करणी
(Surds)

वे राशियाँ जिनका मूल ठीक-ठीक (exactly) नहीं निकाला जा सके, उसे करणी (Surds) कहते हैं। जैसे, $\sqrt{2}, 4\sqrt{8}$ आदि।

मिश्र करणी: जो करणी, किसी परिमेय संख्या में करणी से गुणा करने पर प्राप्त हुआ हो, उसे मिश्र करणी कहते हैं, जैसे, $2\sqrt{3}, 4\sqrt{5}$ आदि।

करणी का घात **(Order):** $a^{1/m}$ को 'mवाँ घात युक्त करणी' (surd of *m*th order) कहा जाता है।

प्रदत्त करणियों को समान घात वाले करणी में बदलना

उदा. $3^{1/4}, 2^{1/3}$ एवं $5^{1/6}$ को समान घात वाले करणियों में बदलें एवं उन्हें आरोही क्रम (ascending order) में सजाएँ।

हल: 4, 3, 6 का लघुत्तम समापवर्त्य = 12। इसलिए प्रदत्त करणियों को 12 के घात में अभिव्यक्त कीजिए।

$$3^{1/4} = 3^{3/12} = 3^{3^{1/12}} = 27^{1/12}$$

$$2^{1/3} = 2^{4/12} = 2^{4^{1/12}} = 16^{1/12}$$

$$5^{1/6} = 5^{2/12} = 5^{2^{1/12}} = 25^{1/12}$$

$\therefore$ आरोही क्रम में सजाने पर,

$$16^{1/12} < 25^{1/12} < 27^{1/12}$$

या $2^{1/3} < 5^{1/6} < 3^{1/4}$

करणी का जोड़ एवं घटाव

सदृश करणियाँ जैसे $2\sqrt{5}, 5\sqrt{5}$ एवं $12\sqrt{5}$ आपस में जोड़े जा सकते हैं, पर असदृश करणियों, जैसे $5\sqrt{4}, 3\sqrt{2}, 4\sqrt{7}$ आदि को आपस में जोड़ना संभव नहीं है।

उदा. सरल करें: $\sqrt{75} + \sqrt{48}$

हल: $\sqrt{75} + \sqrt{48} = \sqrt{25 \times 3} + \sqrt{16 \times 3} = 5\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$

करणी का गुणा

उदा. $4^{1/3}, 6^{1/6}$ एवं $\sqrt{5}$ को आपस में गुणा करें।

हल: $4^{1/3} \times 6^{1/6} \times 5^{1/2}$

$$= 4^{2/6} \times 6^{1/6} \times 5^{3/6} = \left[4^2 \times 6 \times 5^3\right]^{1/3} = (12000)^{1/6}$$

करणी का भाग

उदा. $12 \times 4^{1/3}$ में $3\sqrt{2}$ से भाग दें।

हल: $$\frac{12 \times 4^{1/3}}{3\sqrt{2}} = \frac{4 \times 4^{1/3}}{2^{1/2}} = \frac{4 \times 4^{2/6}}{2^{3/6}} = 4 \times \left[\frac{4^2}{2^3}\right]^{1/6}$$

$$= 4\left(\frac{16}{8}\right)^{1/6} = 4 \times 2^{1/6}$$

इस अध्याय के अन्तर्गत दिए गए प्रश्नों एवं उदाहरणों को हल करने में निम्नलिखित परिणामों का इस्तेमाल किया जा सकता है:

1) $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$

2) $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$

3) $\sqrt{a^2 \times b} = a\sqrt{b}$

4) $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 = a + b + 2\sqrt{ab}$

5) $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 = a + b - 2\sqrt{ab}$

6) $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) = a - b$

निम्नलिखित वर्गमूल भी स्मरणीय हैं:

$\sqrt{2} = 1.41421; \sqrt{3} = 1.73205; \sqrt{5} = 2.23607$

$\sqrt{6} = 2.44949; \sqrt{7} = 2.64575; \sqrt{8} = 2.82842$

उदा. 1: $\sqrt{300}$ क मान ज्ञात करें।

हल: $\sqrt{300} = \sqrt{10 \times 10 \times 3} = 10\sqrt{3} = 10 \times 1.732 = 17.32$

उदा. 2: निम्नलिखित का मान निकालें:

a) $\sqrt{75} + \sqrt{147}$ b) $\sqrt{80} + 3\sqrt{245} - \sqrt{125}$

हल: a) $\sqrt{75} + \sqrt{147} = \sqrt{5 \times 5 \times 3} + \sqrt{7 \times 7 \times 3}$

$$= 5\sqrt{3} + 7\sqrt{3} = 12\sqrt{3} = 20.7846$$

b) $\sqrt{80}+3\sqrt{245}-\sqrt{125}$

$$= \sqrt{4\times4\times5}+3\sqrt{7\times7\times5}-\sqrt{5\times5\times5}$$

$$= 4\sqrt{5}+21\sqrt{5}-5\sqrt{5}$$

$$= 20\sqrt{5} = 44.7213$$

उदा. 3: निम्नलिखित का मान निकालें:

a) $\sqrt{2}\times\sqrt{3}$ b) $\sqrt{6}\times\sqrt{150}$ c) $\sqrt{242}\div\sqrt{72}$

हल: a) $\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}=2.4494$

b) $\sqrt{6}\times\sqrt{150}=\sqrt{6\times150}=\sqrt{900}=30$

c) $\sqrt{242}\div\sqrt{72}=\dfrac{\sqrt{121\times2}}{\sqrt{36\times2}}=\dfrac{11\sqrt{2}}{6\sqrt{2}}=\dfrac{11}{6}=1\dfrac{5}{6}$

उदा. 4: निम्नलिखित का मान निकालें:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ d) $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ e) $\dfrac{1}{\sqrt{7}}$

हल: a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=0.7071$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}=0.5773$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}=0.4472$

d) $\dfrac{1}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}=0.4082$

e) $\dfrac{1}{\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{7}}{7}=0.3779$

उदा. 5: निम्नलिखित का मान निकालें:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}$ b) $\dfrac{14}{3+\sqrt{2}}$ c) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ d) $\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$

e) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$ f) $\dfrac{4+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$ g) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

हल: a) $\frac{1}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}-1)\times(\sqrt{3}+1)}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}=1.3660$

b) $\frac{14}{3+\sqrt{2}}=\frac{14\times(3-\sqrt{2})}{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})}=\frac{14(3-\sqrt{2})}{9-2}=2(3-\sqrt{2})=3.1716$

c) $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2-1}=(\sqrt{2}-1)^2=0.1716$

d) $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}=\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}=\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{4}=2.6180$

e) $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{(2+\sqrt{3})^2}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\frac{(2+\sqrt{3})^2}{1}=13.9282$

f) $\frac{4+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}=\frac{(4+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$

$=4\sqrt{2}+2-4-\sqrt{2}=3\sqrt{2}-2=2.2426$

g) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{1}=9.8989$

नोट: उपर्युक्त सभी उदाहरणों में हर को पूर्ण संख्या बना लिया गया है।

(i) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ *एवं* (ii) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ *के रूप में अभिव्यक्त व्यंजकों को हल करने के लिए सूत्र-विधि:*

i) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2}=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{a-b}=\frac{a+b}{a-b}-\frac{2\sqrt{ab}}{a-b}$

ii) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2}=\frac{a+b+2\sqrt{ab}}{a-b}=\frac{a+b}{a-b}+\frac{2\sqrt{ab}}{a-b}$

यदि दोनों परिणामों को एक साथ कर दें तो

$\frac{a+b}{a-b}\pm\frac{2\sqrt{ab}}{a-b}$ ....(*)

उपर्युक्त सूत्र का पहला पद है $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)$ एवं दूसरा पद है $\left(\frac{2\sqrt{ab}}{a-b}\right)$। दोनों ही स्थितियों के लिए दोनों पद समान हैं। यदि प्रदत्त करणी के अंश में जोड़ का चिह्न हो तो उपर्युक्त दोनों पदों को जोड़ते हैं, अन्यथा इन्हें घटाया जाता है। उदाहरण के लिए,

$$\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}=\frac{7+5}{7-5}-\frac{2\sqrt{7\times5}}{7-5}=6-\sqrt{35}$$

$$\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}=\frac{7+5}{7-5}+\frac{2\sqrt{7\times5}}{7-5}=6+\sqrt{35}$$

नोट: हमारा सुझाव है कि उपर्युक्त सूत्र (*) को याद रखें। इससे समय की बचत होगी।

उदा. 6: निम्नलिखित व्यंजकों का मान (दशमलव के तीन स्थानों तक) निकालें।

1) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ 2) $\frac{1}{\sqrt{11}}$ 3) $\frac{1}{\sqrt{3}-1}$ 4) $\frac{1}{\sqrt{7}-1}$ 5) $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$

6) $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$ 7) $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$ 8) $\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}}$ 9) $\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}$

हल:

1) $\frac{1}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}}{7}=0.378$

2) $\frac{1}{\sqrt{11}}=\frac{\sqrt{11}}{11}=0.302$

3) $\frac{1}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\frac{\sqrt{3}+1}{3-1}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}=1.366$

4) $\frac{1}{\sqrt{7}-1}=\frac{\sqrt{7}+1}{7-1}=\frac{\sqrt{7}+1}{6}=0.6076$

5) $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2-1}=0.1716$

6) $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}=\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{5-1}=2.618$

7) $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{(2+\sqrt{3})^2}{4-3}=13.928$

8) $\sqrt{\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{5-1}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.618$

9) $\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{(2+\sqrt{3})^2}{4-3}} = 2+\sqrt{3} = 3.732$

उदा. 7: निम्नलिखित को आरोही क्रम में सजाएँ:

$\sqrt{7}-\sqrt{5}, \sqrt{5}-\sqrt{3}, \sqrt{9}-\sqrt{7}, \sqrt{11}-\sqrt{9}$

हल: $\sqrt{7}-\sqrt{5} = \frac{(\sqrt{7}-\sqrt{5})\times(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} = \frac{7-5}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$

$\sqrt{5}-\sqrt{3} = \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{5-3}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

इसी तरह, $\sqrt{9}-\sqrt{7} = \frac{2}{\sqrt{9}+\sqrt{7}}$ एवं $\sqrt{11}-\sqrt{9} = \frac{2}{\sqrt{11}+\sqrt{9}}$

हम जानते हैं कि हर में वृद्धि के साथ-साथ भिन्न का मान कम होता जाता है। इसलिए,

$\frac{2}{\sqrt{11}+\sqrt{9}} < \frac{2}{\sqrt{9}+\sqrt{7}} < \frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} < \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

या, $\sqrt{11}-\sqrt{9} < \sqrt{9}-\sqrt{7} < \sqrt{7}-\sqrt{5} < \sqrt{5}-\sqrt{3}$

नोट: उपर्युक्त उदाहरण से एक महत्वपूर्ण परिणाम की प्राप्ति हुई। इसे याद रखना चाहिए।