لمبائی 6 سمر ہے جوڑ دیا گیا۔ حاصل شدہ مکعب نما کی سطح کا رقبہ محسوب کیجئے۔

حل: دی گئی شکل کو غور سے دیکھئے جب دو مساوی مکعب جوڑ دیئے گئے ہوں تو حاصل ہونے والے مکعب نما کی 6 سطحیں ہوتی ہیں۔ پہلو کی دو سطحیں دکھائی نہیں دیتیں۔



ہمارے پاس 2 - 12 = 10 مربعی سطحیں ہیں

لہٰذا مکعب نما کی کل سطح کا رقبہ = $10 \times (6)^2$ مربع سمر

= 10×36 مربع سمر = 360 مربع سمر

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20
SCERT TELANGANA

متبادل طریقہ

اگر دو مکعبوں کو جن کا ضلع 6 سم ہے جوڑ دیا جائے تو ایسا مکعب نما حاصل ہوگا جس کا طول، عرض اور بلندی بالترتیب (6+6) سینٹی میٹر، 6 سینٹی میٹر اور 6 سینٹی میٹر یعنی 12 سینٹی میٹر، 6 سینٹی میٹر اور 6 سینٹی میٹر ہوں گے اس طرح مکعب نما کی کل سطح کا رقبہ

$= 2(lb + bh + lh)$

$= 2(12 \times 6 + 6 \times 6 + 12 \times 6)$ مربع سم

$= 2(72 + 36 + 72)$ مربع سم

$= 2 \times 180$ مربع سم

$= 360$ مربع سم

مثال 4: ایک بند ڈبے کی جس کی لمبائی 60 سم، عرض 40 سم اور بلندی 30 سم ہے۔ بیرونی سطح پر پینٹنگ کرنے کی قیمت 50 پیسے فی 20 مربع سم کے حساب سے کیا ہوگی؟

ڈبے کی لمبائی (l) $= 60$ سم

ڈبے کی چوڑائی (b) $= 40$ سم

ڈبے کی بلندی (h) $= 30$ سم

ڈبے کی کل سطح کا رقبہ $= 2(lb + bh + hl)$

$= 2(60 \times 40 + 40 \times 30 + 60 \times 30)$ مربع سم

$= 2(2400 + 1200 + 1800)$ مربع سم

$= 2 \times 5400$ مربع سم

$= 10800$ مربع سم

پینٹنگ کی لاگت فی 20 مربع سم $= 50$ پیسے $= ₹ \frac{50}{100}$

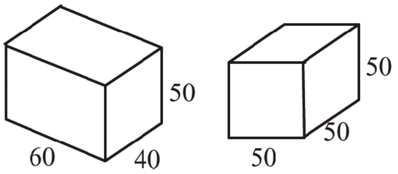
پینٹنگ کی لاگت فی مربع سم $= ₹ \frac{50}{100} \times \frac{1}{20}$

پینٹنگ کی لاگت 10800 مربع سم کے لئے $= ₹ \frac{50}{100} \times \frac{1}{20} \times 10,800 = ₹ 270$

SCERT TELANGANA

مشق - 14.1

1) یہاں پر دو مکعب نما ڈبوں کی اشکال دی گئی ہیں۔ پہچانئے کہ ان میں کس ڈبے کو بنانے میں خرچ کم ہوگا۔

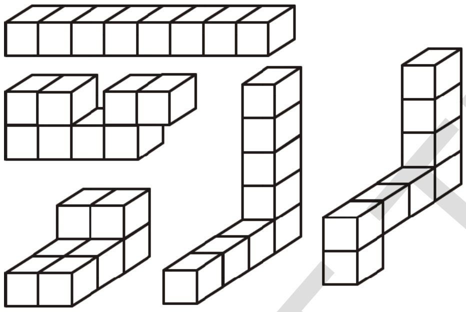


2) اس مکعب کا ضلع معلوم کیجیے جس کی سطح کا رقبہ 600 مربع سمر ہے۔

3) رفیعہ نے اپنی الماری کے کیبینیٹ کی سطح کو رنگ کیا۔ اس کیبینیٹ کے ابعاد 1 میٹر x 2 میٹر x 1.5 میٹر ہیں۔ اگر کیبینیٹ کے قاعدہ کے سوا تمام کو رنگ کرنے کی صورت میں بتائیے کہ اس نے کتنی سطح پر رنگ کیا۔

4) ایک مکعب نما پر رنگ چڑھانے کی قیمت معلوم کرو جس کے ابعاد 20 سمر x 15 سمر x 12 سمر ہیں اور فی مربع سمر رقبے کے لیے 5 پیسے خرچ آتا ہے۔

14.3: مکعب اور مکعب نما کا حجم



3 ابعادی کوئی شئے جتنی جگہ فضا میں گھیرتی ہے اسے اس شئے کا حجم کہتے ہیں۔ آپ اپنے اطراف کی چیزوں کے حجم پر غور کیجیے۔ مثال کے طور پر کمرہ کا حجم کمرہ میں رکھی ہوئی الماری کے حجم سے زیادہ ہوگا۔ اسی طرح پنسل باکس کا حجم اس کے اندر رکھے ہوئے قلم اور ربر سے زیادہ ہوگا۔ کیا آپ ان چیزوں کا حجم محسوب کر سکتے ہیں؟

یاد رکھیے کہ کسی سطح کے رقبہ کو مربع اکائیوں میں لکھا جاتا ہے لیکن بتاؤ کہ حجم کو کیا لکھا جائے گا۔ کسی ٹھوس شے کے حجم کی اکائیاں مکعب اکائیاں کہلاتی ہیں چونکہ ایک مکعب سمجھنے کے لیے بہت بہتر ٹھوس شے ہوتی ہے۔ (جیسے کہ رقبہ معلوم کرنے کے لیے مربع کی شکل ہوا کرتی ہے)

کسی سطح کا رقبہ معلوم کرنے کے لیے اس سطح کو مربع اکائیوں میں توڑ دیا جاتا ہے۔ ایسے ہی کسی ٹھوس شئے کے حجم کے لیے ہمیں فضا کو مکعب اکائیوں میں تقسیم کرنا ہوگا۔ ایک اکائی مکعب وہ مکعب ہے جس کے ضلع کی لمبائی اکائی ہوتی ہے۔ نوٹ کیجیے کہ دی گئیں اشکال میں ہر ایک ٹکڑے کا حجم جنہیں مختلف طریقوں سے ترتیب دیا گیا ہے 8 مکعب اکائیاں ہیں۔

1 مکعب سمر = $1\text{ cm} \times 1\text{ cm} \times 1\text{ cm} = 1\text{ cm}^3$

= $10\text{ mm} \times 10\text{ mm} \times 10\text{ mm} =$ ________________ mm^3

1 مکعب میٹر = $1\text{ m} \times 1\text{ m} \times 1\text{ m} = 1\text{ m}^3$

= $100\text{cm} \times 100\text{cm} \times 100\text{cm} =$ ________________ cm^3

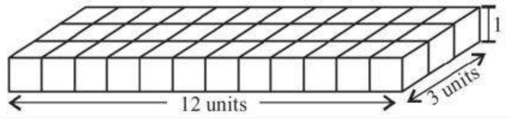
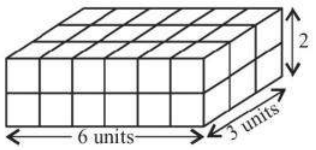
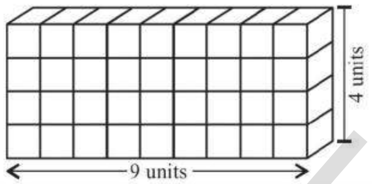
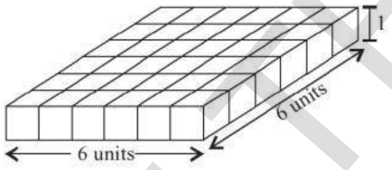
= $1\text{ mm} \times 1\text{ mm} \times 1\text{ mm} = 1\text{ mm}^3$

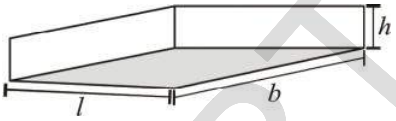
1 مکعب ملی میٹر = $0.1\text{ cm} \times 0.1\text{ cm} \times 0.1\text{ cm} =$ ________________ cm^3

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20
SCERT TELANGANA

14.3.1 مکعب نما کا حجم

مساوی جسامت کے 36 مکعب لیجیے (یعنی ہر ایک مکعب ضلع مساوی ہو) انہیں اس انداز سے جمائیے کہ وہ مکعب نما دکھائی دیں۔ آپ انہیں مختلف طریقوں سے رکھ سکتے ہیں۔ حسب ذیل جدول کا مطالعہ کیجیے اور خالی جگہوں کو پر کیجیے۔

	مکعب نما	طول (l)	عرض (b)	بلندی (h)	$l \times b \times h = V$
(i)		12	3	1	$12 \times 3 \times 1 = 36$
(ii)		...	...	...	...
(iii)		...	...	...	...
(iv)		...	...	...	...

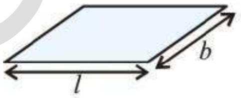


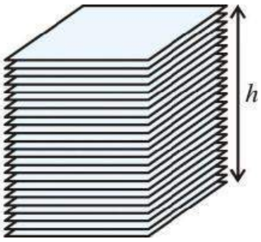
آپ نے کیا دیکھا؟ کیا آپ کو مکعب کے ابعاد اور حجم میں کوئی رشتہ محسوس ہوتا ہے

اس مکعب نما کو بنانے چونکہ ہم نے 36 مکعب لیئے ہیں لہٰذا ایسے ہر ایک مکعب نما کا حجم 36 مکعب اکائیاں ہوگا۔ یہ عدد مکعب نما کے طول، عرض اور بلندی کا حاصل ضرب ہے۔ اوپر کی مثال سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ مکعب نما کا حجم = $l \times b \times h$۔ چونکہ $l \times b$ قاعدہ کا رقبہ ہوتا ہے لہٰذا ہم کہہ سکتے ہیں کہ

مکعب نما کا حجم = قاعدہ کا رقبہ x بلندی

عملی کام



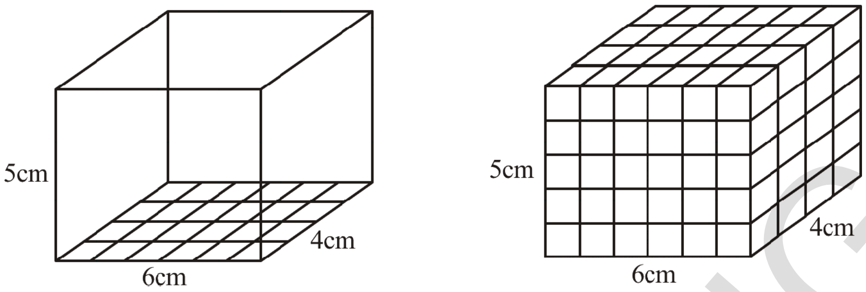


ایک کاغذ کا شیٹ لیجیے اور اس کا رقبہ معلوم کیجیے۔ اس کاغذ پر ایسے ہی کئی اور کاغذ اس طریقہ سے جمائیے کہ بتائی گئی شکل کے مطابق آپ کو مکعب نما حاصل ہو۔ اس مکعب نما کی بلندی کو ناپیے۔ اب کاغذ کے شیٹ کے رقبہ اور اس مکعب نما کی بلندی کو ضرب دے کر اس کا حجم دریافت کیجیے۔

SCERT TELANGANA

یہ کیجئے

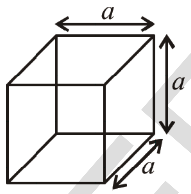
آیئے ایک ایسے مکعب نما کا حجم معلوم کریں جس کا طول عرض بلندی بالترتیب 6 سمر، 4 سمر اور 5 سمر ہے۔



اس مقصد کے لیے اب ہم مکعب نما کے طول کے ساتھ 1 مکعب سمر حجم والے چھوٹے مکعب رکھتے چلے جائیں گے۔
بتایئے کہ اس کے طول میں کتنے مکعب رکھے گئے؟ چونکہ مکعب نما کی لمبائی 6 سمر ہے، 6 ٹکڑے رکھے گئے۔
اسی طرح بتایئے کہ مکعب نما کے عرض سے متصل کتنے ٹکڑے رکھے جائیں گے؟ چونکہ اس کا عرض 4 سمر ہے، 4 ٹکڑے رکھے جائیں گے۔ لہذا ایک تہہ پر 4 x 6 چھوٹے مکعب رکھے گئے۔
اب بتائیں کہ پورے مکعب نما میں چھوٹے مکعبوں کی کتنی تہیں جمائی گئیں۔ 5 تہیں جمائی گئیں ہیں کیونکہ مکعب نما کی بلندی 5 سمر ہے۔ ہر تہہ میں 4 x 6 مکعب ہوں گے۔
لہٰذا 5 تہوں میں 5 x 4 x 6 مکعب رکھے گئے یعنی طول x عرض x بلندی۔
اس عمل سے پتہ چلا کہ مکعب نما کا حجم کیا ہوگا۔

مکعب نما کا حجم = طول x عرض x بلندی

14.3.2 مکعب کا حجم



مکعب ایسا مکعب نما ہوتا ہے جس کی لمبائی، چوڑائی اور موٹائی تینوں مساوی ہوتے ہیں۔

اس طرح مکعب کا حجم = ضلع × ضلع × ضلع

$= (\text{ضلع})^3 = a^3$

جہاں a مکعب کا ایک ضلع ہے

عام طور پر ہم مائعات کے حجم کی پیمائش ملی لیٹر یا لیٹر میں کرتے ہیں۔

مکعب کا طول	مکعب کا حجم
10mm = 1cm	1000 mm^3 = 1cm^3
10cm = 1dm	1000 c m^3 = 1dm^3
10dm = 1m	1000 d m^3 = 1 m^3
100cm = 1m	1000000 c m^3 = m^3
1000m = 1km	1000000000 m^3 = 1km^3

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20
SCERT TELANGANA

$1\ cm^3 = 1\ ml$

$1000\ cm^3 = 1\ l$

$1\ m^3 = 1000000\ cm^3 = 1000\ l$

$= 1\ kl$ کلومیٹر

مثال:5 لکڑی کے ٹکڑے کا حجم معلوم کیجیے جس کی لمبائی 20 سمر، عرض 10 سمراور بلندی 8 سمر ہے۔

حل: لکڑی کا ٹکڑا دراصل ایک مکعب نما اور اس کا حجم = $l \times b \times h$

جہاں طول (l) = 20 سمر، عرض (b) = 10 سمر اور بلندی (h) = 8 سمر

لکڑی کے ٹکڑے کا حجم = 20 سمر x 10 سمر x 8 سمر = 1600 مکعب سمر

مثال:6 پانی کے حوض کی لمبائی 1.4 میٹر ہے۔اس کی چوڑائی 1 میٹر اور اونچائی 0.7 میٹر ہے اس حوض کا حجم لیٹروں میں معلوم کیجیے۔

حل: حوض کا طول (l) = 1.4 میٹر = 140 سمر

عرض (b) = 1 میٹر = 100 سمر

اونچائی (h) = 0.7 میٹر = 70 سمر

حوض کا حجم = $l \times b \times h$

$= (140 \times 100 \times 70)$ مکعب سمر

$= \dfrac{140 \times 100 \times 70}{1000}$

$= 980$ لیٹر

یہ کیجیے

مکعب نما کا مجسم بنانے کے لیے 64 اکائی مکعبوں کو جس انداز میں چاہیں ترتیب دیں ہر ترتیب کی سطح کا رقبہ معلوم کریں۔کیا اس مکعب نما کا حجم اور سطحی رقبہ مساوی ہوگا۔

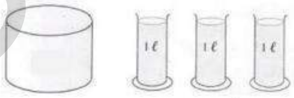
کیا آپ جانتے ہیں

گنجائش: حجم اور گنجائش کے الفاظ میں کوئی زیادہ فرق نہیں۔

(a کوئی شے فضا میں جتنی جگہ گھیرتی ہے اس جگہ کو حجم کہتے ہیں۔

(b گنجائش وہ حجم ہے جو کسی برتن میں سمایا جاتا ہے۔

اگر پانی کے ایک ڈبے میں 100 مکعب سمر پانی ہے تو کہا جاتا ہے کہ اس ڈبے کی گنجائش 100 مکعب سمر ہے۔گنجائش کو لیٹروں میں بھی بولا جاتا ہے۔



حجم   گنجائش

SCERT TELANGANA

مثال: 7 اس مکعب نما کا حجم معلوم کیجئے جس کا عرض اس کے طول کا نصف ہے اور بلندی طول کی دگنی ہے۔

حل: مکعب نما کی لمبائی x اکائیاں

لہٰذا اس کا عرض = $\frac{x}{2}$ اکائیاں

اور مکعب نما کی بلندی = $2x$ اکائیاں

لہٰذا مکعب نما کا حجم = طول x عرض x بلندی

= $(x \times \frac{x}{2} \times 2x)$ مکعب اکائیاں

= x^3 مکعب اکائیاں

مثال: 8 ایک ڈبہ 1.8 میٹر لمبا 80 سمر چوڑا ہے جبکہ اس کی بلندی 60 سمر ہے۔ دوسری طرف اس ڈبے میں صابن اس طرح رکھے گئے کہ کوئی جگہ نہ چھوٹے صابن کے ابعاد 6 سمر 4.5x سمر 40x ملی میٹر ہیں۔ بتائیے کہ ایسے ہر ایک ڈبے میں کتنے صابن رکھے جاسکیں گے؟

حل: ڈبے کا طول (l) = 1.8 میٹر = 180 سمر

ڈبے کا عرض (b) = 80 سمر

ڈبے کی بلندی (h) = 60 سمر

ڈبے کا حجم = l x b x h

= 180 x 80 x 60 مربع سمر

= 864000 مربع سمر

صابن کی لمبائی = 6 سمر

صابن کی چوڑائی = 4.5 سمر

صابن کی موٹائی = 40 ملی میٹر = 4 سینٹی میٹر

ایک صابن کا حجم = 6 x 4.5 x 4 cm^3

= 108.0 cm^3

∴ صابنوں کی مطلوبہ تعداد = $\frac{\text{ڈبے کا حجم}}{\text{ایک صابن کا حجم}}$

= $\frac{864000}{108} = 8000$

لہٰذا دیئے ہوئے ڈبے میں 8000 صابن رکھے جاسکیں گے۔

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20
SCERT TELANGANA

مثال:9 لکڑی کے مکعب نما سے، جس کا طول، عرض اور بلندی بالترتیب 21 سمر، 9 سمر اور 8 سمر ہے۔ 3 سمر ضلع کے کتنے مکعب کاٹے جاسکیں گے اور کتنی لکڑی بچ رہے گی۔

حل: مکعب نما کا طول (l) = 21 سمر

مکعب نما کا عرض (b) = 9 سمر

مکعب نما کی بلندی (h) = 8 سمر

مکعب نما کا حجم = 21 x 9 x 8 = 1512 مکعب سمر

طول واری کاٹے جانے والے مکعبوں کی تعداد = $\frac{21}{3} = 7$

عرض واری کاٹے جانے والے مکعبوں کی تعداد = $\frac{9}{3} = 3$

بلندی میں کاٹے جانے والے مکعبوں کی تعداد = $\frac{8}{3} = 2.6$

بلندی میں ہم صرف 2 مکعب ہی کاٹ سکتے ہیں جبکہ باقی لکڑی ضائع ہوجائے گی۔

لہٰذا کاٹے جانے والے مکعبوں کی تعداد = $7 \times 3 \times 2$

= 42 مکعب سمر

ہرایک مکعب کا حجم = $3 \times 3 \times 3 = 27 cm^3$ مکعب سمر

تمام مکعبوں کا حجم = 27×42

= 1134 مکعب سمر

∴ ضائع ہونے والی لکڑی کا حجم = 1512 - 1134 = 378

مثال:10 مکعب نما کی شکل کے ایک حوض میں 60 لیٹر فی منٹ کی شرح سے پانی بھرا جارہا ہے۔ اگر حوض کی گنجائش 108 مکعب میٹر ہوتو بتاؤ کہ حوض بھرنے کے لیے کتنا وقت درکار ہوگا؟

حل: حوض کا حجم = $108 m^3$ = 108 x 1000 لیٹر

حوض میں 60 لیٹر فی منٹ کی شرح سے پانی بھرا جارہا ہے

∴ مطلوبہ وقت = $\frac{108 \times 1000}{60}$ منٹ

= $\frac{108 \times 1000}{60 \times 60}$ شمیمہ $= 30$ گھنٹے

SCERT TELANGANA

مثال 11: 4000 افراد پر مشتمل ایک گاؤں کو روزانہ فی کس 150 لیٹر پانی کی ضرورت ہے۔اس گاؤں میں 20 میٹر، 15 میٹر اور 6 میٹر ابعاد کا ایک حوض ہے۔حوض کو ایک دفعہ بھر دینے پر یہ گاؤں کی کتنے دن کی ضرورت پوری کرے گا۔

حل: حوض کا حجم = $20m \times 15m \times 6m$

= $1800m^3 = 1800000$ لیٹر

روزانہ فی کس مطلوبہ پانی = 150 لیٹر

پوری آبادی کے لیے ایک دن میں مطلوبہ پانی کا حجم = 150 x 4000

دنوں کی تعداد = $\dfrac{\text{حوض کا حجم}}{\text{فی دن مطلوبہ پانی کا حجم}}$

= $\dfrac{1800000}{150 \times 4000} = 3$ دن

مشق - 14.2

1) مکعب نما کا حجم معلوم کیجیے جس کے ابعاد ذیل میں دیے گئے ہیں۔

	طول	عرض	بلندی
(i)	8.2 m	5.3 m	2.6 m
(ii)	5.0 m	4.0 m	3.5 m
(iii)	4.5 m	2.0 m	2.5 m

2) اندرونی ابعاد دیے گئے ہیں ان ذخیروں کی گنجائش کیا ہوگی۔حجم کو مکعب میٹروں اور لیٹروں میں محسوب کیجیے۔

	طول	عرض	بلندی
(i)	3 m 20 cm	2 m 90 cm	1 m 50 cm
(ii)	2 m 50 cm	1 m 60 cm	1 m 30 cm
(iii)	7 m 30 cm	3 m 60 cm	1 m 40 cm

3) کسی مکعب کے طول کو نصف کر دیا جائے تو اس کا حجم کتنا ہوگا؟ کیا حجم میں کمی ہوگی؟ اگر آپ کا جواب ہاں میں ہو تو کتنی کمی ہوگی؟

SCERT TELANGANA

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20

4) ذیل میں دیئے گئے ہر ایک مکعب کا حجم معلوم کیجئے۔

(i) 6.4 سنٹی میٹر (ii) 1.3 میٹر (iii) 1.6 میٹر

5) 8 میٹر، 6 میٹر اونچی اور 22.5 سینٹی میٹر موٹی دیوار تعمیر کرنے کے لیے 25 سمر، 11.25 سمر اور 6 سمر ابعاد رکھنے والی کتنی اینٹوں کی ضرورت ہوگی؟

6) ایک مکعب نما کا طول 25 سمر، عرض 15 سمر اور بلندی 8 سمر ہے۔ اس مکعب نما کے حجم اور اس مکعب کے حجم کا فرق معلوم کیجئے جس کا ضلع 16 سمر ہے؟

7) ایک لکڑی کا ڈبہ اس طرح تراشا گیا کہ اس کی موٹائی 1 سمر ہے۔ بیرونی ابعاد 7 x 4 x 5 سمر ہیں۔ بتاؤ کہ کتنی لکڑی استعمال کی گئی؟

8) 20 سمر، 18 سمر اور 16 سمر کے ابعاد رکھنے والے لکڑی کے مکعب نما سے 4 سمر ضلع کے کتنے مکعب بنائے جاسکیں گے؟

9) ایک مکعب نما کے ابعاد 12 سمر x 9 سمر x 6 سمر ہیں۔ اس میں سے 4 سمر x 3 سمر x 2 سمر ابعاد رکھنے والے کتنے مکعب نما کاٹے جاسکیں گے؟

10) ایک برتن مکعب نما کی شکل کا ہے۔ جس کا طول 30 سمر اور عرض 25 سمر ہے۔ بتاؤ کہ اس کی بلندی کیا ہوگی جبکہ اس میں 4.5 لیٹر پانی کی گنجائش ہے؟

ہم نے کیا سیکھا

1) اگر l، b، h مکعب نما کے ابعاد ہوں تو

(i) اس کی پہلوی سطحوں کا رقبہ $2h(l+b)$ ہوگا

(ii) کل سطح کا رقبہ $2(lb+bh+hl)$ ہوگا

2) مکعب کی پہلوی سطح کا رقبہ $4a^2$ ہوگا

3) مکعب کا کل سطحی رقبہ $= 6a^2$

4) مکعب نما کا حجم $= l \times b \times h$

5) مکعب کا حجم = ضلع x ضلع x ضلع $= a^3$

6)

$1\ cm^3 = 1\ ml$

$1\ l = 1000\ cm^3$

$1\ m^3 = 1000000\ cm^3 = 1000\ l$

$= 1\ kl$ کلولیٹر

اعداد کا کھیل

Playing with Numbers

15

15.0 تعارف

فرض کیجئے کہ آپ نے ایک صبح ایک ایسی دنیا میں آنکھ کھولی جہاں اعداد کا کوئی وجود ہی نہ ہو۔ غور کیجئے کہ آپ کا دن کیسے گزرے گا؟ آپ کے پاس کیلنڈر ہی نہیں ہوگا کہ آپ کو پتہ چلے کہ آج مہینے کا کونسا دن ہے؟ ٹیلیفون نمبرات نہ ہوں تو آپ اپنے دوستوں سے بات ہی نہیں کرسکیں گے! ہاں یہ ضرور ہوگا کہ مکانات پر نمبر نہ ہونے سے اجنبی لوگ آپ کے مکان پر آتے رہیں گے اور آپ کو دق کرتے رہیں گے! یہ تو چند ایک مثالیں ہوئیں۔ ایسے حالات کا تصور کیجئے کہ نمبرات کے بغیر آپ کی روزمرہ زندگی کا کیا ہوگا؟ آپ کا خیال صحیح ہے۔ اگر گھڑیاں نہ ہوں تو آپ مدرسہ کو دیر سے پہنچے گے اور اپنے پسندیدہ سیریلس، کارٹونس دیکھنے سے قاصر رہیں گے۔ ہاں! ایک اور بات اعداد کے بغیر کرکٹ اور فٹبال وغیرہ سب گول ہو جائیں گے۔ لہٰذا اعداد کے بغیر تصور ہی محال ہے۔ اگر ہم کسی شئے کی قیمت جاننا چاہیں یا پھر اپنے دوستوں میں کوئی چیز مساوی طور پر تقسیم کرنا چاہیں تو کیسے کر پائیں گے؟ کیا آپ اندازہ کرسکتے ہیں کہ ان کاموں کے لیے کونسے بنیادی افعال کرنے پڑتے ہیں؟ یہ تمام کام انجام دینے کے لیے ہمیں اعداد کی ضرورت ہے اور تقسیم وغیرہ کے عمل کے قواعد ملحوظ رکھنا پڑتا ہے۔ تقسیم کے قواعد سے ہمیں یہ معلوم ہوتا ہے کہ کونسا عدد دوسرے عدد سے قابل تقسیم ہے اور کونسا عدد نہیں۔ ایسے ہی بعض بنیادی اُصول وضوابط کے ذریعہ آیئے اعداد کا کھیل کھیلیں۔

15.1 اعداد کی تقسیم پزیری کے اُصول

بعض اعداد لیجئے اور جانچئے کہ وہ 2 سے تقسیم ہوتے ہیں یا نہیں یہ بھی دیکھئے کہ وہ 3 اور آگے کے بعض دوسرے اعداد سے بھی تقسیم کئے جاسکتے ہیں اس طرح 7 تک کرتے چلے جائیے۔

فرض کیجئے کہ عدد 'a'، 'b' کو مکمل طور پر تقسیم کرتا ہے تو کہتے ہیں کہ 'b'، 'a' سے قابل تقسیم ہے۔

اس باب میں تقسیم کے ایسے ہی قوانین اور ان کی ضرورت پر غور کیا جائے گا۔ سب سے پہلے اعداد میں ہندسوں کے مقام اور اجزا کا مطالعہ کریں گے۔

15.1.1 کسی ہندسہ کا مقام

ایک عدد 645 لیجئے اور اسے پھیلائے 645 = 600 + 40 + 5 = 6 x 100 + 4 x 10 + 5 x 1 دیئے ہوئے عدد میں 6 کا ہندسی مقام 600 اور 4 کا ہندسی مقام 40 ہے۔ کہا جائے گا کہ اس عدد میں 100 چھ مرتبہ واقع ہو رہا ہے 10 چار مرتبہ ہے اور اکائی پانچ مرتبہ واقع ہوتا ہے۔

SCERT TELANGANA

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20

یہ کیجیے

دیئے ہوئے اعداد میں خط کشیدہ ہندسوں کی مقامی قدر لکھئے۔

(i) 29879 (ii) 10344 (iii) 98725

15.1.2 اعداد کا توسیعی طریقہ

ہم جانتے ہیں کسی عدد کو توسیعی طریقہ سے کس طرح لکھا جاتا ہے۔اس کے علاوہ ہم یہ بھی جانتے ہیں کہ 10 کی قوت نما کے طریقہ سے انہیں کس طرح ظاہر کیا جاتا ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ
$10^0 = 1$

مثال کے طور پر

معیاری طریقہ		توسیعی طریقہ		قوت نما میں اظہار
68 =60+8	=	$(10 \times 6) + 8$	=	$(10^1 \times 6) + (10^0 \times 8)$
72=70+2	=	$(10 \times 7) + 2$	=	$(10^1 \times 7) + (10^0 \times 2)$

ایک دو ہندسی عدد $10a + b$ پر غور کیجیے جہاں a دہائی کے مقام پر اور b اکائیوں کے مقام پر پایا جاتا ہے۔اوپر کے طریقہ کو استعمال کرتے ہوئے اس عدد کو یوں لکھا جاسکتا ہے۔ $(10 \times a) + b = (10^1 \times a) + (1 \times b)$ جہاں $(a \neq 0)$

آیئے ایک دوسرے عدد 658 پر غور کریں۔یہ ایک تین ہندسی عدد ہے اسے یوں لکھا جاسکتا ہے۔

معیاری طریقہ	توسیعی طریقہ	قوت نما میں اظہار
$658 = 600 + 50 + 8$	$= 100 \times 6 + 10 \times 5 + 1 \times 8$	$= 10^2 \times 6 + 10^1 \times 5 + 1 \times 8$
$759 = 700 + 50 + 9$	$= 100 \times 7 + 10 \times 5 + 1 \times 9$	$= 10^2 \times 7 + 10^1 \times 5 + 1 \times 9$

عام طور پر ایک تین ہندسی عدد جو a ، b اور c پر مشتمل ہوتا ہے یوں لکھا جاتا ہے۔۔

$$10^2 a + 10^1 b + c = 100 \times a + 10 \times b + c = 100a + 10b + c$$ جہاں $(a \neq 0)$

ایک عدد کو اس طرح بھی لکھ سکتے ہیں۔

$$3456 = 3000 + 400 + 50 + 6 = 1000 \times 3 + 100 \times 4 + 10 \times 5 + 6$$
$$= 10^3 \times 3 + 10^2 \times 4 + 10^1 \times 5 + 6$$

اسی طرح ایک چار ہندسی عدد کو جو a ، b ، c اور d پر مشتمل ہوتا ہے اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$1000a + 100b + 10c + d = 1000 \times a + 100 \times b + 10 \times c + d$$
$$= 10^3 a + 10^2 b + 10^1 c + d.$$
جہاں $(a \neq 0)$

SCERT TELANGANA

یہ کیجئے

1. حسب ذیل اعداد کو توسیعی شکل میں لکھیے۔

(i) 65 (ii) 74 (iii) 153 (iv) 612

2. حسب ذیل اعداد کو معیاری شکل میں لکھیے۔

(i) $10 \times 9 + 4$ (ii) $100 \times 7 + 10 \times 4 + 3$

3. خالی جگہوں کو پر کیجئے۔

(i) $100 \times 3 + 10 \times$ _____ $+ 7 = 357$

(ii) $100 \times 4 + 10 \times 5 + 1 =$ ________

(iii) $100 \times$ _____ $+ 10 \times 3 + 7 = 737$

(iv) $100 \times$ ____ $+ 10 \times q + r = pqr$

(v) $100 \times x + 10 \times y + z =$ __________

$1 \times 36 = 36$	$4 \times 9 = 36$
$2 \times 18 = 36$	$6 \times 6 = 36$
$3 \times 12 = 36$	

15.1.3 اجزائے ضربی اور اعداد کے ضریب

بتائیے کہ 36 کے اجزائے ضربی کیا ہیں؟

36 کے اجزائے ضربی 1، 2، 3، 4، 6، 9، 12، 18، 36 ہیں بتائیے کہ 36 کا سب سے بڑا جز ضربی کیا ہے؟

ہم کہتے ہیں کہ ہر جز ضربی عدد سے چھوٹا یا اس کے برابر ہوتا ہے۔ کسی عدد کا سب سے بڑا جز ضربی خود وہی عدد ہوتا ہے۔

∴ ہم کہیں گے کہ کوئی عدد خود اپنا ہی جز ضربی ہوتا ہے جبکہ 1 تمام اعداد کا جز ضربی ہوتا ہے۔

$$7 \times 1 = 7 , 9 \times 1 = 9$$

اگر کسی عدد کے 1 اور خود اسی عدد کے سوا دوسرے اجزائے ضربی نہ ہوں تو ایسے اعداد کو آپ کیا کہیں گے؟

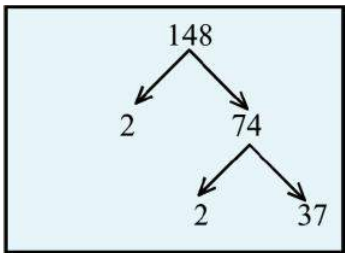
ایسے اعداد **''مفرد اعداد''** کہلاتے ہیں۔ مثلاً: 2, 3, 5, 7, 11, 13..... وغیرہ

11، 23، 4567، 89 چار اعداد کے ایسے دلچسپ سیٹ ہیں جو کہ مفرد اعداد ہیں اور سلسلہ وار اعداد سے بنتے ہیں۔

جانچئے کہ 191، 911، 199، 919، 991 مفرد اعداد ہیں یا نہیں؟

828180797877767574737271706968676665646362616059585756555453525150494847464544
434241403938373635343332313029282726252423222120191817161514131211110987654321
ہمیں یہ عدد 82 سے شروع کر کے 1 تک پیچھے کی جانب کے تمام اعداد لکھتے جانے پر حاصل ہوگا۔ یہ عدد ایک مفرد عدد ہے۔

SCERT TELANGANA



148 کے مفرد اعداد اجزائے ضربی لکھیے۔

$$148 = 2 \times 74 = 2 \times 2 \times 37 = 2^2 \times 37^1$$

148 کے اجزا اس کے مفرد اجزا (اجزا کے قوت نما + 1) کا حاصل ضرب ہوتا ہے۔

یعنی $(2 + 1) \times (1 + 1) = 3 \times 2 = 6$

1, 2, 4, 37, 74, 148. ہیں

اگر کسی عدد کو اس کے مفرد اجزا کے حاصل ضرب کی شکل میں لکھنا مطلوب ہو تو اسے اس طرح لکھا جاے گا۔ $N = 2^a \times 3^b \times 5^c$ ......

N کے اجزا $(a + 1)(b + a)(c + 1)$ .....

6 کے اولین 5 ضریب کیا ہوں گے۔

$6 \times 1 = 6$, $6 \times 2 = 12$, $6 \times 3 = 18$, $6 \times 4 = 24$, $6 \times 5 = 30$

6, 12, 18, 24, 30، 6 کے اولین 5 ضریب ہیں۔

ہم اس طرح اس کے کتنے ضریب لکھ سکتے ہیں؟ لا متناہی ضریب

لہٰذا کہا جائے گا کہ کسی عدد کے لا متناہی ضریب ہوتے ہیں۔

یہ کیجیے

1. حسب ذیل اعداد کے اجزائے ضربی لکھیے۔

(a) 24 (b) 15 (c) 21 (d) 27
(e) 12 (f) 20 (g) 18 (h) 23 (i) 36

2. حسب ذیل کے اولین 5 ضریب لکھیے

(a) 5 (b) 8 (c) 9

3. حسب ذیل کے مفرد اجزائے ضربی لکھیے۔

(a) 72 (b) 158 (c) 243

15.1.4 10 سے قابل تقسیم اعداد

10 کے چند ضریب لکھیے : 10, 20, 30, 40, 50, 60, ...

ان تمام اعداد میں اکائی کے مقام پر '0' واقع ہوتا ہے۔

کیا آپ یہ کہہ سکتے ہیں کہ 10 کے تمام ضریب اکائی کے مقام پر '0' رکھتے ہیں؟ ہاں!

∴ اگر کسی عدد کے اکائی کے مقام پر '0' ہو تو ایسا ہر عدد 10 سے تقسیم ہوگا۔

آیئے اس اُصول پر غور کریں

SCERT TELANGANA

اگر ہم ایک تین ہندسی عدد لیں جہاں 'a' سیکڑے کے مقام پر 'b' دہائی کے مقام پر اور 'c' اکائی کے مقام پر ہو تو اس عدد کو یوں لکھا جاسکتا ہے۔

$$100a + 10b + c = 10(10a + b) + c$$

(10a+b) 10' کا ضریب ہوگا۔ اگر 'c' 10' کا ضریب ہو تو یہ عدد 10 سے تقسیم ہوگا۔ یہ اس وقت ہی ممکن ہے جبکہ $c = 0$

یہ کیجیے

1. جانچ کیجیے کہ حسب ذیل اعداد 10 سے تقسیم ہوں گے یا نہیں

(a) 3860 (b) 234 (c) 1200 (d) 10^3 (e) 10 + 280 + 20

2. جانچ کیجیے کہ دیئے ہوئے اعداد 10 سے تقسیم ہوتے ہیں یا نہیں۔

(a) 10^{10} (b) 2^{10} (c) $10^3 + 10^1$

کوشش کیجیے

1) 56Z÷10 اس تقسیم میں اگر 6 باقی بچتا ہے۔ بتائیے کہ Z کی قیمت کیا ہوسکتی ہے۔

15.1.5 5 سے تقسیم ہونے والے اعداد

5 کے ضریب .... 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50 اس طرح ہیں۔ ان اعداد میں اکائی کے مقام پر 0 یا 5 ہوتا ہے۔ اگر اکائی کے مقام پر 0 یا 5 ہو تو ایسا ہر عدد 5 سے تقسیم ہوگا۔

اس قاعدہ پر غور کیجیے۔

اگر ہم کوئی تین ہندسی عدد $100a+10b+c$ لیں جہاں 'a' سینکڑے کے مقام 'b' دہائی کے مقام اور 'c' اکائی کے مقام پر ہو تو اس عدد کو یوں $100a + 10b + c = 5(20a + 2b) + c = 5(20a + 2b)$ لکھا جاسکتا ہے۔

$5(20a + 2b)$ ' 5 کا ضریب ہے۔ کوئی عدد 5 سے اسی وقت تقسیم ہوگا جبکہ اکائی کے مقام پر $c = 0$ یا $c = 5$

کوشش کیجیے

1) جانچ کر بتائیے کہ ذیل کے اعداد 5 سے تقسیم ہوں گے یا نہیں۔

(a) 205 (b) 4560 (c) 402 (d) 105 (e) 235785

SCERT TELANGANA

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20

اگر 34A‘ 5 سے قابل تقسیم ہوتو A کی قیمت کیا ہوسکتی ہے؟

دیئے گئے عدد میں اکائی کے مقام پر A ہے اس کی قیمت 0 یا 5 ہونے پر ہی دیا ہوا عدد 5 سے تقسیم ہوگا۔

اس لئے $A = 0$ یا 5

کوشش کیجیے

1) اگر $4B \div 5$ ہوتو باقی 1 رہتا ہے۔ B کی قیمت معلوم کرو۔

2) اگر $76C \div 5$ ہوتو باقی 2 رہتا ہے۔ C کی قیمت کیا ہوگی۔

3) اگر کوئی عدد 10 سے قابل تقسیم ہوتو یہ عدد 5 سے بھی قابل تقسیم ہوگا۔ کیا یہ بیان صحیح ہے۔ وجہ بیان کیجیے۔

4) اگر کوئی عدد 5 سے تقسیم ہوتا ہوتو یہ 10 سے بھی تقسیم ہوگا۔ یہ بیان صحیح ہے یا غلط۔ وجوہات بیان کیجیے۔

15.1.6 2 سے قابل تقسیم اعداد

2 کے اضعاف لیجیے یعنی 2, 4, 6,....... وغیرہ

ان اعداد میں اکائی کا ہندسہ 0, 2, 4, 6, 8 پر ختم ہوتا ہے۔

اگر دیئے ہوئے عدد میں اکائی کے مقام پر 0, 2, 4, 6, یا 8 (جفت اعداد) ہوں تب دیا ہوا عدد 2 سے تقسیم ہوگا۔ دوسری صورت میں 2 سے تقسیم نہیں ہوگا۔

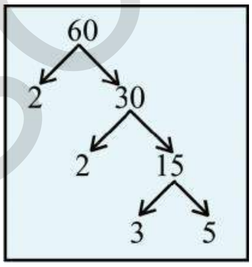
آیئے اس اصول کی وجوہات دیکھتے ہیں۔

اگر ہم کوئی تین ہندسی عدد $100 \times a + 10 \times b + c$ لیں جہاں پر سیکڑے کے مقام پر a‘ دہائی کے مقام پر b اور اکائی کے مقام c رکھا گیا ہے تب اس عدد کو یوں لکھا جائے گا $100a + 10b + c = 5(50a + 5b) + c = 5(50a + 5b)$ اور یہ 2 کے ضریب ہوں گے۔ اگر کوئی دیا ہوا عدد 2 سے تقسیم ہوتا ہوتو ضروری ہے کہ اکائی کے مقام پر $c = 0$‘ 2‘ 4‘ 6 یا 8 (جفت عدد) ہونا چاہئے۔

سوچئے، بحث کیجئے اور حل کیجئے

1) ایک عدد کے اکائی کے مقام کو معلوم کیجیے جسے 5 اور 2 سے تقسیم کرنے پر بالترتیب 3 اور 1 باقی بچتا ہے۔

مثال 1: 60 کے اجزائے ضربی کی تعداد لکھئے اور اسکی جانچ کیجیے۔



حل: 60 کو $2^2 \times 3^1 \times 5^1$ صورت میں مفرد اجزا کے حاصل ضرب کے طور پر لکھا جائے گا۔

$\therefore$ اجزا کی تعداد $(2 + 1)(1 + 1)(1 + 1)$

$= 3 \times 2 \times 2 = 12$

یہ اجزا 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60 ہیں

SCERT TELANGANA

مشق - 15.1

1) تقسیم پزیری کے اصول کو استعمال کرتے ہوئے بتائیے کہ ذیل میں دیئے ہوئے اعداد 2‘ 5‘ 10 سے (ہاں یا نہیں میں لکھئے) تقسیم ہوتے ہیں یا نہیں؟ آپ نے کیا مشاہدہ کیا۔

عدد	2 سے قابل تقسیم	5 سے قابل تقسیم	10 سے قابل تقسیم
524	ہاں	نہیں	نہیں
1200			
535			
836			
780			
3005			
4820			
48630			

2) تقسیم پزیری کے اصول کی مدد سے بتائیے کہ ذیل کے کونسے اعداد 2 سے تقسیم ہوں گے۔

(a) 2144 (b) 1258 (c) 4336 (d) 633 (e) 1352

3) تقسیم پزیری کے اصول کے ذریعہ محسوب کیجئے کہ کونسے اعداد 5 سے تقسیم ہوں گے۔

(a) 438750 (b) 179015 (c) 125 (d) 639210 (e) 17852

4) بتائیے کہ ذیل کے اعداد 10 سے تقسیم ہوں گے یا نہیں؟ تقسیم پزیری کے اصول استعمال کریں۔

(a) 54450 (b) 10800 (c) 7138965 (d) 7016930 (e) 10101010

5) ذیل کے اعداد کے اجزا لکھئے۔

(a) 18 (b) 24 (c) 45 (d) 90 (e) 105

6) کوئی 5 اعداد لکھئے جو 2‘ 5 اور 10 سے تقسیم ہوتے ہیں۔

7) 34A‘ 2 سے پورا پورا تقسیم ہوتا ہے اور جب اسے 5 سے تقسیم کیا گیا تو باقی 1 رہتا ہے۔ A کی قیمت کیا ہوگی۔

15.1.7 3 اور 9 سے تقسیم کے اُصول

378 پر غور کیجئے۔ اسے اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔ $= 300 + 70 + 8$

$= 100 \times 3 + 10 \times 7 + 8$

یہاں 3 کو مشترکہ جز ضربی کے طور پر لکھا نہیں جاسکتا۔ $= (99 + 1)\,3 + (9 + 1)\,7 + 8$

SCERT TELANGANA

عدد کو اس انداز سے لکھنا ہوگا۔

$$378 = 99 \times 3 + 9 \times 7 + (3 + 7 + 8)$$
$$= 99 \times 3 + 3 \times 3 \times 7 + (3 + 7 + 8)$$
$$= 3\,(99 + 21) + (3 + 7 + 8)$$

.2 $3(99 + 21)$ ‘3 کا ضریب ہے۔ لہٰذا یہ عدد 3 ہی سے تقسیم ہوسکتا ہے جبکہ $(3 + 7 + 8)$ کا مجموعہ 3 کا ضریب ہے۔

حل: **9 سے تقسیم کا اُصول**

378 کو لکھا جاسکتا ہے

$$378 = 300 + 70 + 8$$
$$= 100 \times 3 + 10 \times 7 + 8$$
$$= (99 + 1)\,3 + (9 + 1)7 + 8$$
$$= 99 \times 3 + 9 \times 7 + (3 + 7 + 8)$$
$$= 9\,(11 \times 3 + 1 \times 7) + (3 + 7 + 8)$$
$$= 9\,(33 + 7) + (3 + 7 + 8)$$

$9\,(33 + 7)$ ‘9 کا ضریب ہے۔ اگر دیا ہوا عدد 9 سے تقسیم ہوتا ہو تو $(3 + 7 + 8)$ ہندسوں کا حاصل جمع بھی 9 کا ضریب ہوگا۔

آیئے اس اصول کو سمجھتے ہیں۔

اگر ہم تین ہندسی عدد $100a + 10b + c$ ‘جہاں a سیکڑے کے مقام پر b دہائی کے مقام پر اور c اکائی کے مقام پر لکھا گیا ہے۔

$$100a + 10b + c = (99 + 1)a + (9 + 1) + c = 99a + 9b + (a + b + c)$$
$$= 9(11a + b) + (a + b + c) \rightarrow \text{دیئے گئے اعداد کا مجموعہ}$$

ہندسوں کا حاصل جمع

$9(11a + b)$ ‘3 اور 9 کا ضریب ہے۔ یہ عدد 3 یا 9 سے قابل تقسیم ہے۔ ایسی ہی صورت میں کہ ہندسوں کا مجموعہ $(a + b + c)$ ‘9 یا 3 کا ضریب ہو یا $(a + b + c)$ ‘3 یا 9 سے قابل تقسیم ہو۔

کیا، تقسیم کا یہ اُصول تین ہندسوں سے زائد والے اعداد کے لیے بھی قابل اطلاق ہوگا؟

کسی پانچ ہندسی اعداد اور چھ ہندسی اعداد سے جانچ کیجیے۔

آپ نے دیکھا ہوگا کہ 2‘5 اور 10 سے کسی عدد کے قابل تقسیم ہونا‘ اس عدد کے اکائی کے ہندسہ پر منحصر ہے لیکن 3 اور 9 سے تقسیم کا عمل ان کے ہندسوں پر بھی منحصر ہوتا ہے۔

یہ کیجیے

(1 جانچ کیجیے کہ ذیل کے اعداد 3 یا 9 یا پھر دونوں ہی سے قابل تقسیم ہیں یا نہیں؟

(a) 3663	(b) 186	(c) 342	(d) 18871
(e) 120	(f) 3789	(g) 4542	(h) 5779782

SCERT TELANGANA

مثال 2: 3 سے تقسیم کرنے پر عدد 24P میں 1 باقی رہتا ہے اور 5 سے تقسیم کرنے پر باقی 2 بچتا ہے۔ P کی قیمت معلوم کرو۔

حل: اگر 24P کو 5 سے تقسیم کیا جائے تو 2 باقی رہتا ہے تب P یا تو 2 ہوگا یا 7۔

اگر P = 2، دیئے ہوئے عدد کو 3 سے تقسیم کرنے پر باقی 2 رہتا ہے۔ اگر P کی قیمت 7 ہو تو دیئے ہوئے عدد کو 3 سے تقسیم کرنے پر باقی 1 بچتا ہے۔

اس طرح P = 7

مشق - 15.2

1) اگر 345A7 کو 3 سے تقسیم کیا جائے تو A کے مقام پر ہندسہ کیا ہوگا۔

2) 2791A، 9 سے قابل تقسیم ہے تو A کے مقام کا ہندسہ محسوب کیجئے۔

3) چند ایک اعداد لکھئے جو 2، 3، 5، 9، 10 سے قابل تقسیم ہوں۔

4) 2A8، 2 سے قابل تقسیم عدد ہے تو A کی قیمت کیا ہوگی۔

5) 50B، 5 سے قابل تقسیم عدد ہے تو B کی قیمت معلوم کرو۔

6) عدد 2P، 2 اور 3 سے قابل تقسیم عدد ہے۔ P کے مقام پر عدد کیا ہوگا۔

7) 54Z کو 5 سے تقسیم کرنے پر باقی 2 بچا رہتا ہے اور 3 سے تقسیم کرنے پر باقی 1 بچا رہتا ہے تو Z کی قیمت معلوم کرو۔

8) 27Q کو 5 سے تقسیم کرنے پر 3 اور 2 سے تقسیم کرنے پر 1 باقی رہتا تو بتاؤ کہ 3 سے تقسیم کرنے پر باقی کتنا بچے گا۔

15.1.8 6 سے تقسیم کے قواعد

6 کے ضریب 24 پر غور کیجئے۔

واضح رہے کہ یہ 6 سے قابل تقسیم ہے۔

کیا 24، 6 کے اجزا سے بھی تقسیم ہوگا یعنی 2 اور 3 ۔

24 میں اکائی کے مقام پر 4 ہے جو کہ 2 سے تقسیم ہوتا ہے۔

24 کے ہندسوں کا حاصل جمع 6 = 4 + 2 ہے جو کہ 3 سے بھی قابل تقسیم ہے۔ اب 6 کے بعض دیگر ضربیوں سے اس بات کی توثیق کی گئی۔ ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ اگر کوئی عدد 6 سے تقسیم ہوتا ہو تو وہ عدد 6 کے اجزا یعنی 2 اور 3 سے بھی تقسیم ہوگا۔

اس کے متبادل بیان کی بھی جانچ کیجئے۔

ایک عدد جو کہ 2 سے تقسیم ہوگا، 2 اس کا مفرد جز ضربی ہوگا۔ اگر یہ عدد 3 سے تقسیم ہوتا ہو تو 3 بھی مفرد جز ضربی ہے۔

SCERT TELANGANA

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20

لہٰذا اگر کوئی عدد 2 اور 3 سے قابل تقسیم ہو تو 2 اور 3 کو مفرد اجزا کہا جائے گا اور ان کا حاصل ضرب بھی دیئے ہوئے عدد کا جز ضربی ہوگا۔

دوسرے الفاظ میں کوئی عدد اگر 6 سے قابل تقسیم ہو تو یہ عدد اس کے اجزا یعنی 2 اور 3 سے بھی تقسیم ہوگا۔

یہ کیجیے

1) جانچیے آیا دیئے ہوئے اعداد 6 سے قابل تقسیم ہیں؟

(a) 1632 (b) 456 (c) 1008 (d) 789 (e) 369 (f) 258

2) بتایئے کہ دیئے ہوئے اعداد 6 سے قابل تقسیم ہوں گے یا نہیں؟

(a) $458 + 676$ (b) 6^3 (c) $6^2 + 6^3$ (d) $2^2 \times 3^2$

15.1.9: 4 اور 8 سے تقسیم پزیری کے اُصول

a) چار ہندسوں پر مشتمل ایک عدد مثلاً $1000a+100b+10c+d = 4(250a+25b) + (10c+d)$ $4(250a+25b)$

4 کا ضریب ہے۔ دیا ہوا عدد 4 سے قابل تقسیم ہے۔ اسی صورت میں کہ $10c+d$، 4 سے تقسیم ہوتا ہو۔

دیئے ہوئے عدد کے آخری دو ہندسوں سے بننے والا عدد اگر 4 سے تقسیم ہوتا ہو یا پھر آخری دو ہندسے 0 ہوں تو دیا ہوا عدد 4 سے تقسیم ہوگا۔

ایک عدد ایسا لیجیے جس میں 4 سے زائد ہندسے ہوں اور اسے توسیعی شکل میں لکھیے۔ کیا ہم اس عدد کو اکائی کے ہندسے اور دہائی کے ہندسے کے علاوہ 4 کے ضریب کے طور پر لکھ سکتے ہیں؟

4 سے زائد ہندسوں کے کسی ایک ہندسہ کی جانچ کیجیے کہ 4 سے تقسیم ہونے کا عمل اس کے آخری دو ہندسوں پر منحصر ہوتا ہے یا نہیں۔

b) ایک چار ہندسی عدد $1000 \times a + 100 \times b + 10 \times c + d$ لیجیے

$$1000a + 100b + 10c + d = 8(125a) + c\,(100b + 10c + d)$$

$8(125a)$ ہمیشہ 8 سے تقسیم ہوگا۔ لہٰذا دیا ہوا عدد بھی 8 ہی سے تقسیم ہوگا جبکہ $(100b + 10c + d)$، 8 سے قابل تقسیم ہو۔

دیئے ہوئے عدد میں آخری کے تین ہندسوں سے بننے والا عدد 8 سے قابل تقسیم ہو یا آخر کے تین ہندسے 0 ہوں تب یہ عدد 8 سے تقسیم ہوگا۔

ایک ایسا عدد لیجیے جس میں 4 سے زائد ہندسے ہوں اور اسے توسیعی شکل میں لکھیں۔ ہم اس عدد کو اکائی کے ہندسے، دہائی کے ہندسے اور سینکڑے کے ہندسے کے علاوہ 8 کے ضریب کے طور پر لکھ سکتے ہیں۔

ایک اور زائد از 4 ہندسی عدد سے اس قاعدہ کی جانچ کیجیے آیا 8 سے تقسیم پذیری کا انحصار اس کے آخری تین ہندسوں پر ہوتا ہے یا نہیں؟

کیا آپ ان ہندسوں 1,2,3,4,5,6,7,8,9 کو اس طرح ترتیب دے سکتے ہیں کہ پہلے دو ہندسوں سے بننے والا عدد 2 سے قابل تقسیم ہو، پہلے 3 ہندسوں سے بننے والا عدد 3 سے قابل تقسیم ہو اور اسی طرح پہلے 4 ہندسوں سے بننے والا عدد 4 سے قابل تقسیم ہو اسی طرح جاری رکھتے ہوئے آخر کار 9 ہندسوں سے بننے والا عدد 9 سے قابل تقسیم ہو۔

حل: ہندسوں کی ترتیب سے بننے والا عدد 123654987 دلچسپ ہے۔ جانچیے اور تصدیق کیجیے۔

SCERT TELANGANA

مثال 3: جانچ کیجئے کہ 6582، 4 سے تقسیم پذیر ہے یا نہیں؟

حل: آخری دو ہندسوں سے بننے والا عدد 82 ہوگا جو کہ 4 سے قابل تقسیم نہیں ہے۔ لہٰذا دیا ہوا عدد 4 سے تقسیم نہیں ہوگا۔

مثال 4: جانچ کیجئے کہ 28765432، 8 سے تقسیم ہوتا ہے یا نہیں؟

حل: دیئے ہوئے عدد کے آخری تین ہندسوں سے بننے والا عدد 432 ہے جو کہ 8 سے تقسیم ہوتا ہے۔ لہٰذا دیا ہوا عدد بھی 8 سے تقسیم ہوگا۔

اگر کوئی عدد 8 سے قابل تقسیم ہو تو یہ عدد 4 سے بھی تقسیم ہوگا لیکن 4 سے تقسیم ہونے والا عدد ضروری نہیں کہ 8 سے بھی تقسیم ہو۔ 8 کے تمام ضریب 4 سے تقسیم ہوں گے لیکن 4 کے تمام ضربیوں کا 8 سے بھی تقسیم ہونا ضروری نہیں۔

یہ کیجئے

1) جانچ کیجئے کہ دیئے ہوئے اعداد 4 یا 8 یا پھر دونوں 4 اور 8 سے تقسیم ہوتے ہیں یا نہیں؟

(a) 464 (b) 782 (c) 3688 (d) 100

(e) 1000 (f) 387856 (g) 4^4 (h) 8^3

کوشش کیجئے

1) جانچئے کہ دیئے ہوئے اعداد 4 یا 8 سے یا پھر دونوں ہی اعداد 4 اور 8 سے تقسیم ہوں گے یا نہیں؟

(a) $4^2 \times 8^2$ (b) 10^3 (c) $10^5 + 10^4 + 10^3$ (d) $4^3 + 4^2 + 4^1 - 2^2$

15.1.10 7 سے تقسیم پذیری کے اُصول

ایک تین ہندسی عدد $100 \times a + 10 \times b + c$ لیجئے اسے $100a + 10b + c = 98a + 7b + (2a + 3b + c)$ کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔

یہاں پر 7 ایک مشترک جز ضربی نہیں ہے۔ لہٰذا اسے اس طرح لکھا جائے کہ 7 ایک مشترک جز بن جائے۔

$$= 7(14a + b) + (2a + 3b + c)$$

$7(14a + b)$، 7 کا ضریب ہوگا۔ دیا ہوا عدد 7 سے اسی وقت قابل تقسیم ہوگا جبکہ $(2a + 3b + c)$، 7 سے قابل تقسیم ہے۔

مثال 5: جانچ کیجئے کہ 364، 7 سے تقسیم ہوگا یا نہیں؟

حل: جہاں $a = 3$، $b = 6$، $c = 4$، $(2a + 3b + c)$ $= 2 \times 3 + 3 \times 4 + 6$

$= 6 + 18 + 4 = 28$ (جو کہ 7 سے قابل تقسیم ہے)

اس لئے دیا گیا عدد 7 سے قابل تقسیم ہے

SCERT TELANGANA

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20

یہ کیجیے

1) جانچ کریں کہ دیئے ہوئے اعداد 7 سے تقسیم ہوں گے۔

(a) 322 (b) 588 (c) 952 (d) 553 (e) 448

کوشش کیجیے

1) چار ہندسی ایک عدد لیتے ہوئے 7 سے تقسیم پذیری کی جانچ کیجیے۔

2) اپنے قاعدہ کی 3192 سے جو کہ 7 کا ضریب ہے جانچ کیجیے۔

15.1.11 11 سے تقسیم پذیری کا اُصول

5 ہندسوں پر مشتمل ایک عدد $10000a + 1000b + 100c + 10d + e$ ہے

یہاں پر 11 کو مشترکہ جزضربی کے طور پر نہیں لیا جا سکتا۔ لہٰذا اسے توسیعی طریقہ سے لکھنا ہوگا۔

$$= (9999 + 1)\, a + (1001 - 1)\, b + (99 + 1)\, c + (11 - 1)\, d + e$$

$$= 9999a + 1001\, b + 99c + 11d + a - b + c - d + e$$

$$= 11\, (909a + 91b + 9c + d) + (a + c + e) - (b + d)$$

$11\,(909a + 91b + 9c + d)$ 11 سے قابل تقسیم ہوگا

لہٰذا دیا ہوا عدد 11 سے اسی صورت میں تقسیم ہوگا جبکہ $(a + b + c) - (b + d)$، 11 سے تقسیم پذیر ہو۔

یعنی $(a + c + e) - (b + d)$، 11 یا 0 کا ضریب ہو۔

دیئے ہوئے عدد میں طاق مقامات $(a + c + e)$ کے ہندسوں کے حاصل جمع اور جفت مقامات $(b + d)$ کے ہندسوں کے حاصل جمع کا فرق 11 یا 0 کا ضریب ہوتا ہو تو دیا ہوا عدد 11 سے تقسیم ہوگا۔

ذیل کے جدول پر غور کیجیے۔

عدد	طاق مقامات کا حاصل جمع (بائیں سے)	جفت مقامات کا حاصل جمع (بائیں سے)	فرق
308	3 + 8 = 11	0	11 – 0 = 11
1331	1 + 3 = 4	3 + 1 = 4	4 – 4 = 0
61809	6 + 8 + 9 = 23	1 + 0 = 1	23 – 1 = 22

مندرجہ بالا جدول میں یہ واضح ہے کہ ہر صورت میں فرق 0 ہے یا 11 سے قابل تقسیم ہے۔ لہٰذا یہ تمام اعداد 11 سے تقسیم ہوں گے۔

SCERT TELANGANA

ایک عدد 5081 لیجیے۔اس میں (طاق مقامات کا حاصل جمع)‘(جفت مقامات کا حاصل جمع) کا فرق $(5+8)-(0+1)=12$‘ 11 سے قابل تقسیم نہیں ہے۔لہذا 5081‘ 11 سے قابل تقسیم نہیں ہے۔

یہ کیجئے

1) جانچیے کہ دیئے ہوئے اعداد 11 سے تقسیم پذیر ہیں یا نہیں؟

(i) 4867216 (ii) 12221 (iii) 100001

ایک تین ہندسی عدد 123 پر غور کیجیے۔

اس عدد کو ایک سے متصل دوسری بار ایسا لکھئے کہ 123123 حاصل ہو۔

بتایئے کہ بائیں طرف سے طاق مقامات کے ہندسوں کا حاصل جمع کیا ہے۔$1 + 3 + 2 = 6$

داہنے طرف سے جفت مقامات کے ہندسوں کا حاصل جمع کیا ہے؟ $2 + 1 + 3 = 6$

ان دونوں اعداد کا فرق کیا ہے؟ صفر۔لہذا 123123‘ 11 سے قابل تقسیم ہے۔

کوئی تین ہندسی عدد لیجئے اور پھر اسے ایک کے بازو دیگرے دو مرتبہ لکھئے۔کیا یہ 11 سے تقسیم پذیر ہوگا۔

کوشش کیجیے

1) جانچئے کہ 789789‘ 11 سے تقسیم ہوگا کہ نہیں۔

2) 348348348348‘ 11 سے تقسیم پذیر ہے یا نہیں۔

3) ایک عدد ایسا لیجئے کہ دہراتے ہوئے وقت الٹی سمت سے اعداد لکھنا شروع کیجئے مثلاً 135531‘ پہچانئے تو بھلا کہ یہ عدد 11 سے تقسیم ہوگا یا نہیں۔

4) جانچ کر بتائیے کہ 1234321‘ 11 سے تقسیم ہوگا؟

مشق - 15.3

1) تصدیق کیجیے کہ دیئے ہوئے اعداد 6 سے تقسیم ہوں گے یا نہیں؟

(a) 273432 (b) 100533 (c) 784076 (d) 24684

2) جانچئے کہ ذیل کے اعداد 4 سے تقسیم ہوتے ہیں کہ نہیں؟

(a) 3024 (b) 1000 (c) 412 (d) 56240

3) بتائیے کہ یہ اعداد 8 سے تقسیم ہوں گے؟

(a) 4808 (b) 1324 (c) 1000 (d) 76728

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20
SCERT TELANGANA

(4 ذیل کے اعداد کے لیے 7 سے تقسیم پذیری کی جانچ کریں۔

(a) 427 (b) 3514 (c) 861 (d) 4676

(5 نیچے کے اعداد کے لیے 11 سے تقسیم پذیری کی جانچ کیجئے۔

(a) 786764 (b) 536393 (c) 110011 (d) 1210121
(e) 758043 (f) 8338472 (g) 54678 (i) 13431
(j) 423423 (k) 168861

(6 اگر ایک عدد 8 سے قابل تقسیم ہو تو وہ عدد 4 سے بھی تقسیم ہوگا۔ سمجھائیے۔

(7 ایک تین رکنی عدد 4A3 میں ایک اور تین ہندسی عدد 984 جمع کیا گیا۔ اس طرح کہ چار ہندسی عدد 13B7 حاصل ہوا۔ یہ عدد 11 سے تقسیم ہوگا۔ (A + B) کی قیمت محسوب کیجئے۔

15.2 تقسیم پذیری کے چند اور قوانین

(a) اعداد کی تقسیم پذیری کے تعلق سے آیئے مزید چند ایک قواعد کا مطالعہ کریں۔

24 کے جز ضربی مثلاً 12 پر غور کیجئے

12 کے اجزائے ضربی 1, 2, 3, 4, 6, 12 ہوتے ہیں۔

آیئے جانچیں کہ 2, 3, 4, 6, 24 تقسیم ہوتا ہے یا نہیں؟ ہم کہہ سکتے ہیں کہ 24‘ 12 کے تمام اجزائے ضربی سے تقسیم ہوگا۔

لہٰذا ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ اگر ایک عدد a کسی دوسرے عدد b سے قابل تقسیم ہو تو یہ عدد اس عدد b کے تمام اجزائے ضربی سے بھی تقسیم ہوگا

(b) 80 کے عدد پر غور کیجئے۔ یہ 4 اور 5 سے قابل تقسیم ہے۔ لہٰذا یہ عدد 20 = 5 x 4 سے بھی قابل تقسیم ہوگا۔

جہاں 4 اور 5 ایک دوسرے کے سلسلہ کے مفرد اعداد ہیں۔ (4 اور 5 کے لیے کوئی مشترک اجزائے ضربی نہیں ہیں)

اسی طرح 60‘ 3 اور 5 سے قابل تقسیم ہے۔ اسی طرح 3 اور 5 میں مشترک اجزا نہیں ہیں۔ 60‘ 15 = 5 x 3 سے بھی قابل تقسیم ہے۔

اگر a اور b میں کوئی مشترک اجزا نہ ہوں تو دیا ہوا عدد جو کہ a اور b سے تقسیم ہوتا ہے $a \times b$ سے بھی تقسیم ہوگا۔

(اس قاعدہ کو ایسی مثال سے جانچیے جہاں a اور b سلسلہ وار مفرد اعداد ہوں)

(c) دو اعداد 16 اور 20 لیجئے۔ یہ دونوں اعداد 4 سے قابل تقسیم ہیں۔ عدد 36 = 20 + 16 بھی 4 سے قابل تقسیم ہوگا۔

اس قاعدہ کو 16 اور 20 کے دیگر مشترک اجزا سے جانچیے۔

دیگر اعداد کی جوڑیوں سے بھی اس کی تصدیق کیجئے۔

اگر کوئی اعداد کسی ایک عدد سے قابل تقسیم ہیں تو ان کا حاصل جمع بھی اسی عدد سے قابل تقسیم ہوگا۔

(d) دو اعداد 35 اور 20 لیجئے۔ یہ دونوں 5 سے قابل تقسیم ہیں۔ کیا ان کا فرق 15 = 20 - 35 بھی 5 سے قابل تقسیم ہوگا؟ اس قانون کو دیگر اعداد کی جوڑیوں سے بھی جانچ کر دیکھئے۔

اگر کوئی اعداد کسی ایک عدد سے تقسیم پذیر ہوں تو ان کا فرق بھی اس عدد سے قابل تقسیم ہوگا۔

SCERT TELANGANA

یہ کیجئے

(1 اعداد کی بعض مختلف جوڑیاں لیجئے اور اوپر بتائے گئے قوانین کی جانچ کیجئے۔

(2 144 ' 12 سے قابل تقسیم ہے۔کیا یہ عدد 12 کے اجزا سے بھی تقسیم پذیر ہوگا؟ تصدیق کیجئے۔

(3 جانچئے تو بھلا $2^3 + 2^4 + 2^5$ کیا 2 سے قابل تقسیم ہے؟ وضاحت کیجئے۔

(4 جانچ کر بتائیے کہ $3^3 - 3^2$، 3 سے تقسیم پذیر ہے؟ اپنے جواب کو سمجھائیے۔

ایک عدد پر غور کیجئے جو تین سلسلہ وار اعداد جیسے 120= 6 x 5 x 4 کا حاصل ضرب ہے۔ یہ عدد 3 سے قابل تقسیم ہے۔ان تین سلسلہ وار اعداد میں ایک عدد 3 کا ضریب ہے۔اسی طرح اگر ہم کسی تین سلسلہ وار اعداد کا حاصل ضرب لیں تو ان میں سے ایک 3 کا ضریب ہوگا۔لہٰذا تین سلسلہ وار اعداد کا حاصل ضرب ہمیشہ 3 سے قابل تقسیم ہوتا ہے۔

کوشش کیجئے

(1 جانچئے کہ 1578 x 1577 x 1576 ' 3 سے قابل تقسیم ہے یا نہیں؟

بڑے اعداد کے لیے 7 سے تقسیم پذیری:

تین ہندسی اعداد کے لیے ہم نے 7 سے تقسیم پذیری کا مطالعہ کیا ہے۔اگر کسی عدد کے ہندسے 3 سے زائد ہیں تو ایسے اعداد کی 7 سے تقسیم پذیری کو آسان بنائیں گے۔

عدد 7538876849 ' کی 7 سے تقسیم پذیری کی جانچ کیجئے۔

مرحلہ 1: اس عدد میں دائیں سے بائیں تین ہندسی اعداد کے گروپ بنائیں۔اگر بائیں کے گروپ میں 3 سے کم ہندسے ہوں تب بھی اسے ایک گروپ مانیں۔

7 |538 |876 |849 |
D C B A

مرحلہ 2: متبادل مقامات میں گروپس کو جمع کیجئے۔یعنی A + C اور B + D۔

$$\begin{array}{r} 849 \\ +\ 538 \\ \hline 1387 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 876 \\ +\ 7 \\ \hline 883 \end{array}$$

SCERT TELANGANA

مرحلہ 3: 883 کو 1387 سے تفریق کیجئے اور جیسے کہ پہلے کیا گیا حاصل ہونے والے تین ہندسی عدد کے لیے 7 سے تقسیم پذیری کی جانچ کیجئے۔

$$\begin{array}{r} 1387 \\ -\ 883 \\ \hline 504 \\ \hline \end{array}$$

7 سے تقسیم پذیری کے قاعدہ کے تحت ہم جانتے ہیں کہ 504، 7 سے تقسیم ہوتا ہے۔

لہٰذا دیا گیا عدد بھی 7 سے تقسیم ہوگا۔

کوشش کیجئے

(1) اوپر دیئے ہوئے طریقہ کی جانچ کرتے ہوئے بتائیے کہ 10 ہندسی عدد لیتے ہوئے 11 سے تقسیم پذیری اس طریقہ سے قابل اطلاق ہے۔

تقسیم پذیری کے قوانین استعمال کرتے ہوئے ہم کسی دیئے ہوئے عدد میں چھوڑ دیئے گئے بعض ہندسوں کو معلوم کر سکتے ہیں۔ فرض کیجئے کہ ایک عدد 84763A9، 3 سے قابل تقسیم ہے۔ اس عدد میں ہم ہندسوں کے حاصل جمع کا اندازہ اس طرح کریں گے۔

$8 + 4 + 7 + 6 + 3 + A + 9 = 37 + A$، 3 سے تقسیم پذیری جانچنے کیلئے A کی قیمت 2 یا 5 یا 8 ہونی چاہئے۔

مشق - 15.4

(1) جانچئے کہ آیا 25110، 45 سے قابل تقسیم ہے۔

(2) جانچئے کہ 61479، 81 سے تقسیم ہوتا ہے۔

(3) جانچئے کہ 864، 36 سے تقسیم ہوتا ہے یا نہیں؟ تصدیق کیجئے کہ 864، 36 کے تمام اجزائے ضربی سے بھی تقسیم پذیر ہے۔

(4) کیا 756، 42 سے تقسیم ہوگا؟ جانچ کر بتائیں کہ 756، 42 کے تمام اجزا سے بھی تقسیم ہوتا ہے۔

(5) 2156، 11 اور 7 سے تقسیم ہوگا کہ نہیں؟ کیا 2156، 11 اور 7 کے حاصل ضرب سے تقسیم ہوگا۔

(6) آیا 1435، 5 اور 7 سے تقسیم ہوگا؟ جانچئے کہ 1435، 5 اور 7 کے حاصل ضرب سے تقسیم پذیر ہے یا نہیں۔

(7) کیا 456 اور 618، 6 سے تقسیم ہوں گے؟ یہ بھی جانچئے کہ 6، 456 اور 618 کے حاصل جمع کو پورا پورا تقسیم کرتا ہے۔

(8) کیا 876 اور 345 کو 3 تقسیم کرے گا؟ اس بات کی بھی جانچ کیجئے کہ 3، 876 اور 345 کے فرق کو تقسیم کرتا ہے۔

(9) جانچ کر محسوب کیجئے کہ $2^2 + 2^3 + 2^4$، 2 یا 4 یا پھر 2 اور 4 دونوں ہی سے تقسیم پذیر ہے۔

SCERT TELANGANA

(10 جانچئے کہ 32^2 ‘4 یا 8 یا پھر 4 اور 8 دونوں سے تقسیم ہوگا۔

(11 اگر A679B ایک‘ پانچ ہندسی عدد ہے تو بتاؤ کہ یہ عدد 72 سے تقسیم ہوتا ہے۔ A اور B کی قیمتیں بھی محسوب کرو۔

15.3 تقسیم پذیری کے قوانین پر مسئلے

احمد اور ندیم اعداد کا کھیل کھیل رہے ہیں۔ ان کے درمیان گفتگو ذیل میں دی گئی ہے۔

ندیم کہتا ہے کہ وہ احمد سے ایک سوال کرنا چاہتا ہے۔

ندیم: کوئی دو ہندسی عدد سوچ لو۔

احمد: ٹھیک ہے۔ میں نے سوچ لیا (اس نے 75 کا تصور کیا)

ندیم: ہندسوں کی جگہ بدل دو (تا کہ نیا عدد حاصل ہو)

احمد: ٹھیک ہے

ندیم: اس عدد کو اپنے پہلے کے عدد میں جمع کرلو

احمد: ٹھیک ہے (میں نے کرلیا)

ندیم: اب اپنے جواب کو 11 سے تقسیم کرو۔ آپ کو باقی 0 حاصل ہوگا۔

احمد: ہاں! لیکن آپ نے کیسا پہچانا

کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ ایسا کس طرح ہوتا ہے؟

آیئے اب ندیم کے طریقہ کو سمجھنے کی کوشش کریں۔

فرض کیجئے کہ احمد نے ایک عدد $10a + b$ سوچ لیا تھا (اس طرح کہ a دہوں کے مقام پر اور b اکائی کے مقام پر علاوہ ازیں $a \neq 0$)

اس عدد کو $10 \times a + b = 10a + b$ لکھا جا سکتا ہے اور ہندسوں کے مقام کو تبدیل کرنے پر اسے $10b + a$ حاصل ہوگا۔

جب وہ دو اعداد کو جمع کرے گا تو اسے $(10a + b) + (10b + a) = 11a + 11b = 11(a + b)$ حاصل ہوگا۔

ان دونوں اعداد کا مجموعہ ہمیشہ 11 کا ضریب ہوگا۔ نوٹ کیجئے کہ ندیم دونوں اعداد کے حاصل جمع کو 11 سے تقسیم کرتا ہے تو خارج قسمت $(a + b)$ حاصل ہوتا ہے جو کہ دونوں ہندسوں a اور b کا حاصل جمع ہے۔

آپ کسی اور دو ہندسی عدد کے ساتھ اس بات کی جانچ کر سکتے ہیں۔

SCERT TELANGANA

یہ کیجئے

(1 اگر اعداد ذیل کے مطابق سوچ لیئے جائیں تو ان کی جانچ کیجئے۔

(i) 37　　(ii) 60　　(iii) 18　　(iv) 89

(2 کرکٹ کی ایک ٹیم میں 11 کھلاڑی ہیں۔ سلکشن بورڈ نے کھلاڑیوں کے لیے $10x+y$ ٹی۔شرٹس خریدے پھر انہوں نے $10y+x$ ٹی۔شرٹس خریدے۔ اس طرح تمام ٹی۔شرٹس کھلاڑیوں میں تقسیم کر دیئے گئے۔ اگر تمام 11 کھلاڑیوں میں ہر ایک کو مساوی ٹی۔شرٹس تقسیم کیئے جائیں تو کتنی ٹی۔شرٹس بچ رہیں گی اور یہ بھی بتاؤ کہ ہر ایک کو کتنی ٹی۔شرٹس ملیں گی۔

سوچئے، بحث کیجئے اور حل کیجئے

ایک' دو ہندسی عدد فرض کر لیجئے اور ہندسوں کی جگہوں کو تبدیل کر کے نئے عدد یاد رکھیے۔ بڑے عدد سے چھوٹے عدد کو تفریق کیجئے۔ کیا یہ فرق 9 سے ہمیشہ تقسیم ہوتا ہے؟

یہ کیجئے

(1 ایک باسکٹ میں $10a + b$ میوے ہیں۔ (جہاں $a \neq 0$ اور $a > b$) ان میں سے $10b + a$ خراب ہو گئے۔ باقی میووں کو 9 افراد میں مساوی طور پر تقسیم کر دیا گیا۔ بتایئے کہ مساوی تقسیم کے بعد کتنے میوے بچ رہ گئے؟ ہر ایک کو کتنے میوے ملیں گے؟

15.4: تین ہندسی اعداد سے مشغلہ

ندیم: کوئی تین ہندسی عدد سوچ لیجئے

احمد: ٹھیک ہے (اس نے 157 سوچ لیا)

ندیم: ہندسوں کو تبدیل کرتے ہوئے چھوٹے عدد کو بڑے عدد سے تفریق کر دیجئے۔

احمد: ٹھیک ہے۔

ندیم: اپنے جواب کو 9 یا 11 سے تقسیم کیجئے۔ مجھے یقین ہے کہ باقی کچھ بھی نہیں بچے گا۔

احمد: ہاں! آپ نے کیسا پہچانا؟
صحیح ہے! ندیم کو یہ کیسے معلوم ہوا؟

تین ہندسی اعداد کے لیے بھی ہم وہی طریقہ اپنائیں گے جس میں $100a + 10b + c$ لکھا جاتا ہے۔ ہندسوں کے مقام کو تبدیل کرنے پر ہمیں $100c + 10b + a$ حاصل ہوگا۔

SCERT TELANGANA

اگر $(a > c)$ دونوں اعداد کا فرق

$$(100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = 99a - 99c = 99(a - c) = 9 \times 11 \times (c - a)$$

اگر $(c > a)$ دونوں اعداد کا فرق

$$(100c + 10b + a) - (100a + 10b + a) = 99c - 99a = 99(c - a) = 9 \times 11 \times (c - a)$$

اگر $c = a$ تب فرق 0 ہوگا۔

ہر صورت میں جو عدد حاصل ہوگا وہ 99 کا ضریب ہوگا۔ لہٰذا وہ عدد دونوں ہی اعداد 9 اور 11 سے تقسیم ہوگا اور خارج قسمت

$(c - a)$ یا $(a - c)$

یہ کیجئے

(1 اوپر دیئے ہوئے طریقہ کو ذیل کے اعداد سے آزمایئے

(i) 657 (ii) 473 (iii) 167 (iv) 135

کوشش کیجئے

ایک' تین ہندسی عدد لے کر ہندسوں کی جگہ تبدیل کرتے ہوئے تین نئے اعداد (ABC,BCA,CAB) بنایئے۔ اب ان تینوں کو جمع کیجئے۔ کن کن اعداد کے لیے ان تینوں اعداد کا مجموعہ قابل تقسیم ہوگا۔

15.5: خالی جگہوں پر ہندسے پہچاننے کا مسئلہ

اعداد کے ایسے مسئلے بھی پہچانے جا سکتے ہیں جن میں ہندسوں کی جگہ حروف حسابی حاصل جمع کی شکل میں لکھے جاتے ہیں اور سوال یہ ہوتا ہے کہ کونسا حرف کس ہندسے کی جگہ لکھا گیا ہے۔ آیئے اس سلسلہ میں ہم حاصل جمع اور حاصل ضرب کی پہیلیاں پہچانیں۔

ان پہیلیوں کی تین شرائط ہیں

(1 ایک حرف صرف ایک ہی ہندسہ کو ظاہر کرے گا۔ اسی طرح ایک ہندسہ ایک ہی حرف کے لیے ہوگا۔

(2 سب سے بڑے مقام کا ہندسہ 0 نہیں ہونا چاہیے۔

(3 پہیلی کا صرف ایک ہی جواب ہو۔

مثال 6: دیئے ہوئے حاصل جمع میں A کو پہچانیئے۔

$$\begin{array}{r} 17A \\ +\ 2A4 \\ \hline 407 \\ \hline \end{array}$$

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20

SCERT TELANGANA

حل: مشاہدہ سے $A + 4 = 7$ لکھا جاسکتا ہے۔

لہٰذا $A = 3$

$173 + 234 = 407$

یا

$$\begin{array}{l} 100 + 70 + A \\ 200 + 10A + 4 \\ \hline 300 + 70 + 11A + 4 = 407 \end{array}$$

$$11A = 33$$

$$A = 3$$

مثال 7: $Y + Y + Y = MY$ کے حاصل جمع میں M اور Y کی قیمتیں کیا ہوں گی؟

حل:

$$Y + Y + Y = MY$$

$$3Y = 10M + Y$$

$$2Y = 10M$$

$M = \frac{Y}{5}$ یعنی Y، 5 سے قابل تقسیم ہے، جہاں $Y = 0$ یا 5

دیئے گئے بیان کے مطابق

اگر $Y = 0,\ Y + Y + Y = 0 + 0 + 0 = 0,\ M = 0$

اگر $M = 1, Y = 5$ $Y = 5,\ Y + Y + Y = 5 + 5 + 5 = 15, MY = 15$

مثال 8: اگر $A2 - 15 = 54$ میں A2 اور 5A دو ہندسی اعداد ہو تب 'A' کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل: $a = 5 - 2$ ممکن ہے

تب $12 - 5 = 7$

اس لئے $A = 7$

یا

$$(10A + 2) - (10 + 5) = 50 + A$$

$$10A - 13 = 50 + A$$

$$9A = 63$$

$$A = 7$$

مثال 9: اگر $5A1 - 23A = 325$ میں SA1 اور 23A تین اعداد ہوں تب 'A' کی قدر معلوم کیجیے۔

حل:

$1 - A = 5$?

یعنی $11 - A = 5,$

اس طرح $A = 6$

$$(500 + 10A + 1) - (200 + 30 + A) = 325$$

$$501 - 230 + 10A - A = 325$$

$$271 + 9A = 325$$

$$271 + 9A = 325$$

$$271 - 271 + 9A = 325 - 271$$

$$9A = 54$$

$$A = 6$$

SCERT TELANGANA

مثال:10 اگر $1A \times A = 9A$ میں 9A اور 9A دو ہندسی اعداد ہوں تب 'A' کی قدر معلوم کرو۔

حل:

$$
\begin{aligned}
(10+A)A &= (90+A)\\
10A + A^2 &= 90 + A\\
A^2 + 9A - 90 &= 0\\
A^2 + 2.A\left(\frac{9}{2}\right) + \left(\frac{9}{2}\right)^2 - \left(\frac{9}{2}\right)^2 - 90 &= 0\\
\left(A+\frac{9}{2}\right)^2 - \frac{81}{4} - 90 &= 0\\
\left(A+\frac{9}{2}\right)^2 &= \frac{441}{4}\\
A + \frac{9}{2} &= \frac{21}{2}\\
A = \frac{12}{2} &= 6
\end{aligned}
$$

یا $A \times A = A$ کے لئے

1, 5, 6 مربعوں کے جدول سے

$1 \times 1 = 1,$

$5 \times 5 = 25,$

$6 \times 6 = 36,$

اگر $A = 6,$

$16 \times 6 = 96$

مثال:11 اگر $BA \times B3 = 57A$ میں B3 دو ہندسی اعداد ہوں اور 57A ایک تین ہندسی عدد A، B کی قدریں معلوم کیجیے۔

حل: اس مثال میں ہم اندازہ کریں گے کہ مکرر مشق کے طریقہ کے ذریعہ ضرب کے جدولوں کی مدد سے ہندسوں کا مقام کیا ہوگا۔

اکائی کے مقام میں A x 3 = A ۔ A = 0 یا 5 کے لیے حاصل ضرب میں اکائی کا ہندسہ وہی رہے گا۔ لہٰذا A، 0 یا 5 ہوگا۔ اگر دہے کے مقام پر 1 لیا جائے تو دو ہندسی عدد کی زیادہ سے زیادہ قیمت 19 ہوگی اور حاصل ضرب 19 x 19 = 361 ہوگا۔ یہ عدد 500 سے چھوٹا ہے۔ علاوہ ازیں دہائی کے مقام پر 3 لینے سے دونوں ہی دو ہندسی عددوں کی کم سے کم قیمت 30 x 30 = 900 ہوگی جو کہ 500 سے بڑا ہے۔ لہٰذا دہے کے مقام پر 2 کا ہندسہ آئے گا تب 25 x 23 = 575 یا 20 x 23 = 460

لہٰذا مطلوبہ عدد 25 x 23 = 575

یہ کیجیے

1) اگر 21358AB، 99 سے قابل تقسیم ہے تو A اور B کی قیمتیں محسوب کرو۔

2) 4AB8 میں A اور B کی قیمتیں کیا ہوں گی۔ (A, B ہندسے ہیں) جو کہ 2، 3، 4، 6، 8 اور 9 سے تقسیم پذیر ہے۔

مثال:11 دیئے ہوئے ضرب کے عمل میں حروف کی قیمت محسوب کرو۔

$$
\begin{array}{r}
AB\\
\times\ 5\\
\hline
CAB
\end{array}
$$

حل: اگر ہم B = 0 یا 1 یا 5 لیں تب 0 x 5 = 0، 1 x 5 = 5، 5 x 5 = 25

اگر B = 0، تب A0 x 5 = CA0

SCERT TELANGANA

اگر ہم A = 5 لیں تب 50 x 5 =250 CAB = 250

کوشش کیجئے

.1 اگر YE x ME = TTT تب Y + E + M + T حروف کے مقام پر کونسے ہندسے آئیں گے

(اشارہ: TTT = 100T + 10T + T = T (111) = T (37 x 3))

.2 اگر 88 اشیا کی قیمت A733B ہو تو A اور B کی قیمتیں کیا ہوں گی۔

مشق - 15.5

.1 حسب ذیل حاصل جمع میں وہ ہندسے معلوم کیجیے جنہیں چھوڑ دیا گیا ہے۔

(a)
$$\begin{array}{r} 111 \\ +\quad A \\ +\ 77 \\ \hline 197 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{r} 222 \\ +\quad 8 \\ +\ BB \\ \hline 285 \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{r} AAA \\ +\quad 7 \\ +\ AA \\ \hline 373 \end{array}$$

(d)
$$\begin{array}{r} 2222 \\ +\ 99 \\ +\quad 9 \\ AAA \\ \hline 299A \end{array}$$

(e)
$$\begin{array}{r} BB \\ +\quad 6 \\ \hline AAA \\ \hline 461 \end{array}$$

.2 حسب ذیل میں A کی قیمت معلوم کیجیے۔

(a) 7A – 16 = A9 (b) 107 – A9 = 1A (c) A36 – 1A4 = 742

.3 حسب ذیل میں حروف کی جگہ پر کونسے ہندسے آنا چاہیے

(a)
$$\begin{array}{r} DE \\ \times\ 3 \\ \hline FDE \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{r} GH \\ \times\ 6 \\ \hline CGH \end{array}$$

.4 حروف کے مقام پر موزوں ہندسے لکھئے۔

(a) 73K ÷ 8 = 9L (b) 1MN ÷ 3 = MN

.5 اگر ABB x 999 = ABC123 (جہاں A, B, C اعداد ہیں) تب A, B, C کی قدر معلوم کیجیے

15.6: باقی بچنے والے اعداد کے ہندسی مقامات لیتے ہوئے تقسیم پذیری

اس طریقہ میں دیئے ہوئے عدد سے اس کے ہندسوں کے مقامات کو تقسیم کرتے ہوئے ہم باقی بچنے والے اعداد لیں گے۔
اگر ہم کسی عدد کے ہندسوں کے مقامات کو 7 سے تقسیم کریں تو ہمیں باقی بچنے والے اعداد ذیل کے مطابق حاصل ہوں گے۔

1000 ÷ 7	(باقی 6۔ اسے اس طرح سے 1-=6-7 لیا جا سکتا ہے)
100÷7	(باقی 2)
10÷7	(باقی 3)
1÷7	(باقی 1)

SCERT TELANGANA

مقامی قیمت	10^8	10^7	10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
باقی بچنے والے اعداد کو 7 سے تقسیم کریں	3	2	1	−2	−3	−1	2	3	1

فرض کیجئے کہ ہمیں یہ جانچنا ہے کہ 562499، 7 سے تقسیم ہوتا ہے یا نہیں۔

ہندسہ	5	6	2	4	9	9
مقامی قدر	5×10^5	6×10^4	2×10^3	4×10^2	9×10^1	9×10^0
باقی بچنے والے اعداد کو 7 سے تقسیم کریں	$5\times(-2)$	$6\times(-3)$	$2\times(-1)$	4×2	9×3	9×1

اعداد اور ہندسی قدر کے باقی بچنے والے اعداد کے حاصل ضرب کا مجموعہ

$-10 -18 -2 + 8 + 27 + 9 = -30 + 44 = 14$ (7 سے تقسیم پذیر ہے) لہٰذا 562499، 7 سے تقسیم پذیر ہے۔

کوشش کیجئے

1) اوپر دیئے ہوئے طریقہ کو استعمال کرتے ہوئے جانچئے کہ 7810364، 4 سے تقسیم ہوتا ہے یا نہیں؟

2) اوپر ہی کے طریقہ کو استعمال کرتے ہوئے بتایئے کہ 963451، 6 سے تقسیم ہوگا کہ نہیں؟

15.7: تقسیم پذیری کے قوانین پر مزید اور مسئلے

مثال 13: کیا ہر وہ عدد جس کے ہندسوں کو اس کے اکائی کے ہندسہ کے ساتھ جوڑ کر الٹے سلسلہ میں لکھنے پر حاصل ہونے والا عدد 11 سے تقسیم ہوگا؟

حل: فرض کیجئے کہ ایسا ہی ایک جفت عدد 12344321 ہے۔ طاق مقامات کے ہندسے 2 + 4 + 3 + 1 ہیں جبکہ جفت مقامات کے ہندسے 1 + 3 + 4 + 2 ہیں۔ ان کا فرق 0 ہے۔ لہٰذا یہ عدد 11 سے تقسیم ہوگا۔

مثال 14: کیا $10^{1000}-1$، 9 اور 11 دونوں ہی سے قابل تقسیم ہے۔

حل: اسے $10^{1000}-1$ یعنی 99....999 (1000 مرتبہ) لکھتے ہیں۔ جس کے تمام مقامات پر 9 کا آنکڑا ہے۔ لہٰذا یہ 9 سے تقسیم ہوگا اور 1000 ہندسے ہیں۔ جفت مقامات کے ہندسوں کا حاصل جمع اور طاق مقامات کے ہندسوں کا حاصل جمع مساوی ہے۔ ان کا فرق 0 ہوتا ہے۔ لہٰذا دیا ہوا عدد 11 سے تقسیم ہوگا۔

سوچئے، بحث کیجئے اور حل کیجئے

1) کیا ہم کہہ سکتے ہیں کہ $10^{2n}-1$، 9 اور 11 دونوں ہی سے قابل تقسیم ہے؟ سمجھایئے۔

2) کیا $10^{2n+1}-1$، 11 سے تقسیم ہوتا ہے یا نہیں؟ وجہ بتایئے۔

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20
SCERT TELANGANA

مثال 15: کوئی دو ہندسی عدد تین مرتبہ اس طرح لیجیے کہ 6 ہندسی عدد بن جائے۔ جانچیے کہ آیا یہ 3 سے تقسیم ہوگا؟

حل: آیئے دو ہندسی عدد 47 لیتے ہیں۔ اسے تین مرتبہ لکھنے پر یہ عدد 6 ہندسی عدد بن جاتا ہے۔ یعنی 474747۔
474747 کو 47(10101) لکھا جائے گا۔ 10101، 3 سے تقسیم ہوتا ہے چونکہ 3 = 1 + 1 + 1 تین سے تقسیم ہوتا ہے۔ لہٰذا 474747، 3 سے تقسیم ہوگا۔

مثال 16: تین ہندسی ایک عدد لیجیے اور اسے دو مرتبہ اس طرح لکھئے کہ ایک 6 ہندسی عدد بن جائے۔ جانچیے کہ نیا عدد 7 اور 11 دونوں سے تقسیم ہوتا ہے یا نہیں؟

حل: آیئے تین ہندسی عدد 345 لیتے ہیں۔ اسے دو مرتبہ لکھنے پر یہ 6 ہندسی عدد بن جاتا ہے یعنی 345345۔
حسب ذیل طریقہ سے بھی لکھا جاسکتا ہے۔ 345345

345345 = 345000 + 345 = 345 (1000 + 1)

= 345 91001)

= 345 (7 x 11 x 13)

لہٰذا 345345، 7, 11 اور 13 سے قابل تقسیم ہے۔

کوشش کیجیے

1) جانچ کر بتایئے کہ 456456456456، 7، 11 اور 13 سے تقسیم ہوتا ہے؟

مثال 17: ایک ایسا تین ہندسی عدد لیجیے جس کے تمام ہندسے وہی ہوں اور اسے اس کے ہندسوں کے حاصل جمع سے تقسیم کیجیے۔ آپ نے کیا دیکھا؟

حل: 444 کے ہندسوں کے حاصل جمع کا عدد 12 = 4 + 4 + 4
اب 444 کو 12 سے تقسیم کرو۔ 37 = 12 ÷ 444 اس عمل کو 333، 666 وغیرہ سے آزماؤ۔
کیا آپ سمجھتے ہیں کہ ان اعداد کا خارج قسمت 37 ہی رہے گا۔

مثال 18: کیا $2^3 + 3^3$، (2+3) سے قابل تقسیم ہے یا نہیں؟

حل: ہم جانتے ہیں کہ $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$2^3 + 3^3 = (2+3)(2^2 - 2\times3 + 3^2)$ یہ (2+3) کا ضریب ہے۔

لہٰذا $2^3 + 3^3$، (2+3) سے قابل تقسیم ہے۔

سوچیے، بحث کیجیے اور حل کیجیے

1) تصدیق کیجیے کہ $a^5 + b^5$، (a + b) سے قابل تقسیم ہے۔ اس مقصد کے لیے a اور b کی جگہ مختلف طبعی اعداد لیجیے؟

2) کیا ہم کہہ سکتے ہیں کہ $(a^{2n+1} + b^{2n+1})$، (a + b) سے قابل تقسیم ہے؟

SCERT TELANGANA

15.8: سلسلہ وار اعداد کا حاصل جمع معلوم کرنے کا طریقہ

ہم 1 سے لے کر 100 تک سلسلہ وار اعداد کا حاصل جمع اصل جمع کے عمل کے بغیر کر سکتے ہیں۔

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 50 + 51 + \ldots + 98 + 99 + 100$$

$$= (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) \ldots\ldots (50 + 51)$$

$$= 101 + 101 + 101 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 50$$ یہاں جوڑیاں $= 50 \times 101 = 5050$

اسے اس طرح بھی لکھا جا سکتا ہے $\dfrac{100 \times 101}{2} = 5050$

اگر اعداد کی تعداد 48 ہو تو حاصل جمع کیا ہوگا؟ آپ نے کیا دیکھا؟

اگر اعداد n ہوں تو ان اعداد کا حاصل جمع کیا ہوگا۔

مثال 19: ان حقیقی اعداد کا حاصل جمع معلوم کرو جو 5 سے تقسیم پذیر ہیں۔ 50 تا 85 کے اعداد لیئے جائیں۔

حل: 50 تا 85 کے کامل اعداد جو کہ 5 سے قابل تقسیم ہیں کا حاصل جمع =

5 سے تقسیم ہونے والے کامل اعداد 1 تا 85 کا حاصل جمع) - (5 سے تقسیم ہونے والے 1 تا 49 کے اعداد کا حاصل جمع)

$$= (5 + 10 + \ldots + 85) - (5 + 10 + \ldots + 45)$$

$$= 5(1 + 2 + \ldots + 17) - 5(1 + 2 + \ldots + 9)$$

$$= 5 \times \left(\frac{17 \times \cancel{18}^{9}}{\cancel{2}}\right) - 5 \times \left(\frac{9 \times \cancel{10}^{5}}{\cancel{2}}\right)$$

$$= 5 \times 9 \times 17 - 5 \times 9 \times 5$$

$$= 5 \times 9 \times (17 - 5)$$

$$= 5 \times 9 \times 12 = 540$$

مثال 20: 2 یا 3 سے قابل تقسیم ایک تا 100 صحیح اعداد کا حاصل جمع محسوب کرو۔

حل: اعداد 1 تا 100 جو کہ 2 سے قابل تقسیم ہیں 2، 4، ....98، 100 ہوں گے۔ 1 تا 100، 3 سے تقسیم ہونے والے اعداد 3، 6، ...96، 99 ہوں گے۔

اوپر دیئے گئے اعداد کے دونوں سلسلوں میں بعض اعداد دو مرتبہ واقع ہوئے ہیں۔ ایسے اعداد 6 کے ضریب ہیں۔ یعنی 2 اور 3 کا ذو اضعاف اقل (LCM) ہے۔

1 تا 100، 2 سے تقسیم ہونے والے صحیح اعداد کا حاصل جمع =

(1 تا 100، 2 سے تقسیم ہونے والے صحیح اعداد کا حاصل جمع) + (1 تا 100، 3 سے تقسیم ہونے والے اعداد کا حاصل جمع) -

(1 تا 100، 6 سے تقسیم ہونے والے صحیح اعداد کا حاصل جمع)

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لئے ہے 2019-20
SCERT TELANGANA

$$= (2+4+....+100)+(3+6+....+99)-(6+12+...96)$$

$$= 2(1+2+....+50)+3(1+2+...+33)-6(1+2+....+16)$$

$$= 2\times\left(\frac{50\times(50+1)}{2}\right)+3\times\left(\frac{33\times(33+1)}{2}\right)-6\times\left(\frac{16\times(16+1)}{2}\right)$$

$$= \cancel{2}\times\left(\frac{50\times51}{\cancel{2}}\right)+3\times\left(\frac{33\times\cancel{34}^{17}}{\cancel{2}}\right)-6\times\left(\frac{{}^{8}\cancel{16}\times17}{\cancel{2}}\right)$$

$$= 2550+1683-816$$

$$= 4233-816 = 3417$$

مشق - 15.6

1) 1 تا 100 اعداد میں 5 سے تقسیم ہونے والے صحیح اعداد کا حاصل جمع معلوم کیجئے۔

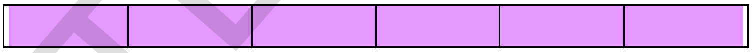
2) 11 تا 50 اعداد میں 2 سے تقسیم ہونے والے صحیح اعداد کا حاصل جمع محسوب کیجئے۔

3) ان صحیح اعداد کا حاصل جمع معلوم کیجئے جو 2 اور 3 سے تقسیم ہوتے ہیں اور 1 تا 50 پائے جاتے ہیں۔

4) $(n^3 - n)$، 3 سے قابل تقسیم ہے۔ وجوہات بتایئے۔

5) سلسلہ وار اعداد میں n طاق اعداد کا حاصل جمع n سے تقسیم ہوتا ہے۔ سمجھایئے؟

6) کیا $1^{11} + 2^{11} + 3^{11} + 4^{11}$ ، 5 سے تقسیم ہوگا؟ تشریح کیجئے۔

7) 

دی ہوئی شکل میں مستطیلوں کی تعداد بتایئے۔

8) راحیل کے والد ہر سال اس کی سالگرہ پر اس کے نام کچھ رقم جمع کرانا چاہتے ہیں۔ پہلی سالگرہ پر 100 روپئے، دوسری پر 300 روپئے، تیسری پر 600، چوتھی پر 1000 روپئے اور اسی طرح ہر سال وہ رقم جمع کراتے ہیں۔ بتایئے کہ راحیل کی پندرہویں سالگرہ پر جمع شدہ رقم کیا ہوگی؟

9) 2 یا 5 سے تقسیم ہونے والے 1 تا 100 صحیح اعداد کا حاصل جمع کیا ہوگا؟

10) 11 تا 1000 ان اعداد کا حاصل جمع معلوم کرو جو 3 سے تقسیم ہوتے ہیں۔

ہم نے کیا سیکھا

1) تین ہندسی عدد کو توسیعی شکل $100a + 10b + c$ میں لکھنا اور سمجھنا۔ جہاں a,b,c ہندسے ہیں اور $a \neq 0$ ، b,c 0 تا 9 ہو۔

2) عام طریقہ میں ظاہر کردہ 2 یا 3 ہندسی اعداد کے لیے 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9، 10، 11 سے تقسیم پذیری کی جانچ اور ضوابط۔

3) 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9، 10، 11 سے تقسیم کے قوانین کے اصول۔

4) اعداد پر مسئلے پہیلیاں اور مشغلے۔

SCERT TELANGANA

جوابات

1 ناطق اعداد

مشق 1.1

I.

(i) جمعی اکائی (ii) تقسیمی قانون

(iii) ضربی اکائی (iv) ضربی اکائی

(v) تقلیبی خاصیت بلحاظ جمع (vi) بندشی قانون بلحاظ ضرب

(vii) جمعی معکوس قانون (viii) ضربی معکوس

(ix) تقسیمی

2. (i) $\frac{3}{5}, \frac{-5}{3}$ (ii) $-1, 1$ (iii) 0, ناقابل بیان (iv) $\frac{-7}{9}, \frac{9}{7}$

(v) $1, -1$

3. (i) $\frac{-12}{5}$ (ii) 0 (iii) $\frac{9}{11}$ (iv) $\frac{6}{7}$

(v) $\frac{3}{4}, \frac{1}{3}$ (vi) 0 4. $\frac{-28}{55}$

.5 تلازمی قانون بلحاظ ضرب، معکوس قانون بلحاظ ضرب، ضربی اکائی، بندشی قانون بلحاظ جمع

7. $\frac{28}{15}$ 8. (i) $\frac{-5}{12}$ (ii) $\frac{58}{13}$ (iii) $\frac{45}{7}$

9. $\frac{-7}{8}$ 10. $\frac{53}{6}$

.11 تلازمی قانون نہیں ہے لہٰذا $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{4} \neq \frac{1}{2}-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$

13. (i) طبعی اعداد (ii) 0 (iii) منفی

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لیے ہے

SCERT TELANGANA

مشق 1.3

1. (i) $\frac{57}{100}$ (ii) $\frac{22}{125}$ (iii) $\frac{100001}{100000}$ (iv) $\frac{201}{8}$

2. (i) 1 (ii) $\frac{19}{33}$ (iii) $\frac{361}{495}$ (iv) $\frac{553}{45}$

3. (i) $\frac{7}{13}$ (ii) $\frac{-7}{5}$

4. $\frac{-62}{65}$ 5. 140 6. $5\frac{1}{10}$m 7. ₹. 1.66

8. $161\frac{1}{5}m^2$ 9. $\frac{3}{4}$ 10. $\frac{16}{9}$m 11. 125

2 واحد متغیر پر خطی مساواتیں

مشق 2.1

1.(i) 2 (ii) −3 (iii) −6 (iv) 6

(v) $\frac{-3}{2}$ (vi) −21 (vii) 27 (viii) 5

(ix) $\frac{7}{3}$ (x) 1 (xi) $\frac{1}{2}$ (xii) 0

(xiii) $\frac{25}{7}$ (xiv) $\frac{21}{16}$ (xv) $\frac{8}{3}$ (xvi) $\frac{13}{6}$

مشق 2.2

1.(i) 67^0 (ii) 17^0 (iii) 125^0 (iv) 19^0

(v) 20^0

2. 5 ,13 3. 43, 15 4. 27, 29

5. 252, 259, 266 6. 20 km 7. 99g, 106g, 95g 8. 113m, 87m

9. 16m, 12m 10. 21m, 21m, 13m

11. 39^0 ,51 12. 20 سال , 28 سال

13. 126 14. 80, 10 15. 60, 48 16. 59 ft, 29.5 ft

17. 186, 187.

SCERT TELANGANA

مشق 2.3

1. 1   2. 2   3. $\frac{11}{4}$ 4. -1

5. $\frac{-9}{5}$ 6. 1   7. 7   8. $\frac{-4}{7}$

9. $\frac{9}{2}$ 10. $\frac{11}{3}$ 11. 1   12. -96

13. 3   14. 8

مشق 2.4

1. 25   2. 7   3. 63   4. 40, 25, 15

5. 12   6. 4, 2   7. 16   8. 10,000

مشق 2.5

1.(i) $\frac{145}{21}$ (ii) 168   (iii) 12   (iv) 25

(v) $\frac{127}{12}$ (vi) 1   (vii) $\frac{9}{2}$ (viii) $\frac{5}{12}$

(ix) $\frac{9}{23}$ (x) -1 (xi) $\frac{-1}{7}$ (xii) $\frac{3}{7}$

2. 30   3. 48,12   4. $\frac{3}{7}$ 5. 50,51,52

6. 25   7. 5   8. 50=42 پیسے کے سکے ؛ 14=ایک روپے کے سکے

9. 30 دن   سال 10. 20 کلومیٹر   11. 36

12. ₹860   13. 16

4 قوت نما

مشق 4.1

1.(i) $\frac{1}{64}$ (ii) -128 (iii) $\frac{64}{27}$ (iv) $\frac{1}{81}$

2.(i) $\left(\frac{1}{2}\right)^{15}$ (ii) $(-2)^{14}$ (iii) 5^4 (iv) 5^5 (v) $(-21)^4$

3.(i) $2^4 \times 3$ (ii) $\frac{1}{2}$

SCERT TELANGANA

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لیے ہے

4.(i) 10 (ii) 40^3 (iii) $\frac{13}{16}$ (iv) $\frac{2}{81}$

(v) $\frac{17}{6}$ (vi) $\frac{16}{81}$ 5. (i) 625 (ii) 625

6.(i) 10 (ii) −10 (iii) 2 7. 3

8. $\frac{4^5}{3^4 \times 5}$ 9. (i) 1 (ii) 72 (iii) −24 (iv) 1

10. $\frac{16}{49}$

مشق 4.2

1.(i) 9.47×10^{-10} (ii) 5.43×10^{11} (iii) 4.83×10^{7} (iv) 9.298×10^{-5}

(v) 5.29×10^{-5}

2.(i) 4,37,000 (ii) 5,80,00,000 (iii) 0.00325 (iv) 37152900

(v) 0.03789 (vi) 0.02436

3.(i) 4×10^{-7} m (ii) 7×10^{-6} mm (iii) 3×10^{8} m/sec (iv) 3.84467×10^{8}

(v) 1.6×10^{-19} کولمب (vi) 1.6×10^{-3} cm (vii) 5×10^{-6} cm

4. 1.0008×10^2 mm

5.(i) نہیں (ii) نہیں (iii) نہیں (iv) نہیں (v) نہیں

5 نسبت کے استعمال سے مقداروں کا تقابل

مشق 5.1

1.(i) 3:4 (ii) 32:3 (iii) 1:2 2. (i) 168

3. 8 4. 48 5. 20 6. $\frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{4}, \frac{3}{5}, \frac{5}{3}$

7. 3:5 8. 1 : 3 or 4 : 7 9. ₹8320

10. $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$, ہاں 11. ₹. 28.5, ₹. 92, ₹. 257.6, ₹. 132, ₹. 88

12. (a) 83 (b) 1992 ارکان 13. 2064 تھیلے 14. 70 سنٹی میٹر

SCERT TELANGANA

مشق 5.2

1. 81.9 crores　2. 2756.25　3. ₹. 7.674　4. 3 × 6cm

5. ₹ 127.50　6. $6\frac{1}{4}\%$　7. 17%

8. ₹.880, 10%, ₹.4,000, 20%, ₹.10,000, 20%, profit, ₹.392, ₹42, ₹. 315, ₹.35.

9. ₹.2244　10. ₹.1250 11.40,000; 12.5% 12.Profit ₹.30,000, profit % 17.64 %

3. ₹.1334　14. (i) ₹ 10,000　(ii) ₹ 3,000　(iii) ₹ 200

5. (i) ₹ 540　(ii) ₹ 5040　16. 13

مشق 5.3

1. (a) ₹ 268.75　2. ₹.19,950　3. A = ₹ 8820, C.I = ₹ 820

4. ₹.734.50, ₹ 7234.50 5. ₹ 86950 ; ₹1449.1　6. 81,82,199　7. ₹.1080.56

8. (i) ₹ 210　9. ₹.43.20　10. 5,31,616

11. ₹. 36659.70　12. Bharathi ; ₹.362.50　13. ₹.9500

14. 1297920　15. ₹.103.81

6 جذرالمربع، جذرالمکعب

مشق 6.1

.1 (i) 39 کے مربع میں اکائی عدد "1" ہے۔
(ii) 297 کے مربع میں اکائی عدد 9 ہے۔
(iii) 5125 کے مربع میں اکائی عدد 5 ہے۔
(iv) 7286 کے مربع میں اکائی عدد 6 ہے۔
(v) 8742 کے مربع میں اکائی عدد 4 ہے۔

.2 کامل مربع
(i) 121　(ii) 256

.3 (i) 257 میں اکائی کا ہندسہ 7 ہے اسلئے کامل مربع نہیں۔
(ii) 4592 میں اکائی کا ہندسہ 2 ہے اسلئے وہ کامل مربع نہیں ہے۔
(iii) 2433 میں اکائی کا ہندسہ 3 ہے اس لئے وہ کامل مربع نہیں ہے۔
(iv) 5050 میں اکائی کا ہندسہ 0 ہے اس لئے وہ کامل مربع نہیں ہے۔
(v) 6098 میں اکائی کا ہندسہ 8 ہے اس لئے وہ کامل مربع نہیں ہے۔

4. (i) 431^2 - طاق　(ii) 2826^2 - جفت　(iii) 8204^2 - جفت
(iv) 17779^2 - طاق　(v) 99998^2 - جفت

SCERT TELANGANA

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لیے ہے

5. (i) 50 (ii) 112 (iii) 214

6. (i) 25 (ii) 81 (iii) 169

مشق 6.2

1. (i) 21 (ii) 28 (iii) 64 (iv) 84

2. 5 3. 6. 120 4. 6 5. 39

6. 51 7. 144, 9 8. 89 9. 4608 m^2

مشق 6.3

1. (i) 33 (ii) 48 (iii) 88 (iv) 78
   (v) 95

2. (i) 1.6 (ii) 4.3 (iii) 8.3 (iv) 9.2

3. 31 4. 67 cm 5. 91 6. 1024

7. 149 8. (i) 10 (ii) 16 (iii) 28

مشق 6.4

1. (i) 512 (ii) 4096 (iii) 9261 (iv) 27000

2. i) 243 - کامل مکعب نہیں ii) 516 - کامل مکعب نہیں
   iii) 729 - ایک کامل مکعب iv) 8000 - ایک کامل مکعب
   v) 2700 - کامل مکعب نہیں

3. 2 4. 17 5. 5 6. 288 7. 2

مشق 6.5

1. (i) 7 (ii) 9 (iii) 11 (iv) 14

1. (i) 16 (ii) 13 (iii) 15 (iv) 18

3. i) کاذب ii) کاذب iii) صادق
   iv) صادق v) کاذب vi) کاذب

7 تعددی تقسیمی جدول اور ترسیم

مشق 7.1

1. ₹.11060.83 2. $\bar{x} = 7$ 3. $\bar{x} = 27$ 4. $\bar{x} = 43$

5. $\bar{x} = 30$ سال 6. 52 سال

7. $\bar{x} = 12$ انحراف کا مجموعہ $\bar{x} = 0$

SCERT TELANGANA

8. 5 | 9. $\bar{x} = 13.67$ ہرصورت میں مساوی ہوگا | 10. 15.3 نشانات

11. $\bar{x} = 30$ | 12. وسطانیہ = 3.4 | 13. $x = 18$

14. بہتاتیہ = 10 | 15. بہتاتیہ = $x - 3$ | 16. بہتاتیہ = 1

17. 12, 16, 16, 16 | 18. 42 | 19. 8 | 20. 20

مشق 7.2

1.

وقفہ جماعت	5-14	15-24	25-34	35-44	45-54	55-64
تعدد	9	9	9	6	7	5

2.

طلباء کی تعداد	15-19	19-23	23-27	27-31	31-35	35-39	39-43
تعدد	5	7	6	5	5	1	1

3.

وقفہ جماعت	4-11	12-19	20-27	28-35	36-43	44-51	52-59
سرحدیں	3.5-11.5	11.5-19.5	19.5-27.5	27.5-35.5	35.5-43.5	43.5-51.5	51.5-59.5

4.

جماعت کے نشانات	تعدد cu.f	وقفہ جماعت cu.f	کم تر	زیادہ تر
10	6	4-16	6	75
22	14	16-28	20	69
34	20	28-40	40	55
46	21	40-52	61	35
58	9	52-64	70	14
70	5	64-76	75	5

5.

وقفہ جماعت (Marks)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
طلباء (Students)	2	10	4	9	10

6.

وقفہ جماعت (عمریں)	تعدد بچوں کی تعداد	جماعت سرحدیں	گھٹتا ہوا یکجائی تعدد	بڑھتا ہوا یکجائی تعدد
1 - 3	10	0.5 - 3.5	10	59
4 - 6	12	3.5 - 6.5	22	49
7 - 9	15	6.5 - 9.5	37	37
10 - 12	13	9.5 - 12.5	50	22
13 - 15	9	12.5 - 15.5	59	9

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لیے ہے
SCERT TELANGANA

7.

وقفہ جماعت	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
Eu fr	3	8	19	25	30
تعدد	3	5	11	6	5

دیا گیا تعدد، کم تر یکجائی تعدد ہے

8.

وقفہ جماعت	1-10	11-20	21-30	31-40	41-50
G.Cu fr	42	36	23	14	6
تعدد	6	13	9	8	6

8 جومیٹری اشکال کا تفصیلی جائزہ

مشق 8.1

1.(a) صادق (b) کاذب (c) کاذب (d) کاذب
(e) کاذب (f) کاذب (g) کاذب

2. (a) ہاں کوئی دو متماثل اشکال ہمیشہ مساوی ہوتی ہیں
(b) ہاں یکسانیت ہوگی

3. AB = NM; $\angle A = \angle N$
BC = MO; $\angle B = \angle M$
CA = ON; $\angle C = \angle O$

4. (i) صادق (ii) کاذب (iii) صادق (iv) کاذب
(v) صادق

7. 1.5 m, 3m, 4.5m, 6m, 7.5m, 9m

8. 9m

مشق 8.2

(i) 10 (ii) 12 (iii) 14 (iv) 2
(v) B,D,E,W,M,O,J,T,W,P,Z (vi) O,X,M,W,H

9 سادہ اشکال کا رقبہ

مشق 9.1

2. (i) 20 sqcm (ii) 424 sqcm (iii) 384 sqcm

3. 96 sqcm. 4. 96 sqcm 5. (i) 10700 sqm (ii) 10650 sqm

6. (ii) x = 75 cm, 45 cm

7. ₹4050

8. 337.5 sqcm.

SCERT TELANGANA

مشق 9.2

1. (i) 316 sqm (ii) 616 sq cm   2. 616 sqcm.

3. (i) 693 sqcm.   (ii) 259.87 cm^2

4. 1386 cm^2 5. 308 cm^2 6. 10.5 cm^2 7. 7.8729 cm^2

8. (i) $\frac{6}{7}a^2$ (ii) 123.5 cm^2 9. 6.125 cm^2 10. 346.5 m^2

10 راست اور معکوس تناسب

مشق 10.1

1. ₹. 84, ₹. 168, ₹. 420, ₹. 546   2. 32, 56, 96, 160

3. ₹. 12,600/-   4. ₹. 2,100/-   5. 21 m   6. 6m, 8.75 m

7. 168 km   8. 5000   9. 25 km $\frac{10}{3}$ گھنٹے   10. $\frac{9}{20}$ 11. 2 : 1

مشق 10.2

1. (iii)   2. 120, 80

مشق 10.3

1. 4 kg   2. 50 days   3. 48   4. 4

5. 4   6. 15   7. 24   8. 60 منٹ   9. 40%   10. $\frac{(x+1)}{x+2}$

مشق 10.4

1. ₹540   2. 2 دن   3. 16 دن   4. 325 آدمی   5. 36 دن

11 الجبری عبارتیں اور اجزائے ضربی بنانا

مشق 11.1

1. (i) 42K   (ii) $6lm$ (iii) $15t^4$ (iv) 18mn
   (v) $10p^3$

3. (i) $60a^2c$
   (ii) $24m^3n$
   (iii) $36k^3l^3$
   (iv) $24p^2q^2r^2$

4. i) x^5y^3 ii) a^6b^6 iii) $36k^3l^3m^3$ iv) $24p^2q^2r^2$
   v) $72a^2bcd$ 5. $x^2y^2z^2$ 6. x^3y

SCERT TELANGANA

مشق 11.2

1. (ii) $3k^2l+3klm+3kmn$ (iii) $a^2b^2+ab^4+ab^2c^3$
   (iv) $x^2yz-2xy^2z+3xyz^2$ (v) $a^4b^3c^3+a^2b^4c^3d-a^3b^3c^2d^2$
2. $12y^2+16y$
3. i) -2 ii) 0
4. $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$
5. $x^2-y^2-z^2+2xy-yz+zx-xr+yr$
6. $-7x^2+8xy$
7. $-3k^2+21kl-21km$
8. $a^3+b^3+c^3-a^2b+b^2a-b^2c+c^2b+a^2c-c^2a$

مشق 11.3

1. (i) $6a^2-19a-36$ (ii) $2x^2-5xy+2y^2$ (iii) $k^2l-kl^2-l^2m+klm$
   (iv) $m^3+m^2n-mn^2-n^3$
2. (i) $2x^2-3xy+3x^2y+3xy^2-5y^2$
   (ii) $3a^2b^2-a^3b-2ab^3-3a^2bc+3ab^2c$
   (iii) $klmn-lm^2n-k^2l^2+kl^2m+k^2lm-klm^2$
   (iv) $p^4-5p^3q+6p^3r+pq^3+6q^3r-5q^4$
3. i) $10x^2-14xy$ ii) m^3+n^3 iii) $-19a^2-34ab+16ac-3b^2+3c^2$
   iv) $p^2q^2-q^2r^2+p^2qr+pqr^2-p^2q-pq^2-p^2r+pr^2$
4. $8(k+1)^2$

مشق 11.4

1. i) $9k^2+24kl+16l^2$ ii) $a^2x^4+2abx^2y^2+b^2y^4$
   iii) $49d^2-126de+81e^2$ iv) m^4-n^4
   v) $9t^2-81s^2$ vi) $k^2l^2-m^2n^2$
   vii) $36x^2+66x+30$ viii) $4b^2-2ab+2bc-ca$
2. i) 92416 ii) 259081 iii) 9,84,064 iv) 6,38,401
   v) 89,984 vi) 6391 vii) 11,772 viii) 42,024

12 اجزائے ضربی

مشق 12.1

1. (i) 2, 4, 8 (ii) 3, a, 3a (iii) 7, x, y, $7x17y17xy$ (iv) 2, m $m^2, 2m, 2m^2$
   (v) 5 (vi) 2, x, $2x$ (vii) 2, 3, 6, x, y, $2x, 2y, 2xy, 3x, 3y, 3xy, 6x, 6y, 6xy$

SCERT TELANGANA

2. i) $5x(x-5y)$ (ii) $3a(3a-2x)$ (iii) $7p(p+7q)$

iv) $12a^2b(3-5c)$ (v) $3abc(a+2b+3c)$

vi) $p(4p+5q-6q^2)$ (vii) $t(u+at)$

3. (i) $(3x-4b)(a-2y)$

(ii) $(x^2+5)(x+2)$ (iii) $(m+4)(m-n)$

(iv) $(a^2-b)(a-b^2)$ (v) $(p-1)(pq-r^2)$

مشق 12.2

1. (i) $(a+5)^2$ (ii) $(l-8)^2$ (iii) $(6x+8y)^2$ (iv) $(5x-3y)^2$

(v) $(5m-4n)^2$ (vi) $(9x-11y)^2$ (vii) $(x-y)^2$ (viii) $(l^2+2m^2)^2$

2. (i) $(x+6)(x-6)$ (ii) $(7x+5y)(7x-5y)$ (iii) $(m+11)(m-11)$

(iv) $(9+8x)(9-8x)$ (v) $(xy+8)(xy-8)$ (vi) $6(x+3)(x-3)$

(vii) $(x+9)(x-9)$ (viii) $2x(1+4x^2)(1+2x)(1-2x)$

(ix) $x^2(9x+11)(9x-11)$ (x) $(p-q+r)(p-q-r)$

(xi) $4xy$

3. (i) $x(lx+m)$ (ii) $7(y^2+5z^2)$ (iii) $3x^2(x^2+2xy+3z)$

(iv) $(x-a)(x-b)$ (v) $(3a+4b)(x-2y)$ (vi) $(m+1)(n+1)$

(vii) $(b+2c)(6a-b)$ (viii) $(pq-r^2)(p-1)$ (ix) $(y+z)(x-5)$

4. (i) $(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$ (ii) $(a^2+b^2+c^2+2bc)(a+b+c)(a-b-c)$

(iii) $(1+m-n)(1-m+n)$ (iv) $\left(7x+\frac{4}{5}\right)\left(7x-\frac{4}{5}\right)$

(v) $(x^2-y^2)^2$ (vi) $(5a-b)(5b-a)$

5. (i) $(a+6)(a+4)$ (ii) $(x+6)(x+3)$ (iii) $(p-7)(p-3)$

(iv) $(x-8)(x+4)$ 6. 10 7. 0, 12

مشق 12.3

1. (i) $8a^2$ (ii) $\frac{1}{3}x$ (iii) $9a^2b^2c^2$ (iv) $\frac{1}{5}yz^2$

(v) $-6l^2m$

2. (i) $3x-2$ (ii) $5a^2-7b^2$ (iii) $x(5x-3)$ (iv) $l(2l^2-3l+4)$

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لیے ہے
SCERT TELANGANA

(v) $5abc(a-b+c)$ (vi) $(2q^2+3pq-p^2)$ (vii) $\frac{4}{3}(abc+2bc)$

3. (i) $7x-9$ (ii) $12x$ (iii) $\frac{77}{3}ab$ (iv) $\frac{24}{4}l(m+n)$

(v) $4(x^2+7x+10)$ (vi) $(a+1)(a+2)$

4. (i) $x+4$ (ii) $x-2$ (iii) $p+4$ (iv) $5a(a-5)$

(v) $10m(p-q)$ (vi) $4z(4z+3)$

مشق 12.4

(i) $3(x-9)=3x-27$

(ii) $x(3x+2)=3x^2+2x$

(iii) $2x+3x=5x$

(iv) $2x+x+3x=6x$

(v) $4p+3p+2p+p-9p=p$

(vi) $3x\times 2y=6xy$

(vii) $(3x)^2+4x+7=9x^2+4x+7$

(viii) $(2x)^2+5x=4x^2+5x$

(ix) $(2a+3)^2=4a^2+12a+9$

(x) (a) $9-21+12=0$ (b) $9+15+6=30$ (c) $9-15=-6$

(xi) $(x-4)^2=x^2-8x+16$

(xii) $(x+7)^2=x^2+14x+49$

(xiii) $(3a+4b)(a-b)=3a^2+ab-4b^2$

(xiv) $(x+4)(x+2)=x^2+6x+8$

(xv) $(x-4)(x-2)=x^2-6x+8$

(xvi) $5x^3\div 5x^3=1$

(xvii) $(2x^3+1)\div 2x^3=1+\frac{1}{2x^3}$

(xviii) $(3x+2)\div 3x=1+\frac{2}{3x}$

(xix) $(3x+5)\div 3x=\frac{5}{3}x$

(xx) $\frac{4x+3}{3}=\frac{4}{3}x+1$

13 سہ ابعادی اشکال کی دوابعادی میں منظر کشی

مشق 13.1

3. (i) 5 (ii) 9 (iii) 20 (iv) 14

4. (i) 3 sq.units (ii) 9 sq.units (iii) 16 sq.units (iv) 14 sq.units

SCERT TELANGANA

مشق 13.2

1.

F	V	E	V + F = E + 2
5	6	9	مطمئن
7	10	15	,,
8	12	18	,,
6	6	10	,,
5	5	8	,,
8	12	18	,,
8	6	12	,,
6	8	12	,,

2. تمام مکعب، مربعی منشور ہوتے ہیں لیکن اسکا برعکس کاذب ہوگا
3. نہیں بناتا
4. ہاں

5. F = 20, V = 6, E = 12, V + F – E = 2
6. نہیں بناتا

7.

V	E
8	12
5	8
6	9

8. (i) مسدسی ہرم (ii) مکعب نما (iii) مخمس ہرم
(iv) استوانہ (v) مکعب (vi) مسدسی ہرم
(vii) منحرف

9. (i) a, b, c, d,e (ii) (a) چار سطحی ٹھوس مجسم (b) کرہ
(c) مکعب نما/مکعب (d) کرہ
(e) مکعب ایک منتظم کثیر پہلوئی ہے جبکہ مکعب نما نہیں
(f) مکعب/مکعب نما (g) مربع احرام

3. (a) ہشت ضلعی منشور (b) مسدسی منشور
(c) مثلثی منشور (d) مخمسی اہرام

14 طرفی رخوں کا رقبہ اور حجم

مشق 14.1

1. A
2. 10cm
3. 9m^2
4. ₹.72

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لیے ہے
SCERT TELANGANA

مشق 14.2

1. (i) $112.996\ m^3$ (ii) $70m^3$ (iii) $22.5m^3$
2. (i) $13.92m^3$, 13920 لیٹرس (ii) $5.2\ m^3$, 5200 لیٹرس
   (iii) $36.792\ m^3$, 36792 لیٹرس
3. $\frac{7}{8}$ گنا کمی ہوگی
4. (i) $262.144\ cm^3$ (ii) $2.197m^3$ (iii) $4.096m^3$
5. 6400
6. $1096\ cm^3$
7. $110cm^3$
8. 90
9. 27
10. 6 cm.

15 اعداد کا کھیل

مشق 15.1

1. 2 سے قابل تقسیم 1200, 836, 780, 4820, 48630
   5 سے قابل تقسیم 1200, 535, 780, 3005, 4820, 48630
   10 قابل تقسیم 1200, 780, 4820, 48630
   ہم یہ غور کریں گے کہ جو عدد 10 سے قابل تقسیم ہے وہ 2 اور 5 سے بھی قابل تقسیم ہوگا۔
2. (a), (b), (c), (e) 2 سے قابل تقسیم
3. (a), (b), (c) (d) 5 سے قابل تقسیم
4. (a), (b), (d), (e) 10 قابل تقسیم
5. (a) 6 (b) 8
   (c) 6 (d) 12
6. 10, 20, 30, 40, 50, 60, ...
7. 6

مشق 15.2

1. A = 2 or 5 or 8
2. A = 8
3. 90, 180, 270, 360, 450 etc.
4. ہم یہ غور کریں گے کہ 2 سے قابل تقسیم اعداد 0 سے 9 اکائی کے علاوہ دوسرے پر منحصر نہیں ہوں گے۔
5. 0 or 5
6. 4
7. 7
8. ‘0’

SCERT TELANGANA

مشق 15.3

1. (a), (d) 6 سے قابل تقسیم
2. (a), (b), (c), (d) 4 سے قابل تقسیم
3. (a), (c), (d) 8 سے قابل تقسیم
4. (a), (b), (c), (d) 7 سے قابل تقسیم
5. (a), (b), (c), (d), (e), (i), (j), (k) 11 سے قابل تقسیم
6. 8 کے ضریب 4 کے بھی ضریب ہوں گے
7. A = 1, B = 9, A + B = 10

مشق 15.4

1. 45 سے قابل تقسیم
2. 81 سے قابل تقسیم
3. 36 اور اس کے تمام اجزا سے بھی سے قابل تقسیم
4. 12 اور اس کے تمام اجزا سے بھی سے قابل تقسیم
5. 11 اور 7، اور ان کے حاصل ضرب سے بھی قابل تقسیم
6. 5 اور 7، اور ان کے حاصل ضرب سے بھی قابل تقسیم
7. دونوں اعداد اور ان کا مجموعہ بھی 6 سے قابل تقسیم
8. دونوں اعداد اور ان کے فرق سے بھی تقسیم پذیر
9. 2 اور 4 سے قابل تقسیم ہے
10. 4 اور 8 سے قابل تقسیم
11. A = 3, B = 2

مشق 15.5

1. (a) A = 9 (b) B = 5 (c) A = 3 (d) A = 6, مجموعہ = 2996
   (e) A = 4, B = 1
2. (a) A = 5 (b) A = 8 (c) A = 9
3. (a) D = 5, E = 0, F = 1 (b) C = 1, G = 2, H = 0
4. (a) K = 6, L = 2 (b) M = 5, N = 0
5. A = 8, B = 7, C = 6

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لیے ہے
SCERT TELANGANA

مشق 15.6

1. 1050
2. 620
3. 216
4. $n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n-1)n(n+1)$ تین متواتر اعداد کا حاصل ضرب
5. n متواتر طاق اعداد کا مجموعہ $\frac{(2n-1)(2n)}{2} = n(2x-1)$ کا ضریب n
6. $(1^{11} + 4^{11}) + (2^{11} - 3^{11})$ 5 سے قابل تقسیم
7. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$
8. 1200روپے
9. 3050
10. 166833-18 = 166815.

SCERT TELANGANA

نصاب

اعداد کا نظام (50 گھنٹے)

i. اعداد کا کھیل

ii. ناطق

iii. مربعی اعداد، مکعبی اعداد، جذر المربع، مکعب، جذر المکعب

(i) اعداد کا کھیل

☆ (100a + 10b + c) کی عام شکل میں 2 اور 3 ہندسی اعداد کی تفہیم اور تحریر جہاں a, b, c صرف ہندسے (0-9) ہیں اور ان کو مختلف معموں سے جوڑنا (جیسے غائب اعداد کو معلوم کرنا کوئی چار مشمولہ اعمال کے حروفی سوالات سے)

☆ اعداد معمہ کھیل

☆ عام شکل میں ظاہر کردہ دو یا تین ہندسی اعداد کے لئے 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 اور 11 سے تقسیم پذیری کی جانچ کی منطقی تفہیم

(ii) ناطق اعداد

☆ ناطق اعداد کی خصوصیات (تماثلی خصوصیات کو شامل کرتے ہوئے)

☆ عبارتوں کی عام شکل کے استعمال سے خصوصیات کو بیان کرنا خصوصیات کا ادراک

☆ عددی خط پر ناطق اعداد کو ظاہر کرنا

☆ دو ناطق اعداد کے درمیان پائے جانے والے ناطق اعداد کا اظہار (طالب علموں کو بتلایئے کہ مکمل اعداد کے کوئی دو غیر یکساں اعداد کے درمیان زیادہ سے زیادہ ناطق اعداد پائے جاتے ہیں)

☆ ناطق اعداد کا اعشاریائی اظہار اور اس کے برعکس (اگر نسب نما 10، 100، ۔۔۔ سے الگ ہوں)

☆ ناطق اعداد پر اعمال کی یکجائی

☆ ناطق اعداد پر عبارتی سوالات (تمام اعمال پر مبنی)

☆ عبارتی سوالات (اعلیٰ منطق، تمام اعمال بشمول رقبہ وغیرہ)

(iii) مربعی اعداد، مکعبی اعداد، جذر المربع، مکعب، جذر المکعب

☆ مربعی اعداد اور جذر المربع

☆ تقسیمی اور اجزائے ضربی کے طریقے سے جذر المربع معلوم کرنا

(a) چار ہندسی اعداد (b) دو اعشاری مقام سے زیادہ نہ ہو

☆ فیثاغورث کے اعداد (مسئلہ تثلیث) اور فیثاغورث کے مسئلہ کی تصدیق

☆ مکعبی اعداد اور جذر المکعب (تین ہندسی اعداد کے لئے صرف اجزائے ضربی کا طریقہ)

☆ جذر المربع اور جذر المکعب کا اندازہ لگانا۔ مطلوبہ عدد کے قریب تر عدد کو معلوم کرنے کی مشق کرنا۔

☆ قوسین کے استعمالات

☆ BODMAS اُصول کو استعمال کرتے ہوئے براکٹس کا اختصار

SCERT TELANGANA

الجبراء (20 گھنٹے) **i. قوتیں اور قوت نما** **ii. الجبرئی عبارتیں** **iii. واحد متغیر میں خطی مساواتیں** **20 گھنٹے**	**(i) قوت نما** ☆ صحیح اعداد بطور قوت نما ☆ صحیح عددی قوت معہ قوت نما کے اُصول ☆ معیاری شکل **(ii) الجبرئی عبارتیں** ☆ الجبرئی عبارتوں کا حاصل ضرب (عددی ضریب صحیح عدد ہونا چاہئے) ☆ کچھ عام غلطیاں (مثال $2 + x \neq 2x,\ 7x + y \neq 7xy$) ☆ خصوصیات $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2\ ;\ a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ ☆ خصوصیات کی جیومٹری تصدیق ☆ اجزائے ضربی (صرف عام صورتوں میں) میں تحلیل کرنا ☆ مشترک جزضربی کے ذریعہ اجزائے ضربی میں تحلیل کرنا ☆ گروہی ارکان کے ذریعہ اجزائے ضربی میں تحلیل کرنا ☆ خصوصیات کو استعمال کرتے ہوئے اجزائے ضربی میں تحلیل کرنا ☆ $(x + a)\ (x + a)$ شکل کے جزضربی ☆ الجبرئی عبارتوں کی تقسیم **(iii) واحد متغیر خطی مساواتیں** ☆ ضرب اور تقسیم کے ذریعہ واحد متغیر خطی مساواتوں کے عبارتی سوالات کو حل کرنا ☆ تناسب کے استعمال سے مقداروں کا تقابل ☆ مرکب نسبت - عبارتی سوالات
تناسب کے استعمال سے **(i) مقداروں کا تقابل** **(ii) راست تناسب، معکوس تناسب**	☆ ٹیکس، ڈسکاؤنٹ، زائد اخرجات، نقصان، نفع اور فیصدی پر اطلاقی سوالات (کثیر زر تبادلہ) ☆ سود مفرد اور سود مرکب میں فرق (3 سال تک کے لئے سالانہ مرکب یا 3 سال تک ششماہی) معیاری طریقے سے سود مرکب کا ضابطہ معلوم کرنا اور سادہ سوالات کو حل کرنے کے لئے اس ضابطہ کا استعمال ☆ راست تغیر سادہ اور راست عبارتی سوالات ☆ معکوس تغیر سادہ اور راست عبارتی سوالات ☆ مخلوط سوالات، راست و معکوس تغیرات پر ☆ وقت اور کام کے سوالات سادہ اور راست عبارتی سوالات ☆ وقت اور فاصلہ - سادہ اور راست عبارتی سوالات

SCERT TELANGANA

جومیٹری (40 گھنٹے) i) چارضلعی کی بناوٹیں ii) 3-D کا 2-D میں اظہار iii) جومیٹری اشکال کا تفصیلی جائزہ	(i) چارضلعی کی بناوٹیں ☆ چارضلعی اوران کی خصوصیات کا اعادہ ☆ چارضلعی کی بناوٹیں ☆ چارضلع اورایک زاویہ ☆ چارضلع اورتین وتر ☆ دومتصل ضلعے اورتین زاویے ☆ تین ضلع اوردووتر ☆ تین ضلع اوردومشمولہ زاویے ☆ دووتروں کے ذریعہ بعض قسم کے چارضلعی بنانا (ii) 3-D کا 2-D میں اظہار ☆ مفروضوں کی مدد سے اشکال کی شناخت کرنااوران کے مناسب جوڑ (زیادہ پیچیدہ جیسے گھونسلے، 2D اور 3D اشکال کے جوڑ'' دو سے زائد اشکال نہ ہو) ☆ 2-D کو اتارتے ہوئے 3-D شکل کا ادراک ہم پیائشی خاکوں کی مدد سے (تسلسل کے ساتھ) ☆ مسطح سطح والی 3D اشکال کا رشتہ ایولرس سے جوڑتے ہوئے سطحوں کناروں، راسوں کو گنتے ہوئے تصدیق کیجئے۔ (iii) جومیٹری اشکال کا تفصیلی جائزہ ☆ جومیٹری اشکال کا تفصیلی جائزہ، مماثل اشکال، مشابہہ اشکال، جومیٹری اشکال میں تشاکل بلحاظ مثلثات چارضلعی اوردائرے
مساحت (15 گھنٹے) (i) سادہ اشکال کا رقبہ (ii) سطحی رقبہ اور حجم	(i) سادہ اشکال کا رقبہ ☆ ہیران کے ضابطے کی مدد سے مثلث کا رقبہ (بغیر ثبوت کے) اور چارضلع کے رقبے کو معلوم کرنے میں اس کا اطلاق ☆ منحرف کا رقبہ ☆ چارضلعی اوردوسرے کثیرضلعی کے رقبے ☆ دائرہ اوردائرہ وی راستوں کا رقبہ (ii) سطح کا رقبہ اور حجم ☆ مکعب اور مکعب نما کی سطحوں کا رقبہ ☆ حجم کا تصور، بنیادی اکائی سے حجم کی پیائش مکعب اور مکعب نما کا حجم ☆ حجم اور گنجائش

SCERT TELANGANA

معطیات کا استعمال (15 گھنٹے) تعددی جدول اور ترسیمات	(i) تعددی جدول اور ترسیمات ☆ غیر گروہی معطیات کا اوسط، وسطانیہ اور بہتاتیہ کا اعادہ ☆ انحرافی طریقے سے اوسط معلوم کرنا ☆ گروہی معطیات کی اہمیت اور احاطہ کار ☆ تعددی تقسیمی جدول کی تیاری ☆ یکجائی تعددی تقسیمی جدول کی تیاری ☆ تعددی ترسیمات (ہسٹوگرام، تعددی کثیر ضلعی، تعددی منحنی یکجائی تعددی منحنی)

SCERT TELANGANA

تعلیمی معیارات

تعلیمی معیارات ایسے واضح بیانات ہوتے ہیں جن میں یہ بتلایا جاتا ہے کہ طلبا کن معلومات کو حاصل کریں گے اور کونسے عمل کرنے کے قابل ہوں گے۔

ذیل میں ان درجات کو پیش کیا گیا ہے جن کی بنیاد پر ہم تعلیمی معیارات تشکیل دیتے ہیں۔

مسئلہ کا حل:

ریاضی کے مسائل کے حل کے لیے تصورات اور طریقۂ عمل کو استعمال کرنا۔

a) مسائل کے اقسام:

مسائل کئی قسم کے ہوسکتے ہیں جیسے معنیٰ، عبارتی سوالات، تصویری سوالات، عملی سوالات، مواد، جدول اور ترسیم وغیرہ کا مطالعہ

b) مسئلہ کے حل کے مراحل:

☆ مسئلہ کا مطالعہ

☆ مواد یا معلومات کے تمام اجزا کی شناخت

☆ متعلقہ معلومات کو علیحدہ کرنا

☆ پائے جانے والے تصورات کا فہم

☆ طریقۂ عمل کا انتخاب

☆ مسئلہ کو حل کرنا

c) پیچیدگی:

کسی مسئلہ کی پیچیدگی کا انحصار حسب ذیل پر ہوتا ہے۔

☆ منسلک کرنا (جیسا کہ اس قطعہ میں بتایا گیا ہے)

☆ مسئلہ میں کتنے مراحل ہیں۔

☆ مسئلہ میں اعمال کی تعداد

☆ مسئلہ میں موجود عبارتوں کی تعداد

☆ مسئلہ میں طریقۂ عمل کی نوعیت

استدلالی ثبوت

☆ مختلف اقدامات کے درمیان استدلال (مشمول نا قابل تبدیل صورت حال)

SCERT TELANGANA

☆ ریاضیاتی عمومیت اور صورت حال کا فہم اور تشکیل

☆ طریقہ عمل کا فہم اور درستگی

☆ منطقی بحث کا جائزہ لینا۔

☆ مہمل دلائل کا فہم

☆ استقرائی و استخراجی طرز کا استعمال

☆ ریاضیاتی استدلال کی جانچ

ترسیل

ریاضیاتی عبارت پڑھنا اور لکھنا

3+4 = 7, 3/4

☆ ریاضیاتی عبارتوں کو بنانا۔

☆ ریاضیاتی خیالات کو اپنے الفاظ میں واضح کرنا۔ جیسے مربع ایک بند شکل ہے جس کے چار ضلع مساوی ہوتے ہیں اور چاروں زاویہ بھی مساوی ہوتے ہیں۔

☆ ریاضیاتی طرز عمل کو واضح کرنا جیسے دو ہندسی اعداد کو جمع میں پہلے اکائی کے ہندسوں کو جمع کرنا اور بعد میں دہائی کے مقام کے ہندسوں کو ہمیشہ حاصلہ کو مدنظر رکھتے ہوئے جمع کرنا۔

ربط:

☆ ریاضیاتی اعمال میں تصوارت کا لحاظ جیسے جمع اور تفریق میں تعلق ایک کل سے جز کی نسبت اور تقسیم میں تعلق۔ ترتیب اور تشاکل میں تعلق، جگہ اور پیمائش میں تعلق

☆ روزمرہ زندگی میں ریاضی کے اطلاقات

☆ دوسرے مضامین سے ریاضی کا تعلق

☆ ریاضی کے مختلف موضوعات کے تصورات جیسے معطیات کا اظہار وغیرہ

☆ تصورات کو مختلف طریقوں سے جوڑنا

استبصار اور اظہار

☆ جدول میں دیئے گئے معطیات، عددی خط تصویری، ترسیم، بار گراف، دو ابعادی، سہ ابعادی اشکال اور تصاویر کا مطالعہ اور تشریح کرنا

☆ جدول اور تصاویر کو بنانا۔

SCERT TELANGANA