अध्याय

2 समुच्चय (Sets)

2.1 प्रस्तावना

जब आपको किसी व्यक्ति को परिभाषित करने के लिए कहा जाए तो आप कैसे करेंगे ?

निम्न प्रकार से किया जा सकता है।

रामानुजन एक गणितज्ञ थे जिनको संख्या प्रमेय में रुची थी। दासरथी एक तेलुगु कवि तथा स्वतंत्रता सेनानी भी थे। अलबर्ट आइनस्टाइन भौतिकशास्त्री जिनकी रुची संगीत में थी। मरियम मिर्जा खान एक ऐसी अकेली स्त्री है जिन्होंने गणित में पदक जीते थे ।

हम प्रत्येक व्यक्ति को उनके विशेष लक्षणों और रुची के अनुसार वर्गीकृत करते है तथा सबसे अधिक मान्यता प्राप्त समुह के सदस्य के रुप में जानते है। लोग अपने चारों ओर पाई जाने वाली वस्तुओं को उनके पर्यावरण तथा दुसरी वस्तुओं से संबंध के आधार पर वर्गीकृत करते है।

एक पुस्तकालय में विषयों के आधार पर व्यवस्थित किया जाता है जिससे आवश्यक पुस्तके तुरंत प्राप्त हो सके।

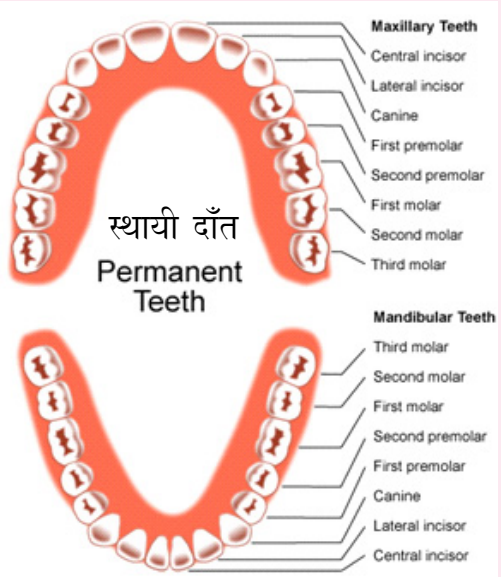
रसायन शास्त्र मे तत्वों को समुह तथा वर्गो में वर्गीकृत करते है। जिससे उनके साधारण गुणधर्मो को जान सके। आपके दसवी कक्षा के गणित का पाठ्यक्रम चौदह अध्यायों में अलग - अलग शिर्षकों से विभाजित किया गया है।

दंत्र सुत्र

मनुष्यों के दांतो को उनकी क्रियाओं के आधार पर चार प्रकार से विभाजित किया गया है। निम्न लिखित भेदों के अनुसार दांतों की सूचि तैयार कीजिए।

1. छेदक (Incisors) 2. भेदक (Canines)
3. पूर्वचर्वणक (Pre-molars)
4. चर्वणकMolars

दाँतो के समुह को उनके चबाने के गुण के अनुसार छेदक, भेदक, पुर्वचर्वणक तथा चर्वणक के रुप में विभाजित किया गया है। दाँतो की इस व्यवस्था को दंत सुत्र कहते है, तथा इसे २,१,२,३ के रुप में लिखते है।



SCERT TELANGANA

गणित इन स्थितीयों में दुसरों विषयों से अलग नही है। इसे अर्थपुर्ण वस्तुओं के समुहों की आवश्यकता होती है। गणित में समान लक्षणों वाले वस्तुओं को एक साथ किया जाता है। जिससे उस समुह को एक वस्तु के रुप में लिया जा सकता है।

उनमें सें कुछ संख्याओं का समुच्चय जिसे हम साधारणत: उपयोग करते है वे-

$\mathbb{N}$ = प्राकृतिक संख्याओं का समुह 1, 2, 3....

W = पुर्ण संख्याओं का समुह 0, 1, 2, 3.....

I or $\mathbb{Z}$ = पुर्णांकों का समुह $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...$

$\mathbb{Q}$ = परिमेय संख्याओं का समुह अर्थात वह संख्याएँ जिसे $\frac{p}{q}$ के रुप में लिख सकते जहाँ p, q पुर्णांक है और $q \neq 0$

$\mathbb{R}$ = वास्तविवक संख्याओं का समुह अर्थात वह संख्याएँ जिसमें दशमल का विस्तार हो।

अब हम वस्तुओं के गुणधर्मों को देखकर और प्रक्रिया तथा तर्क के द्वारा साधारण कथनों को तैयार कर सकते हैं।

यह कीजिए

दिये गये समूहों में ''समान गुणों'' अर्थपुर्ण समुहों के रचना की पहचान कीजिए।

1) 2,4,6,8,… 2) 2,3,5,7,11,… 3) 1,4,9,16,…

4) जनवरी, फरवरी, मार्च, अप्रैल ....

5) अंगूठा, तर्जनी, मध्यमा अनामिका, कनिष्ठा

विचार - विमर्श कीजिए

दिए गए समूहों का निरीक्षण कर जितने सामान्य कथन लिख सकते हो लिखिए :-

1) 2,4,6,8,… 2) 1,4,9,16,…

SCERT TELANGANA

2.2 समुच्चय (Set)

समुच्चय उन वस्तुओं का समूह है जों समान गुणों वाली हों या सम नियम का पालन करते हों। समुच्चय के वस्तुओं को ''घटक'' (elements) कहते है। समुच्चय के घटको को कोष्टक { } में कॉमा से अलग कर लिखते है और ''सामान्य नियमों'' द्वारा समुच्चय के घटक को निश्चित किया जाता है।

उदाहरण के लिए जब हमें प्रथम पाँच रूढी संख्याओं का समुच्चय लिखना हो तो इसे {2,3,5,7,11} रूप में लिखते है। तथा छेदक का समुच्चय = {मध्य छेदक (central incisor) बाह्य छेदक lateral incisor}

यह कीजिए

निम्नलिखित समुच्चयों को लिखिए :-

1) प्रथम पाँच धनात्मक पूर्णांकों का समुच्चय
2) 100 से बडी और 125 से छोटी 5 के गुणकों का समुच्चय
3) प्रथम पाँच धन संख्याओं का समुच्चय
4) रामानुजन संख्या के अंकों का समुच्चय

2.2.1 रोस्टर रूप और समुच्चय रचेता रूप (Roster form and Set builder form)

समुच्चय को लम्बे वाक्यों के रूप में लिखना कठिन होता है। इसलिए समुच्चय को सामान्यतः अंग्रेजी के बडे अक्षर से सूचित करते है।

उदाहरण के लिए M दाँतों के चर्वणक (molars) का समुच्चय है।

इस समुच्चय को हम M={पहला चर्वणक, दूसरा चर्वणक, तीसरा चर्वणक} के रूप में लिखते है।

चलिए अब हम एक और उदाहरण देखेंगे। Q एक ऐसा समुच्चय हैं जिसमें कम से कम दो समान भुजाओं वाले चतुर्भुजों का समुह है। इसे हम इस प्रकार लिखते है।

Q ={वर्ग, आयत, समचतुर्भुज, समांतर चतुर्भुज, पतंग, समद्विभुज, समलंब चतुर्भुज, शार (dart)}

यहाँ हमने घटकों की सूचि बनाकर समुच्चय लिखते है। तब हम कह सकते है कि समुच्चय को **''रोस्टर रूप''** में लिखा है।

उपरोक्त दो उदाहरणों में अब हम घटकों के प्रदर्शन की चर्चा करेंगे। मानलों हम कहना चाहते है कि ''दूसरा चर्वणक'' यह चर्वणक के समूह का घटक है। तब हम इसे ''दूसरा चर्वणक $\in$ M" के रूप में प्रदर्शित करते है। इसे हम दूसरा चर्वणक M समुच्चय से संबंधित है।'' ऐसा पढते है।

ऊपर दिए गए उदाहरण से क्या हम कह सकते है कि 'समचतुर्भुज $\in$ Q" ? इसे आप कैसे पढोगे?

उपरोक्त उदाहरण में क्या हम कह सकते है कि, वर्ग M समुच्चय से संबंधित है?

इसे कैसे दर्शाया जा सकता है? जब हम कहते है कि ''वर्ग M समुच्चय में नहीं है'' इसे ''वर्ग $\notin$ M" के रूप में लिखते है और इसे हम ''वर्ग M समुच्चय से संबंधित नहीं है।'' ऐसा पढते है।

SCERT TELANGANA

पिछली कक्षाओं से प्राप्त ज्ञान के आधार पर याद कीजिए कि हम प्राकृतिक संख्याओं को $\mathbb{N}$, से, पूर्णांकों को $\mathbb{Z}$, से, परिमेय संख्याओं को $\mathbb{Q}$, से तथा वास्तविक संख्याओं को $\mathbb{R}$ से सूचित करते है।

यह कीजिए

दिये गये संख्याओं में से वे किस समुच्चय से संबंधित हैं या नहीं चिन्हों की सहायता से लिखिए।

i) 1 ii) 0 iii) -4 iv) $\frac{5}{6}$ v) $1.\overline{3}$

vi) $\sqrt{2}$ vii) $\log 2$ viii) 0.03 ix) π x) $\sqrt{-4}$

विचार - विमर्श कीजिए

क्या आप परिमेय संख्याओं से समुच्चय बना सकते हो?

ऊपर की गयी चर्चा के आधार पर शायद आप कह सकते हैं कि परिमेय संख्याओं के घटकों से समुच्चय बनाना मुश्किल है? आपने यह भी देखा होगा कि सभी परिमेय संख्याएँ $\frac{p}{q}$ के रूप में होती है ($q \neq 0$ तथा p,q दो पूर्णांक है)

जब हम समुच्चयों को घटकों की ''समान गुणधर्मता'' से परिभाषित करते है तो उसे हम ''समुच्चय रचेता रूप'' कहते है। समुच्चय रचेता रूप में कुछ वाक्य-विज्ञान के नियमों का पालन करना पडता है। इसे हम उदाहरण द्वारा समझेंगे।

मानलिजिए A एक समुच्चय है जिसमें 20 से कम 3 के गुणक लिए गए है। तब A={3,6,9,12,15,18} और यह समुच्चय A का रोस्टर रूप है। जब हम इसका समुच्चय रचेता रूप लिखते है तो

A={x : x. 3 के गुणक है, $x < 20$} और इसे हम "A एक समुच्चय है जिसका घटक x इस प्रकार है कि x, 3 के गुणक है तथा x. 20 से कम है। अर्थात् हम परिमेय संख्याओं के समुच्चय को $\mathbb{Q}=\{x : x = \frac{p}{q}, q \neq 0$ और p,q पूर्णांक है} लिख सकते है।

A={ x : x. 3 के गुणक है तथा x<20}

सभी x के समुच्चय में x इस प्रकार है कि वे 3 के गुणक है तथा x<20

सूचना : (i) रोस्टर रूप में घटकों की सूचि का क्रम **अनावश्यक** (immaterial) है। इस प्रकार उदाहरण 1 को हम इस प्रकार लिख सकते है {7,2,1,9}या {1,2,7,9}या {1,7,2,9}

(ii) जब समुच्चय को रोस्टर रूप में लिखते हैं तब यदि कोई घटक बार-बार आता हो तो उसे दुबारा नहीं लिखा जाता है। उदाहरण के लिए "SCHOOL" शब्द में आने वाले अक्षरों का समुच्चय {S, C, H, O, L} होगा। लेकिन वह {S, C, H, O, O, L} नहीं होगा। अर्थात् समुच्चय में भिन्न-भिन्न घटक पाये जाते है।

SCERT TELANGANA

अब हम कुछ समुच्चयों के ''रोस्टर रूप'' तथा ''समुच्चय रचेता'' रूपों को देखेंगे।

रोस्टर रूप	समुच्चय रचेता रूप
V = {*a, e, i, o, u*}	V = {x : x अंग्रेजी भाषा के स्वर}
A = {-2,-1,0,1,2}	A = $\{x : -2 \leq x \leq 2, x \in \mathbb{Z}\}$
B = $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\}$	B = $\{x : x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, n \leq 5\}$
C = {2,5,10,17}	C = $\{x : x = n^2 + 1, n \in \mathbb{N}, n \leq 4\}$

यह कीजिए

1. दिए गए समुच्चयों के घटकों को लिखिए
   (i) G = {20 के सभी खण्ड}
   (ii) F = {17 और 61 के बीच की ऐसी संख्याएँ जो 4 के गुणक भी है और जो 7 से भी विभाजित होती है।}
   (iii) S = {x : x 'MADAM' शब्द के अक्षर}
   (iv) P = {x : x एक पूर्ण संख्या है जो 3.5 और 6.7 के बीच है}
2. दिए गए समुच्चयों को रोस्टर रूप में लिखिए।
   (i) B = 30 दिन वाले महीनों का समुच्चय
   (ii) P = 10 से कम रूढी संख्याओं का समुच्चय
   (iii) X = इन्द्रधनुष के रंगों का समुच्चय
3. यदि A, 12 के खण्डों का समुच्चय हो तो दिये गये विकल्पों में एक समुच्चय का घटक नहीं है।
   (A) 1 (B) 4 (C) 5 (D) 12

प्रयत्न कीजिए

1. बीज गणित और रेखागणित के उपयोग से आपकी इच्छा अनुसार सूत्र स्थापित कीजिए।
2. रोस्टर रूप के साथ समुच्चय रचेता रूप की जोडी बनाइए।

(i)	{P, R, I, N, C, A, L}	(a)	{x : x एक धनात्मक पूर्णांक है और 18 के खण्ड है।}
(ii)	{0}	(b)	{x : x एक पूर्णांक है और $x^2 - 9 = 0$}
(iii)	{1, 2, 3, 6, 9, 18}	(c)	{x : x एक पूर्णांक है और $x + 1 = 1$}
(iv)	{3, -3}	(d)	{x : x एक PRINCIPAL शब्द के अक्षर}

© SCERT TELANGANA

EXERCISE - 2.1

1. निम्न में कौनसे समुच्चय है बताइए। आपके उत्तर की जाँच कीजिए।
   (i) एक वर्ष के सभी महिनों का समुच्चय "J" अक्षर से शुरु होने वाले।
   (ii) संसार के दस उत्तम लेखकों का समुच्चय।
   (iii) संसार के दस उत्तम क्रिकेट के बल्ले बाज़ों का समूह।
   (iv) आपकी कक्षा के लड़कों का समुच्चय (समूह)
   (v) सम पूर्णांकों का समुच्चय।
2. यदि A={0, 2, 4, 6}, B = {3, 5, 7} और C = {p, q, r} तो रिक्त स्थानों में सही ढ़ंग से $\in$ या $\notin$ का प्रयोग कीजिए।
   (i) 0 ..... A (ii) 3 ..... C (iii) 4 ..... B
   (iv) 8 ..... A (v) p ..... C (vi) 7 ..... B
3. नीचे दिये गये कथनों को चिन्हों का प्रयोग करते हुए व्यक्त कीजिए।
   (i) 'x' समुच्चय 'A' का घटक नहीं है।
   (ii) 'd' समुच्चय 'B' का घटक है।
   (iii) '1' प्राकृतिक संख्याओं के समुच्चय N का घटक है।
   (iv) '8' रूढ़ संख्याओं के समुच्चय P का घटक नहीं है।
4. निम्नलिखित कथन सत्य या असत्य बताइए।
   (i) $5 \notin$ {रूढ संख्याएँ }
   (ii) S = {5, 6, 7} का अर्थ है $8 \in$ S.
   (iii) W पूर्ण संख्याओं का समुच्चय है तो $-5 \notin$ W
   (iv) Z एक पूर्णांकों का समुच्चय है तो $\frac{8}{11} \in$ Z.
5. निम्नलिखित समुच्चय को रोस्टर रूप में लिखिए।
   (i) B = {x : x एक प्राकृतिक संख्या है जो 6 से कम।}
   (ii) C = {x : x दो अंकों की प्राकृतिक संख्या इस प्रकार है उनके अंको का योग 8}
   (iii) D = {x : x एक रूढ़ संख्या है जो 60 का भाजक है}
   (iv) E = {BETTER शब्द के अक्षरों का समुच्चय}
6. निम्नलिखित समुच्चय को रचेता रूप में लिखिए।
   (i) {3, 6, 9, 12} (ii) {2, 4, 8, 16, 32}
   (iii) {5, 25, 125, 625} (iv) (1, 4, 9, 25, ... 100}
7. निम्नलिखित समुच्चय को रोस्टर रूप में लिखिए।
   (i) A = {x : x एक प्राकृतिक संख्या जो 50 से अधिक है और 100 से कम}
   (ii) B = {x : x एक पूर्णांक है, $x^2 = 4$}
   (iii) D = {x : x एक "LOYAL" शब्द के अक्षरों का समुच्चय}
   (iv) E = {x : $x = 2n^2 + 1, -3 \le n \le 3, n \in \mathbb{Z}$ }

SCERT TELANGANA

8. रोस्टर रूप की जोडी समुच्चय रचेता से करें।

(i)	{1, 2, 3, 6}	(a)	{x : x एक रूढ संख्या है जो 6 के भाजक है।}
(ii)	{2, 3}	(b)	{x : x एक विषम संख्या है जो 10 से छोटी है।}
(iii)	{M, A, T, H, E, I, C, S}	(c)	{x : x एक प्राकृतिक संख्या है जो 6 के भाजक है।}
(iv)	{1, 3, 5, 7, 9}	(d)	{x : x एक MATHEMATICS शब्द के अक्षरों का समुच्चय है।}

2.3 समुच्चय के प्रकार (Types of Set)

निचे दिए गए उदाहरणों को देखिए।

(i) A = {x : x. 1 से छोटी प्राकृतिक संख्या है}

(ii) D = {x : x, 2 विभाजित होने वाली विषम संख्या है}

A और D में कितने घटक है? कोई भी प्राकृतिक संख्या 1 से छोटी नहीं होती है। अतः A में एक भी घटक नहीं है। या कह सकते है कि A एक रिक्त समुच्चय है। उसी प्रकार 2 से विभाजित होने वाली कोई विषम संख्या नहीं है। अतः D भी रिक्त समुच्चय है।

जिस समुच्चय में एक भी घटक न हो उसे रिक्त समुच्चय या नल (Null) समुच्चय या वाइड (Void) समुच्चय कहते है। रिक्त समुच्चय को ϕ या { } संकेत द्वारा प्रदर्शित करते हैं।

रिक्त समुच्चय के कुछ और उदाहरण इस प्रकार है।

(i) A = {x : $1 < x < 2$, x एक प्राकृतिक संख्या}

(ii) B = {x : $x^2 - 2 = 0$ और x एक परिमेय संख्या}

सूचना : ϕ और {0} ये दोनों भिन्न समुच्चय है। {0} इस समुच्चय में एक ही घटक 0 है जबकि { } यह रिक्त समुच्चय है।

यह कीजिए

निम्नलिखित में कौनसे रिक्त समुच्चय है? उत्तर की जाँच कीजिए।

(i) उन पूर्णांकों का समुच्चय जो 2 और 3 के मध्य है।

(ii) 1 से कम प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय।

(iii) 2 से विभाजित करने पर शेष 0 देने वाले विषम संख्याओं का समुच्चय।

SCERT TELANGANA

प्रयत्न कीजिए

1. निम्नलिखित में कौनसे समुच्चय रिक्त समुच्चय हैं उत्तर की जाँच कीजिए।
   (i) $A = \{x : x^2 = 4 \text{ और } 3x = 9\}$.
   (ii) समतल में सभी त्रिभुजों का समुच्चय जिनमें तीनों कोणों का योग 180^0 से कम हो।
2. $B = \{x : x + 5 = 5\}$ यह रिक्त समुच्चय नहीं है। क्यों?

2.4 चित्र की सहायता से समुच्चयों का प्रतिनिधित्व (Using Diagrams to Represent Sets)

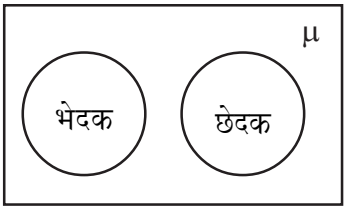
यदि S एक समुच्चय है और x एक घटक होतो $x \in S$ होगा या $x \notin S$ होगा। समूह के आधार पर प्रत्येक समुच्चय को बंद आकृति द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है जब हम कहते है कि समुच्चय S तो उसके भीतर आने वाले घटकों का प्रदर्शन होगा न कि S के बाहर वाले घटक। उदाहरणार्थ समुच्चय $S = \{1, 2, 3, 4\}$ चित्र के आधार पर होगा जहां $5 \notin S$ और $4 \in S$।

दाँतों का समुच्चय

छेदक	भेदक
पूर्व-चर्वणक	चर्वणक

2.5 सार्वभौमिक समुच्चय और उपसमुच्चय (Universal Set and Subset)

अध्याय के प्रारंभ में दाँतों के बारे में की गयी चर्चा को याद कीजिए। आपने पूरे दाँतों को चार भागों में वर्गीकृत किया था जैसे छेदक, भेदक, पूर्वचर्वणक और चर्वणक ।
लेकिन चर्वणक के भाग पूरे दाँतों का भी हिस्सा होंगे या नहीं?
यहाँ पूरे दाँतों का समूह ''सार्वभौमय समुच्चय'' है।



दाँतों के समूह को सार्वभौम समुच्चय मानलीजिए तथा चित्र में दर्शाये अनुसार छेदक और भेदक दो समुच्चय है।

चित्र में बचे हुए भाग को क्या कहेंगे?

अब हम सार्वभौमिक समुच्चय के कुछ और उदाहरण देखेंगे:-

(i) यदि हम आपने राज्य के विभिन्न समूहों का अध्ययन करना चाहते हैं तो सार्वभौमिक समुच्चय तेलंगाना के सभी लोगों का समुच्चय होगा।

(ii) यदि हम अपने देश के लोगों के विभिन्न समूहों का अध्ययन करना चाहते हैं, तो भारत के सभी लोगों का समुच्चय सार्वभौमिक समुच्चय होगा।

सार्वभौमिक समुच्चय को 'μ' या कभी-कभी U के द्वारा दर्शाते है। सार्वभौमिक समुच्चय साधारणतः आयत के प्रतिनिधित्व का निरूपण करती है।

अब हम प्राकृतिक संख्याओं को $\mathbb{N} = \{1,2,3,4...\}$ को देखेंगे। तब $\mathbb{N}$ के घटकों से सम संख्याओं का समुच्चय बना सकते है। ऐसी स्थिति में $\mathbb{N}$ सम संख्याओं का सार्वभौमिक समुच्चय होगा। क्या विषम संख्याओं का सार्वभौमिक समुच्चय भी $\mathbb{N}$ ही होगा?

1. जब हम कहते है ''यदि $x<3$ तो $x<4$'' तो हम दर्शाते है कि "$x<3 \Rightarrow x<4$".
2. जब हम कहते है "$x-2=5$ यदि केवल यदि $x=7$", अर्थात् हम "$x-2=5 \Leftrightarrow x=7$" को दर्शा रहें है।

SCERT TELANGANA

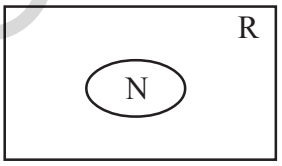
2.4.1 उपसमुच्चय

समुच्चय $A = \{1,2,3\}$ को देखिए और बताइए कि इनमें से आप कितने समुच्चय बना सकते हो?

अब $\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\}$ तथा $\{1,2,3\}$ आदि समुच्चयों को बना सकते है। क्या आप इनके अलावा और भी समुच्चय बना सकते हो? यदि नहीं तो इन समुच्चयों को A के उपसमुच्चय कह सकते है। यदि हम कहना चाहेंगे कि $\{1,2\}$ A का उपसमुच्चय है तो इसे हम $\{1,2\} \subseteq A$ के रूप में दर्शायेंगे। जब हम उपसमुच्चयों की चर्चा करते है तो $\{1, 2, 3\}$ भी A का उपसमुच्चय कहलाता है।

यदि A के कुछ या सभी घटक B में हो तो A को B का उपसमुच्चय कहते है और इसे $A \subseteq B$ के रूप में लिख सकते है अर्थात् $B \subseteq A$ सत्य होगा यदि केवल यदि B का प्रत्येक घटक A में हो।

अब इसे हम $B \subseteq A \Leftrightarrow a \in B \Rightarrow a \in A$ के रूप में लिखते है।



अब हम वास्तविक संख्याओं $\mathbb{R}$ के बारे में सोचेंगे। उसके कई उपसमुच्चय होंगे।

उदाहरण के लिए प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\ldots\}$

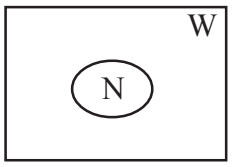
पूर्ण संख्याओं का समुच्चय $W = \{0, 1, 2, 3, \ldots\ldots\}$

पूर्णांकों का समुच्चय $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

अपरिमेय संख्याएँ $\mathbb{Q}'$ जो उन वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है, जो परिमेय नहीं है।

अतः $\mathbb{Q}' = \{x : x \in \mathbb{R}$ और $x \notin \mathbb{Q}\}$ अर्थात् सभी वास्तविक संख्याएँ परिमेय संख्याएँ नहीं होती है। उदा: $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ और ð.

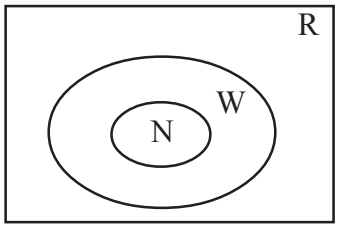
उसी प्रकार, प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय N, उपसमुच्चय है पूर्णसंख्या W का और इसे $\mathbb{N} \subseteq W$ के रूप में लिख सकते है। उसी प्रकार W उपसमुच्चय है $\mathbb{R}$ का।



अर्थात् $\mathbb{N} \subseteq W$ और $W \subseteq \mathbb{R}$

$\Rightarrow \mathbb{N} \subseteq W \subseteq \mathbb{R}$

कुछ उपसमुच्चय के बीच संबंध, कुछ इस प्रकार होता है $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq R$, $\mathbb{Q}' \subseteq R$, और $\mathbb{N} \not\subset \mathbb{Q}'$.



SCERT TELANGANA

अंग्रेजी के स्वरों का समुच्चय V = $\{a, e, i, o, u\}$ को देखिए उसी प्रकार अंग्रेजी के वर्णमाला का समुच्चय A = $\{a, b, c, d, ..., z\}$ को भी देखिए। हम देखते है कि V का प्रत्येक घटक A में भी उपस्थित हैं लेकिन A के कुछ घटक V में उपस्थित नहीं है। इस स्थिति में V को A का उपसमुच्चय कहा जाता है।

इसे V $\subset$ A के रूप में दर्शा सकते है क्योंकि a $\in$ V हो तो a $\in$ A होने के कारण V $\subseteq$ A प्राप्त होता है।

यह कीजिए

A = {1, 2, 3, 4}, B = {2, 4}, C = {1, 2, 3, 4, 7}, F = { }.

रिक्त स्थानों की पूर्ति $\subset$ या $\not\subset$ चिन्हों से कीजिए :-

(i) A ..... B (ii) C ..... A (iii) B ..... A

(iv) A ..... C (v) B ..... C (vi) ϕ ..... B

2. निम्नलिखित में से कौनसे कथन सत्य है।

(i) { } = ϕ (ii) ϕ = 0 (iii) 0 = { 0 }

प्रयत्न कीजिए

1. A = {चतुर्भुज}, B = {वर्ग, आयत, समलंब चतुर्भुज, समचतुर्भुज} बनाइए कि A $\subset$ B या B $\subset$ A उत्तर की जाँच कीजिए।

2. यदि A = $\{a, b, c, d\}$ समुच्चय A के सभी उपसुच्चयों को लिखिए?

3. P 5 के गुणनखण्डों का समुच्चय है। Q 25 के गुणनखण्डों का समुच्चय है और R 125 के गुणनखण्डों का समुच्चय हो तो बताइए निम्नलिखित में कौनसा कथन असत्य है?

(A) P $\subset$ Q (B) Q $\subset$ R (C) R $\subset$ P (D) P $\subset$ R

4. A 10 से कम रूढ संख्याओं का समुच्चय है, B 10 से कम विषम संख्याओं का समुच्चय है तथा C 10 से कम सम संख्याओं का समुच्चय हो तो निम्न में से कौनसे कथन सत्य है?

(i) A $\subset$ B (ii) B $\subset$ A (iii) A $\subset$ C

(iv) C $\subset$ A (v) B $\subset$ C (vi) ϕ $\subset$ A

SCERT TELANGANA

अब हम उपसमुच्चय के कुछ गुणों को देखेंगे। मानलो $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ और $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ दिए गए समुच्चय हो तो हम जानते है कि A के सभी घटक B में भी है $\therefore A \subseteq B$.

उसी प्रकार B के सभी घटक C में है। $\therefore B \subseteq C$.

तथा A के सभी घटक C में है। $\therefore A \subseteq C$.

अतः $A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$.

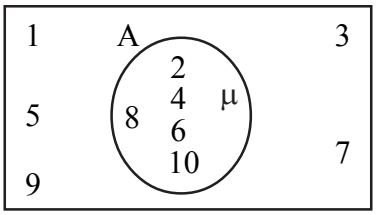
विचार - विमर्श कीजिए

1. क्या रिक्त समुच्चय सभी समुच्चयों का उपसमुच्चय होता है?
2. क्या कोई समुच्चय स्वयं का उपसमुच्चय होता है?
3. यदि आपको दो समुच्चय इस प्रकार दिए गए हो कि पहला समुच्चय दूसरे का उपसमुच्चय नहीं हैं इसे आप किस प्रकार सिद्ध करोगे?

आपके उत्तर का औचित्य बताइए।

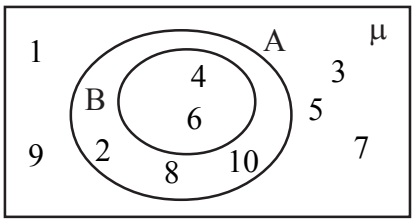
2.6 वेन चित्र (Venn diagrams)

अब तक हमने देखा कि समुच्चयों का निरूपण करने के लिए आकृतियों का प्रयोग किया जाता है। आइए अब हम इसे विस्तार से पढेंगे। वेन-यूलर या वेन चित्र समुच्चयों के बीच संबंध को दर्शाने की एक पद्धति है। इन चित्रों में सामान्यतः आयताकार और संवृत्त (बंद) वृत्ताकार रहते है।

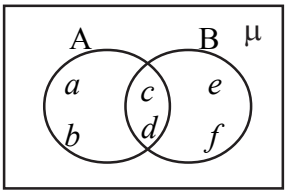


इस अध्याय में पहले उल्लेख किया गया है कि सामान्यतः सार्वभौमिक समुच्चयों को आयत द्वारा दर्शाते है।

(i) माना कि $\mu = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ सार्वभौमिक समुच्चय हैं जिसमें $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ उपसमुच्चय हो तो उसे वेन चित्र द्वारा इस प्रकार दर्शाते है।



(ii) $\mu = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ एक सार्वभौमिक समुच्चय है जिसमें $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ और $B = \{4, 6\}$ उसके (μ) उपसमुच्चय है तथा $B \subset A$ हो तो हमें यह चित्र प्राप्त होगा।



(iii) मान लीजिए $A = \{a, b, c, d\}$ और $B = \{c, d, e, f\}$ हो तो इस समुच्चय को वेन चित्र द्वारा इस प्रकार दर्शाते है।

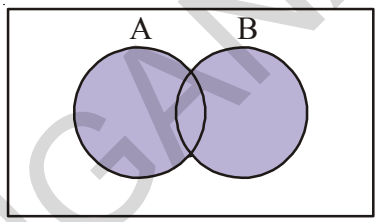
SCERT TELANGANA

2.7 समुच्चय की मूल संक्रियाएँ (Basic Operations on Sets)

हम जानते है कि अंकगणित में चार मूलभूत संक्रियाएँ-योग, अंतर गुण और भाग है उसी प्रकार समुच्चय में भी हम समुच्चय के सम्मिलन (union), उभनिष्ठता (intersection) तथा समुच्चयों के अंतर को जानेंगे।

2.7.1 समुच्चयों का सम्मिलन (Union of Sets)

मान लीजिए A समुच्चय आपके कक्षा के उन विद्यार्थियों का समूह है जो मंगलवार को अनुपस्थित थे तथा B समुच्चय उन विद्यार्थियों का समूह है जो बुधवार को अनुपस्थित थे तो



A = {रोजा, रामू, रवि} और

B = {रामू, प्रीति, हनीफ}

अब हमें समुच्चय K ज्ञात करना है। K उन विद्यार्थियों का समुच्चय है जो या तो मंगलवार को अनुपस्थित थे या बुधवार को तब क्या रोजा $\in$ K? रामू $\in$ K? रवि $\in$ K? हनीफ $\in$ K? प्रीति $\in$ K? अखिला $\in$ K?

रोजा, रामू, रवि, हनीफ और प्रीति समुच्चय K के घटक है, लेकिन अखिला नहीं है।

जो हमेशा उपस्थित रहते है।

अतः K = {रोजा, रामू, रवि, हनीफ, प्रीति}

यहाँ समुच्चय K, A और B के घटकों का सम्मिलन है। A तथा B के सम्मिलन में दोनों के घटक उपस्थित रहते हैं सम्मिलन को '$\cup$' चिन्ह द्वारा दर्शाते हैं सांकेतिक रूप से इसे $A \cup B$ के रूप में लिखते है और 'A युनियन B' पढते है।

$A \cup B = \{x : x \in A \text{ or } x \in B\}$

उदाहरण-1. मान लीजिए $A = \{2, 5, 6, 8\}$ और $B = \{5, 7, 9, 1\}$ हो तो $A \cup B$ ज्ञात कीजिए।

हल : हमें प्राप्त होगा $A \cup B = \{2, 5, 6, 8\} \cup \{5, 7, 9, 1\}$

$= \{2, 5, 6, 8, 5, 7, 9, 1\}$

$= \{1, 2, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

सूचना: उभयनिष्ठ घटक 5 को $A \cup B$ में केवल एक ही बार लिखा जाता है।

उदाहरण-2. मान लो $A = \{a, e, i, o, u\}$ और $B = \{a, i, u\}$ तो बताइए $A \cup B = A$ होगा।

हल : $A \cup B = \{a, e, i, o, u\} \cup \{a, i, u\}$

$= \{a, e, i, o, u, a, i, u\}$

$= \{a, e, i, o, u\} = A$.

यह उदाहरण सिद्ध करता है कि समुच्चय A तथा उपसमुच्चय B का सम्मिलन A ही होता है।

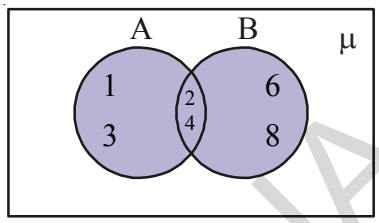
अर्थात् यदि $B \subset A$ हो तो $A \cup B = A$.

SCERT TELANGANA

उदाहरण-3. यदि $A = \{1, 2, 3, 4\}$ और $B = \{2, 4, 6, 8\}$ हो तो $A \cup B$ ज्ञात कीजिए।

हल : $A = \{1, 2, 3, 4\}$ और $B = \{2, 4, 6, 8\}$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{2, 4, 6, 8\}$$
$$= \{1, 2, 3, 4, 2, 4, 6, 8\}$$
$$= \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$$



$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

2.7.2 समुच्चयों का उभयनिष्ठ (Intersection of Sets)

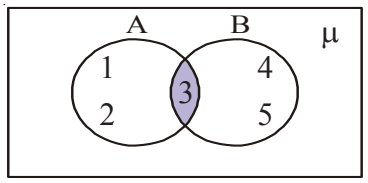
मान लीजिए दुबारा फिर से अनुपस्थित विद्यार्थियों के समुच्चय का उदाहरण लेकर समुच्चय L ज्ञात करेंगे उसमें वे विद्यार्थी होंगे जो मंगलवार और बुधवार दोनों दिन अनुपस्थित थे। उसके घटक इस प्रकार होंगे $L = \{\text{रामू}\}$ ।

यहाँ L को A और B का उभयनिष्ट कहते है।

सामान्यतः दो समुच्चय A और B का उभयनिष्ट समुच्चय वह समुच्चय होता है जिसमें A और B दोनों के घटक उपस्थित रहते है। उभयनिष्ट को $A \cap B$ से सूचित करते हैं और इसे "A उभयनिष्ट (intersection) B" पढते हैं। उसे इस प्रकार लिखते हैं।

i.e., $A \cap B = \{x : x \in A \text{ और } x \in B\}$

A और B के उभयनिष्ट को वेन चित्र द्वारा रंगीन भाग से उदाहरण 5 में दर्शाया गया है।

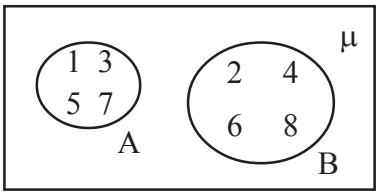


$A \cap B = \{3\}$

उदाहरण-4. यदि $A = \{5, 6, 7, 8\}$ और $B = \{7, 8, 9, 10\}$ हो तो $A \cap B$ ज्ञात कीजिए।

हल : A और B के उभयनिष्ठ घटक 7 और 8 है।

$\therefore A \cap B = \{5, 6, 7, 8\} \cap \{7, 8, 9, 10\} = \{7, 8\}$ (उभयनिष्ठ घटक)



$A \cap B = \phi$

उदाहरण-5. यदि $A = \{1, 2, 3\}$ और $B = \{3, 4, 5\}$ हो तो $A \cap B$ के वेन-चित्र द्वारा ज्ञात कीजिए।

हल : A और B के उभयनिष्ठ को वेन चित्र में इस प्रकार दर्शाया जाता है।

2.8 असंयुक्त समुच्चय (Disjoint Sets)

मान लीजिए $A \{1, 3, 5, 7\}$ और $B = \{2, 4, 6, 8\}$ यहाँ हम देखते हैं कि A और B में समान या उभयनिष्ठ घटक नहीं है। इस प्रकार के समुच्चयों को असंयुक्त समुच्चय कहते है। असंयुक्त समुच्चय को वेन चित्र द्वारा इस प्रकार दर्शाया जाता है।

SCERT TELANGANA

यह कीजिए

1. मानलो A={2,4,6,8,10,12} और B={3,6,9,12,15}हो तोA∪B तथा A∩Bज्ञात कीजिए।
2. यदि A = {6, 9, 11}और B = { } हो तो A ∪ ϕ ज्ञात कीजिए।
3. यदि A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}; B = {2, 3, 5, 7} हो तो A∩B ज्ञात कीजिए और बताइए कि A∩B = B होगा।
4. यदि A = {4, 5, 6}; B = {7, 8} हो तो बताइए A∪B = B∪A होगा।

प्रयत्न कीजिए

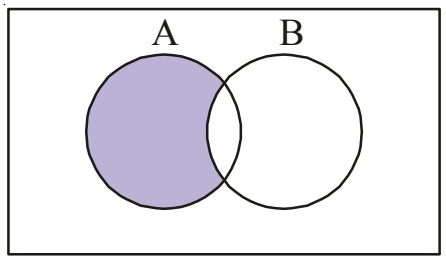
1. A तथा B के कुछ समुच्चय लिखिए कि A और B असंयुक्त समुच्चय हो।
2. यदि A = {2, 3, 5} हो तो A∪ ϕ और ϕ ∪A ज्ञात कीजिए और दोनों की तुलना कीजिए।
3. यदि A = {1, 2, 3, 4}; B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} हो तो A∪B और A∩B का मूल्य ज्ञात कीजिए।
4. A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}; B = {2, 4, 6, 8, 10} A तथा B का उभयनिष्ठ ज्ञात कीजिए।

विचार - विमर्श कीजिए

दो असंयुक्त समुच्चयों का उभयनिष्ट रिक्त समुच्चय होता है। उत्तर के औचित्य को सिद्ध कीजिए।

2.9 समुच्चयों का अंतर (Difference of Sets)

मान लीजिए A 10 से कम विषम संख्याओं का समुच्चय हैं तथा B 10 से कम रुढी संख्याओं का समुच्चय होतो A={1,3,5,...7} और B= {2,3,5,7} होगा। यदि हम 10 से कम विषम संख्याओं को लेते है तो ये घटक समुच्चय A के होंगे, लेकीन B के नही। इसे हमे A-B से दर्शाते है और A तथा B का अंतर पढते है।



अब हम A और B के अंतर को परिभाषित करेंगे। A और B का अंतर इस प्रकार होगा। जिसमें A के घटक होंगे लेकिन B के नहीं। इसके अंतर को A – B के रूप में लिखा जाता है। तथा "A घटान (minus) B" पढते है।

$$A - B = \{x : x \in A \text{ and } x \notin B\}.$$

उदाहरण-6. मानलो A = {1, 2, 3, 4, 5}तथा B = {4, 5, 6, 7} हो तो A – B का मूल्य ज्ञात कीजिए।

SCERT TELANGANA

हल : दिया गया है $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ और $B = \{4, 5, 6, 7\}$ अब हम ऐसे घटक लेंगे जो A में है लेकिन B में नहीं।

$A - B = \{1, 2, 3, 4, 5\} - \{4, 5, 6, 7\} = \{1, 2, 3\}$

$\therefore A - B = \{1, 2, 3\}$ अर्थात् 4 और 5 B के घटक होने के कारण उन्हें A में से निकाल दिया गया है।

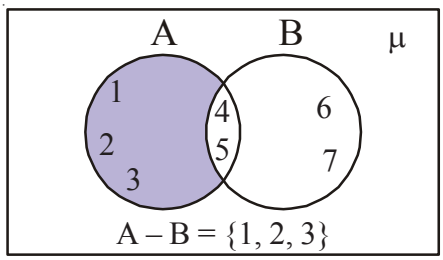
उसी प्रकार $B - A$ के लिए ऐसे घटक लेंगे जो केवल B में हैं।

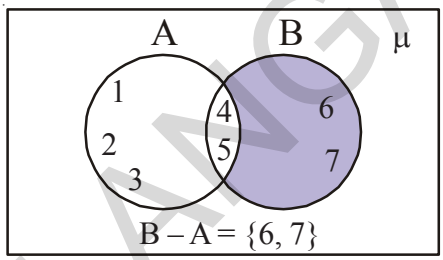
$B - A = \{4, 5, 6, 7\} - \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{6, 7\}$

$\therefore B - A = \{6, 7\}$ (4 और 5 घटक A में होने के कारण उन्हें B में से निकाल दिया गया है।)

सूचना : $A - B \neq B - A$

$A - B$ और $B - A$ को वेन चित्र द्वारा इस प्रकार दर्शाया जाता है।





यह कीजिए

1. यदि $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ तथा $B = \{4, 5, 6, 7\}$ हो तो $A - B$ तथा $B - A$ का मूल्य ज्ञात कीजिए और बताइए कि क्या वे समान होंगे?
2. यदि $V = \{a, e, i, o, u\}$ तथा $B = \{a, i, k, u\}$ हो तो $V - B$ और $B - V$ को ज्ञात कीजिए।

विचार - विमर्श कीजिए

समुच्चय $A - B$, $B - A$ तथा $A \cap B$ तीनों आपस में असंयुक्त समुच्चय होंगे यदि यह सत्य है तो उदाहरण के द्वारा समझाइए।

अभ्यास - 2.2

1. यदि $A = \{1, 2, 3, 4\}$ तथा $B = \{1, 2, 3, 5, 6\}$ हो तो $A \cap B$ और $B \cap A$ को ज्ञात कीजिए क्या वे समान है?
2. यदि $A = \{0, 2, 4\}$ तो $A \cap \phi$ और $A \cap A$ ज्ञात कर उत्तर की चर्चा कीजिए।
3. यदि $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ और $B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$ हो तो $A - B$ और $B - A$ ज्ञात कीजिए।
4. यदि A और B दो समुच्चय इस प्रकार है कि $A \subset B$ तो $A \cup B$ क्या होगा?

SCERT TELANGANA

5. मानलो A = {x : x एक प्राकृतिक संख्या है।}, B = {x : x एक सम प्राकृतिक संख्या}
C = {x : x एक विषम संख्या} और D = {x : x एक रूढ संख्या} हो तो
$A \cap B$, $A \cap C$, $A \cap D$, $B \cap C$, $B \cap D$ और $C \cap D$ का मूल्य ज्ञात कीजिए।

6. यदि A = {3, 6, 9, 12, 15, 18, 21}; B = {4, 8, 12, 16, 20}
C = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16}और D = {5, 10, 15, 20} हो तो
(i) A – B (ii) A – C (iii) A – D (iv) B – A (v) C – A
(vi) D – A (vii) B – C (viii) B – D (ix) C – B (x) D – B को ज्ञात करो।

7. निम्न कथन सत्य है या असत्य है बताइए। उत्तर की जाँच कीजिए।
(i) {2, 3, 4, 5} और {3, 6} असंयुक्त समुच्चय है।
(ii) {a, e, i, o, u} और {a, b, c, d} असंयुक्त समुच्चय है।
(iii) {2, 6, 10, 14} और {3, 7, 11, 15} असंयुक्त समुच्चय है।
(iv) {2, 6, 10} और {3, 7, 11} असंयुक्त समुच्चय है।

2.10 समान समुच्चय (Equal Sets)

इन समुच्चयों का अवलोकन कीजिए

A = {सचिन, द्राविड, कोहली}

B = {द्राविड, सचिन, धोनी}

C = {कोहली, द्राविड, सचिन}

ऊपर दिये गये तीन समुच्चय A, B और C में आपने क्या देखा? A में दिए गए सभी खिलाडी C में है लेकिन B में नहीं है। अर्थात् A और C में एक समान घटक है लेकिन A और B के घटक अलग हैं। इसलिए, A और C को समान समुच्चय कहते है लेकिन A और B समान समुच्चय नहीं है।

A और C को समान समुच्चय तभी कह सकते हैं जब A के सभी घटक C में है। (अर्थात् $A \subseteq C$) और C का प्रत्येक घटक A में हो। (अर्थात $C \subseteq A$).

यदि A और C समान समुच्चय हो तो उसे A = C लिखते है। अतएव इसे हम $C \subseteq A$ और $A \subseteq C \Leftrightarrow A = C$ भी दर्शा सकते है। यहाँ $\Leftrightarrow$ का चिन्ह द्वि तत्समक कहलाता है उसे ''केवल यदि केवल'' के रूप में पढते है (उसे संक्षिप्त में "iff" लिखते है।' यदि A और C में समान घटक हो तो उन्हें समान समुच्चय कहते है। अर्थात् A = C.

इसका निष्कर्ष यह निकलता है कि ''प्रत्येक समुच्चय स्वयं का उपसमुच्चय होता है''।

SCERT TELANGANA

उदाहरण-7. यदि $A = \{p, q, r\}$ और $B = \{q, p, r\}$ हो तो A=B की जाँच कीजिए।

हल : दिया गया है $A = \{p, q, r\}$ और $B = \{q, p, r\}$.

ऊपर दिये गये समुच्चयों में A का प्रत्येक घटक B में भी हैं। $\therefore A \subseteq B$.

उसी प्रकार B का प्रत्येक घटक A में भी हैं। $\therefore B \subseteq A$.

उपरोक्त दोनों संबंधों में हम A=B कह सकते है।

उदाहरण-8. यदि $A = \{1, 2, 3, \ldots.\}$ और N प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय हो तो जाँच कीजिए कि A और N समान समुच्चय है।

हल : $A \subseteq N$ और $N \subseteq A$.

दोनों समुच्चयों में घटक समान है। अर्थात् A और N दोनों प्राकृतिक संख्याओं के समुच्चय हैं। अर्थात् A और N समान समुच्चय है। अर्थात् A = N.

उदाहरण-9. समुच्चय $A = \{1,2,3\}$ और $B = \{1, 2, 3, 4\}$ हो तो क्या वे समान समुच्चय है।

$A = \{1,2,3\}, B = \{1, 2, 3, 4\}$

हल : $A \subseteq B$ लेकीन $B \neq A$ हो तो.

उदाहरण-10. मान लीजिए A 6 से कम रूढ संख्याओं का समुच्चय हैं। और B 30 के रूढी गुणनखण्डों का समुच्चय हो तो दोनों की समानता की जाँच कीजिए।

हल : 6 से कम रूढ संख्याएँ $A = \{2,3,5\}$

30 के रूढी गुणनखण्ड $B = \{2,3,5\}$

अर्थात् A और B के घटक समान है इसलिए A और B समान समुच्चय है।

i.e $A \subseteq B, B \subseteq A \Rightarrow A = B$

उदाहरण-11. बताइए कि क्या A और B समान समुच्चय है?

यदि $A = \{x : x$ 'ASSASSINATION' के अक्षर है$\}$

और $B = \{x : x$ STATION के अक्षर है$\}$ तो

हल : दिया गया $A = \{x : x$ 'ASSASSINATION' के अक्षर है$\}$

समुच्चय A को इस प्रकार लिख सकते है $A = \{A,S,I,N,T,O\}$ इसमें पदों को बिना दोहराए लिखा गया है।

$B = \{x : x$ STATION शब्द के अक्षर है$\}$

समुच्चय 'B' को इस प्रकार लिखा जाता है $B = \{A,S,I,N,T,O\}$

अतः A और B के घटक समान हैं और A = B.

i.e. $A \subseteq B, B \subseteq A \Rightarrow A = B$

SCERT TELANGANA

उदाहरण-12. समुच्चय ϕ, A = {1, 3}, B = {1, 5, 9} और C = {1, 3, 5, 7, 9} का अवलोकन कर रिक्त स्थानों को $\subset$ or $\not\subset$ से भरिए।

(i) ϕ ..... B (ii) A ..... B (iii) A ..... C (iv) B C

हल : (i) $\phi \subset B$ क्योंकि ϕ सभी समुच्चयों का उपसमुच्चय होता है।

(ii) $A \not\subset B$, क्योंकि $3 \in A$ लेकिन $3 \notin B$.

(iii) $A \subset C$ क्योंकि $1, 3 \in A$ तथा C.

(iv) $B \subset C$ क्योंकि B के सभी घटक C में भी है।

अभ्यास - 2.3

1. निम्नलिखित में कौनसे समुच्चय समान है?

(i) A = {x : x शब्द FOLLOW के अक्षर है।}

(ii) B = {x : x शब्द FLOW के अक्षर है।}

(iii) C = {x : x शब्द WOLF के अक्षर है।}

2. निम्नलिखित समुच्चयों पर ध्यान दीजिए और रिक्त स्थानों की पूर्ति = या $\neq$ का प्रयोग करते हुए इस प्रकार कीजिए कि कथन सत्य हो।

A = {1, 2, 3}; B = {प्रथम तीन प्राकृतिक संख्याएँ}

C = {a, b, c, d}; D = {d, c, a, b}

E = {a, e, i, o, u}; F = {अंग्रेजी के स्वर}

(i) A .... B (ii) A .... E (iii) C .... D

(iv) D .... F (v) F .... A (vi) D .... E

(vii) F .... B

3. नीचे दिये गये समुच्चयों में बताइए कि A = B है या नहीं।

(i) A = {a, b, c, d} B = {d, c, a, b}

(ii) A = {4, 8, 12, 16} B = {8, 4, 16, 18}

(iii) A = {2, 4, 6, 8, 10} B = {x : $x, x < 10$ से कम धनात्मक पूर्णांक है}

(iv) A = {x : x, 10 का गुणांक} B = {10, 15, 20, 25, 30, ...}

SCERT TELANGANA

4. निम्नलिखित के कारण बताइए :

(i) $\{1, 2, 3, \ldots., 10\} \neq \{x : x \in N$ और $1 < x < 10\}$

(ii) $\{2, 4, 6, 8, 10\} \neq \{x : x = 2n+1$ और $x \in N\}$

(iii) $\{5, 15, 30, 45\} \neq \{x : x$ 15 के गुणक$\}$

(iv) $\{2, 3, 5, 7, 9\} \neq \{x : x$ रूढी संख्याएँ है$\}$

5. दिए गए समुच्चयों के संभावित उपसमुच्चय लिखिए :-

(i) $B = \{p, q\}$ (ii) $C = \{x, y, z\}$ (iii) $D = \{a, b, c, d\}$

(iv) $E = \{1, 4, 9, 16\}$ (v) $F = \{10, 100, 1000\}$

परिमित और अनंत समुच्चय (Finite & Infinite sets)

निम्नलिखित समुच्चयों का अवलोकन कीजिए

(i) A = {अपनी पाठशाला के विद्यार्थी} (ii) L = {p,q,r,s}

(iii) $B = \{x : x$ सम संख्याएँ$\}$ (iv) $J = \{x : x$ 7 के गुणक$\}$

क्या आप ऊपर दिये गये समुच्चयों के घटकों की सूचि बना सकते हो? उदाहरण (i) में आपके पाठशाला के सभी विद्यार्थी उसके घटक होंगे। उदाहरण (ii) के समुच्चय L में 4 घटक है। हमने देखा कि समुच्चय A तथा L के घटकों की संख्या को एक पूर्ण संख्या में बता सकते है, ऐसे समुच्चयों को परिमित समुच्चय कहते है।

अब समुच्चय B को देखिए जिसमें सभी सम संख्याएँ हैं क्या हम समुच्चय B के घटकों को गिन सकते है। हम देखते है कि इसमें घटकों की संख्या परिमित नहीं है। समुच्चय B में घटकों की संख्या अनंत है। तथा समुच्चय J में भी घटकों की अनंत ही होगी। ऐसे समुच्चयों को अनंत समुच्चय कहते है।

दिए गए बिन्दु में अनेक सरल रेखाएँ खींच सकते हैं। अर्थात् समुच्चय अनंत है। उसी तरह अंतिम सम या विषम संख्या की प्राप्ति नहीं हो सकती है। अतः हम कह सकते है कि यदि समुच्चय परिमित न हो तो वह अनंत समुच्चय होता है। पुर्णांको का समुह अनंत होता है

कुछ और उदाहरण देखिए :

(i) यदि 'W' सप्ताह के दिनों का समुच्चय हो तो W परिमित समुच्चय होगा।

(ii) यदि 'S' समीकरण $x^2 - 16 = 0$ का हल है तो S परिमित समुच्चय होगा।

(iii) यदि 'G' रेखा पर डाले गए बिन्दुओं का समुच्चय हो तो G एक अनंत समुच्चय है।

SCERT TELANGANA

उदाहरण-13. निम्नलिखित में अनंत या परिमित समुच्चयों को पहचानिए :-

(i) $\{x : x \in N$ और $(x-1)(x-2)=0\}$ (ii) $\{x : x \in N$ और $x^2=4\}$

(iii) $\{x : x \in N$ और $2x-2=0\}$ (iv) $\{x : x \in N$ और x रूढ संख्या है$\}$

(v) $\{x : x \in N$ और x विषम संख्या है।$\}$

हल :

(i) x का मूल्य 1 या 2 ले सकते है। {1,2} अर्थात् यह परिमित समुच्चय है।

(ii) $x^2=4, \in x=+2$ या -2 लेकिन $x \in N$ या x प्राकृतिक संख्या है अर्थात समुच्चय {2} यह परिमित समुच्चय है।

(iii) दिये गये समुच्चय में $x=1$ और $1 \in N$ अर्थात् यह परिमित समुच्चय है।

(iv) दिया गया समुच्चय रूढ़ संख्याओं का समूह है। रूढ़ संख्याएँ अनन्त है। अर्थात् यह अनंत समुच्चय है।

(v) विषम संख्याएँ अनन्त होती है अर्थात् यह अनंत समुच्चय है।

अब इन परिमित समुच्चयों को देखिए।

$A = \{1, 2, 4\}$; $B = \{6, 7, 8, 9, 10\}$; $C = \{x : x$ "INDIA" शब्द के अक्षर$\}$

यहाँ,

समुच्चय A के घटकों की संख्या = 3.

समुच्चय B के घटकों की संख्या = 5.

समुच्चय C में घटकों की संख्या = 4 (I घटक दो बार दोहराया गया) हम जानते हैं कि समुच्चयों के घटक भिन्न होने चाहिए। इसलिए C में घटकों की संख्या 4 है।).

किसी समुच्चय के घटकों की संख्या को उस समुच्चय की कार्डिनल संख्या कहते हैं। समुच्चय A की कार्डिनल संख्या को $n(A) = 3$ के रूप में दर्शाया जाता है।

उसी प्रकार $n(B) = 5$ और $n(C) = 4$.

यदि समुच्चय की कार्डिनल संख्या पूर्ण संख्या हो तो वह परिमित समुच्चय होगा।

सूचना : रिक्त समुच्चय में कोई घटक नहीं रहता हैं इसलिए इसकी कार्डिनल संख्या 0 होती है।

$\therefore n(\phi) = 0$

SCERT TELANGANA

यह किजिए

1. निम्नलिखित समुच्चयों में कौनसे समुच्चय परिमित है और कौनसे अनन्त है आपके उत्तर के कारण बताइए।

(i) $A = \{x : x \in N$ और $x < 100\}$ (ii) $B = \{x : x \in N$ और $x \leq 5\}$

(iii) $C = \{1^2, 2^2, 3^2, ...\}$ (iv) $D = \{1, 2, 3, 4\}$

(v) $\{x : x$ सप्ताह के दिन है।$\}$.

2. अनन्त समुच्चयों का चयन कीजिए।

(A) 10 से कम पूर्ण संख्याओं का समुच्चय (B) 10 से कम रूढ़ संख्याओं का समुच्चय

(C) 10 से कम पूर्णांकों का समुच्चय (D) 10 के गुणन खण्डों का समुच्चय

विचार - विमर्श कीजिए

एक रिक्त समुच्चय परिमित होता है यह कथन सत्य है या असत्य? क्यों?

अभ्यास - 2.4

1. निम्नलिखित समुच्चय में कौनसे रिक्त समुच्चय है कौनसे नहीं?

(i) एक बिन्दु से गुजरने वाली रेखाओं का समुच्चय।

(ii) 2 से विभाजित होने वाली विषम प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय।

(iii) $\{x : x$ एक प्राकृतिक संख्या $x < 5$ और $x > 7\}$

(iv) $\{x : x$ कोई दो समानान्तर रेखाओं का सामान्य बिन्दु$\}$

(v) सम रूढ़ संख्याओं का समुच्चय।

2. निम्नलिखित में कौनसे समुच्चय परिमित है या अनन्त है।

(i) एक वर्ष के महिनों का समुच्चय (ii) $\{1, 2, 3, \ldots, 99, 100\}$

(iii) 99 से कम रूढ़ संख्याओं का समुच्चय

(iv) अंग्रेजी वर्णमाला के शब्द

(v) X- अक्ष के समानान्तर रेखाओं का समुच्चय

(vi) 5 से गुणित संख्याओं का समुच्चय

(viii) मूल बिन्दु (0, 0) से गुजरने वाले वृत्तों का समुच्चय।

विचार - विमर्श कीजिए

1. $n(A)$, $n(B)$, $n(A \cap B)$ तथा $n(A \cup B)$ के बीच क्या संबंध है?

2. यदि A और B असंयुक्त समुच्चय हों तो आप $n(A \cup B)$ को कैसे ज्ञात करोगे?

SCERT TELANGANA

प्रस्तावित परियोजना

समुच्चय की अवधारणा, गुणधर्म तथा क्रियायें

- छात्रों की आदतें, खेलों में रूची, विषय सूची, साप्ताहिक मैगजीन्स, टी.वी.चैनल आदि की जानकारी एकत्रित कीजिए । उसका सम्मिलन, उभयनिष्ट और विभिन्न प्रक्रियाओं का वेन चित्र बनाकर, उस पर टिप्पणी लिखिए।

उदाहरण-14. यदि $A = \{1, 2, 3,4,5\}$ और $B = \{2,4,6,8\}$ हो तो $n(A \cup B)$ को ज्ञात कीजिए।

हल : समुच्चय A में 5 घटक है $\therefore n(A) = 5$

और समुच्चय B में 4 घटक है $\therefore n(B) = 4$

लेकिन $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,8\}$ में 9 घटक नहीं है केवल 7 ही घटक है क्यों?

विस्तार : उपरोक्त सर्वे का हम तीन मनपसंद खेलों / समाचार पत्रों/टी.वी. चानल्स आदि तक विस्तार कर सकते है।

हमने क्या चर्चा किया :-

1. पूर्ण रूप से परिभाषित वस्तुओं का संग्रह समुच्चय है। या समुच्चय वह है जो पूर्ण रूप से परिभाषित वस्तुओं का संग्रह है जहाँ अच्छी तरह से परिभाषित है कि
   (i) समुच्चय में सभी वस्तुओं में समान गुण या लक्षण होने चाहिए।
   (ii) यह निश्चित करना संभव है कि कोई दी गई वस्तु समुच्चय का घटक है या नहीं।
2. समुच्चय से संबंधित एक वस्तु समुच्चय का घटक कहलाता है इसे संकेत के रूप में '$\in$' को 'विद्यमान' द्वारा उपयोग में लाते है।
3. समुच्चय को रोस्टर रूप में लिख कर इन्हें अर्धविराम द्वारा अलग करते है और फूल कोष्टक में लिखा जा सकता है।
4. समुच्चय को समुच्चय रचेता के रूप में लिखा जा सकता है।
5. ऐसा समुच्चय जिसमें कोई घटक न हो उसे रिक्त समुच्चय या Null समुच्चय या void समुच्चय कहते है।
6. ऐसे समुच्चय को 'परिमित समुच्चय कहते है जिसमें घटकों की गणना करना संभव हो।
7. हम यह कह सकते है कि कोई समुच्चय परिमित नहीं हो तो वह अनंत समुच्चय होता है।
8. एक समुच्चय में तत्वों की संख्या को निर्धारित प्रमुख संख्या कहा जाता है।

SCERT TELANGANA

9. सार्वभौमिक समुच्चय को 'μ' से दर्शाया जाता है। सार्वभौमिक समुच्चय को साधारणतः आयत में दर्शाया जाता।

10. A उपसमुच्चय है B का अगर 'a' एक घटक है A का तो 'a' B का भी घटक होगा। इसे $A \subseteq B$ यदि $a \in A \Rightarrow a \in B$, द्वारा लिखा जाता, जहाँ A, B दो समुच्चय है।

11. दो समुच्चय A और B समान होंगे यदि A का प्रत्येक घटक B का भी घटक हो तथा B का प्रत्येक घटक A का भी घटक हो।

12. A सम्मिलन (union) B को $A \cup B = \{x : x \in A$ या $x \in B\}$ के रूप में लिखा जाता है।

13. A उभयनिष्ट (intersection) B को $A \cap B = \{x : x \in A$ और $x \in B\}$ के रूप में लिखा जाता है।

14. दो समुच्चयों के अंतर A, B को $A - B$ या $B - A$ से सूचित करते है।
$A - B = \{x : x \in A$ और $x \notin B\}$

15. दो समुच्चयों के संक्रियाओं को दर्शाने के लिए वेन चित्र सुविधा जनक तरीका है।

SCERT TELANGANA