

अनुक्रमांक मुद्रित पृष्ठों की संख्या : 15

नाम

131

324 (YY)

2020

गणित

समय : तीन घण्टे 15 मिनट]

[पूर्णांक : 100

निर्देश :

- (i) प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्न-पत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं।
- (ii) इस प्रश्न-पत्र में कुल नौ प्रश्न हैं।
- (iii) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
- (iv) प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टतः लिख दिया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं।
- (v) प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं।
- (vi) प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अंत तक करते जाइए।
- (vii) जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए।

1. निम्नलिखित के सभी खण्ड हल कीजिए :

(क) समुच्चय $A = \{a, b\}$ में द्विआधारी संबंधों की संख्या है

- (i) 10 (ii) 16
(iii) 20 (iv) 8

(ख) निम्नलिखित में से कौन-सा कथन सही है ?

- (i) सारणिक एक वर्ग आव्यूह है।
(ii) सारणिक एक आव्यूह के संबद्ध एक संख्या है।
(iii) सारणिक एक वर्ग आव्यूह के संबद्ध एक संख्या है।
(iv) इनमें से कोई नहीं

(ग) निम्नलिखित में से समाकृत $\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 dx$

का मान ज्ञात कीजिए :

- (i) $x^{\frac{3}{2}} + 2x + \frac{1}{x} + c$
(ii) $\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - x + \frac{1}{x^2} + c$
(iii) $\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 2x + \log x + c$
(iv) $\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x}{2} - \log x + c$

(घ) अवकल समीकरण $2x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} - 1 = 0$ की

कोटि क्या है ?

- (i) 2 (ii) 1
(iii) 0 (iv) परिभाषित नहीं है

(ङ) यदि $\bar{a}$ एक मात्रक सदिश है तथा $(\bar{x} - \bar{a}) \cdot (\bar{x} + \bar{a}) = 8$ है, तो $\bar{x}$ का मान ज्ञात कीजिए।

- (i) 1 (ii) 2
(iii) 3 (iv) $\frac{1}{2}$

2. निम्नलिखित के सभी खण्ड हल कीजिए :

(क) सिद्ध कीजिए कि $f(x) = 2x$ द्वारा परिभाषित फलन $f: R \rightarrow R$ एकैकी तथा आच्छादक है।

(ख) सिद्ध कीजिए कि :

$$\cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \sec^{-1}(x), \quad x \geq 1 \text{ या } x \leq -1$$

(ग) दर्शाइए कि फलन $f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{यदि } x < 0 \\ 1, & \text{यदि } x \geq 0 \end{cases}$

$x = 0$ पर संतत नहीं है।

(घ) सदिशों $\bar{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}$ और $\bar{b} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ के योगफल के अनुदिश मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए।

(ङ) मान लीजिए कि A और B स्वतंत्र घटनाएँ हैं तथा $P(A) = 0.3$ तथा $P(B) = 0.4$, तब $P(A | B)$ ज्ञात कीजिए।

निम्नलिखित के सभी खण्ड हल कीजिए :

(क) यदि $R = \{(4, 5), (1, 4), (4, 6), (7, 6), (3, 7)\}$ है, तो $R^{-1} \circ R^{-1}$ का मान ज्ञात कीजिए।

(ख) सिद्ध कीजिए कि :

$$2 \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{31}{17}\right)$$

(ग) यदि A तथा B दो n क्रम के वर्ग आव्यूह हैं, जो व्युत्क्रमणीय आव्यूह हैं, तो दर्शाइए कि $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ।

(घ) किसी दौड़ में A के जीतने की प्रायिकता $\frac{1}{3}$ है तथा B के जीतने की प्रायिकता $\frac{1}{4}$ है। इस दौड़ को A और B में से कोई न जीत पाए, इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

4. निम्नलिखित के सभी खण्ड हल कीजिए :

(क) यदि फलन $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, $f(x) = 3x - 4$, $\forall x \in \mathbb{Q}$ से परिभाषित है, तो सिद्ध कीजिए कि f एकैकी तथा आच्छादक फलन है, जहाँ $\mathbb{Q}$ परिमेय संख्याओं का समुच्चय है। 2

(ख) सदिश $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j}$ के अनुदिश एक ऐसा सदिश ज्ञात कीजिए जिसका परिमाण 7 इकाई हो। 2

(ग) सदिश $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ का, सदिश $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ पर प्रक्षेप ज्ञात कीजिए। 2

(घ) एक कमरे में तीन बल्ब होल्डर हैं। 10 बल्बों में से 6 बल्ब खराब हैं। एक व्यक्ति यादृच्छया 3 बल्ब चुनता है और बल्ब होल्डरों में लगा देता है। उसे प्रकाश मिल जाए, इसकी प्रायिकता क्या है? 2

5. निम्नलिखित में से किन्हीं पाँच खण्डों को हल कीजिए :

(क) दर्शाइए कि : 5

$$\sin^{-1}\left(\frac{12}{13}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{63}{16}\right) = \pi$$

(ख) सिद्ध कीजिए कि : 5

$$\begin{vmatrix} 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \\ 15 & 18 & 21 \end{vmatrix} = 0$$

(ग) ऐसी दो धन संख्याओं को ज्ञात कीजिए जिनका योगफल 15 है और जिनके वर्गों का योगफल न्यूनतम है। 5

(घ) अवकल समीकरण

$$(x dy - y dx) y \sin\left(\frac{y}{x}\right) =$$

$$(y dx + x dy) x \cos\left(\frac{y}{x}\right)$$

को हल कीजिए। 5

(ङ) तीन सदिश $\vec{a}$, $\vec{b}$ और $\vec{c}$ प्रतिबंध $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ को संतुष्ट करते हैं। यदि $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$ और $|\vec{c}| = 2$ है, तो राशि $\mu = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$ का मान ज्ञात कीजिए। 5

(च) x के सापेक्ष $y = x^x + (\cos x)^{\tan x}$ का अवकलन कीजिए। 5

6. निम्नलिखित में से किन्हीं पाँच खण्डों को हल कीजिए :

(क) क्या $f(x) = x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, से परिभाषित फलन $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, जहाँ $\mathbb{R}$ वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है, एकैकी आच्छादक है? 5

(ख) परवलय $x^2 = 4y$ और वृत्त $4x^2 + 4y^2 = 9$ के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 5

(ग) निम्न व्यूरोधों के अन्तर्गत $z = 4x + y$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए :

$$x + y \leq 50, 3x + y \leq 90, x \geq 0, y \geq 0$$
 5

(घ) बिन्दु $(2, 5, -3)$ की समतल $\vec{r} \cdot (6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}) = 4$ से दूरी ज्ञात कीजिए। 5

(ङ) बिन्दु $(-2, 3)$ से गुजरने वाले ऐसे वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके किसी बिन्दु (x, y) पर स्पर्श-रेखा की प्रवणता $\frac{2x}{y^2}$ है। 5

(च) एक विद्यालय में शिक्षक के दो स्थान रिक्त हैं। साक्षात्कार हेतु एक पुरुष तथा एक स्त्री आते हैं। पुरुष शिक्षक के चयन की प्रायिकता $\frac{1}{10}$ है तथा स्त्री शिक्षक की $\frac{1}{8}$ है, तो ज्ञात कीजिए कि

(i) दोनों चुन लिए जाएँ, तथा

(ii) दोनों ही न चुने जाएँ,

की प्रायिकता क्या है। 5

7. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

(क) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ है, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए। 8

(ख) निम्नलिखित समीकरणों को आव्यूह विधि से हल कीजिए : 8

$$2x + 3y + 10z = 4$$

$$4x - 6y + 5z = 1$$

$$6x + 9y - 20z = 2$$

8. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

(क) ऐसे सरलरेखीय वक्रों के कुल को निरूपित करने वाला अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष मूल बिन्दु पर है तथा जिसका अक्ष धनात्मक x -अक्ष के दिशा में है।

(ख) रेखाओं $\vec{r} = \hat{j} + \hat{j} + \lambda(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ और $\vec{r} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k} + \mu(3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k})$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

9. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

(क) (i) मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$$

(ii) मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{1-x}} dx$$

(ख) मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^{\pi} \frac{x dx}{a^2 \cos^2 x - b^2 \sin^2 x}$$

(English Version)

Instructions :

- (i) First 15 minutes time has been allotted for the candidates to read the question paper.
- (ii) There are in all nine questions in this question paper.
- (iii) All questions are compulsory.
- (iv) In the beginning of each question, the number of parts to be attempted has been clearly mentioned.
- (v) Marks allotted to the questions are indicated against them.
- (vi) Start from the first question and proceed to the last.
- (vii) Do not waste your time over a question you cannot solve.

1. Attempt all the parts of the following :

- (a) The number of binary operations on the set $A = \{a, b\}$ is

- | | |
|----------|---------|
| (i) 10 | (ii) 16 |
| (iii) 20 | (iv) 8 |

1

- (b) Which of the following statements is true?

- | | |
|---|---|
| (i) Determinant is a square matrix. | 1 |
| (ii) Determinant is a number related to a matrix. | |
| (iii) Determinant is a number related to a square matrix. | |
| (iv) None of these | |

- (c) Find the value of integral $\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 dx$ from the following :

- | |
|---|
| (i) $x^2 + 2x + \frac{1}{x} + c$ |
| (ii) $\frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{x^2} + c$ |
| (iii) $\frac{x^2}{2} - 2x + \log x + c$ |
| (iv) $\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - \log x + c$ |

- (d) What is the order of differential equation

$$2x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} + y = 0 ?$$

- | | |
|---------|------------------|
| (i) 2 | (ii) 1 |
| (iii) 0 | (iv) Not defined |

- (e) If $\vec{a}$ is a unit vector and $(\vec{x} - \vec{a}) \cdot (\vec{x} + \vec{a}) = 8$, then find the value of $|\vec{x}|$.

- | | |
|---------|--------------------|
| (i) 1 | (ii) 2 |
| (iii) 3 | (iv) $\frac{1}{2}$ |

2. Attempt all the parts of the following :

- (a) Prove that the function $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ defined by $f(x) = 2x$ is one-one and onto.

(b) Prove that :

$$\cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \sec^{-1}(x), \quad x \geq 1 \text{ or } x \leq -1$$

(c) Show that the function

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{if } x \neq 0 \\ 1, & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

is not continuous at $x = 0$.

(d) Find the unit vector along the sum of vectors $\vec{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}$ and $\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$.

(e) Suppose that A and B are independent events and $P(A) = 0.3$ and $P(B) = 0.4$, then find $P(A | B)$.

Attempt all the parts of the following :

(a) If $R = \{(1, 3), (1, 4), (4, 6), (7, 6), (3, 7)\}$, then find the value of $R^{-1} \circ R^{-1}$.

(b) Prove that :

$$2 \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{31}{17}\right)$$

(c) If A and B are square matrices of order n and also non-singular, then show that $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(d) The probability of A winning the race is $\frac{1}{3}$ and that of B is $\frac{1}{4}$. In this race, find the probability that neither A nor B can win the race.

Attempt all the parts of the following :

(a) Prove that the function $f: Q \rightarrow Q$ defined by $f(x) = 3x - 4$, $\forall x \in Q$ is one-one and onto, where Q is the set of rational numbers.

(b) Find a vector along the vector $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j}$ such that its magnitude is 7 units.

(c) Find the projection of vector $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ on vector $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$.

(d) There are three bulb holders in a room. A person randomly chooses three bulbs from 10 bulbs having 6 fused bulbs and puts them in holders. What is the probability that he gets light ?

II. Attempt any five parts of the following :

(a) Show that :

$$\sin^{-1}\left(\frac{12}{13}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{63}{16}\right) = \pi$$

(b) Prove that :

$$\begin{vmatrix} 18 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \\ 15 & 18 & 21 \end{vmatrix} = 0$$

- (c) Find two positive numbers whose sum is 15 and the sum of their squares is minimum. 5

- (d) Solve the differential equation
 $(x dy - y dx) y \sin\left(\frac{y}{x}\right) =$
 $(x dx + y dy) x \cos\left(\frac{y}{x}\right).$ 5

- (e) Three vectors $\vec{a}$, $\vec{b}$ and $\vec{c}$ satisfy the condition $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$. If $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$ and $|\vec{c}| = 2$, then find the value of $\mu = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$. 5

- (f) Differentiate $y = x^x + (\cos x)^{\tan x}$ with respect to x . 5

6. Attempt any five parts of the following :

- (a) Is the mapping $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, defined by $f(x) = x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, where $\mathbb{R}$ is a set of real numbers, one-one onto? 5
- (b) Find the area of the region between the parabola $x^2 = 4y$ and the circle $4x^2 + 4y^2 = 9$. 5
- (c) Find the maximum value of $z = 4x + y$ subject to the following constraints:
 $x + y \leq 50$, $3x + y \leq 90$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ 5

- (i) Find the distance between the point $(2, 3, 3)$ and the plane $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 1$. 3

- (ii) Find the equation of a curve passing through the point $(-2, 3)$, whose tangent line at any point (x, y) has gradient $\frac{2x}{y^2}$. 3

- (c) Two posts of teachers are vacant in a school. One man and one woman are called for interview. The probability of selecting the male teacher is $\frac{1}{10}$ and that of selecting the female teacher is $\frac{1}{8}$. Find the probability that

- (i) both are selected, and
 (ii) both are not selected. 5

7. Attempt any one part of the following :

- (a) If $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, then find A^{-1} . 8

- (b) Solve the following equations using the matrix method : 8

$$2x + 3y + 10z = 4$$

$$4x - 6y + 5z = 1$$

$$6x + 9y - 20z = 2$$

8. Attempt any *one* part of the following :

(a) Find the differential equation of a family of parabolas whose vertex is at the origin and its axis is towards the positive x -axis. 8

(b) Find the shortest distance between the lines $\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + \lambda(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ and $\vec{r} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k} + \mu(3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k})$. 8

9. Attempt any *one* part of the following :

(a) (i) Evaluate : 4

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$$

(ii) Evaluate : 4

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{1-x}} dx$$

(b) Evaluate : 8

$$\int_0^{\pi/2} \frac{x \, dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$$