ত্ৰিকোণমিতীয় ফলন
(TRIGONOMETRIC FUNCTIONS)

❖ *A mathematician knows how to solve a problem, he cannot solve it.*–MILNE ❖

3.1 অৱতাৰণা (Introduction)

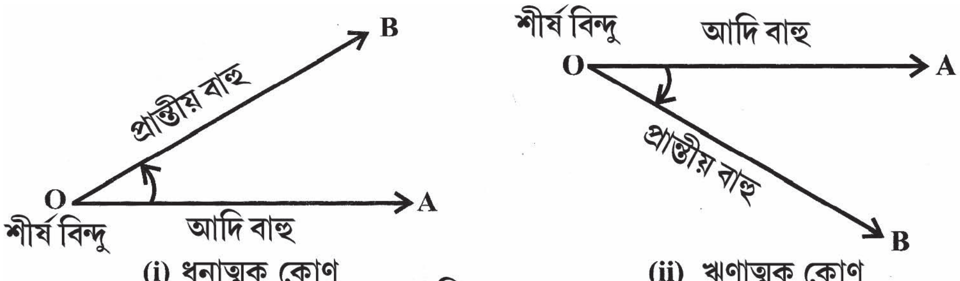
Arya Bhatt (476-550)

ইংৰাজী trigonometry শব্দটো গ্ৰীক শব্দদ্বয় "trigon" আৰু "metron" অৰপৰা আহিছে। ইয়াৰ অৰ্থ হ'ল "এটা ত্ৰিভুজৰ বাহুবোৰৰ জোখ লোৱা"। ত্ৰিভুজসম্বন্ধীয় জ্যামিতীয় সমস্যা সমাধান কৰাৰ বাবে পোনতে এই বিষয়টো চৰ্চা কৰা হৈছিল। সাগৰত জাহাজ চলাবলৈ কেপ্তেইনসকলে, নতুন ঠাইৰ সন্ধান উলিয়াবলৈ ছাৰ্ভেয়ৰসকলে, অভিযন্তাসকলে আৰু অন্যান্য বহুতে ত্ৰিকোণমিতি অধ্যয়ন কৰিছিল। আজিকালি বিভিন্ন ক্ষেত্ৰত ত্ৰিকোণমিতি অধ্যয়ন কৰা হয়। উদাহৰণস্বৰূপে ভূ-কম্পনবিদ্যাত, বৈদ্যুতিক বৰ্তনীৰ অভিকল্পনাত, এটমৰ অৱস্থা বৰ্ণনাত, সাগৰত জোৱাৰৰ উচ্চতাৰ পূৰ্বানুমানত, সাংগীতিক স্বৰৰ বিশ্লেষণত আৰু আন বহুতো ক্ষেত্ৰত ।

আগৰ শ্ৰেণীত, এটা সমকোণী ত্ৰিভুজৰ বাহুবোৰৰ অনুপাত হিচাপে আমি সূক্ষ্মকোণৰ ত্ৰিকোণমিতীয় অনুপাত উলিয়াবলৈ শিকিছোঁ। আমি ত্ৰিকোণমিতীয় অভেদবোৰৰ বিষয়ে অধ্যয়ন কৰিছোঁ। লগতে উচ্চতা আৰু দূৰত্বৰ সমস্যা সমাধান কৰোঁতে আমি ত্ৰিকোণমিতীয় অনুপাত প্ৰয়োগ কৰিবলৈ শিকিছোঁ। এই অধ্যায়ত আমি ত্ৰিকোণমিতীয় অনুপাতৰ ধাৰণাক ত্ৰিকোণমিতীয় ফলনলৈ সম্প্ৰসাৰণ কৰিম আৰু সংশ্লিষ্ট ধৰ্মসমূহ অধ্যয়ন কৰিম।

3.2 কোণ (Angles)

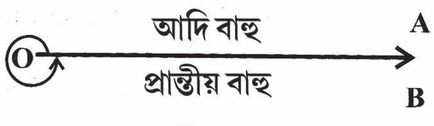
এডাল নিৰ্দিষ্ট ৰশ্মিৰ ইয়াৰ আদিবিন্দু সাপেক্ষে কৰা আবৰ্তনৰ মানেই হ'ল কোণ। মূল ৰশ্মিডালক কোনটোৰ **আদি বাহু** (initial side) বোলে আৰু আৱৰ্তনৰ পিছত ৰশ্মিডালৰ চূড়ান্ত অৱস্থানক কোণটোৰ **প্ৰান্তীয় বাহু** (terminal side) বোলে। আৱৰ্তন -বিন্দুটোক **শীৰ্ষ বিন্দু** (vertex) বোলে। যদি আৱৰ্তনৰ দিশ ঘড়ীৰ কাঁটাৰ বিপৰীত দিশত হয়, কোণটোক ধনাত্মক বুলি কোৱা হয় আৰু যদি আৱৰ্তনৰ দিশ ঘড়ীৰ কাঁটাৰ দিশত হয়, তেনেহ'লে কোণটোক ঋণাত্মক বুলি কোৱা হয় (চিত্ৰ 3.1)।



চিত্ৰ 3.1

আদি বাহুৰপৰা প্ৰান্তীয় বাহু পাবলৈ কৰা আৱৰ্তনৰ পৰিমাণক কোণটোৰ মাপ বুলি কোৱা হয়। কোণৰ মাপ উলিয়াবলৈ বহুতো একক আছে । কোণৰ সংজ্ঞাৰপৰাই এটা এককৰ কথা আমাৰ মনলৈ আহে যথা, চিত্ৰ 3.2 ত দেখুওৱাৰ দৰে আদি বাহুৰ অৱস্থানৰপৰা 'এক সম্পূৰ্ণ পৰিক্ৰমণ'।

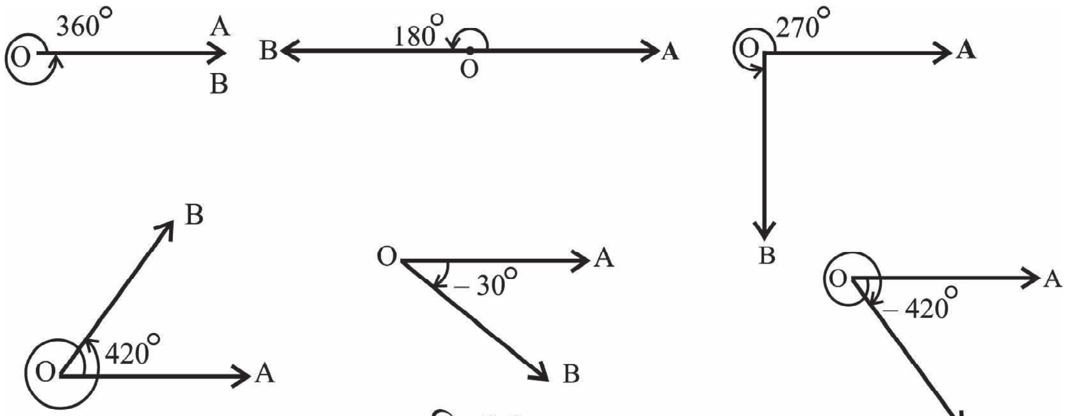
ডাঙৰ কোণৰ বাবে ই অতিশয় সুবিধাজনক। উদাহৰণস্বৰূপে, আমি ক'ব পাৰোঁ যে এটা পৰিসম্পন্ন য'তৰে (spinning wheel) প্ৰতি ছেকেণ্ডত 15 বাৰ পৰিক্ৰমণ কৰে। আমি আন দুটা কোণৰ মাপৰ এককৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিম। সাধাৰণতে ব্যৱহৃত হোৱা এই দুটা হ'ল ডিগ্ৰী মাপ আৰু ৰেডিয়ান মাপ।



চিত্ৰ 3.2

3.2.1 ডিগ্ৰী মাপ (Degree measure) ঃ যদি আদি বাহুৰপৰা প্ৰান্তীয় বাহুলৈ আৱৰ্তন পৰিক্ৰমণৰ $\frac{1}{360}$ তম হয়, তেনেহ'লে কোণটোৰ মাপক এক ডিগ্ৰী বুলি কোৱা হয়। ইয়াক 1° বুলি লিখা হয়। এক ডিগ্ৰীক 60 মিনিটত ভাগ কৰা হয় আৰু এক মিনিটক 60 ছেকেণ্ডত ভাগ কৰা হয়। এক ডিগ্ৰীৰ ষাঠী ভাগৰ এক অংশক এক মিনিট বোলে । ইয়াক $1'$ বুলি লিখা হয়। এক মিনিটৰ ষাঠী ভাগৰ এক অংশক এক ছেকেণ্ড বোলে। ইয়াক $1''$ বুলি লিখা হয়। এনেদৰে, $1^{\circ} = 60'$, $1' = 60''$

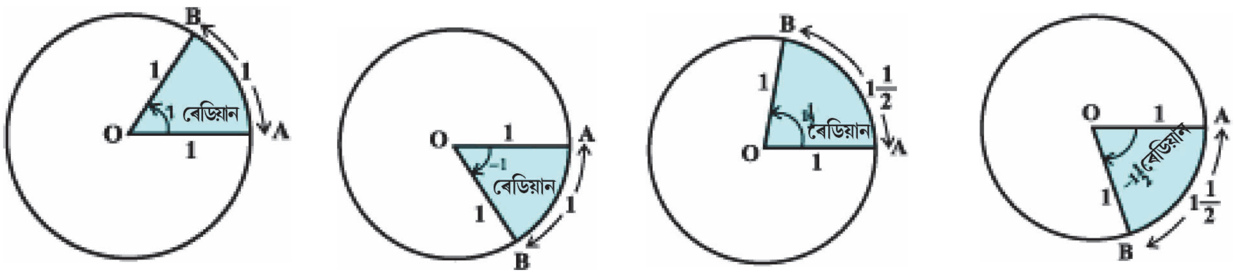
চিত্ৰ 3.3 ত 360^0, 180^0, 270^0, 420^0, -30^0, -420^0 মাপৰ কোণ দেখুওৱা হৈছে।



চিত্ৰ 3.3

3.2.2. *ৰেডিয়ান মান (Radian measure)* ঃ কোণৰ মাপৰ আৰু এটা একক আছে। ইয়াক ৰেডিয়ান মাপ বুলি কোৱা হয়। এটা একক বৃত্তৰ (1 একক ব্যাসাৰ্ধৰ বৃত্তৰ) 1 একক দৈৰ্ঘ্যৰ এটা চাপে কেন্দ্ৰত যি কোণ উৎপন্ন কৰে তাৰ মাপ 1 ৰেডিয়ান বুলি কোৱা হয়। চিত্ৰ 3.4 ত ((i) ৰ পৰা (iv) লৈ) OA হ'ল আদি বাহু আৰু OB হ'ল প্ৰান্তীয় বাহু।

চিত্ৰৰ কোণবোৰৰ মাপ 1 ৰেডিয়ান, -1 ৰেডিয়ান, $0\frac{0}{1}$ ৰেডিয়ান আৰু $-0\frac{0}{1}$ ৰেডিয়ান।



চিত্ৰ 3. 4 ((i) ৰ পৰা (iv) লৈ)

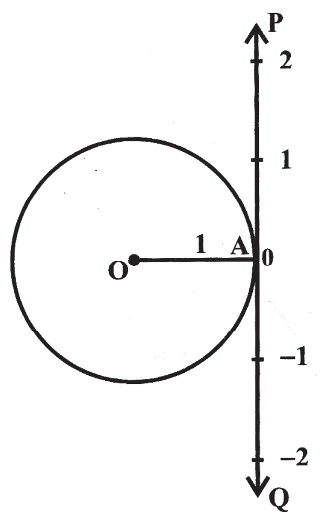
আমি জানো যে এক একক ব্যাসাৰ্ধৰ এটা বৃত্তৰ পৰিধি 2π। গতিকে আদি বাহুৰ এক সম্পূৰ্ণ পৰিক্ৰমণে 2π ৰেডিয়ান কোণ উৎপন্ন কৰে।

সাধাৰণভাৱে, r ব্যাসাৰ্ধৰ এটা বৃত্তৰ r দৈৰ্ঘ্যৰ চাপে 1 ৰেডিয়ান মাপৰ এটা কোণ উৎপন্ন কৰে। আমি জানো যে বৃত্তৰ সমান চাপে কেন্দ্ৰত সমান কোণ উৎপন্ন কৰে। যিহেতু r ব্যাসাৰ্ধৰ এটা বৃত্তৰ r দৈৰ্ঘ্যৰ চাপে 1 ৰেডিয়ান মাপৰ কোণ উৎপন্ন কৰে, গতিকে l দৈৰ্ঘ্যৰ চাপে $\frac{l}{r}$ ৰেডিয়ান মাপৰ কোণ উৎপন্ন কৰিব। গতিকে, যদি এটা r ব্যাসাৰ্ধৰ বৃত্তত l দৈৰ্ঘ্যৰ চাপে কেন্দ্ৰত θ ৰেডিয়ান মাপৰ কোণ উৎপন্ন কৰে, তেনেহ'লে $\theta = \frac{l}{r}$ বা $l = r\theta$.

3.2.3 *ৰেডিয়ান আৰু বাস্তৱ সংখ্যাৰ মাজৰ সম্পৰ্ক (Relation between radian and real numbers)* ঃ একক বৃত্তটো লোৱা হ'ল, O ইয়াৰ কেন্দ্ৰ। ধৰা হ'ল বৃত্তটোত A এটা বিন্দু। OA ক এটা কোণৰ আদি ৰেখা হিছাপে লোৱা হ'ল। এটা চাপৰ দৈৰ্ঘ্যই বৃত্তটোৰ কেন্দ্ৰত উৎপন্ন কৰা কোণৰপৰা কোণটোৰ ৰেডিয়ান মাপ পোৱা যাব। PAQ ৰেখাডাল লোৱা হ'ল। ই বৃত্তটোৰ A বিন্দুত স্পৰ্শক। ধৰা হ'ল A বিন্দুটোৱে বাস্তৱ সংখ্যা শূন্য বুজায়, AP এ ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যা বুজায় আৰু AQ এ ঋণাত্মক বাস্তৱ সংখ্যা বুজায় (চিত্ৰ 3.5)। যদি আমি AP ৰেখাডালক ঘড়ীৰ কাঁটাৰ বিপৰীত দিশত বৃত্তটোত "বান্ধি" দিওঁ আৰু AQ ক ঘড়ীৰ কাঁটাৰ দিশত "বান্ধি" দিওঁ, তেনেহ'লে প্ৰতিটো বাস্তৱ সংখ্যাৰ অনুৰূপে এটা ৰেডিয়ান মাপ পোৱা যাব আৰু বিপৰীতক্ৰমে একেটা কথাই হ'ব। এনেদৰে, ৰেডিয়ান মাপ আৰু বাস্তৱ সংখ্যাক এটা আৰু একে বুলি বিবেচনা কৰিব পাৰি।

3.2.4 *ডিগ্ৰী আৰু ৰেডিয়ানৰ মাজৰ সম্পৰ্ক (Relation between degree and radian)* ঃ এটা বৃত্তই কেন্দ্ৰত উৎপন্ন কৰা কোণৰ ৰেডিয়ান মাপ 2π আৰু ইয়াৰ ডিগ্ৰি মাপ 360°। গতিকে ইয়াৰপৰা আমি পালোঁ

$$2\pi \text{ ৰেডিয়ান } = 360^\circ \text{ বা } \pi \text{ ৰেডিয়ান } = 180^\circ$$



চিত্ৰ 3.5

উপৰিউক্ত সম্পৰ্কৰপৰা ৰেডিয়ান মাপক ডিগ্ৰী মাপত আৰু ডিগ্ৰি মাপক ৰেডিয়ান মাপত প্ৰকাশ কৰিব পাৰি। π ৰ মান মোটামুটিভাৱে $\frac{22}{7}$ বুলি ধৰিলৈ, আমি পালোঁ

$$1 \text{ ৰেডিয়ান} = \frac{180^o}{\pi} = 57^o16' \text{ (প্ৰায়)}$$

আকৌ $$1^o = \frac{\pi}{180} \text{ ৰেডিয়ান} = 0.01746 \text{ ৰেডিয়ান (প্ৰায়)}$$

তলৰ সাৰণীখনত কেইটামান সাধাৰণ কোণৰ ডিগ্ৰী মাপ আৰু ৰেডিয়ান মাপৰ মাজৰ সম্পৰ্ক দিয়া হ'ল

ডিগ্ৰী	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
ৰেডিয়ান	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

সংকেত চিনৰ চলিত প্ৰথা (Notational Convention)

কোণবোৰ ডিগ্ৰী বা ৰেডিয়ান মাপত জোখা হয়। যেতিয়া কোণ এটা θ° বুলি লিখা হয়, তেতিয়া বুজিব লাগিব যে কোণটোৰ ডিগ্ৰী মাপ θ আৰু যেতিয়া কোণ এটা β বুলি লিখা হয়, তেতিয়া বুজিব লাগিব যে কোণটোৰ ৰেডিয়ান মাপ β.

যেতিয়া এটা কোণ ৰেডিয়ানত প্ৰকাশ কৰা হয়, "ৰেডিয়ান" শব্দটো প্ৰায়েই বাদ দিয়া হয় ।এনেদৰে $\pi = 180^0$ আৰু $\frac{\pi}{4} = 45^0$ । বুজিব লাগিব যে π আৰু $\frac{\pi}{4}$ ৰেডিয়ান মাপ। আমি দেখিছোঁ যে

$$\text{ৰেডিয়ান মাপ } = \frac{\pi}{180} \times \text{ ডিগ্ৰী মাপ}$$

$$\text{ডিগ্ৰী মাপ } = \frac{180}{\pi} \times \text{ ৰেডিয়ান মাপ}$$

উদাহৰণ 1 $40^0\ 20'$ ক ৰেডিয়ান মাপলৈ নিয়াঁ।

সমাধান আমি জানো যে $180^0 = \pi$ ৰেডিয়ান

গতিকে $40^0 20' = 40\frac{1}{3}$ ডিগ্ৰী $= \frac{\pi}{180} \times \frac{121}{3}$ ৰেডিয়ান $= \frac{121\pi}{540}$ ৰেডিয়ান

গতিকে $40^0 20' = \frac{121\pi}{540}$ ৰেডিয়ান

উদাহৰণ 2 6 ৰেডিয়ানক ডিগ্ৰী মাপলৈ নিয়াঁ।

সমাধান আমি জানো যে π ৰেডিয়ান $= 180^\circ$

গতিকে 6 ৰেডিয়ান $= \frac{180}{\pi} \times 6$ ডিগ্ৰী $= \frac{1080 \times 7}{22}$ ডিগ্ৰী

$= 343\frac{7}{11}$ ডিগ্ৰী $= 343^\circ + \frac{7 \times 60}{11}$ মিনিট (যিহেতু $1^0 = 60'$)

$= 343^0 + 38' + \frac{2}{11}$ মিনিট

$= 343^0 + 38' + 10.9''$ (যিহেতু $1' = 60''$)

$= 343^0 38' 11''$ (প্ৰায়)

গতিকে 6 ৰেডিয়ান $= 343^0 38' 11''$ (প্ৰায়)

উদাহৰণ 3 এটা বৃত্তৰ কেন্দ্ৰীয় কোণ 60° এ 37.4 ছেমি দৈৰ্ঘ্যৰ চাপ খণ্ডিত কৰে। বৃত্তটোৰ ব্যাসাৰ্ধ উলিওৱাঁ। ($\pi = \frac{22}{7}$ বুলি ধৰিবাঁ।)

সমাধান ইয়াত $l = 37.4$ ছেমি আৰু $\theta = 60^0 = \frac{60\pi}{180}$ ৰেডিয়ান $= \frac{\pi}{3}$

গতিকে $r = \frac{l}{\theta}$ ৰ পৰা, আমি পালোঁ

$$r = \frac{37.4 \times 3}{\pi} = \frac{37.4 \times 3 \times 7}{22} = 35.7 \text{ ছেমি}$$

উদাহৰণ 4 এটা ঘড়ীৰ মিনিটৰ কাঁটাডালৰ দৈৰ্ঘ্য 1.5 ছেমি। 40 মিনিটত ইয়াৰ আগটো কিমানখিনি যাব? ($\pi = 3.14$ বুলি ধৰিবাঁ।)

সমাধান ঘড়ীৰ মিনিটৰ কাঁটাই 60 মিনিটত এক পৰিক্ৰমণ সম্পূৰ্ণ কৰে। গতিকে 40 মিনিটত মিনিটৰ কাঁটাই এক পৰিক্ৰমণৰ $\frac{2}{3}$ অংশ ঘূৰিব।গতিকে $\theta = \frac{2}{3} \times 360^0$ বা $\frac{4\pi}{3}$ ৰেডিয়ান।

গতিকে অতিক্ৰান্ত দূৰত্ব

$$= l = r\theta = 1.5 \times \frac{4\pi}{3} \text{ ছেমি.} = 2\pi \text{ ছেমি} = 2 \times 3.14 \text{ ছেমি} = 6.28 \text{ ছেমি}$$

উদাহৰণ 5 দুটা বৃত্তৰ একে দৈৰ্ঘ্যৰ দুটা চাপে কেন্দ্ৰত 65^0 আৰু 110^0 কোণ উৎপন্ন কৰে। বৃত্তদুটাৰ ব্যাসাৰ্ধ দুডালৰ অনুপাত উলিওৱাঁ।

সমাধান ধৰা হ'ল বৃত্ত দুটাৰ ব্যাসাৰ্ধ r_1 আৰু r_2।

দিয়া আছে $\theta_1 = 65^0 = \frac{\pi}{180} \times 65 = \frac{13\pi}{36}$ ৰেডিয়ান

আৰু $\theta_2 = 110^0 = \frac{\pi}{180} \times 110 = \frac{22\pi}{36}$ ৰেডিয়ান

ধৰা হ'ল প্ৰতিটো চাপৰ দৈৰ্ঘ্য l, গতিকে $l = r_1\theta_1 = r_2\theta_2$

ইয়াৰপৰা $\frac{13\pi}{36} \times r_1 = \frac{22\pi}{36} \times r_2$ অৰ্থাৎ $\frac{r_1}{r_2} = \frac{22}{13}$

গতিকে $r_1 : r_2 = 22 : 13$

অনুশীলনী 3.1

1. তলৰ প্ৰতিটো ডিগ্ৰী মাপৰ অনুৰূপ ৰেডিয়ান মাপ উলিওৱাঁ।

   (i) 25^0 (ii) $-47^0 30'$ (iii) 240^0 (iv) 520^0

2. তলৰ প্ৰতিটো ৰেডিয়ান মাপৰ অনুৰূপ ডিগ্ৰী মাপ উলিওৱাঁ ।

   ($\pi = \frac{22}{7}$ বুলি ধৰিবাঁ।)

   (i) $\frac{11}{16}$ (ii) - 4 (iii) $\frac{5\pi}{3}$ (iv) $\frac{7\pi}{6}$

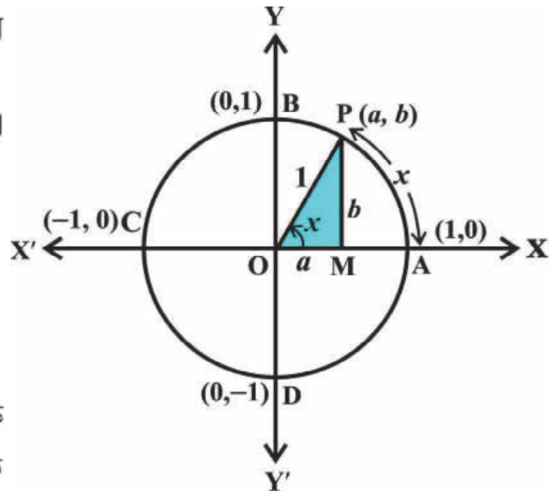
3. চকা এটাই এক মিনিটত 360 বাৰ পৰিক্ৰমণ কৰে। এক ছেকেণ্ডত ই কিমান ৰেডিয়ান ঘূৰিব ?
4. এটা বৃত্তৰ ব্যাসাৰ্ধ 100 ছেমি। 22 ছেমি দৈৰ্ঘ্যৰ এটা চাপে কেন্দ্ৰত উৎপন্ন কৰা কোণৰ ডিগ্ৰি মাপ উলিওৱাঁ।

   ($\pi = \frac{22}{7}$ বুলি ধৰিবাঁ।)
5. এটা বৃত্তৰ ব্যাস 40 ছেমি আৰু এডাল জ্যাৰ দৈৰ্ঘ্য 20 ছেমি। জ্যাডালৰ গৌণ চাপৰ দৈৰ্ঘ্য উলিওৱাঁ।
6. দুটা বৃত্তৰ একে দৈৰ্ঘ্যৰ দুটা চাপে কেন্দ্ৰত 60^0 আৰু 75^0 কোণ উৎপন্ন কৰে। বৃত্ত দুটাৰ ব্যাসাৰ্ধ দুডালৰ অনুপাত উলিওৱাঁ।
7. এটা দোলকৰ দৈৰ্ঘ্য 75 ছেমি। দোলকৰ আগটোৱে (i) 10 ছেমি (ii) 15 ছেমি (iii) 21 ছেমি দৈৰ্ঘ্যৰ চাপ উৎপন্ন কৰে। প্ৰত্যেক ক্ষেত্ৰতে দোলকটোৱে দোলন কৰা কোণৰ মাপ ৰেডিয়ানত উলিওৱাঁ।

3.3. ত্ৰিকোণমিতীয় ফলন (Trigonometric Functions)

আগৰ শ্ৰেণীত, এটা সমকোণী ত্ৰিভুজৰ বাহুবোৰৰ অনুপাত হিছাপে আমি সূক্ষ্মকোণৰ ত্ৰিকোণমিতীয় অনুপাত উলিয়াবলৈ শিকিছোঁ। এতিয়া আমি ৰেডিয়ান মাপত থকা যিকোনো কোণলৈ ত্ৰিকোণমিতীয় অনুপাতৰ সংজ্ঞাক সম্প্ৰসাৰণ কৰিম আৰু ত্ৰিকোণমিতীয় ফলন হিছাপে অধ্যয়ন কৰিম।

এটা একক বৃত্ত লোৱা হ'ল। অক্ষদ্বয়ৰ মূল বিন্দু ইয়াৰ কেন্দ্ৰ। বৃত্তটোত P (a, b) এটা বিন্দু আৰু AOP কোণ = x ৰেডিয়ান অৰ্থাৎ AP চাপৰ দৈৰ্ঘ্য = x (চিত্ৰ 3.6)।



চিত্ৰ 3.6

$\cos x = a$ আৰু $\sin x = b$ বুলি সংজ্ঞাবদ্ধ কৰা হ'ল। যিহেতু $\triangle OMP$ এটা সমকোণী ত্ৰিভুজ,

$OM^2 + MP^2 = OP^2$ বা $a^2 + b^2 = 1$

এনেদৰে, একক বৃত্তটোৰ প্ৰতিটো বিন্দুৰ বাবে আমি পালোঁ

$a^2 + b^2 = 1$ বা $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

যিহেতু এক সম্পূৰ্ণ পৰিক্ৰমণে বৃত্তটোৰ কেন্দ্ৰত 2π ৰেডিয়ান কোণ উৎপন্ন কৰে, $\angle AOB = \frac{\pi}{2}, \angle AOC = \pi$ আৰু $\angle AOD = \frac{3\pi}{2}$ । যিবোৰ কোণ $\frac{\pi}{2}$ ৰ অখণ্ড গুণিতক সেইবোৰক **চতুৰংশীয় কোণ** (quadrantal angles) বোলে। A, B, C আৰু D বিন্দু কেইটাৰ স্থানাংক ক্ৰমে (1,0), (0,1), (– 1,0) আৰু (0, –1). গতিকে, চতুৰংশীয় কোণৰ বাবে, আমি পালোঁ

$\cos 0^\circ = 1 \qquad \sin 0^\circ = 0$

$\cos \frac{\pi}{2} = 0 \qquad \sin \frac{\pi}{2} = 1$

$\cos \pi = -1 \qquad \sin \pi = 0$

$\cos \frac{3\pi}{2} = 0 \qquad \sin \frac{3\pi}{2} = -1$

$\cos 2\pi = 1 \qquad \sin 2\pi = 0$

এতিয়া যদি আমি P বিন্দুৰপৰা এক সম্পূৰ্ণ পৰিক্ৰমণ কৰোঁ, তেনেহ'লে আমি আকৌ P বিন্দুত উপস্থিত হ'ম। গতিকে আমি লক্ষ্য কৰিলোঁ যে যদি 2π ৰ অখণ্ড গুণিতকেৰে π বাঢ়ে (বা কমে), sine আৰু cosine ফলনৰ মানৰ কোনো পৰিৱৰ্তন নহয়। গতিকে

$$\sin(2n\pi + x) = \sin x,\ n \in \mathbf{Z} \quad \cos(2n\pi + x) = \cos x,\ n \in \mathbf{Z}$$

আকৌ, $\sin x=0$, যদি $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$অৰ্থাৎ যেতিয়া x, π ৰ অখণ্ড গুণিতক আৰু $\cos x=0$, যদি $x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \ldots\ldots$ অৰ্থাৎ $\cos x$ অৰ মান শূন্য হয় যেতিয়া x, $\frac{\pi}{2}$ ৰ অযুগ্ম গুণিতক। গতিকে

$\sin x = 0$ এ সূচায় $x = 2\pi, n$ এটা অখণ্ড সংখ্যা,

$\cos x = 0$ এ সূচায় $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, n এটা অখণ্ড সংখ্যা।

এতিয়া আমি sine আৰু cosine ফলনৰ সহায়ত বাকী ত্ৰিকোণমিতীয় ফলনবোৰ সংজ্ঞাবদ্ধ কৰোঁ।

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x},\ x \neq n\pi, \text{ n এটা অখণ্ড সংখ্যা}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x},\ x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, \text{ n এটা অখণ্ড সংখ্যা}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x},\ x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, \text{ n এটা অখণ্ড সংখ্যা}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x},\ x \neq n\pi, \text{ n এটা অখণ্ড সংখ্যা}$$

ইতিমধ্যে আমি দেখুৱাইছোঁ যে যিকোনো বাস্তৱ সংখ্যা x অৰ বাবে, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
ইয়াৰপৰা

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x \quad \text{(কিয়?)}$$

$$1 + \cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x \quad \text{(কিয়?)}$$

আগৰ শ্ৰেণীত, আমি 0^0, 30^0, 45^0, 60^0 আৰু 90^0 ৰ বাবে ত্ৰিকোণমিতীয় অনুপাতৰ মান উলিয়াইছোঁ। আগতে পোৱা ত্ৰিকোণমিতীয় অনুপাতৰ দৰে এইবোৰ কোণৰ ত্ৰিকোণমিতীয় ফলনৰ মান একে। গতিকে আমি তলৰ সাৰণীখন উলিয়াব পাৰিছো ঃ

	0^0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	সংজ্ঞাবদ্ধ নহয়	0	সংজ্ঞাবদ্ধ নহয়	0

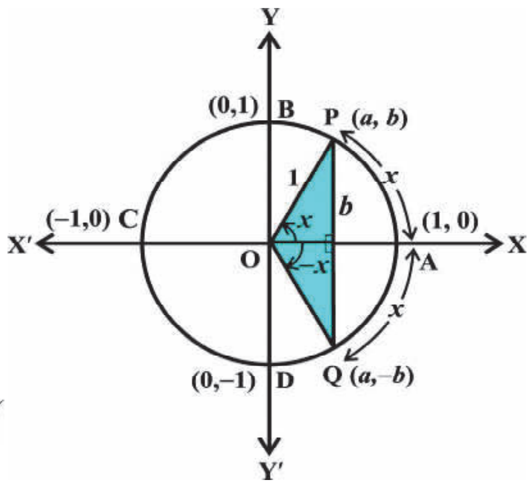
$\operatorname{cosec} x$, $\sec x$ আৰু $\cot x$ অৰ মান ক্ৰমে $\sin x$, $\cos x$ আৰু $\tan x$ অৰ মানৰ অন্যোন্যক।

3.3. ত্ৰিকোণমিতীয় ফলনৰ চিন (Sign of trigonometric functions)

একক বৃত্তত P (a, b) এটা বিন্দু। বৃত্তটোৰ কেন্দ্ৰ মূল বিন্দু আৰু $\angle AOP = x$ । যদি $\angle AOQ = -x$, তেনেহ'লে Q বিন্দুটোৰ স্থানাংক হ'ব (a, –b) (চিত্ৰ 3.7)। গতিকে $\cos(-x) = \cos x$

আৰু $\sin(-x) = -\sin x$

যিহেতু একক বৃত্তৰ প্ৰতিটো বিন্দু P (a, b) ৰ বাবে, $-1 \le a \le 1$ আৰু $-1 \le b \le 1$, আমি পালোঁ যে সকলো x অৰ বাবে $-1 \le \cos x \le 1$, আৰু $-1 \le \sin x \le 1$। আগৰ শ্ৰেণীত আমি পাই আহিছোঁ যে প্ৰথম চোকত $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$ a আৰু b উভয়ে ধনাত্মক, দ্বিতীয় চোকত $\left(\frac{\pi}{2} < x < \pi\right)$ a ঋণাত্মক আৰু b ধনাত্মক, তৃতীয় চোকত $\left(\pi < x < \frac{3\pi}{2}\right)$ a আৰু b উভয়ে ঋণাত্মক আৰু চতুৰ্থ চোকত $\left(\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\right)$ a ধনাত্মক আৰু b ঋণাত্মক। গতিকে,



চিত্ৰ 3.7

$0 < x < \pi$ ৰ বাবে $\sin x$ ধনাত্মক আৰু $0 < x < 2\pi$ ৰ বাবে ঋণাত্মক। সেইদৰে, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ৰ বাবে $\cos x$ ধনাত্মক, $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ ৰ বাৱে ঋণাত্মক, আকৌ $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ ৰ বাবে ধনাত্মক। সেইদৰে আমি বিভিন্ন চোকত বাকীবোৰ ত্ৰিকোণমিতীয় ফলনৰ চিন নিৰ্ণয় কৰিব পাৰিম। আমি তলৰ সাৰণীখন পাম।

	I	II	III	IV
$\sin x$	+	+	–	–
$\cos x$	+	–	–	+
$\tan x$	+	–	+	–
$\operatorname{cosec} x$	+	+	–	–
$\sec x$	+	–	–	+
$\cot x$	+	–	+	–

3.3. 2. *ত্ৰিকোণমিতীয় ফলনৰ আদিক্ষেত্ৰ আৰু পৰিসৰ (Domain and range of trigonometric functions).*

sine আৰু cosine ফলনৰ সংজ্ঞাৰপৰা আমি দেখিছোঁ যে সকলো বাস্তৱ সংখ্যাৰ বাবে সিহঁত সংজ্ঞাৱদ্ধ। আকৌ আমি দেখিছোঁ যে প্ৰত্যেক বাস্তৱ সংখ্য x অৰ বাবে

$$-1 \le \sin x \le 1 \text{ আৰু } -1 \le \cos x \le 1$$

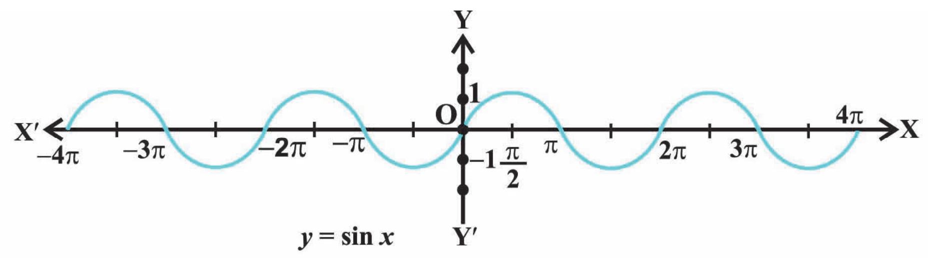
এইদৰে $y = \sin x$ আৰু $y = \cos x$ অৰ আদিক্ষেত্ৰ হ'ল সকলো বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি আৰু পৰিসৰ [-1,1] অৰ্থাৎ --- $-1 \le y \le 1$.

যিহেতু $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$, $y = \operatorname{cosec} x$ অৰ আদিক্ষেত্ৰ হ'ল সংহতি $\{x : x \in \mathbf{R}$ আৰু $x \neq n\pi, n \in \mathbf{Z}\}$ আৰু পৰিসৰ হ'ল সংহতি $\{y : y \in \mathbf{R}, y \geq 1$ বা $y \leq -1\}$। সেইদৰে $y = \sec x$ অৰ আদিক্ষেত্ৰ হ'ল সংহতি $\{x : x \in \mathbf{R}$ আৰু $x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbf{Z}\}$ আৰু পৰিসৰ হ'ল সংহতি $\{y : y \in \mathbf{R}, y \leq -1$ বা $y \geq 1\}$ $y = \tan x$ অৰ আদিক্ষেত্ৰ হ'ল সংহতি $\{x : x \in \mathbf{R}$ আৰু $x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}\}$ আৰু পৰিসৰ হ'ল সকলো বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি। $y = \cot x$ অৰ আদিক্ষেত্ৰ হ'ল সংহতি $\{x : x \in \mathbf{R}$ আৰু $x \neq n\pi, n \in \mathbf{Z}\}$ আৰু পৰিসৰ হ'ল সকলো বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি।

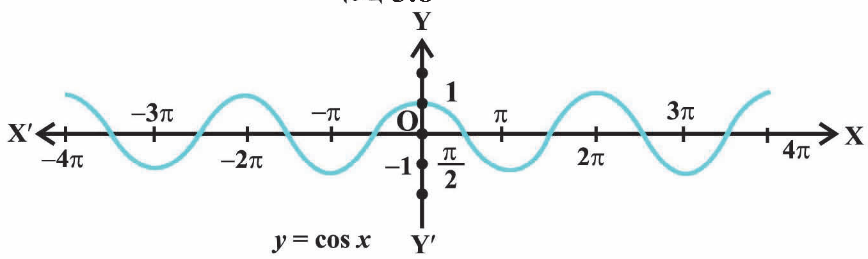
আকৌ আমি লক্ষ্য কৰিছোঁ যে প্ৰথম চোকত x অৰ মান 0 ৰ পৰা $\frac{\pi}{2}$ লৈ বাঢ়ি যোৱাৰ লগে লগে $\sin x$ অৰ মান 0 ৰপৰা পৰা 1 লৈ বাঢ়ে; x অৰ মান $\frac{\pi}{2}$ ৰ পৰা π লৈ বাঢ়ি যোৱাৰ লগে লগে, $\sin x$ অৰ মান 1 অৰ পৰা 0 লৈ কমে। তৃতীয় চোকত x অৰ মান π ৰ পৰা $\frac{3\pi}{2}$ লৈ বঢ়াৰ লগে লগে, $\sin x$ অৰ মান 0 ৰ পৰা -1 লৈ কমে আৰু অৱশেষত চতুৰ্থ চোকত x অৰ মান $\frac{3\pi}{2}$ ৰ পৰা 2π লৈ বাঢ়ি যোৱাৰ লগে লগে $\sin x$ অৰ মান -1 অৰপৰা 0 লৈ বাঢ়ে। সেইদৰে আমি আন আন ত্ৰিকোণমিতীয় ফলনৰ প্ৰকৃতি নিৰূপণ কৰিব পাৰোঁ। তলৰ সাৰণীখনত তাক দেখুওৱা হৈছে।

	প্ৰথম চোক	দ্বিতীয় চোক	তৃতীয় চোক	চতুৰ্থ চোক
sin	0 ৰ পৰা 1 অলৈ বাঢ়ে	1অৰপৰা 0 লৈ কমে	0 ৰপৰা -1 অলৈ কমে	-1 অৰপৰা 0 লৈ বাঢ়ে
cos	1ৰপৰা 0 লৈ কমে	0 ৰপৰা -1অলৈ কমে	-1অৰপৰা 0 লৈ বাঢ়ে	0 ৰপৰা1অলৈ বাঢ়ে
tan	0 ৰপৰা ∞ লৈ বাঢ়ে	$-\infty$ ৰপৰা 0 লৈ বাঢ়ে	0 ৰপৰা ∞ লৈ বাঢ়ে	$-\infty$ ৰপৰা 0লৈ বাঢ়ে
cot	∞ ৰপৰা 0 লৈ কমে	0 ৰপৰা $-\infty$ লৈ কমে	∞ ৰপৰা 0 লৈ কমে	0 ৰপৰা $-\infty$ লৈ কমে
sec	1অৰপৰা ∞ লৈ বাঢ়ে	$-\infty$ ৰপৰা -1লৈ বাঢ়ে	-1 ৰপৰা $-\infty$ লৈ কমে	∞ ৰপৰা1লৈ কমে
cosec	∞ ৰপৰা 1 লৈ কমে	1 ৰপৰা ∞ লৈ বাঢ়ে	$-\infty$ ৰপৰা -1 লৈ বাঢ়ে	-1ৰপৰা $-\infty$ লৈ কমে

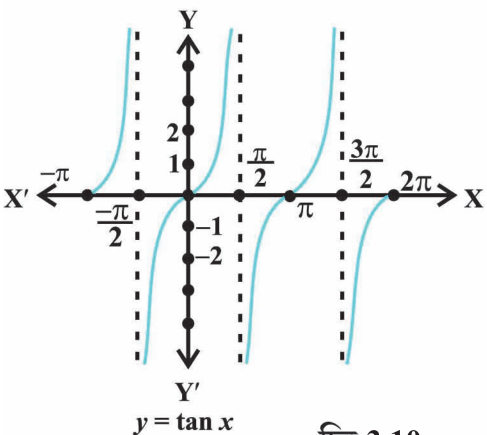
মন্তব্য ওপৰৰ সাৰণীখনত কোৱা হৈছে যে $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ৰ বাবে $\tan x$ অৰ মান 0 ৰ পৰা ∞ লৈ (অসীম) বাঢ়ে। ইয়াৰ অৰ্থ এইটোৱেই যে $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ৰ বাবে x বাঢ়ি গৈ থাকিলে $\tan x$ ও বাঢ়ে আৰু x, $\frac{\pi}{2}$ ৰ ওচৰ চাপি গ'লে $\tan x$ এ স্বেচ্ছভাৱে অতি ডাঙৰ ধনাত্মক মান লয়। সেইদৰে, চতুৰ্থ চোকত $\operatorname{cosec} x$ -1 ৰ পৰা $-\infty$ লৈ (বিয়োগ অসীম) কমে। ইয়াৰ অৰ্থ এইটোৱেই যে $x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ ৰ বাবে $\operatorname{cosec} x$ কমে আৰু x, 2π ৰ ওচৰ চাপি গলে $\operatorname{cosec} x$ এ স্বেচ্ছভাৱে অতি ডাঙৰ ঋণাত্মক মান লয়। ∞ আৰু $-\infty$ প্ৰতীকে ফলন আৰু চলকৰ বিশেষ ধৰণৰ প্ৰকৃতি নিৰ্ধাৰণ কৰে।



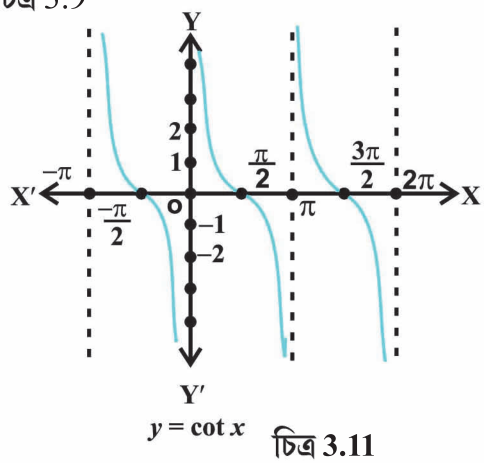
চিত্র 3.8



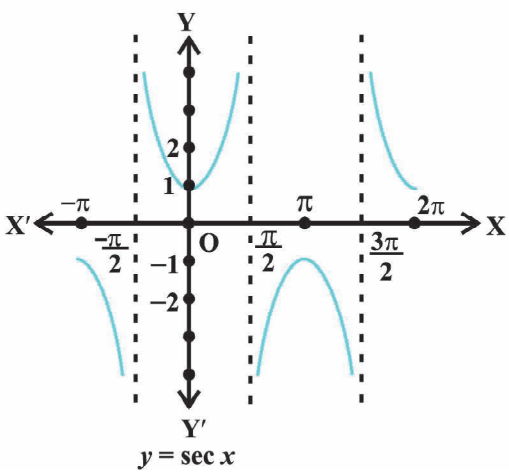
চিত্র 3.9



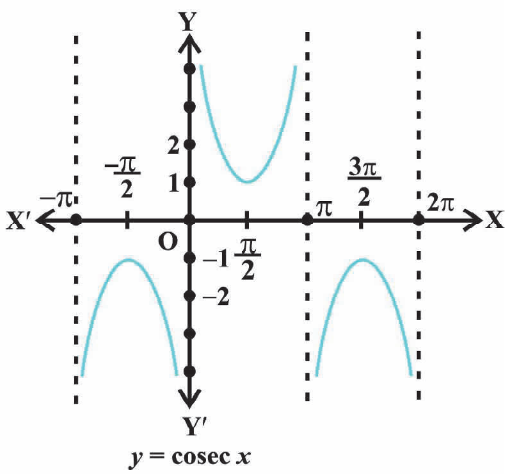
চিত্র 3.10



চিত্র 3.11



চিত্র 3.12



চিত্র 3.13

আমি ইতিমধ্যে পাইছোঁ যে 2π অন্তৰালৰ পিছত $\sin x$ আৰু $\cos x$ এ একেই মান লয়। গতিকে 2π অন্তৰালৰ পিছত $\operatorname{cosec} x$ আৰু $\sec x$ এ একে মান লব। আমি পিছৰ অনুচ্ছেদত পাম যে $\tan(\pi + x) = \tan x$। সেয়ে π অন্তৰালৰ পিছত $\tan x$ এ একেই মান লব। যিহেতু $\cot x$, $\tan x$ অৰ অন্যোন্যক, ইয়াৰ মানো π অন্তৰালৰ পিছত একেই হ'ব। ত্ৰিকোণমিতীয় ফলনৰ এইখিনি ধাৰণাৰ ভিত্তিত, আমি এই ফলনবোৰৰ মোটামুটি লেখ আঁকিব পাৰোঁ। এই ফলন সমূহৰ লেখ ওপৰত দিয়া হৈছে।

উদাহৰণ 6 যদি $\cos x = -\dfrac{3}{5}$ আৰু x তৃতীয় চোকত থাকে, তেন্তে আন পাঁচটা ত্ৰিকোণমিতীয় ফলন উলিওৱাঁ।

সমাধান যিহেতু $\cos x = -\dfrac{3}{5}$, গতিকে $\sec x = -\dfrac{5}{3}$

এতিয়া $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

অৰ্থাৎ $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

বা $\sin^2 x = 1 - \dfrac{9}{25} = \dfrac{16}{25}$

গতিকে $\sin x = \pm\dfrac{4}{5}$

যিহেতু x তৃতীয় চোকত আছে, $\sin x$ ঋণাত্মক। গতিকে

$$\sin x = -\frac{4}{5}$$

ইয়াৰপৰা

$$\operatorname{cosec} x = -\frac{5}{4}$$

আকৌ

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{4}{3} \text{ আৰু } \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{3}{4}$$

উদাহৰণ 7 যদি $\cot x = -\dfrac{5}{12}$ আৰু x দ্বিতীয় চোকত থাকে, তেন্তে আন পাঁচটা ত্ৰিকোণমিতীয় ফলন উলিওৱাঁ।

সমাধান যিহেতু $\cot x = -\dfrac{5}{12}$, গতিকে $\tan x = -\dfrac{12}{5}$

এতিয়া $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x = 1 + \dfrac{144}{25} = \dfrac{169}{25}$

গতিকে $\sec x = \pm\dfrac{13}{5}$

যিহেতু x দ্বিতীয় চোকত আছে, $\sec x$ ঋণাত্মক।

গতিকে

$$\sec x = -\frac{13}{5}$$

ইয়াৰপৰা

$$\cos x = -\frac{5}{13}$$

আকৌ

$$\sin x = \tan x \cos x = \left(-\frac{12}{5}\right) \times \left(-\frac{5}{13}\right) = \frac{12}{13}$$

আৰু $$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} = \frac{13}{12}$$

উদাহৰণ 8 $\sin \frac{31\pi}{3}$ ৰ মান উলিওৱাঁ।

সমাধান আমি জানো যে 2π অন্তৰালৰ পিছত $\sin x$ এ একেই মান লয়। গতিকে

$$\sin\frac{31\pi}{3} = \sin\left(10\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

উদাহৰণ 9 $\cos(-1710^\circ)$ ৰ মান উলিওৱাঁ।

সমাধান আমি জানো যে 2π বা 360^0 অন্তৰালত $\cos x$ এ একেই মান লয়।

গতিকে, $\cos(-1710^\circ) = \cos(-1710^\circ + 5 \times 360^\circ)$

$$= \cos(-1710^\circ + 1800^\circ) = \cos 90^\circ = 0$$

অনুশীলনী 3.2

1 নম্বৰৰপৰা 5 নম্বৰলৈ প্ৰতিটোৰ বাবে আন পাঁচটা ত্ৰিকোণমিতীয় ফলন উলিওৱাঁ।

1. $\cos x = -\frac{1}{2}, x$ তৃতীয় চোকত আছে।
2. $\sin x = \frac{3}{5}, x$ দ্বিতীয় চোকত আছে।
3. $\cot x = \frac{3}{4}, x$ তৃতীয় চোকত আছে।
4. $\sec x = \frac{13}{5}, x$ চতুৰ্থ চোকত আছে।
5. $\tan x = -\frac{5}{12}, x$ দ্বিতীয় চোকত আছে।

6 নম্বৰৰপৰা 10 নম্বৰলৈ ত্ৰিকোণমিতীয় ফলনবোৰৰ মান উলিওৱাঁ।

6. $\sin 765^\circ$
7. $\operatorname{cosec}(-1410^\circ)$
8. $\tan\frac{19\pi}{3}$
9. $\sin(-\frac{11\pi}{3})$
10. $\cot(-\frac{15\pi}{4})$

3.4 দুটা কোণৰ যোগফল আৰু অন্তৰফলৰ ত্রিকোণমিতীয় ফলন (Trigonometric Functions of Sum and Difference of Two Angles)

এই অনুচ্ছেদত আমি দুটা সংখ্যাৰ (কোণৰ) যোগফল আৰু অন্তৰফলৰ ত্রিকোণমিতীয় ফলন সম্বন্ধে আলোচনা কৰিম। লগতে আনুষংগিক ফল কিছুমানো উলিয়াম। প্রাথমিক ফলবোৰক ত্রিকোণমিতীয় অভেদ (trigonometric identities) বুলি কোৱা হয়।

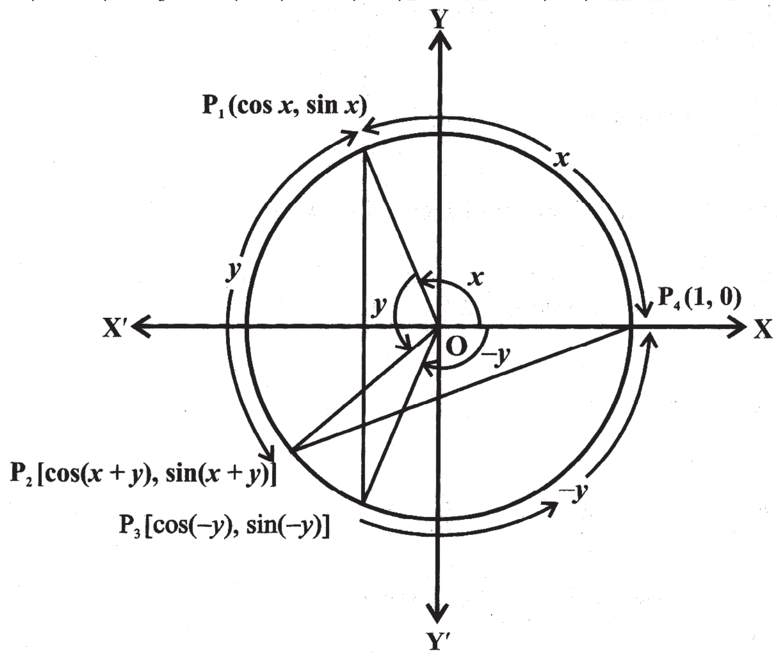
আমি দেখিছোঁ যে

1. $\sin(-x) = -\sin x$
2. $\cos(-x) = \cos x$

এতিয়া আমি আন কিছুমান ফল প্ৰমাণ কৰিম।

3. $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

একক বৃত্তটো লোৱা হ'ল, ইয়াৰ কেন্দ্ৰ মূল বিন্দু । ধৰা হ'ল P_4OP_1 কোণটো x আৰু P_1OP_2 কোণটো y । গতিকে P_4OP_2 কোণটো $y + x$ । আকৌ, ধৰা হ'ল P_4OP_3 কোণটো $(-y)$ ।
গতিকে P_1, P_2, P_3, P_4 বিন্দু চাৰিটাৰ স্থানাংক হ'ল $P_1(\cos x,\ \sin x)$,
$P_2\ [\cos(x+y),\ \sin(x+y)]$, $P_3\ [\cos(-y),\ \sin(-y)]$ আৰু $P_4(1,0)$ (চিত্ৰ 3.14)



চিত্ৰ 3.14

P_1OP_3 আৰু P_2OP_4 ত্রিভুজ দুটা লোৱা হ'ল। ত্রিভুজ দুটা সৰ্বাংগসম (কিয় ?)। গতিকে P_1P_3 আৰু P_2P_4 সমান। দূৰত্ব-সূত্ৰৰ সহায়ত আমি পাওঁ

$$P_1P_3^2 = [\cos x - \cos(-y)]^2 + [\sin x - \sin(-y)]^2$$
$$= (\cos x - \cos y)^2 + (\sin x + \sin y)^2$$
$$= \cos^2 x + \cos^2 y - 2\cos x \cos y + \sin^2 x + \sin^2 y + 2\sin x \sin y$$
$$= 2 - 2(\cos x \cos y - \sin x \sin y)$$ (কিয় ?)

আকৌ, $P_2P_4^2 = [1 - \cos(x+y)]^2 + [0 - \sin(x+y)]^2$
$$= 1 - 2\cos(x+y) + \cos^2(x+y) + \sin^2(x+y)$$
$$= 2 - 2\cos(x+y)$$

যিহেতু, $P_1P_3 = P_2P_4$, গতিকে $P_1P_3^2 = P_2P_4^2$

সেয়েহে, $2 - 2(\cos x \cos y - \sin x \sin y) = 2 - 2\cos(x+y)$

গতিকে $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

4. $\mathbf{cos}(x-y) = \mathbf{cos}x\ \mathbf{cos}y + \mathbf{sin}x\mathbf{sin}y$

অভেদ 3 ত y ৰ সলনি $-y$ বহুৱাই পাওঁ

$$\cos(x + (-y)) = \cos x \cos(-y) - \sin x \sin(-y)$$

বা $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

5. $\mathbf{cos}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \mathbf{sin}x$

অভেদ 4 অত x অৰ ঠাইত $\frac{\pi}{2}$ আৰু y ৰ ঠাইত x বহুৱাই আমি পাওঁ

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos x + \sin\frac{\pi}{2}\sin x = \sin x$$

6. $\mathbf{sin}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \mathbf{cos}x$

অভেদ 5 অৰ সহায়ত আমি পাওঁ

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] = \cos x$$

7. $\mathbf{sin}(x+y) = \mathbf{sin}x\ \mathbf{cos}y + \mathbf{cos}x\ \mathbf{sin}y$

আমি

$$\sin(x+y) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (x+y)\right)$$
$$= \cos\left((\frac{\pi}{2} - x) - y\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos y+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin y$$

$$= \sin x\cos y+\cos x\sin y$$

8. $\mathbf{sin}(x-y)=\mathbf{sin}x\ \mathbf{cos}y-\mathbf{cos}x\ \mathbf{sin}y$

অভেদ 7 অত y ৰ সলনি $-y$ বহুৱাই আমি ফলটো পাম।

9. অভেদ 3 , 4,7 আৰু 8 অত x আৰু y ৰ যথাযথ মান বহুৱাই তলৰ ফলবোৰ পোৱা যাব।

$\cos(\frac{\pi}{2}+x)=-\sin x$ $\qquad$ $\sin(\frac{\pi}{2}+x)=\cos x$

$\cos(\pi-x)=-\cos x$ $\qquad$ $\sin(\pi-x)=\sin x$

$\cos(\pi+x)=-\cos x$ $\qquad$ $\sin(\pi+x)=-\sin x$

$\cos(2\pi-x)=\cos x$ $\qquad$ $\sin(2\pi-x)=-\sin x$

$\sin x$ আৰু $\cos x$ অৰ ফলবোৰৰপৰা $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$ আৰু $\operatorname{cosec} x$ অৰ বাবে একে ধৰণৰ ফল পোৱা যাব।

10. **যদি x, y আৰু $(x+y)$ কোণ কেইটাৰ কোনোটোৱে $\frac{\pi}{1}$ ৰ অযুগ্ম গুণিতক নহয়, তেনেহ'লে**

$$\mathbf{tan(x+y)=\frac{tanx+tany}{1-tanx\ tan\ y}}$$

যিহেতু x, y আৰু $(x+y)$ ৰ কোনোটোৱেই $\frac{\pi}{1}$ ৰ অযুগ্ম গুণিতক নহয়, সেয়ে $\cos x$, $\cos y$, $\cos(x+y)$ অশূন্য। এতিয়া

$$\tan(x+y)=\frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}=\frac{\sin x\cos y+\cos x\sin y}{\cos x\cos y-\sin x\sin y}$$

লৱ আৰু হৰক $\cos x\cos y$ ৰে হৰণ কৰি আমি পাওঁ

$$\tan(x+y)=\frac{\frac{\sin x\cos y}{\cos x\cos y}+\frac{\cos x\sin y}{\cos x\cos y}}{\frac{\cos x\cos y}{\cos x\cos y}-\frac{\sin x\sin y}{\cos x\cos y}}$$

$$=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}$$

11. $\mathbf{tan}(x-y)=\dfrac{\mathbf{tan}x-\mathbf{tan}y}{1+\mathbf{tan}x\ \mathbf{tan}y}$

অভেদ 10 অত y ৰ ঠাইত $-y$ বহুৱাই আমি পাওঁ

$$\tan(x-y)=\tan[x+(-y)]$$

$$=\frac{\tan x+\tan(-y)}{1-\tan x\tan(-y)}=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\ \tan y}$$

12. **যদি x, y আৰু $(x+y)$ কোণকেইটাৰ কোনোটোৱে π ৰ গুণিতক নহয়, তেনেহ'লে**

$$\cot(x+y)=\frac{\cot x\cot y-1}{\cot y+\cot x}$$

যিহেতু, x,y আৰু $(x+y)$ ৰ কোনোটেৱেই π ৰ গুণিতক নহয়, সেয়ে $\sin x$, $\sin y$ আৰু $\sin(x+y)$ অশূন্য। এতিয়া ,

$$\cot(x+y)=\frac{\cos(x+y)}{\sin(x+y)}=\frac{\cos x\cos y-\sin x\sin y}{\sin x\cos y+\cos x\sin y}$$

লব আৰু হৰক $\sin x\ \sin y$ ৰে হৰণ কৰি আমি পাওঁ

$$\cot(x+y)=\frac{\cot x\cot y-1}{\cot y+\cot x}$$

13. $$\boldsymbol{\cot(x-y)=\frac{\cot x\cot y+1}{\cot y-\cot x}}$$

অভেদ 12 অত y ৰ সলনি $-y$ বহুৱাই ফলটো পোৱা যাব।

14. $$\boldsymbol{\cos 2x=\cos^2x-\sin^2x=2\cos^2x-1=1-2\sin^2x=\frac{1-\tan^2x}{1+\tan^2x}}$$

আমি জানো যে

$$\cos\ (x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$$

y ৰ ঠাইত x বহুৱাই আমি পাওঁ

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$$

$$=\cos^2 x-(1-\cos^2 x)=2\cos^2 x-1$$

আকৌ, $$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$$

$$=1-\sin^2 x-\sin^2 x=1-2\ \sin^2 x$$

আকৌ $$\cos\ 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x+\sin^2 x}$$

লব আৰু হৰক $\cos^2 x$ এৰে হৰণ কৰি পাওঁ

$$\cos\ 2x=\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$$

15. $\mathbf{\sin 2x = 2\sin x \cos x = \dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}}$

আমি জানো যে

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

y ৰ ঠাইত x বহুৱাই আমি পালোঁ $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

আকৌ $$\sin 2x = \frac{2\sin x \cos x}{\cos^2 x + \sin^2 x}$$

সোঁপক্ষৰ প্ৰতিটো পদক $\cos^2 x$ এৰে হৰণ কৰি পাওঁ

$$\sin 2x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$$

16. $\mathbf{\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}}$

আমি জানো যে

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

y ৰ ঠাইত x বহুৱাই আমি পালোঁ

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

17. $\mathbf{\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x}$

$$\begin{aligned}
\sin 3x &= \sin(2x + x) \\
&= \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x \\
&= 2\sin x \cos x \cos x + (1 - 2\sin^2 x)\sin x \\
&= 2\sin x(1 - \sin^2 x) + \sin x - 2\sin^3 x \\
&= 2\sin x - 2\sin^3 x + \sin x - 2\sin^3 x \\
&= 3\sin x - 4\sin^3 x
\end{aligned}$$

18. $\mathbf{\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x}$

$$\begin{aligned}
\cos 3x &= \cos(2x + x) \\
&= \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x \\
&= (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\sin x \cos x \sin x \\
&= (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\cos x(1 - \cos^2 x) \\
&= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x \\
&= 4\cos^3 x - 3\cos x
\end{aligned}$$

19. $\mathbf{tan3}x = \dfrac{\mathbf{3tan}x - \mathbf{tan}^3 x}{\mathbf{1 - 3tan}^2 x}$

$\tan 3x = \tan(2x + x)$

$$= \frac{\tan 2x + \tan x}{1 - \tan 2x \tan x} = \frac{\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x} + \tan x}{1 - \dfrac{2\tan x . \tan x}{1 - \tan^2 x}}$$

$$= \frac{2\tan x + \tan x - \tan^3 x}{1 - \tan^2 x - 2\tan^2 x} = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$$

20. (i) $\cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$

(ii) $\cos x - \cos y = -2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$

(iii) $\sin x + \sin y = 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$

(iv) $\sin x - \sin y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$

আমি জানো যে

$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ ...(1)

আৰু $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$ ...(2)

(1) আৰু (2) যোগ কৰি আৰু বিয়োগ কৰি পাওঁ

$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x \cos y$ ...(3)

আৰু $\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2\sin x \sin y$ ...(4)

আকৌ $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ ...(5)

আৰু $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$ ...(6)

(5) আৰু (6) যোগ কৰি আৰু বিয়োগ কৰি পাওঁ

$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x \cos y$ ...(7)

$\sin(x+y) - \sin(x-y) = 2\cos x \sin y$ ...(8)

ধৰা হ'ল $\mathrm{w} + \mathrm{x} = \theta$ আৰু $x - y = \phi$ । গতিকে

$$x = \left(\frac{\theta+\phi}{2}\right) \text{ আৰু } y = \left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

(3), (4), (7) আৰু (8) ত x আৰু y ৰ মান বহুৱাই পাওঁ

$$\cos\theta+\cos\phi=2\cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

$$\cos\theta-\cos\phi=-2\sin\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

$$\sin\theta+\sin\phi=2\sin\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

$$\sin\theta-\sin\phi=2\cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

যিহেতু θ আৰু ϕ এ যিকোনো বাস্তৱ মান লব পাৰে, আমি θৰ ঠাইত x আৰু ϕ ৰ ঠাইত y বহুৱাব পাৰোঁ। গতিকে, আমি পাওঁ

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};\ \cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};\ \sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

মন্তব্য 20ৰ অন্তৰ্গত অভেদকেইটাৰ অংশ হিচাপে আমি তলৰ ফলকেইটা প্ৰমাণ কৰিব পাৰোঁ।

21. **(i)** $\mathbf{2\cos x\cos y=\cos(x+y)+\cos(x-y)}$

(ii) $\mathbf{-2\sin x\sin y=\cos(x+y)-\cos(x-y)}$

(iii) $\mathbf{2\sin x\cos y=\sin(x+y)+\sin(x-y)}$

(iv) $\mathbf{2\cos x\sin y=\sin(x+y)-\sin(x-y)}$

উদাহৰণ 10 প্ৰমাণ কৰাঁ যে

$$3\sin\frac{\pi}{6}\sec\frac{\pi}{3}-4\sin\frac{5\pi}{6}\cot\frac{\pi}{4}=1$$

সমাধান বাওঁপক্ষ $=3\sin\frac{\pi}{6}\sec\frac{\pi}{3}-4\sin\frac{5\pi}{6}\cot\frac{\pi}{4}$

$$=3\times\frac{1}{2}\times2-4\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\times1=3-4\sin\frac{\pi}{6}$$

$$=3-4\times\frac{1}{2}=1=\text{ সোঁপক্ষ}$$

উদাহৰণ 11 $\sin 15^\circ$ ৰ মান উলিওৱাঁ।

সমাধান $\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)$

$$=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

উদাহৰণ 12 $\tan\frac{13\pi}{12}$ ৰ মান উলিওৱাঁ।

সমাধান $\tan\frac{13\pi}{12} = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{12}\right) = \tan\frac{\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$

$$= \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\frac{\pi}{6}}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2 - \sqrt{3}$$

উদাহৰণ 13 প্ৰমাণ কৰাঁ যে

$$\frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)} = \frac{\tan x + \tan y}{\tan x - \tan y}$$

সমাধান বাওঁপক্ষ $= \frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\sin x \cos y - \cos x \sin y}$

সোঁপক্ষৰ লব আৰু হৰক $\cos x \cos y$ ৰে হৰণ কৰি পাওঁ

$$\frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)} = \frac{\tan x + \tan y}{\tan x - \tan y}$$

উদাহৰণ 14 দেখুওৱাঁ যে

$$\tan 3x \tan 2x \tan x = \tan 3x - \tan 2x - \tan x$$

সমাধান আমি জানো যে $3x = 2x + x$

গতিকে, $\tan 3x = \tan(2x + x)$

বা $\tan 3x = \frac{\tan 2x + \tan x}{1 - \tan 2x \tan x}$

বা $\tan 3x - \tan 3x \tan 2x \tan x = \tan 2x + \tan x$

বা $\tan 3x - \tan 2x - \tan x = \tan 3x \tan 2x \tan x$

বা $\tan 3x \tan 2x \tan x = \tan 3x - \tan 2x - \tan x$

উদাহৰণ 15 প্ৰমাণ কৰাঁ যে

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{2}\cos x$$

সমাধান 20 (i) অভেদটো ব্যৱহাৰ কৰি পাওঁ

বাওঁপক্ষ $= \cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

$$= 2\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}+x+\frac{\pi}{4}-x}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}+x-\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{2}\right)$$

$$= 2\cos\frac{\pi}{4}\cos x = 2\times\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = \sqrt{2}\cos x = \text{সোঁপক্ষ}$$

উদাহৰণ 16 প্ৰমাণ কৰা যে $\dfrac{\cos 7x+\cos 5x}{\sin 7x-\sin 5x}=\cot x$

সমাধান 20 (i) আৰু 20 (iv) অভেদ ব্যৱহাৰ কৰি আমি পাওঁ

$$\text{বাওঁপক্ষ} = \frac{2\cos\frac{7x+5x}{2}\cos\frac{7x-5x}{2}}{2\cos\frac{7x+5x}{2}\sin\frac{7x-5x}{2}} = \frac{\cos x}{\sin x}=\cot x=\text{সোঁপক্ষ}$$

উদাহৰণ 17 প্ৰমাণ কৰাঁ যে $\dfrac{\sin 5x-2\sin 3x+\sin x}{\cos 5x-\cos x}=\tan x$

সমাধান

$$\text{বাওঁপক্ষ} = \frac{\sin 5x-2\sin 3x+\sin x}{\cos 5x-\cos x}$$

$$= \frac{\sin 5x+\sin x-2\sin 3x}{\cos 5x-\cos x}$$

$$= \frac{2\sin 3x\cos 2x-2\sin 3x}{-2\sin 3x\ \sin 2x}$$

$$= \frac{\sin 3x(\cos 2x-1)}{-\sin 3x\sin 2x}$$

$$= \frac{1-\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{2\sin^2 x}{2\sin x\cos x} = \tan x = \text{সোঁপক্ষ}$$

অনুশীলনী 3.3

প্ৰমাণ কৰা যে

1. $\sin^2\frac{\pi}{6}+\cos^2\frac{\pi}{3}-\tan^2\frac{\pi}{4}=-\frac{1}{2}$

2. $2\sin^2\frac{\pi}{6}+\operatorname{cosec}^2\frac{7\pi}{6}\cos^2\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}$

3. $\cot^2\frac{\pi}{6}+\operatorname{cosec}\frac{5\pi}{6}+3\tan^2\frac{\pi}{6}=6$

4. $2\sin^2\frac{3\pi}{4}+2\cos^2\frac{\pi}{4}+2\sec^2\frac{\pi}{3}=10$

5. মান উলিওৱাঁ

(i) $\sin 75^{\circ}$ (ii) $\tan 15^{\circ}$

প্ৰমাণ কৰাঁ

6. $\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-y\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-y\right)=\sin(x+y)$

7. $\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=\left(\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\right)^2$

8. $\frac{\cos(\pi+x)\cos(-x)}{\sin(\pi-x)\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}=\cot^2 x$

9. $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\cos(2\pi+x)\left[\cot\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+\cot(2\pi+x)\right]=1$

10. $\sin(n+1)x\sin(n+2)x+\cos(n+1)x\cos(n+2)x=\cos x$

11. $\cos\left(\frac{3\pi}{4}+x\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)=-\sqrt{2}\sin x$

12. $\sin^2 6x-\sin^2 4x=\sin 2x\sin 10x$

13. $\cos^2 2x-\cos^2 6x=\sin 4x\sin 8x$

14. $\sin 2x+2\sin 4x+\sin 6x=4\cos^2 x\sin 4x$

15. $\cot 4x(\sin 5x+\sin 3x)=\cot x(\sin 5x-\sin 3x)$

16. $\frac{\cos 9x-\cos 5x}{\sin 17x-\sin 3x}=-\frac{\sin 2x}{\cos 10x}$

17. $\frac{\sin 5x+\sin 3x}{\cos 5x+\cos 3x}=\tan 4x$

18. $\frac{\sin x-\sin y}{\cos x+\cos y}=\tan\frac{x-y}{2}$

19. $\frac{\sin x+\sin 3x}{\cos x+\cos 3x}=\tan 2x$

20. $\frac{\sin x-\sin 3x}{\sin^2 x-\cos^2 x}=2\sin x$

21. $\frac{\cos 4x+\cos 3x+\cos 2x}{\sin 4x+\sin 3x+\sin 2x}=\cot 3x$

22. $\cot x \cot 2x - \cot 2x \cot 3x - \cot 3x \cot x = 1$

23. $\tan 4x = \dfrac{4\tan x(1-\tan^2 x)}{1-6\tan^2 x+\tan^4 x}$ 24. $\cos 4x = 1 - 8 \sin^2 x \cos^2 x$ÿ

25. $\cos 6x = 32 \cos^6 x - 48 \cos^4 x + 18 \cos^2 x - 1$

3.5 ত্ৰিকোণমিতীয় সমীকৰণ (Trigonometric Equations)

চলকৰ ত্ৰিকোণমিতীয় ফলনযুক্ত সমীকৰণক ত্ৰিকোণমিতীয় সমীকৰণ বোলে। এই অনুচ্ছেদত আমি এনে ধৰণৰ সমীকৰণৰ সমাধান উলিয়াবলৈ চেষ্টা কৰিম। আমি ইতিমধ্যে শিকিছোঁ যে 2π অন্তৰালৰ পিছত $\sin x$ আৰু $\cos x$ অৰ মানবোৰ একেই হয় আৰু π অন্তৰালৰ পিছত $\tan x$ অৰ মানবোৰ একে হয়। এটা ত্ৰিকোণমিতীয় সমীকৰণৰ যিবোৰ সমাধান $0 \le x < 2\pi$ অন্তৰালত থাকে তাক **মুখ্য সমাধান** (Principal Solutions) বোলে। এটা ত্ৰিকোণমিতীয় সমীকৰণৰ সকলো সমাধান দিব পৰা অখণ্ড সংখ্যা n যুক্ত ৰাশিক **সাধাৰণ সমাধান** (General Solutions) বোলে। অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতিটো আমি $\mathbf{Z}$ অৰদ্বাৰা বুজাম।

ত্ৰিকোণমিতীয় সমীকৰণ সমাধান কৰাত তলৰ উদাহৰণবোৰ সহায়ক হ'ব।

উদাহৰণ 18 $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ সমীকৰণৰ মুখ্য সমাধান উলিওৱাঁ।

সমাধান আমি জানো যে $\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ আৰু $\sin\dfrac{2\pi}{3} = \sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) = \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

গতিকে, মুখ্য সমাধান হ'ল $x = \dfrac{\pi}{3}$ আৰু $\dfrac{2\pi}{3}$

উদাহৰণ 19 $\tan x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ সমীকৰণৰ মুখ্য সমাধান উলিওৱাঁ।

সমাধান আমি জানো, যে $\tan\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ । এনেদৰে, $\tan\left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) = -\tan\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

আৰু $\tan\left(2\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) = -\tan\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

এনেদৰে, $\tan\dfrac{5\pi}{6} = \tan\dfrac{11\pi}{6} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

গতিকে, মুখ্য সমাধান হ'ল $\dfrac{5\pi}{6}$ আৰু $\dfrac{11\pi}{6}$

এতিয়া আমি ত্ৰিকোণমিতীয় সমীকৰণৰ সাধাৰণ সমাধান উলিয়াম। ইতিমধ্যে আমি দেখিছোঁ যে

$\sin x = 0$ ৰ পৰা $x = n\pi, n \in \mathbf{Z}$

$\cos x = 0$ ৰ পৰা $x = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}$ পোৱা যায়।

এতিয়া আমি অধোলিখিত ফলকেইটা প্ৰমাণ কৰিম।

উপপাদ্য 1 যি কোনো বাস্তৱ সংখ্যা x আৰু y ৰ বাবে

$\sin x = \sin y$ ৰ পৰা $x = n\pi + (-1)^n y, n \in \mathbf{Z}$ পোৱা যায়।

প্ৰমাণ যদি $\sin x = \sin y$,

তেনেহ'লে $\sin x - \sin y = 0$ বা $2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} = 0$

ইয়াৰ পৰা $\cos\frac{x+y}{2} = 0$ বা $\sin\frac{x-y}{2} = 0$

গতিকে $\frac{x+y}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ বা $\frac{x-y}{2} = n\pi, n \in \mathbf{Z}$

অৰ্থাৎ $x = (2n+1)\pi - y$ বা $x = 2n\pi + y, n \in \mathbf{Z}$

সেয়ে $x = (2n+1)\pi + (-1)^{2n+1} y$ বা $x = 2n\pi + (-1)^{2n} y, n \in \mathbf{Z}$

এই দুয়োটা ফল একেলগে কৰি আমি পাওঁ

$$x = n\pi + (-1)^n y,\ n \in \mathbf{Z}$$

উপপাদ্য 2 যি কোনো বাস্তৱ সংখ্যা x আৰু y ৰ বাবে, $\cos x = \cos y$ ৰ পৰা $x = 2n\pi \pm y$ পোৱা যায়, $n \in \mathbf{Z}$।

প্ৰমাণ যদি $\cos x = \cos y$, তেনেহ'লে

$\cos x - \cos y = 0$ অৰ্থাৎ $-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} = 0$

এনেদৰে $\sin\frac{x+y}{2} = 0$ বা $\sin\frac{x-y}{2} = 0$

গতিকে $\frac{x+y}{2} = n\pi$ বা $\frac{x-y}{2} = n\pi,\ n \in \mathbf{Z}$

অৰ্থাৎ $x = 2n\pi - y$ বা $x = 2n\pi + y, n \in \mathbf{Z}$

গতিকে $x = 2n\pi \pm y,\quad n \in \mathbf{Z}.$

উপপাদ্য 3 যদি x আৰু y, $\frac{\pi}{2}$ ৰ অযুগ্ম গুণিতক নহয়, তেনেহ'লে

$\tan x = \tan y$ ৰ পৰা $x = n\pi + y,\quad n \in \mathbf{Z}$ পোৱা যায়।

প্ৰমাণ যদি $\tan x = \tan y$, তেনেহ'লে $\tan x - \tan y = 0$

বা $\frac{\sin x\cos y - \cos x\sin y}{\cos x\cos y} = 0$

ইয়াৰপৰা $\sin(x-y) = 0$ (কিয়?)

গতিকে $x - y = n\pi$ অৰ্থাৎ $x = n\pi + y, n \in \mathbf{Z}$

উদাহৰণ 20 $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ৰ সমাধান উলিওৱাঁ।

সমাধান $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\sin\frac{\pi}{3} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{4\pi}{3}$

সেয়ে $\sin x = \sin\frac{4\pi}{3}$ । ইয়াৰ পৰা

$$x = n\pi + (-1)^n \frac{4\pi}{3}, \quad n \in Z$$

> **টোকা** $\frac{3\pi}{2}$ হ'ল x অৰ অন্যতম মান যাৰ বাবে $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. x অৰ অন্য মানো ল'ব পাৰি যাৰ বাবে $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. সমাধানবোৰ একেই হ'ব, যদিও দেখাত বেলেগ যেন লাগিব পাৰে।

উদাহৰণ 21 সমাধান কৰাঁ $\cos x = \frac{1}{2}$

সমাধান $\cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$

গতিকে $x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in \mathbf{Z}$

উদাহৰণ 22 সমাধান কৰাঁ $\tan 2x = -\cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

সমাধান $\tan 2x = -\cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} + x + \frac{\pi}{3}\right)$

বা $\tan 2x = \tan\left(x + \frac{5\pi}{6}\right)$

গতিকে $2x = n\pi + x + \frac{5\pi}{6}, \quad n \in \mathbf{Z}$

বা $x = n\pi + \frac{5\pi}{6}, n \in \mathbf{Z}$

উদাহৰণ 23 সমাধান কৰাঁ $\sin 2x - \sin 4x + \sin 6x = 0$

সমাধান সমীকৰণটো এনেদৰে লিখিব পাৰি

$$\sin 6x + \sin 2x - \sin 4x = 0$$

বা $2\sin 4x \cos 2x - \sin 4x = 0$

অৰ্থাৎ $\sin 4x(2\cos 2x - 1) = 0$

গতিকে $\sin 4x = 0$ বা $\cos 2x = \frac{1}{2}$

অৰ্থাৎ $\sin 4x = 0$ বা $\cos 2x = \cos\frac{\pi}{3}$

গতিকে $4x = n\pi$ বা $2x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$

অৰ্থাৎ $x = \frac{n\pi}{4}$ বা $x = n\pi \pm \frac{\pi}{6}, n \in \mathbf{Z}$

উদাহৰণ 24 সমাধান কৰাঁ $2\cos^2 x + 3\sin x = 0$

সমাধান সমীকৰণটো এনেদৰে লিখিব পাৰি

$$2(1 - \sin^2 x) + 3\sin x = 0$$

বা $2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$

বা $(2\sin x + 1)(\sin x - 2) = 0$

সেয়ে $\sin x = -\frac{0}{1}$ বা $\sin x = 2$

কিন্তু $\sin x = 2$ সম্ভৱ নহয় (কিয়?)

গতিকে $\sin x = -\frac{1}{2} = \sin\frac{7\pi}{6}$

সেয়ে সমাধান হ'ল

$$x = n\pi + (-1)^n \frac{7\pi}{6}, \quad n \in \mathbf{Z}$$

অনুশীলনী 3.4

তলৰ সমীকৰণবোৰৰ মুখ্য আৰু সাধাৰণ সমাধান উলিওৱাঁ।

1. $\tan x = \sqrt{3}$
2. $\sec x = 2$
3. $\cot x = -\sqrt{3}$
4. $\operatorname{cosec} x = -2$

তলৰ প্ৰতিটো সমীকৰণৰ বাবে সাধাৰণ সমাধান উলিওৱাঁ।

5. $\cos 4x = \cos 2x$
6. $\cos 3x + \cos x - \cos 2x = 0$
7. $\sin 2x + \cos x = 0$
8. $\sec^2 2x = 1 - \tan 2x$
9. $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0$

বিবিধ উদাহৰণ

উদাহৰণ 25 যদি $\sin x=\frac{3}{5}, \cos y=-\frac{12}{13}$ আৰু x, y উভয়ে দ্বিতীয় চোকত থাকে, $\sin(x+y)$ ৰ মান উলিওৱাঁ।

সমাধান আমি জানো যে

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y \qquad \ldots(1)$$

এতিয়া $\cos^2 x=1-\sin^2 x=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$

গতিকে $\cos x=\pm\frac{4}{5}$

যিহেতু x দ্বিতীয় চোকত আছে, $\cos x$ ঋণাত্মক।

গতিকে $\cos x=-\frac{4}{5}$

এতিয়া $\sin^2 y=1-\cos^2 y=1-\frac{144}{169}=\frac{25}{169}$

অৰ্থাৎ $\sin y=\pm\frac{5}{13}$

যিহেতু y দ্বিতীয় চোকত আছে, সেয়ে $\sin y$ ধনাত্মক। গতিকে, $\sin y=\frac{5}{13}$. $\sin x, \sin y, \cos x$ আৰু $\cos y$ ৰ মান (1) ত বহুৱাই, আমি পালোঁ

$$\sin(x+y)=\frac{3}{5}\times\left(-\frac{12}{13}\right)+\left(-\frac{4}{5}\right)\times\frac{5}{13}=-\frac{36}{65}-\frac{20}{65}=-\frac{56}{65}$$

উদাহৰণ 26 প্ৰমাণ কৰাঁ যে

$$\cos 2x\cos\frac{x}{2}-\cos 3x\cos\frac{9x}{2}=\sin 5x\sin\frac{5x}{2}$$

সমাধান

বাওঁপক্ষ $$=\frac{1}{2}\left[2\cos 2x\cos\frac{x}{2}-2\cos\frac{9x}{2}\cos 3x\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\cos\left(2x+\frac{x}{2}\right)+\cos\left(2x-\frac{x}{2}\right)-\cos\left(\frac{9x}{2}+3x\right)-\cos\left(\frac{9x}{2}-3x\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\frac{5x}{2} + \cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{15x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\frac{5x}{2} - \cos\frac{15x}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-2\sin\left\{\frac{\frac{5x}{2}+\frac{15x}{2}}{2}\right\}\sin\left\{\frac{\frac{5x}{2}-\frac{15x}{2}}{2}\right\}\right]$$

$$= -\sin 5x \sin\left(-\frac{5x}{2}\right) = \sin 5x \sin\frac{5x}{2} \quad = \text{সোঁপক্ষ}$$

উদাহৰণ 27 $\tan\frac{\pi}{8}$ ৰ মান উলিওৱাঁ।

সমাধান ধৰা হ'ল $x = \frac{\pi}{8}$ । গতিকে $2x = \frac{\pi}{4}$

এতিয়া $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

বা $\tan\frac{\pi}{4} = \frac{2\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan^2\frac{\pi}{8}}$

ধৰা হ'ল $y = \tan\frac{\pi}{8}$ । গতিকে $1 = \frac{2y}{1-y^2}$

বা $y^2 + 2y - 1 = 0$

গতিকে $y = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$

যিহেতু $\frac{\pi}{8}$ প্ৰথম চোকত আছে, $y = \tan\frac{\pi}{8}$ ধনাত্মক।

সেয়ে $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1.$

উদাহৰণ 28 যদি $\tan x = \frac{3}{4}, \pi < x < \frac{3\pi}{2}, \sin\frac{x}{2}, \cos\frac{x}{2}$ আৰু $\tan\frac{x}{2}$ ৰ মান উলিওৱাঁ।

সমাধন যিহেতু $\pi < x < \frac{3\pi}{2}, \cos x$ ঋণাত্মক

আকৌ $\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \frac{3\pi}{4}$

গতিকে, $\sin\frac{x}{2}$ ধনাত্মক আৰু $\cos\frac{x}{2}$ ঋণাত্মক।

এতিয়া $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16}$

গতিকে $\cos^2 x = \frac{16}{25}$ বা $\cos x = -\frac{4}{5}$ (কিয়?)

এতিয়া $2\sin^2\frac{x}{2} = 1 - \cos x = 1 + \frac{4}{5} = \frac{9}{5}$

গতিকে $\sin^2\frac{x}{2} = \frac{9}{10}$

বা $\sin\frac{x}{2} = \frac{3}{\sqrt{10}}$ (কিয়?)

আকৌ $2\cos^2\frac{x}{2} = 1 + \cos x = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$

গতিকে $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{10}$

বা $\cos\frac{x}{2} = -\frac{1}{\sqrt{10}}$ (কিয়?)

গতিকে $\tan\frac{x}{2} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \times \left(\frac{-\sqrt{10}}{1}\right) = -3$

উদাহৰণ 29 প্ৰমাণ কৰাঁ যে $\cos^2 x + \cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}$

সমাধান

$$\text{বাওঁপক্ষ} = \frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)}{2} + \frac{1+\cos\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[3 + \cos 2x + \cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[3 + \cos 2x + 2\cos 2x \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[3 + \cos 2x - 2\cos 2x \cos\frac{\pi}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{2}[3 + \cos 2x - \cos 2x] = \frac{3}{2} =$$ সোঁপক্ষ

তৃতীয় অধ্যায়ৰ বিবিধ অনুশীলনী

প্ৰমাণ কৰাঁ যে

1. $2\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{9\pi}{13} + \cos\frac{3\pi}{13} + \cos\frac{5\pi}{13} = 0$
2. $(\sin 3x + \sin x)\sin x + (\cos 3x - \cos x)\cos x = 0$
3. $(\cos x + \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2 = 4\cos^2\frac{x+y}{2}$
4. $(\cos x - \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2 = 4\sin^2\frac{x-y}{2}$
5. $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x = 4\cos x \cos 2x \sin 4x$
6. $\frac{(\sin 7x + \sin 5x) + (\sin 9x + \sin 3x)}{(\cos 7x + \cos 5x) + (\cos 9x + \cos 3x)} = \tan 6x$
7. $\sin 3x + \sin 2x - \sin x = 4\sin x \cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}$

তলৰ প্ৰত্যেক ক্ষেত্ৰতে $\sin\frac{x}{2}, \cos\frac{x}{2}$ আৰু $\tan\frac{x}{2}$ উলিওৱাঁ।

8. $\tan x = -\frac{4}{3}, x$ দ্বিতীয় চোকত আছে।
9. $\cos x = -\frac{1}{3}, x$ তৃতীয় চোকত আছে।
10. $\sin x = \frac{1}{4}, x$ দ্বিতীয় চোকত আছে।

সাৰাংশ

- এটা বৃত্তৰ ব্যাসাৰ্ধ r । যদি l দৈৰ্ঘ্যৰ এটা চাপে θ ৰেডিয়ান কোণ উৎপন্ন কৰে, তেনেহ'লে $l = r\theta$
- ৰেডিয়ান মাপ $= \frac{\pi}{180} \times$ ডিগ্ৰি মাপ
- ডিগ্ৰি মাপ $= \frac{180}{\pi} \times$ ৰেডিয়ান মাপ
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

- $1+\tan^2 x=\sec^2 x$
- $1+\cot^2 x=\operatorname{cosec}^2 x$
- $\cos(2n\pi+x)=\cos x$
- $\sin(2n\pi+x)=\sin x$
- $\sin(-x)=-\sin x$
- $\cos(-x)=\cos x$
- $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$
- $\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$
- $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$
- $\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$ $\quad\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$

  $\cos(\pi-x)=-\cos x$ $\quad\sin(\pi-x)=\sin x$

  $\cos(\pi+x)=-\cos x$ $\quad\sin(\pi+x)=-\sin x$

  $\cos(2\pi-x)=\cos x$ $\quad\sin(2\pi-x)=-\sin x$

- যদি x, y আৰু $(x\pm y)$ কোণকেইটাৰ কোনোটোৱে $\frac{\pi}{2}$ ৰ অযুগ্ম গুণিতক নহয়, তেনেহ'লে

  $$\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}$$

- $$\tan(x-y)=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y}$$

- যদি x, y আৰু $(x\pm y)$ কোণকেইটাৰ কোনোটোৱে π ৰ গুণিতক নহয়, তেনেহ'লে

  $$\cot(x+y)=\frac{\cot x\cot y-1}{\cot y+\cot x}$$

- $\cot(x-y)=\dfrac{\cot x\cot y+1}{\cot y-\cot x}$
- $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$
$$=\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$$
- $\sin 2x=2\sin x\cos x=\dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$
- $\tan 2x=\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$
- $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$
- $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$
- $\tan 3x=\dfrac{3\tan x-\tan^3 x}{1-3\tan^2 x}$
- (i) $\cos x+\cos y=2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$

  (ii) $\cos x-\cos y=-2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$

  (iii) $\sin x+\sin y=2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$

  (iv) $\sin x-\sin y=2\cos\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$
- (i) $2\cos x\cos y=\cos(x+y)+\cos(x-y)$

  (ii) $-2\sin x\sin y=\cos(x+y)-\cos(x-y)$

  (iii) $2\sin x\cos y=\sin(x+y)+\sin(x-y)$

  (iv) $2\cos x\sin y=\sin(x+y)-\sin(x-y)$
- $\sin x=0$ ৰ পৰা $x=n\pi$ পোৱা যায়, $n\in Z$
- $\cos x=0$ ৰ পৰা $x=(2n+1)\dfrac{\pi}{2}$ পোৱা যায়, $n\in Z$
- $\sin x=\sin y$ ৰ পৰা $x=n\pi+(-1)^n y$ পোৱা যায়, $n\in \mathbf{Z}$
- $\cos x=\cos y$ ৰ পৰা $x=2n\pi\pm y$ পোৱা যায়, $n\in \mathbf{Z}$
- $\tan x=\tan y$ ৰ পৰা $x=n\pi+y$ পোৱা যায়, $n\in \mathbf{Z}$

ঐতিহাসিক টোকা

ত্ৰিকোণমিতিৰ অধ্যয়ন পোনপ্ৰথমে ভাৰতবৰ্ষত আৰম্ভ হৈছিল। প্ৰাচীন ভাৰতীয় গণিতজ্ঞ আৰ্য্যভট (476), ব্ৰহ্মগুপ্ত (598), প্ৰথম ভাস্কৰ (600) আৰু দ্বিতীয় ভাস্কৰে (1114) দৰকাৰী ফল কিছুমান উলিয়াইছিল। এই সম্পৰ্কীয় জ্ঞান পোনতে ভাৰতবৰ্ষৰপৰা মধ্য-প্ৰাচ্যলৈ যায় আৰু তাৰ পৰা ইউৰোপলৈ যায়। গ্ৰীকসকলেও ত্ৰিকোণমিতি অধ্যয়ন কৰিবলৈ লৈছিল। কিন্তু তেওঁলোকৰ বিচাৰপদ্ধতি আছিল আহুকলীয়া। সেয়ে যেতিয়া ভাৰতীয় বিচাৰপদ্ধতি জনাজাত হৈ পৰিল, গোটেই পৃথিৱীয়ে এই পদ্ধতি গ্ৰহণ কৰিলে।

ভাৰতবৰ্ষত আধুনিক ত্ৰিকোণমিতীয় ফলনৰ আৰম্ভণি হিচাপে কোণৰ sine অৰ ধাৰণাৰ সূত্ৰপাত হয়। sine ফলনৰ অৱতাৰণাৰ ফলত সৃষ্ট সিদ্ধান্তসমূহ (সংস্কৃতত লিখা জ্যোতিৰ্বিজ্ঞানৰ গ্ৰন্থ) গণিতৰ ইতিহাসলৈ প্ৰধান অৱদান।

প্ৰথম ভাস্কৰে (আনুমানিক 600) 90° অতকৈ ডাঙৰ কোণৰ sine ফলনৰ মান উলিয়াবলৈ সূত্ৰ উলিয়াইছিল। যোড়শ শতিকাৰ **যুক্তিভাষা** (পৰ্য্যায়) নামৰ এখন মালয়ালম কিতাপত sin(A+B) ৰ প্ৰসাৰণৰ প্ৰমাণ আছে। দ্বিতীয় ভাস্কৰে 18°, 36°, 54°, 72° প্ৰভৃতিৰ sine বা cosine অৰ প্ৰকৃত মান উলিয়াইছিল।

জ্যোতিৰ্বিজ্ঞানী ছাৰ জন এফ ডব্লিউ হাৰ্ছেলে (Sir John F.W. Hersehel 1813) arc sin x, arc cos x ইত্যাদিৰ বাবে $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$ ইত্যাদি প্ৰতীকৰ পৰামৰ্শ দিয়ে। উচ্চতা আৰু দূৰত্বৰ সমস্যাৰ লগত থেলছৰ নাম (Thales, আনুমানিক 600 খ্ৰিষ্ট পূৰ্ব) জড়িত হৈ আছে। পিৰামিড আৰু নিৰ্দিষ্ট উচ্চতাৰ এডাল সহায়ক দণ্ডৰ ছাঁ জুখি আৰু $\frac{H}{S} = \frac{h}{s} = \tan$ (সূৰ্য্যৰ উন্নতি) অনুপাত তুলনা কৰি তেওঁ ইজিপ্তৰ পিৰামিডৰ উচ্চতা নিৰ্ণয় কৰিছিল বুলি কোৱা হয়। সদৃশ ত্ৰিভুজৰ বাহুৰ সমানুপাতিকতাৰ পৰা সাগৰৰ জাহাজ এখনৰ দূৰত্ব থেলছে উলিয়াইছিল বুলি জনা যায়। সদৃশতাৰ ধৰ্ম ব্যৱহাৰ কৰি উচ্চতা আৰু দূৰত্বৰ সমস্যা সমাধান প্ৰাচীন ভাৰতীয় গণিত-কৰ্মবোৰত পোৱা যায়।