

बहुपद व्यंजक और खंडों में विभाजन (POLYNOMIALS AND FACTORIZATION)

02

2.1 भूमिका

एक बगीचे में पौधों की 6 पंक्तियाँ हैं। प्रत्येक पंक्ति में 6 पौधे हैं। कुल पौधों की संख्या क्या होगी? यदि 'x' पौधे, 'x' पंक्तियों में लगाए जाएँ तो कुल पौधे $x \times x = x^2$ होंगे।

प्याज का दाम रु.10 प्रति किग्रा इन्द्र ने p किग्रा और राजू ने q किग्रा तथा हनीफ ने r किग्रा खरीदे तो प्रत्येक ने कितने पैसे दिए? रु.10p, रु.10q तथा रु.10r होंगे। बीजगणितीय सर्व समिकाओं का उपयोग किया जायेगा।

बीजगणितीय समीकरण ' s^2 ' वर्ग का क्षेत्रफल आयत का क्षेत्रफल ' lb ' घनाभ का आयतन ' lbh '



बीजगणितीय समीकरण $3xy, x^2+2x, x^3-x^2+4x+3, \pi r^2, ax+b$ बहुपदीय व्यंजक कहलाएंगे।
नोट : सभी बीजीय समीकरण (non-negative) ऋणात्मक पूर्णांक न हो तो उसे चर राशि के घातांक कहेंगे।

क्या आप निम्न बीजीय समीकरणों से बहुपदीय व्यंजक बता सकते हैं?

$$x^2, x^{\frac{1}{2}}+3, 2x^2-\frac{3}{x}+5; x^2+xy+y^2$$

$x^{\frac{1}{2}}+3$ यह बहुपदीय व्यंजक नहीं है क्योंकि पहला पद $x^{\frac{1}{2}}$ जिसमें घातांक (non-negative) (ऋणात्मक पूर्णांक नहीं हो) (अतः $\frac{1}{2}$) तथा $2x^2-\frac{3}{x}+5$ भी बहुपदीय व्यंजक नहीं है। क्योंकि दूसरे पद का $(3x^{-1})$ ऋणात्मक घातांक-1 है। अतः बीजीय समीकरण जिसमें चर राशि पर ऋणात्मक घातांक न हो तो उसे बहुपदीय व्यंजक कहेंगे।

विचार-विमर्श कीजिए



समीकरणों में से कौन से बहुपदी व्यंजक हैं और कौन से नहीं? कारण बताइए।

- (i) $4x^2 + 5x - 2$ (ii) $y^2 - 8$ (iii) 5 (iv) $2x^2 + \frac{3}{x} - 5$
 (v) $\sqrt{3x^2 + 5y}$ (vi) $\frac{1}{x+1}$ (vii) $\sqrt{x}$ (viii) $3xyz$

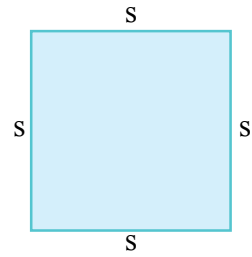
इस अध्याय में बहुपदियों का खण्डों में विभाजन, खण्ड प्रमेय और उसका बहुपदियों के खण्डों में विभाजन कैसे किया जाता है, इस बारे में जानेंगे।

2.2 बहुपद एक चरराशि वाले (Polynomials in one variable)

चरराशि का प्रतीक जो एक वास्तविक मूल्य द्वारा दर्शाया जाता है। उदा: $x, y, z \dots$ आदि।
 बीजीय समीकरण

अतः $2x, 3x, -x, \frac{3}{4}x \dots$ एक चरराशि x वाले बीजगणितीय पद हैं।
 ये समीकरण (स्थिर संख्या) $\times$ (चरराशि कुछ घातांक वाली) के रूप में हैं।
 यदि हमें वर्ग की परिमिति ज्ञात करनी हो तो सूत्र $P = 4s$ द्वारा करेंगे।

यहाँ '4' एक स्थिर राशि और 's' चर राशि है जो वर्ग की भुजा को बताती है। अलग अलग वर्गों की भुजाएँ भी अलग होंगी।



निम्न सारणी को देखिए :

वर्ग की भुजा	परिमिति
(s)	(4s)
4 cm	$P = 4 \times 4 = 16 \text{ cm}$
5 cm	$P = 4 \times 5 = 20 \text{ cm}$
10 cm	$P = 4 \times 10 = 40 \text{ cm}$

यहाँ स्थिर राशि '4' का मूल्य नहीं बदलेगा। चरराशि का मूल्य बदलता है।

यदि हम समीकरण जो (स्थिरराशि) $\times$ (चरराशि) के रूप में हो और हमें स्थिर राशि ज्ञात न हो तो उसे a, b, c रूप में बता सकते हैं।

तो साधारण समीकरण होगा $ax, by, cz, \dots$ आदि। जहाँ $a, b, c \dots$ लगातार स्थिरांक है। आप $x^2, x^2 + 2x + 1, x^3 + 3x^2 - 4x + 5$ बीजीय समीकरण से परिचित होंगे। यह सभी समीकरण एकपदीय बहुपद व्यंजक हैं।

इसे कीजिए -

- 'x' चरराशि वाले कोई दो बहुपद लिखिए।
- 'y' चरराशि वाले 3 बहुपद लिखिए।
- $2x^2 + 3xy + 5y^2$ ये बहुपद क्या एक ही चरराशि के हैं?
- ठोस आकृति वाले वस्तुओं के क्षेत्रफल, आयतन ज्ञात करने के सूत्र लिखिए। उसमें स्थिर पद तथा चरराशि ज्ञात कीजिए।



2.3 बहुपद व्यंजक का घात (Degree of Polynomial):

बहुपद के प्रत्येक पद में स्थिर पद जिसे पद का गुणांक सीमित संख्याओं की चरराशि अन्वयात्मक घात (called - coefficient of the term) बहुपद का घात चरराशियों के घातांकों का योग होगा। बहुपद का घात चरराशि का सबसे बड़ा घात होगा।

पदों में गुणांक और बहुपद का घात ज्ञात करना।

(i) $3x^2 + 7x + 5$

(ii) $3x^2y^2 + 4xy + 7$

बहुपद $3x^2 + 7x + 5$ समीकरण में $3x^2, 7x$ और 5 तीन पद है। बहुपद के प्रत्येक पद में गुणांक होगा। $3x^2 + 7x + 5$ में x^2 का गुणांक 3 है। $7x$ में 7 और 5 की चरराशि x^0 ($x^0=1$)

बहुपद का घात चरराशि की सबसे बड़ी घात है।

$3x^2$ पद में सबसे बड़ी घात है अतः $3x^2 + 7x + 5$ समीकरण की घात '2' है।

$3x^2y^3 + 4xy + 7$ बहुपद का गुणक और घात ज्ञात कर सकोगे।

x^2y^3 का गुणक 3, xy का गुणक 4 x^0y^0 का गुणक 7 है। चरराशि $3x^2y^3$ के घातों का योगफल $2 + 3 = 5$ जो सबसे बड़ा है अतः $3x^2y^3 + 4xy + 7$ बहुपद का घात 5 है।

स्थिर राशि के गुणक के बारे में सोचिए। स्थिर राशि में कोई चरराशि नहीं होती अतः उसे हम x^0 लिख सकते हैं। उदाहरण के लिए 5 के चरराशि का घातांक 0 है। इसे $5x^0$ भी लिखा जा सकता है।

किसी प्राकृतिक संख्या 'x' को एक से अधिक चरराशि के रूप में लिखा जा सकता है? x चरराशि वाले बहुपद जिसकी घात n हो।

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

जहाँ $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ स्थिरांक है $a_n \neq 0$.

यदि $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n = 0$ (सभी स्थिरांक 0), तो हमें शून्य बहुपद प्राप्त होगा जिसकी संख्या 0 है।

क्या आप शून्य का घात बता सकेंगे? इसे नहीं दर्शाया जा सकता है। चरराशि की घात 0 हो तो उसे गुणा के रूप में नहीं बताया जा सकता।

इसे हल कीजिए -



1. निम्न बहुपदों के घात बताइए।

(i) $7x^3 + 5x^2 + 2x - 6$

(ii) $7 - x + 3x^2$

(iii) $5p - \sqrt{3}$ (iv) 2

(v) $-5xy^2$

2. निम्न बहुपदों में x^2 के गुणक बताइए।

(i) $15 - 3x + 2x^2$ (ii) $1 - x^2$

(iii) $\pi x^2 - 3x + 5$ (iv) $\sqrt{2}x^2 + 5x - 1$

नीचे दी गई तालिका को पूरा कीजिए...

(i) घात के अनुसार बहुपदी

बहुपदी की घात	बहुपदी का नाम	उदाहरण
नहीं बताया	शून्य बहुपदी	0
0	स्थिर बहुपदी	$-12; 5; \frac{3}{4}$ etc
1	एकल बहुपदी	$x - 12; -7x + 8; ax + b$ etc.
2		
3	तृतीय घनाभ बहुपदी	$3x^3 - 2x^2 + 5x + 7$

अधिकतर 'n' घात वाले बहुपदी को n^{th} घात की बहुपदी कहते हैं।

(ii) बहुपदी के प्रकार पदों की संख्या के आधार पर

अशून्य पदों की संख्या	बहुपदीयों के नाम	उदाहरण	पद
1	एक पदी	$-3x$	$-3x$
2	द्वी पदी	$3x + 5$	$3x, 5$
3	त्री पदी	$2x^2 + 5x + 1$	
३ से अधिक	बहुपदी		$3x^3, 2x^2, -7x, 5$

सूचना : एक बहुपदी, बहुपदी व्यंजक हो सकता है। लेकिन एक बहुपदी व्यंजक बहुपदी होना आवश्यक नहीं है।

एक चरराशि वाले सरल रेखीय व्यंजक एक पदी या द्विपदी होता है।

उदा: $3x$ or $2x - 5$

समझो सोचो और करो -

उदाहरण सहित बताइए 3 घात वाले एक चरराशिवाले बहुपदी में कितने पद होंगे ?



यदि बहुपदी की चरराशि x हो, तो हम बहुपद को $p(x)$, $q(x)$ या $r(x)$ द्वारा दर्शा सकते हैं।

$$p(x) = 3x^2 + 2x + 1$$

$$q(x) = x^3 - 5x^2 + x - 7$$

$$r(y) = y^4 - 1$$

$$t(z) = z^2 + 5z + 3$$

कोशिश करो-

1. चरराशि x वाहे 2 पर लिखो।
2. p चरराशि वाहे 15 पद के बहुपदी किस प्रकार लिखोगे ?



किसी बहुपद में कुछ संख्या वाले पद होते हैं।

एक पदी बहुपदीयों के बारे में हमने चर्चा की है। एक से अधिक चरराशिवाले भी बहुपदी बताए जा सकते हैं। उदा - $x + y$, $x^2 + 2xy + y^2$, $x^2 - y^2$ ये बहुपद दो चार राशी वाले हैं। $x^2 + y^2 + z^2$, $x^3 + y^3 + z^3$ ये बहुपद 3 चर राशी वाले हैं।

अभ्यास 2.1



1. निम्न बहुपदीयो के घात बताओ।

- (i) $x^5 - x^4 + 3$ (ii) $x^2 + x - 5$ (iii) 5
 (iv) $3x^6 + 6y^3 - 7$ (v) $4 - y^2$ (vi) $5t - \sqrt{3}$

2. निम्न समीकरणों में कौनसे एक चरशिवाले बहुपदी है और नहीं भी कारण बताओ।

- (i) $3x^2 - 2x + 5$ (ii) $x^2 + \sqrt{2}$ (iii) $p^2 - 3p + q$
 (iv) $y + \frac{2}{y}, (y \neq 0)$ (v) $5\sqrt{x} + x\sqrt{5}, (x > 0)$ (vi) $x^{100} + y^{100}$

3. निम्न में x^3 के गुणक बताइए।

- (i) $x^3 + x + 1$ (ii) $2 - x^3 + x^2$ (iii) $\sqrt{2}x^3 + 5$ (iv) $2x^3 + 5$
 (v) $\frac{\pi}{2}x^3 + x$ (vi) $-\frac{2}{3}x^3$ (vii) $2x^2 + 5$ (vi) 4

4. निम्न बहुपदीयो में कौन-से एकपदी द्वि या त्रिपदी है पहचानिए।

- (i) $5x^2 + x - 7$ (ii) $x - x^3$ (iii) $x^2 + x + 4$ (iv) $x - 1$
 (v) $3p$ (vi) πr^2

5. निम्न कथन सत्य या असत्य बताइए और अपने कथन की पुष्टि भी कीजिए।

- (i) एक द्विपदी में दो पद होंगे।
 (ii) प्रत्येक बहुपदी द्विपदी होगा।
 (iii) एक द्विपदी में 3 घात है ?
 (iv) शून्य बहुपदी की घात शून्य है।
 (v) $x^2 + 2xy + y^2$ बहुपदी की घात 2 है।
 (vi) πr^2 एक पदी है।

6. एक पदी और त्रिपदी के 10 घात वाले उदाहरण बताओ।

2.4 शून्य बहुपदी

- बहुपद व्यंजक को देखिए $p(x) = x^2 + 5x + 4$.
 $p(x)$ का मूल्य क्या होगा, जब $x = 1$.
 $p(x)$ में x के स्थान पर 1 लगाने पर

$$\begin{aligned} p(1) &= (1)^2 + 5(1) + 4, \\ &= 1 + 5 + 4 = 10 \end{aligned}$$

$p(x)$ का मूल्य यदि $x = 1$ हो तो 10 होगा।

उसी प्रकार $p(x)$ का मूल्य $x = 0, x = -1$ से

$$\begin{aligned} p(0) &= (0)^2 + 5(0) + 4 \\ &= 0 + 0 + 4 \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(-1) &= (-1)^2 + 5(-1) + 4 \\ &= 1 - 5 + 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$p(-4)$ का मूल्य ज्ञात करो।

- और एक उदाहरण को देखिए

$$\begin{aligned} s(y) &= 4y^4 - 5y^3 - y^2 + 6 \\ s(1) &= 4(1)^4 - 5(1)^3 - (1)^2 + 6 \\ &= 4(1) - 5(1) - 1 + 6 \\ &= 4 - 5 - 1 + 6 \\ &= 10 - 6 \\ &= 4 \end{aligned}$$

$s(-1)$?

इन्हें कीजिए-

चरराशिका मूल्य देने पर बहुपदी का मूल्य ज्ञात करो।

- $p(x) = 4x^2 - 3x + 7$ यदि $x = 1$
- $q(y) = 2y^3 - 4y + \sqrt{11}$ यदि $y = 1$
- $r(t) = 4t^4 + 3t^3 - t^2 + 6$ यदि $t = p, t \in \mathbb{R}$
- $s(z) = z^3 - 1$ यदि $z = 1$
- $p(x) = 3x^2 + 5x - 7$ यदि $x = 1$
- $q(z) = 5z^3 - 4z + \sqrt{2}$ यदि $z = 2$

- बहुपदी $r(t) = t - 1$

$$r(1) = ? \quad r(1) = 1 - 1 = 0$$

$r(1) = 0$, शून्य बहुपदी $r(t)$ का मूल्य 1 है।



शून्य का बहुपदी $p(x)$ का मूल्य $p(x) = 0$.

इसे हम बहुपदी $p(x)$ का मूल कहेंगे।

$f(x) = x + 1$ का शून्य मूल्य क्या होगा?

$x + 1 = 0$, $x = -1$. यदि $f(x)$ एक बहुपदी है x का तो $f(x) = 0$, x का बहुपदीय समीकरण होगा। '–1' एक $f(x)$ का मूल है। '–1' $x + 1$ बहुपदी का शून्य मूल्य है। $x + 1 = 0$ बहुपदी का मूल है।

- 3 स्थिरांक वाले बहुपदी की कल्पना करो। उसका शून्य मूल्य क्या है? $3 = 3x^0$, $3x^0$ के लिए x का कोई वास्तविक मूल्य नहीं है। अतः स्थिर बहुपदीयों का शून्य नहीं होगा। परन्तु शून्य बहुपदी स्थिर बहुपदी होगा जिसमें कई शून्य होंगे।

कोशिश

निम्न बहुपदीयों के शून्य मूल्य ज्ञात करो।

1. $2x - 3$
2. $x^2 - 5x + 6$
3. $x + 5$



उदाहरण -1 $p(x) = x + 2$, $p(1)$, $p(2)$, $p(-1)$ और $p(-2)$ के शून्य मूल्य ज्ञात करो? यहाँ 1, 2, -1 और -2 $p(x)$ के शून्य हैं क्या?

हल : मान लो $p(x) = x + 2$

x के स्थान पर 1 लगाने पर

$$p(1) = 1 + 2 = 3$$

x के स्थान पर 2 लगाने पर

$$p(2) = 2 + 2 = 4$$

x के स्थान पर -1 लगाने पर

$$p(-1) = -1 + 2 = 1$$

x के स्थान पर -2 लगाने पर

$$p(-2) = -2 + 2 = 0$$

अतः $x + 2$ के बहुपदी के शून्य 1, 2, -1 नहीं है। अतः -2 उस बहुपदी का शून्य मूल्य होगा।

उदाहरण-2. $p(x) = 3x + 1$ बहुपदी का शून्य मूल्य ज्ञात करो।

हल : $p(x)$ का शून्य मूल्य समीकरण को हल करने पर-

$$p(x) = 0$$

$$\text{i.e. } 3x + 1 = 0$$

$$3x = -1$$

$$x = -\frac{1}{3}$$



$3x + 1$ का शून्य मूल्य $-\frac{1}{3}$ होगा।

उदाहरण-3. $2x - 1$ का शून्य मूल्य ज्ञात करो।

हल : $p(x) = 0$

$$2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$P\left(\frac{1}{2}\right) \text{ का मूल्य ज्ञात करने पर } P\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{2} - 1 = 1 - 1 = 0$$

यदि $p(x) = ax + b$, $a \neq 0$, (linear polynomial), रेखिक बहुपदी है। $p(x)$ का शून्य मूल्य।

$p(x)$ का शून्य मूल्य ज्ञात करने के लिए $p(x) = 0$ को हल करना होगा।

$$ax + b = 0, \quad a \neq 0$$

$$ax = -b$$

$$\text{i.e., } x = \frac{-b}{a}$$

$$x = \frac{-b}{a}$$

रेखिक बहुपद एक चर राशी के लिए एक ही शून्य होगा।

इन्हें कीजिए

रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :



रेखिक बहुपदी	बहुपदी का शून्य
$x + a$	$-a$
$x - a$	-----
$ax + b$	-----
$ax - b$	$\frac{b}{a}$

उदाहरण 4. $x^2 - 3x + 2$ बहुपदी का शून्य मूल्य 2 या 1 होगा? जाँच कीजिए।

हल: मान लो $p(x) = x^2 - 3x + 2$

x के स्थान पर 2 लगाने पर

$$\begin{aligned} p(2) &= (2)^2 - 3(2) + 2 \\ &= 4 - 6 + 2 = 0 \end{aligned}$$

x के स्थान पर 1 लगाने पर

$$\begin{aligned} p(1) &= (1)^2 - 3(1) + 2 \\ &= 1 - 3 + 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

अतः $x^2 - 3x + 2$ बहुपदी के लिए 2 और 1 शून्य मूल्य होंगे।

$x^2 - 3x + 2$ बहुपद की घात क्या है? क्या यह रैखिक बहुपदी है? नहीं? यह एक द्विपदी बहुपदी है अतः इसके दो शून्य मूल्य होंगे।-



उदाहरण-5. $x^2 + 2x - a$ का शून्य मूल्य 3 हो तो a का मूल्य ज्ञात करो।

हल : $p(x) = x^2 + 2x - a$

$$p(3) = 0.$$

$$x^2 + 2x - a = 0$$

$$(3)^2 + 2(3) - a = 0$$

$$9 + 6 - a = 0$$

$$15 - a = 0$$

$$-a = -15$$

$$\text{अतः } a = 15$$

$$a = 15$$

सोचिए चर्चा कीजिए और लिखिए ।

1. $x^2 + 1$ का शून्य नहीं है क्यों ?
2. बहुपदी की घात ' n ' हो तो शून्य बहुपदी की संख्याओं को ज्ञात करो।



अभ्यास - 2.2

1. $4x^2 - 5x + 3$ बहुपदी का मूल्य ज्ञात करो।

$$(i) x = 0$$

$$(ii) x = -1$$

$$(iii) x = 2$$

$$(iv) x = \frac{1}{2}$$



2. $p(0), p(1), p(2)$ निम्न बहुपदीयों के मूल्य ज्ञात करो।

- (i) $p(x) = x^2 - x + 1$ (ii) $p(y) = 2 + y + 2y^2 - y^3$
 (iii) $p(z) = z^3$ (iv) $p(t) = (t - 1)(t + 1)$
 (v) $p(x) = x^2 - 3x + 2$

3. x के मूल्य देने पर प्रत्येक का शून्य मूल्य ज्ञात करो।

- (i) $p(x) = 2x + 1; x = -\frac{1}{2}$ (ii) $p(x) = 5x - \pi; x = \frac{-3}{2}$
 (iii) $p(x) = x^2 - 1; x = \pm 1$ (iv) $p(x) = (x - 1)(x + 2); x = -1, -2$
 (v) $p(y) = y^2; y = 0$ (vi) $p(x) = ax + b; x = -\frac{b}{a}$
 (vii) $f(x) = 3x^2 - 1; x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$ (viii) $f(x) = 2x - 1, x = \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}$

4. प्रत्येक के लिए बहुपदी का शून्य मूल ज्ञात करो।

- (i) $f(x) = x + 2$ (ii) $f(x) = x - 2$ (iii) $f(x) = 2x + 3$
 (iv) $f(x) = 2x - 3$ (v) $f(x) = x^2$ (vi) $f(x) = px, p \neq 0$
 (vii) $f(x) = px + q, p \neq 0, p, q$ वास्तविक संख्याएँ हैं।

5. यदि बहुपदी का शून्य मूल 2 हो तो $p(x) = 2x^2 - 3x + 7a, a$ का मूल्य ज्ञात करो।

6. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + ax + b$ का शून्य मूल 0 हो तो a और b का मूल्य ज्ञात करो।

2.5 बहुपदियों का भाग (Division of Polynomials)

निम्न उदाहरण देखिए -

- (i) मान लो दो संख्याएँ 25 और 3 हैं। 25 को 3 से भाग देने पर भागफल 8 और शेष 1 होगा।

$$\text{Dividend} = (\text{Divisor} \times \text{Quotient}) + \text{Remainder}$$

$$\text{भाज्य} = (\text{भाजक} \times \text{भागफल}) + \text{शेष}$$

$$25 = (8 \times 3) + 1$$

$$20 \text{ को } 5 \text{ से भाग देने पर } 20 = (4 \times 5) + 0$$

यहाँ शेष शून्य है। 20 का खण्ड 5 है। 20 का खण्ड 4 है। 20 को 5 का गुणांक है।

जैसे हम एक संख्या को एक अशून्य संख्या से भाग देते हैं उसी प्रकार एक बहुपदी को दूसरे बहुपदी से भाग दे सकते हैं।

(ii) $3x^3 + x^2 + x$ बहुपदी को x से भाग देने पर-

$$(3x^3 + x^2 + x) \div x = \frac{3x^3}{x} + \frac{x^2}{x} + \frac{x}{x} \\ = 3x^2 + x + 1$$

प्रत्येक पद में x उभयनिष्ठ खण्ड हो तो $3x^3 + x^2 + x - x(3x^2 + x + 1)$

$(3x^3 + x^2 + x)$ के खण्ड होंगे।

(iii) उदाहरण $(2x^2 + x + 1) \div x, (x \neq 0)$

$$(2x^2 + x + 1) \div x = \frac{2x^2}{x} + \frac{x}{x} + \frac{1}{x} \\ = 2x + 1 + \frac{1}{x}$$

क्या यह एक बहुपदी है ?

$\frac{1}{x}$ एक ऋणात्मक पूर्ण घातांक ($\frac{1}{x} = x^{-1}$) है।

$\therefore 2x + 1 + \frac{1}{x}$ बहुपदी नहीं है।

$$(2x^2 + x + 1) = [x \times (2x + 1)] + 1$$

1 को अलग लेकर शेष बहुपदी को कोई दो बहुपदी के गुणा के रूप में लिख सकते हैं।

यहाँ $(2x + 1)$ एक भागफल और x भाज्य 1 शेष है। चूँकि शेष 0 नहीं है इसलिए, ' x ' $2x^2 + x + 1$ का खण्ड नहीं होगा।

$$\begin{array}{r} 2x+1 \\ x \overline{) 2x^2+x+1} \\ \underline{-2x^2} \\ x+1 \\ \underline{-x} \\ 1 \end{array}$$

इन्हें हल कीजिए :

- $3y^3 + 2y^2 + y$ को ' y ' से भाग दीजिए।
- $4p^2 + 2p + 2$ को ' $2p$ ' से भाग दीजिए।



उदाहरण-6. $3x^2 + x - 1$ को $x + 1$ से भाग दो।

हल : $p(x) = 3x^2 + x - 1$ $q(x) = x + 1$.

$p(x)$ को $q(x)$ से भाग देने पर

क्रम 1 : $\frac{3x^2}{x} = 3x$, भागफल का पहला पद

$$\text{क्रम 2 : } (x+1) 3x = 3x^2 + 3x$$

$$3x^2 + 3x \text{ से } 3x^2 + x \text{ घटाने पर } = -2x$$

$$\text{क्रम 3 : } \frac{-2x}{x} = -2, \text{ यह भागफल का दूसरा पद होगा।}$$

$$\text{क्रम 4 : } (x+1)(-2) = -2x - 2, \\ -2x - 1 \text{ से घटाने पर } = 1$$

$$\text{क्रम 5 : } \text{यहाँ पर हम एक देगे क्यों कि शेष 1 जो कि स्थिर पद है।}$$

$$\text{यहाँ पर भागफल } (3x-2) \text{ शेषफल } (+1) \text{ है।}$$

Note : भाग विधी तब पूरी होगी जब शेषफल 0 या शेषफल का घात भाजक के घात से कम हो।

$$3x^2 + x - 1 = (x+1)(3x-2) + 1$$

$$\text{भाजक} = (\text{भाज्य} \times \text{भागफल}) + \text{शेष}$$

$$\text{यदि हम } x \text{ को } -1 \text{ के स्थान पर लगाने पर}$$

$$p(x) = 3x^2 + x - 1 \\ = 3(+1) + (-1) - 1 = 1.$$

यह देखा गया है कि $p(-1)$ शेष '1' के समान होता है।

$$\text{तो } p(x) = 3x^2 + x - 1 \text{ को } (x+1) \text{ से भाग देने पर शेषफल जो } p(-1) \text{ के बराबर है } x+1. \\ x = -1.$$

$$\text{उदाहरण-7. } 2x^4 - 4x^3 - 3x - 1 \text{ को } (x-1)$$

$$\text{से भाग दो। शेषफल की जाँच कीजिए। (divisor) भाजक}$$

$$\text{के शून्य मूल्य से जाँच कीजिए की शेषफल की।}$$

$$\text{हल : मान लो } f(x) = 2x^4 - 4x^3 - 3x - 1$$

$$x \text{ को किससे गुणा करे कि } 2x^4 \text{ आ जाए।}$$

$$\frac{2x^4}{x} = 2x^3$$

$$(x-1)(2x^3) = 2x^4 - 2x^3$$

$$\text{पहले शेषफल का पहला पद } -2x^3$$

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 2x^2 - 2x - 5 \\ x-1 \overline{) 2x^4 - 4x^3 - 3x - 1} \\ \underline{2x^4 - 2x^3} \\ -2x^3 - 3x - 1 \\ \underline{-2x^3 + 2x^2} \\ + - 3x - 1 \\ \underline{-2x^2 - 3x - 1} \\ -2x^2 + 2x \\ \underline{+ - 2x} \\ -5x - 1 \\ \underline{-5x + 5} \\ -6 \end{array}$$

यहाँ भागफल $2x^3 - 2x^2 - 2x - 5$ तथा शेष -6 है।

यहाँ बहुपदी का शून्य $(x - 1)$ है।

$$\begin{aligned} x = 1 \text{ in } f(x), f(x) &= 2x^4 - 4x^3 - 3x - 1 \\ f(1) &= 2(1)^4 - 4(1)^3 - 3(1) - 1 \\ &= 2(1) - 4(1) - 3(1) - 1 \\ &= 2 - 4 - 3 - 1 \\ &= -6 \end{aligned}$$

बहुपदी $f(x)$ का शेषांक $\circ (x - 1)$ पर प्राप्त होगा।

शेषांक प्रमेय Remainder Theorem :

मान लीजिए $p(x)$ एक से अधिक या एक के बराबर घात वाला एक बहुपद है और मान लीजिए 'a' कोई वास्तविक संख्या है। यदि $p(x)$ को रेखिक बहुपद $(x - a)$, से भाग दिया जाए तो शेष $p(a)$ होता है।

उपपत्ति: मान लीजिए $p(x)$ एक या एक से अधिक वाला एक बहुपद है मान लो कि जब $p(x)$ को $x - a$ से भाग दिया जाए तो भागफल $q(x)$ होता है और शेषफल $r(x)$ होता है अर्थात् -

यदि $p(x)$ एक बहुपदीय फलन है जिसका घातांक ≥ 3 है। तथा यदि $r \in R$ तो सभी x के लिए बहुपदीय फलन $p(x)$ इस प्रकार रहता है।

$$p(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$$

$$\therefore p(x) = (x - a) \cdot q(x) + r(x) \quad \because g(x) = (x - a)$$

यदि p तथा g बहुपद व्यंजक हों तो p एक खण्ड होता है कि g का। यदि कोई बहुपद Q इस प्रकार है कि समीकरण $g = p \cdot Q$ एक इकाई हो। कभी-कभी $p(x)$ गुणांक के साधारण निरीक्षण से दिए गए व्यंजक के कुछ गुणन खण्ड प्राप्त होते हैं।

$$p(x) = (x - a) q(x) + K$$

$$\begin{aligned} \text{यदि } x = a, \text{ तो } p(a) &= (a - a) q(a) + K \\ &= 0 + K \\ &= K \end{aligned}$$

आइए हम इस परिणाम को एक अन्य उदाहरण पर लागू करें।

उदाहरण-8. $x^3 + 1$ को $(x + 1)$ से भाग देने पर प्राप्त शेष ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ $p(x) = x^3 + 1$

रैखिक बहुपद $x + 1$ का शून्यक -1 [$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$]

बहुपद में x के स्थान पर -1 रखने पर

$$\begin{aligned} p(-1) &= (-1)^3 + 1 \\ &= -1 + 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

शेषफल प्रमेय द्वारा $(x^3 + 1)$ को $(x + 1)$ से भाग देने पर -

क्या $x + 1$, $x^3 + 1$ का खण्ड है ?

उदाहरण-9. क्या $(x - 2)$ दिए गए बहुपदी का खण्ड होगा? बहुपद $x^3 - 2x^2 - 5x + 4$

हल: $p(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 4$

क्या $(x - 2)$ इस बहुपदी का खण्ड होगा ?

x को ज्ञात करने के लिए $(x - 2)$ $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$.

$$\begin{aligned} p(2) &= (2)^3 - 2(2)^2 - 5(2) + 4 \\ &= 8 - 2(4) - 10 + 4 \\ &= 8 - 8 - 10 + 4 \\ &= -6. \end{aligned}$$

शेष, शून्य न हो तो $(x - 2)$ दिए गए बहुपदी $x^3 - 2x^2 - 5x + 4$ का खण्ड नहीं होगा।

उदाहरण 10. $p(y) = 4y^3 + 4y^2 - y - 1$ $(2y + 1)$ का गुणांक होगा चेक कीजिए।

हल : $p(y)(2y + 1)$ का गुणांक हो तो $(2y + 1)$ $p(y)$ का पूर्ण विभाजित करेगा।

$$2y + 1 = 0 \text{ i.e., } y = -\frac{1}{2},$$

$p(y)$ में y के स्थान पर $\frac{-1}{2}$ लगाने पर

$$\begin{aligned} p\left(\frac{-1}{2}\right) &= 4\left(\frac{-1}{2}\right)^3 + 4\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - \left(\frac{-1}{2}\right) - 1 \\ &= 4\left(\frac{-1}{8}\right) + 4\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} - 1 \\ &= \frac{-1}{2} + 1 + \frac{1}{2} - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$



अतः $(2y + 1)p(y)$ का खण्ड होगा।

अर्थात् $(2y + 1)p(y)$ का गुणांक है।

उदाहरण-11. यदि बहुपद $ax^3 + 3x^2 - 13$ और $2x^3 - 5x + a(x - 2)$ से भाग देने पर समान शेष होगा तो a का मूल्य ज्ञात करो।

हल : मान लो $p(x) = ax^3 + 3x^2 - 13$ और $q(x) = 2x^3 - 5x + a$

$\therefore p(x)$ और $q(x)$ $x - 2$ से विभाजित करने पर समान शेषफल आता है।

$$\therefore p(2) = q(2)$$

$$a(2)^3 + 3(2)^2 - 13 = 2(2)^3 - 5(2) + a$$

$$8a + 12 - 13 = 16 - 10 + a$$

$$8a - 1 = a + 6$$

$$8a - a = 6 + 1$$

$$7a = 7$$

$$a = 1$$

अभ्यास- 2.3

1. $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ को निम्न से विभाजित करने पर शेष ज्ञात करो।

(i) $x + 1$

(ii) $x - \frac{1}{2}$

(iii) x

(iv) $x + \pi$

(v) $5 + 2x$



2. $x^3 - px^2 + 6x - p$ को $x - p$ से विभाजित करने पर शेष ज्ञात करो।
3. $2x^2 - 3x + 5$ को $2x - 3$ से विभाजित करने पर शेष ज्ञात करो? क्या यह पूर्ण रूप से विभाजित करता है? कारण बताओ ?
4. $9x^3 - 3x^2 + x - 5$ को $x - \frac{2}{3}$ से विभाजित करने पर शेष ज्ञात करो।
5. $2x^3 + ax^2 + 3x - 5$ और $x^3 + x^2 - 4x + a$ को $x - 2$ से विभाजित करने पर प्राप्त शेषांक समान हो तो a का मूल्य ज्ञात करो।
6. $x^3 + ax^2 + 5$ और $x^3 - 2x^2 + a$ को $(x + 2)$ से विभाजित करने पर समान शेष आता हो तो a का मूल्य ज्ञात करो।
7. $f(x) = x^4 - 3x^2 + 4$ को $g(x) = x - 2$ से विभाजित करने पर शेष ज्ञात करो और भाग पद्धति से उत्तर की जाँच करो।
8. $p(x) = x^3 - 6x^2 + 14x - 3$ को $g(x) = 1 - 2x$ से विभाजित करने पर शेष ज्ञात करो।
9. बहुपदी $2x^3 + 3x^2 + ax + b$ को $(x - 2)$ से विभाजित करने पर शेष 2 आता है $(x + 2)$ से विभाजित करने पर शेष -2 आता है तो a और b का मूल्य ज्ञात करो।

2.6 बहुपदी व्यंजकों का गुणन खंडन :

$q(x)$ एक बहुपद $p(x)$ को पूर्ण रूप से विभाजित करता है और शेष 0 है। इस प्रकार $q(x)p(x)$ का खण्ड होगा।

उदाहरण : यदि $p(x) = 4x^3 + 4x^2 - x - 1$ को $g(x) = 2x + 1$, से विभाजित करने पर शेष शून्य रहता है।
 $4x^3 + 4x^2 - x - 1 = q(x)(2x + 1) + 0$

$$p(x) = q(x)(2x + 1)$$

$$g(x) = 2x + 1 \text{ } p(x) \text{ का खण्ड है।}$$

शेषांक प्रमेय की सहायता से बहुपद के खण्ड ज्ञात कर सकते हैं।

गुणन खण्ड प्रमेय: यदि $p(x)$ की घात $n \geq 1$ 'a' कोई वास्तविक संख्या हो तो (i) $x - a$, $p(x)$ का खण्ड है। $p(a) = 0$ (ii) यदि $(x - a)$ बहुपद $p(x)$ का खण्ड हो तो $p(a) = 0$.
 साधारण उपपत्ति इस प्रमेय की हम देखेंगे।

उपपत्ति: शेषांक प्रमेय से

$$p(x) = (x - a) q(x) + p(a)$$

$$p(a) = 0 \text{ तो } p(x) = (x - a) q(x) + 0.$$

$$= (x - a) q(x)$$

यह दर्शाता है कि $p(x)$ का खण्ड $(x - a)$ है .

अतः सिद्ध है।

(ii) दूसरे केस केस में $(x - a)p(x)$, का खण्ड हो तो $p(x) = (x - a)q(x)$ कोई बहुपद $q(x)$ के लिए

$$\begin{aligned}\therefore p(a) &= (a - a)q(a) \\ &= 0\end{aligned}$$

$\therefore p(a) = 0$ यदि $(x - a)$ का खण्ड $p(x)$ हो।

उदाहरण-12. $x + 2$ व्यंजक $x^3 + 2x^2 + 3x + 6$ का खण्ड है या नहीं जाँच कीजिए।

हल: मान लो $p(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 6$

$$g(x) = x + 2$$

$$g(x) \text{ का शून्य मूल्य } = -2$$

$$\begin{aligned}p(-2) &= (-2)^3 + 2(-2)^2 + 3(-2) + 6 \\ &= -8 + 2(4) - 6 + 6 \\ &= -8 + 8 - 6 + 6 \\ &= 0\end{aligned}$$

गुणन खण्ड प्रमेय द्वारा $x + 2, x^3 + 2x^2 + 3x + 6$ का खण्ड होगा।

उदाहरण-13. यदि बहुपद $2x^3 - 9x^2 + x + K$ का खण्ड $2x - 3$ हों तो K का मूल्य ज्ञात करो।

हल: $(2x - 3)$ एक खण्ड है $p(x) = 2x^3 - 9x^2 + x + K$ का

$$\text{यदि } (2x - 3) = 0, x = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \text{तो } (2x - 3) \text{ का शून्य } \frac{3}{2}$$

$$\text{तो } (2x - 3)p(x) \text{ का खण्ड होगा } p\left(\frac{3}{2}\right) = 0$$

$$p(x) = 2x^3 - 9x^2 + x + K,$$

$$\Rightarrow p\left(\frac{3}{2}\right) = 2\left(\frac{3}{2}\right)^3 - 9\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} + K = 0$$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{27}{8}\right) - 9\left(\frac{9}{4}\right) + \frac{3}{2} + K = 0$$



$$\Rightarrow \left(\frac{27}{4} - \frac{81}{4} + \frac{3}{2} + K = 0 \right) \times 4$$

$$27 - 81 + 6 + 4K = 0$$

$$-48 + 4K = 0$$

$$4K = 48$$

$$K = 12$$

उदाहरण-14. $x^{10} - 1$ का खण्ड $(x - 1)$ है। और $x^{11} - 1$ का भी

हल : मान लो $p(x) = x^{10} - 1$ और $g(x) = x^{11} - 1$

$(x - 1)$ $p(x)$ और $g(x)$ का खण्ड हो तो $p(1) = 0$ $g(1) = 0$ होगा

$$p(x) = x^{10} - 1$$

$$g(x) = x^{11} - 1$$

$$p(1) = (1)^{10} - 1$$

$$g(1) = (1)^{11} - 1$$

$$= 1 - 1$$

$$= 1 - 1$$

$$= 0$$

$$= 0$$

कोशिश कीजिए



$x^n - 1$ का

खण्ड है $(x - 1)$

गुणन खण्ड प्रमेय द्वारा,

$p(x)$ और $g(x)$ का खण्ड $(x - 1)$ है।

एक द्वि बहुपदी $ax^2 + bx + c$ का खण्ड ज्ञात करना $a \neq 0$, a, b, c स्थिरांक है।

मान लो खण्ड $(px + q)$ और $(rx + s)$ है

तो $ax^2 + bx + c = (px + q)(rx + s)$

$$= prx^2 + (ps + qr)x + qs$$

x^2 , x और स्थिरांक के गुणको का तुलनात्मक अध्ययन करने पर-

$$a = pr$$

$$b = ps + qr$$

$$c = qs$$

b दो संख्याओं ps और qr का योग है।

$$(ps)(qr) = (pr)(qs) = ac$$

$ax^2 + bx + c$, का खण्ड करने के लिए b दो संख्याओं का योग और जिस गुणनफल $= ac$.

उदाहरण-15. $3x^2 + 11x + 6$ के गुणन खण्ड ज्ञाच कीजिए

हल : यदि p और q दो खण्ड होंगे तो है $p + q = 11$ और $pq = 3 \times 6 = 18$, तो हमारे खण्ड 18 के खण्ड होंगे

(1, 18), (2, 9), (3, 6) इनमें से 2 और 9 ऐसी संख्याएँ हैं $p + q = 11$

$$\begin{aligned} 3x^2 + 11x + 6 &= 3x^2 + 2x + 9x + 6 \\ &= x(3x + 2) + 3(3x + 2) \\ &= (3x + 2)(x + 3). \end{aligned}$$

इसे हल कीजिए:

खण्डों में विभाजन कीजिए -

1. $6x^2 + 19x + 15$

2. $10m^2 - 31m - 132$

3. $12x^2 + 11x + 2$



उदाहरण-16. $2x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 3x - 2$ $x^2 - 3x + 2$ से विभाजित है या नहीं।

गुणन खण्ड प्रमेय द्वारा इसे कैसे सिद्ध करेंगे?

हल: भाजक (divisor) एक रैखिक बहुपदी नहीं है यह द्वि बहुपदी (quadratic) है।

$$\begin{aligned} x^2 - 3x + 2 &= x^2 - 2x - x + 2 \\ &= x(x - 2) - 1(x - 2) \\ &= (x - 2)(x - 1). \end{aligned}$$

$2x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 3x - 2$ का खण्ड $x^2 - 3x + 2$ हो तो $(x - 2)$ और $(x - 1)$ भी $2x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 3x - 2$ के खण्ड होंगे।

$$\begin{aligned} \text{मान लो } p(x) &= 2x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 3x - 2 \\ p(2) &= 2(2)^4 - 6(2)^3 + 3(2)^2 + 3(2) - 2 \\ &= 2(16) - 6(8) + 3(4) + 6 - 2 \\ &= 32 - 48 + 12 + 6 - 2 \\ &= 50 - 50 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$p(2) = 0$, $(x - 2)$ एक $p(x)$ का खण्ड है

$$\begin{aligned} p(1) &= 2(1)^4 - 6(1)^3 + 3(1)^2 + 3(1) - 2 \\ &= 2(1) - 6(1) + 3(1) + 3 - 2 \\ &= 2 - 6 + 3 + 3 - 2 \\ &= 8 - 8 \\ &= 0 \end{aligned}$$



$p(1) = 0$, $(x - 1)$ $p(x)$ का खण्ड है

$(x - 2)$ और $(x - 1)$ $p(x)$ के खण्ड हो तो $x^2 - 3x + 2$ भी $p(x) = 2x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 3x - 2$ का खण्ड होगा।

उदाहरण-17. $x^3 - 23x^2 + 142x - 120$ का खण्डों में विभाजन कीजिए।

हल : $p(x) = x^3 - 23x^2 + 142x - 120$

$p(1) = 0$ (जाँच कीजिए)

$(x - 1)$ $p(x)$ का खण्ड है।

- $(x - y) \mid (x^n - y^n)$, सभी $n \in \mathbb{N}$ के लिए
- $(x + y) \mid (x^n - y^n)$, जहाँ n सम
- $(x + y) \mid (x^n + y^n)$, जहाँ n रुढ़ है
- $(x - y) \nmid (x^n + y^n)$, सभी $n \in \mathbb{N}$ के लिए

यदि हम $p(x)$ को $(x - 1)$ से विभाजित करने पर $x^2 - 22x + 120$.

दूसरी विधि

$$\begin{aligned} x^3 - 23x^2 + 142x - 120 &= x^3 - x^2 - 22x^2 + 22x + 120x - 120 \\ &= x^2(x - 1) - 22x(x - 1) + 120(x - 1) \quad (\text{क्यों?}) \\ &= (x - 1)(x^2 - 22x + 120) \end{aligned}$$

$x^2 - 22x + 120$ एक द्वि बहुपदी है।

$$\begin{aligned} x^2 - 22x + 120 &= x^2 - 12x - 10x + 120 \\ &= x(x - 12) - 10(x - 12) \\ &= (x - 10)(x - 12) \end{aligned}$$

$$x^3 - 23x^2 + 142x - 120 = (x - 1)(x - 10)(x - 12).$$

अभ्यास - 2.4



1. $(x + 1)$ किस बहुपदी का एक खण्ड होगा।

(i) $x^3 - x^2 - x + 1$

(ii) $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

(iii) $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1$

(iv) $x^3 - x^2 - (3 - \sqrt{3})x + \sqrt{3}$

2. गुणनखण्ड प्रमेय द्वारा बताओ कि $g(x)$ $f(x)$ का खण्ड है या नहीं।

(i) $f(x) = 5x^3 + x^2 - 5x - 1$, $g(x) = x + 1$

(ii) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, $g(x) = x + 1$

(iii) $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$, $g(x) = x - 2$

(iv) $f(x) = 3x^3 + x^2 - 20x + 12$, $g(x) = 3x - 2$

(v) $f(x) = 4x^3 + 20x^2 + 33x + 18$, $g(x) = 2x + 3$

3. $x^3 - 3x^2 - 10x + 24$ बहुपदी के खण्ड $(x - 2)$, $(x + 3)$ और $(x - 4)$ है ?

4. $x^3 - 6x^2 - 19x + 84$ बहुपदी के खण्ड $(x + 4)$, $(x - 3)$ और $(x - 7)$ है ?

5. यदि $px^2 + 5x + r$ के खण्ड $(x - 2)$ और $\left(x - \frac{1}{2}\right)$ हो तो बताओ $p = r$.

6. यदि $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ के खण्ड $(x^2 - 1)$ हो तो सिद्ध करो $a + c + e = b + d = 0$

7. खण्डों में विभाजित कीजिए। (i) $x^3 - 2x^2 - x + 2$ (ii) $x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

(iii) $x^3 + 13x^2 + 32x + 20$

(iv) $y^3 + y^2 - y - 1$

8. $ax^2 + bx + c$ और $bx^2 + ax + c$ का उभयनिष्ठ खण्ड $x + 1$ हो तो बताओ $c = 0$ तथा $a = b$ होगा।

9. यदि $x^2 - x - 6$ और $x^2 + 3x + 18$ का उभयनिष्ठ खण्ड $(x - a)$ हो तो a का मूल्य ज्ञात करो।

10. $y^3 - 2y^2 - 9y + 18$ का खण्ड $(y - 3)$ हो तो शेष 2 खण्ड ज्ञात करो।

2.7 बीजगणितीय सर्व समिकाएँ (Algebraic Identities) :

बीजगणितीय सर्व समिका एक बीजीय समीकरण होती है जो कि चरो के सभी मानो के लिए सत्य होती है।

समीकरण I : $(x + y)^2 \equiv x^2 + 2xy + y^2$

समीकरण II : $(x - y)^2 \equiv x^2 - 2xy + y^2$

सर्व समिका III : $(x + y)(x - y) \equiv x^2 - y^2$

सर्व समिका IV : $(x + a)(x + b) \equiv x^2 + (a + b)x + ab$.

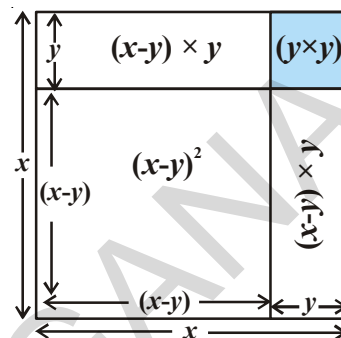
रेखा गणितिय उपपत्ति :

सर्व समिका $(x - y)^2$

क्रम-I एक x भुजा वाला वर्ग बनाओ

क्रम-II y लम्बाई x से धटाने पर

क्रम-III $(x - y)^2$
 $= x^2 - [(x - y)y + (x - y)y + y^2]$
 $= x^2 - xy + y^2 - xy + y^2 - y^2$
 $= x^2 - 2xy + y^2$



प्रयत्न कीजिए :

दूसरी सर्व समिकाओं के लिए रेखागणितिय चित्र बनाइए।

(i) $(x + y)^2 \equiv x^2 + 2xy + y^2$ (ii) $(x + y)(x - y) \equiv x^2 - y^2$

(iii) $(x + a)(x + b) \equiv x^2 + (a + b)x + ab$

इन्हें हल कीजिए :

सूत्रों की सहायता से गुणा कीजिए।

(i) $(x + 5)(x + 5)$ (ii) $(p - 3)(p + 3)$ (iii) $(y - 1)(y - 1)$

(iv) $(t + 2)(t + 4)$ (v) 102×98

उदाहरण-18. खण्डों में विभाजन कीजिए

(i) $x^2 + 5x + 4$ (ii) $9x^2 - 25$

(iii) $25a^2 + 40ab + 16b^2$ (iv) $49x^2 - 112xy + 64y^2$

हल:

(i) $x^2 + 5x + 4 = x^2 + (4 + 1)x + (4)(1)$

सर्वसमिका का तुलनात्मक अध्ययन करने पर $(x + a)(x + b) \equiv x^2 + (a + b)x + ab$
 $(x + 4)(x + 1).$

(ii) $9x^2 - 25 = (3x)^2 - (5)^2$

सर्वसमिका III का तुलनात्मक अध्ययन करने पर

$x^2 - y^2 \equiv (x + y)(x - y)$

$\therefore 9x^2 - 25 = (3x + 5)(3x - 5).$

$$(iii) 25a^2 + 40ab + 16b^2 = (5a)^2 + 2(5a)(4b) + (4b)^2$$

इस समीकरण को $x^2 + 2xy + y^2$ से तुलना

करने पर

$$x = 5a \text{ and } y = 4b$$

$$\text{सर्व समिका I, } (x + y)^2 \equiv x^2 + 2xy + y^2$$

$$25a^2 + 40ab + 16b^2 = (5a + 4b)^2$$

$$= (5a + 4b)(5a + 4b).$$

$$(iv) 49x^2 - 112xy + 64y^2$$

$$49x^2 = (7x)^2, \quad 64y^2 = (8y)^2$$

$$112xy = 2(7x)(8y)$$

सर्व समिका II से तुलना करने पर

$$(x - y)^2 \equiv x^2 - 2xy + y^2,$$

$$49x^2 - 112xy + 64y^2 = (7x)^2 - 2(7x)(8y) + (8y)^2$$

$$= (7x - 8y)^2$$

$$= (7x - 8y)(7x - 8y).$$



इन्हें हल कीजिए :

उचित सर्वसमिका का प्रयोग कर खण्डों में विभाजित कीजिए।

$$(i) 49a^2 + 70ab + 25b^2$$

$$(ii) \frac{9}{16}x^2 - \frac{y^2}{9}$$

$$(iii) t^2 - 2t + 1$$

$$(iv) x^2 + 3x + 2$$

अभी तक द्विपदी सर्वसमिकाओं को देखा। अब हम त्री पदी $x + y + z$ सर्व समिका को हल करेंगे।
 $(x + y + z)^2$ का परिकलन कीजिए।

$$\text{मान लो } x + y = t, \text{ तो } (x + y + z)^2 = (t + z)^2$$

$$= t^2 + 2tz + z^2$$

$$= (x + y)^2 + 2(x + y)z + z^2$$

$$= x^2 + 2xy + y^2 + 2xz + 2yz + z^2$$

पदों को क्रमागत लिखने पर $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$



दूसरी विधि :

$(x + y + z)^2$ का परिकलन करने पर

$$\begin{aligned} [(x + y) + z]^2 &= (x + y)^2 + 2(x + y)(z) + (z)^2 \\ &= x^2 + 2xy + y^2 + 2xz + 2yz + z^2 \quad [\text{सर्वसमिका (1) के द्वारा}] \\ &= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx \end{aligned}$$

$$\text{सर्वसमिका V : } (x + y + z)^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$$

उदाहरण-19. सर्व समिका की सहायता के विस्तार कीजिए $(2a + 3b + 5)^2$

हल : $(x + y + z)^2$ के साथ तुलनात्मक अध्ययन करने पर

$$x = 2a, \quad y = 3b \text{ और } z = 5$$

सर्व समिका V प्रयोग कर

$$\begin{aligned} (2a + 3b + 5)^2 &= (2a)^2 + (3b)^2 + (5)^2 + 2(2a)(3b) + 2(3b)(5) + 2(5)(2a) \\ &= 4a^2 + 9b^2 + 25 + 12ab + 30b + 20a. \end{aligned}$$

उदाहरण-20. $(5x - y + z)(5x - y + z)$ (गुणनफल ज्ञात कीजिए)

$$\begin{aligned} \text{हल : } (5x - y + z)(5x - y + z) &= (5x - y + z)^2 \\ &= [5x + (-y) + z]^2 \end{aligned}$$

$$(x + y + z)^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx,$$

$$\begin{aligned} (5x + (-y) + z)^2 &= (5x)^2 + (-y)^2 + (z)^2 + 2(5x)(-y) + 2(-y)(z) + 2(z)(5x) \\ &= 25x^2 + y^2 + z^2 - 10xy - 2yz + 10zx. \end{aligned}$$

उदाहरण-21. $4x^2 + 9y^2 + 25z^2 - 12xy - 30yz + 20zx$ का खण्डों में विभाजन कीजिए।

हल :

$$\begin{aligned} 4x^2 + 9y^2 + 25z^2 - 12xy - 30yz + 20zx \\ = [(2x)^2 + (-3y)^2 + (5z)^2 + 2(2x)(-3y) + 2(-3y)(5z) + 2(5z)(2x)] \end{aligned}$$

सर्व समिका V से तुलना करने पर

$$\begin{aligned}(x + y + z)^2 &\equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx \\ &= (2x - 3y + 5z)^2 \\ &= (2x - 3y + 5z)(2x - 3y + 5z).\end{aligned}$$

इन्हें हल कीजिए

- $(p + 2q + r)^2$ का विस्तार कीजिए
- $(4x - 2y - 3z)^2$ का विस्तार सर्वसमिका के प्रयोग द्वारा कीजिए।
- $4a^2 + b^2 + c^2 - 4ab + 2bc - 4ca$ सर्व समिका के प्रयोग द्वारा खण्डों में विभाजन कीजिए।

सर्व समिका I का प्रयोग कर $(x + y)^3$ को विस्तार कीजिए।

$$\begin{aligned}(x + y)^3 &= (x + y)^2 (x + y) \\ &= (x^2 + 2xy + y^2)(x + y) \\ &= x(x^2 + 2xy + y^2) + y(x^2 + 2xy + y^2) \\ &= x^3 + 2x^2y + xy^2 + x^2y + 2xy^2 + y^3 \\ &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \\ &= x^3 + 3xy(x + y) + y^3 \\ &= x^3 + y^3 + 3xy(x + y).\end{aligned}$$

सर्वसमिका VI : $(x + y)^3 \equiv x^3 + y^3 + 3xy(x + y).$

प्रयत्न कीजिए

बिना गुणा किए $(x - y)^3$ का मूल्य ज्ञात करो
गुणा करके जाँच कीजिए।

सर्वसमिका VII : $(x - y)^3 \equiv x^3 - y^3 - 3xy(x - y).$
 $\equiv x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

उदाहरण-22. निम्न का विस्तार कीजिए -

(i) $(2a + 3b)^3$

(ii) $(2p - 5)^3$

हल : दिए गए समीकरण को $(x + y)^3$ से तुलना करने पर $x = 2a$ $y = 3b$

$$\begin{aligned}(2a + 3b)^3 &= (2a)^3 + (3b)^3 + 3(2a)(3b)(2a + 3b) \\ &= 8a^3 + 27b^3 + 18ab(2a + 3b) \\ &= 8a^3 + 27b^3 + 36a^2b + 54ab^2 \\ &= 8a^3 + 36a^2b + 54ab^2 + 27b^3.\end{aligned}$$

(ii) दिए गए समीकरण को $(x - y)^3$ से तुलना करने पर $x = 2p$ तथा $y = 5$ होगा

सर्व समिका VII का प्रयोग कर

$$\begin{aligned}(2p - 5)^3 &= (2p)^3 - (5)^3 - 3(2p)(5)(2p - 5) \\ &= 8p^3 - 125 - 30p(2p - 5) \\ &= 8p^3 - 125 - 60p^2 + 150p \\ &= 8p^3 - 60p^2 + 150p - 125.\end{aligned}$$

उदाहरण-23. उचित सर्व समिका का प्रयोग कर हल कीजिए।

(i) $(103)^3$

(ii) $(99)^3$

हल : $(103)^3 = (100 + 3)^3$

$$\begin{aligned}(x + y)^3 &\equiv x^3 + y^3 + 3xy(x + y) \\ &= (100)^3 + (3)^3 + 3(100)(3)(100 + 3) \\ &= 1000000 + 27 + 900(103) \\ &= 1000000 + 27 + 92700 \\ &= 1092727.\end{aligned}$$

(ii) $(99)^3 = (100 - 1)^3$

$$\begin{aligned}(x - y)^3 &\equiv x^3 - y^3 - 3xy(x - y) \\ &= (100)^3 - (1)^3 - 3(100)(1)(100 - 1) \\ &= 1000000 - 1 - 300(99) \\ &= 1000000 - 1 - 29700 \\ &= 970299.\end{aligned}$$

उदाहरण-24. $8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$ का खण्डों में विभाजन

हल : दिए गए समीकरण को इस प्रकार लिखा जा सकता है।

$$8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2 + (3y)^3$$

सर्व समिका VI से तुलना करने पर

$$\text{सूत्र- } (x + y)^3 \equiv x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3,$$

$$8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3 = (2x + 3y)^3$$

$$= (2x + 3y)(2x + 3y)(2x + 3y) \text{ गुणनखंड प्राप्त होंगे।}$$

कीजिए

1. $(x + 1)^3$ विस्तृत कीजिए
2. $(3m - 2n)^3$.
3. $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ का खण्डों में विभाजन



$$(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

$$\begin{aligned} &= x(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + y(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \\ &\quad + z(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \\ &= \cancel{x^3} + \cancel{xy^2} + \cancel{xz^2} - \cancel{x^2y} - \cancel{xyz} - \cancel{x^2z} + \cancel{x^2y} + y^3 + \cancel{yz^2} - \cancel{xy^2} - \cancel{y^2z} - \cancel{xyz} + \cancel{x^2z} \\ &\quad + \cancel{y^2z} + \cancel{z^3} - \cancel{xyz} - \cancel{yz^2} - \cancel{xz^2} \\ &= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \end{aligned}$$

$$\text{सर्व समिका VIII: } (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \equiv x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

उदाहरण-25.

$$(2a + b + c)(4a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - bc - 2ca)$$

हल : इसके गुणनफल को इस प्रकार लिखा जाता है।

$$= (2a + b + c)[(2a)^2 + b^2 + c^2 - (2a)(b) - (b)(c) - (c)(2a)]$$

सर्व समिका VIII से तुलना करने पर

$$\begin{aligned}(x + y + z) (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) &\equiv x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \\ &= (2a)^3 + (b)^3 + (c)^3 - 3(2a)(b)(c) \\ &= 8a^3 + b^3 + c^3 - 6abc\end{aligned}$$

उदाहरण-26. $a^3 - 8b^3 - 64c^3 - 24abc$ का खण्डों में विभाजित कीजिए।

हल : दिए गए समीकरण को निम्न रूप में भी लिखा जा सकता है।

$$a^3 - 8b^3 - 64c^3 - 24abc = (a)^3 + (-2b)^3 + (-4c)^3 - 3(a)(-2b)(-4c)$$

VIII सर्व समिका से तुलना करने पर

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \equiv (x + y + z) (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

खण्ड प्राप्त होंगे

$$\begin{aligned}&= (a - 2b - 4c) [(a)^2 + (-2b)^2 + (-4c)^2 - (a)(-2b) - (-2b)(-4c) - (-4c)(a)] \\ &= (a - 2b - 4c) (a^2 + 4b^2 + 16c^2 + 2ab - 8bc + 4ca).\end{aligned}$$

इन्हें हल कीजिए

1. बिना गुणा किए हल करो

$$(a - b - c) (a^2 + b^2 + c^2 - ab + bc - ca)$$

2. सर्व समिका का प्रयोग कर खण्डों में विभाजन $27a^3 + b^3 + 8c^3 - 18abc$



उदाहरण-27. $2x^2 + 9x - 5$ एक आयत का क्षेत्रफल है उसकी लम्बाई और चौड़ाई ज्ञात करो।

हल : मान लो आयत की लम्बाई l चौड़ाई b

$$\text{आयत का क्षेत्रफल} = 2x^2 + 9x - 5$$

$$lb = 2x^2 + 9x - 5$$

$$= 2x^2 + 10x - x - 5$$

$$= 2x(x + 5) - 1(x + 5)$$

$$= (x + 5) (2x - 1)$$

$$\begin{aligned}\therefore \text{लम्बाई} &= (x + 5) \\ \text{चौड़ाई} &= (2x - 1) \\ x = 1, \quad l = 6, \quad b = 1 \\ x = 2, \quad l = 7, \quad b = 3 \\ x = 3, \quad l = 8, \quad b = 5 \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}$$

अभ्यास - 2.5



1. सही सर्व समिकाओ का प्रयोग कर निम्न को हल कीजिए।

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} & (x + 5)(x + 2) & \text{(ii)} \quad (x - 5)(x - 5) \quad \text{(iii)} \quad (3x + 2)(3x - 2) \\ \text{(iv)} & \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) & \text{(v)} \quad (1 + x)(1 + x) \end{array}$$

2. बिना गुणा किए हल कीजिए।

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} & 101 \times 99 & \text{(ii)} \quad 999 \times 999 \quad \text{(iii)} \quad 50\frac{1}{2} \times 49\frac{1}{2} \\ \text{(iv)} & 501 \times 501 & \text{(v)} \quad 30.5 \times 29.5 \end{array}$$

3. सही सर्व समिकाओ के प्रयोग से खण्डों को ज्ञात करो।

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & 16x^2 + 24xy + 9y^2 \quad \text{(ii)} \quad 4y^2 - 4y + 1 \\ \text{(iii)} & 4x^2 - \frac{y^2}{25} \quad \text{(iv)} \quad 18a^2 - 50 \\ \text{(v)} & x^2 + 5x + 6 \quad \text{(vi)} \quad 3p^2 - 24p + 36 \end{array}$$

4.

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} & (x + 2y + 4z)^2 \quad \text{(ii)} \quad (2a - 3b)^3 \quad \text{(iii)} \quad (-2a + 5b - 3c)^2 \\ \text{(iv)} & \left(\frac{a}{4} - \frac{b}{2} + 1\right)^2 \quad \text{(v)} \quad (p + 1)^3 \quad \text{(vi)} \quad \left(x - \frac{2}{3}y\right)^3 \end{array}$$

5. खण्डों में विभाजित कीजिए।

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & 25x^2 + 16y^2 + 4z^2 - 40xy + 16yz - 20xz \\ \text{(ii)} & 9a^2 + 4b^2 + 16c^2 + 12ab - 16bc - 24ca \end{array}$$

6. $a + b + c = 9$ और $ab + bc + ca = 26$, तो $a^2 + b^2 + c^2$ का मूल्य ज्ञात करो।

7. हल करो

(i) $(99)^3$ (ii) $(102)^3$ (iii) $(998)^3$ (iv) $(1001)^3$

8. खण्डों में विभाजन

(i) $8a^3 + b^3 + 12a^2b + 6ab^2$ (ii) $8a^3 - b^3 - 12a^2b + 6ab^2$

(iii) $1 - 64a^3 - 12a + 48a^2$ (iv) $8p^3 - \frac{12}{5}p^2 + \frac{6}{25}p - \frac{1}{125}$

9. सिद्ध करो

(i) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

(ii) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

10. खण्डों में विभाजन कीजिए।

(i) $27a^3 + 64b^3$

(ii) $343y^3 - 1000$

11. $27x^3 + y^3 + z^3 - 9xyz$ खण्डों में विभाजन कीजिए।

12. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x + y + z)[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2]$

13. यदि $x + y + z = 0$, हो तो सिद्ध कीजिए $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.

14. घनों का मूल्य ज्ञात किए बिना हल कीजिए

(i) $(-10)^3 + (7)^3 + (3)^3$ (ii) $(28)^3 + (-15)^3 + (-13)^3$

(iii) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 - \left(\frac{5}{6}\right)^3$ (iv) $(0.2)^3 - (0.3)^3 + (0.1)^3$

15. निम्न समीकरण में क्षेत्रफल दिए गए हो तो उनकी लम्बाई, चौड़ाई (l, b) ज्ञात कीजिए।

(i) $4a^2 + 4a - 3$ (ii) $25a^2 - 35a + 12$

16. घनाभ के आयतन दिए गए हो तो घनाभ की भुजा ज्ञात करो।

(i) $3x^3 - 12x$ (ii) $12y^2 + 8y - 20$

17. यदि $2(a^2 + b^2) = (a + b)^2$, तो सिद्ध करो $a = b$ होगा।

हमने क्या सीखा?



निम्न अंश इस अध्याय में बताए गए हैं।

1. एक चार वाला बहुपद $p(x)$ निम्न रूप का x में एक बीजीय व्यंजक है :

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, जहाँ $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ अचर हैं और $x^0, x^1, x^2, \dots, x^n$ के गुणांक हैं और n को बहुपद की घात कहा जाता है। प्रत्येक $a_n x^n; a_{n-1} x^{n-1}; \dots, a_0$ जहाँ $a_n \neq 0$ को बहुपद $p(x)$ का पद कहा जाता है।

2. एक पद वाले बहुपद को एकपदी कहा जाता है।
3. दो पद वाले बहुपद को द्विपद कहा जाता है।
4. तीन पद वाले बहुपद को त्रिपद कहा जाता है।
5. एक घात वाले बहुपद को रैखिक बहुपद कहा जाता है।
6. दो घात वाले बहुपद को द्विघाती बहुपद कहा जाता है।
7. तीन घात वाले बहुपद को त्रिघाती बहुपद कहा जाता है।
8. वास्तविक संख्या ' a ' बहुपद $p(x)$ का शून्य होता है यदि $p(a) = 0$ हो।
9. एक चर में प्रत्येक रैखिक बहुपद का एक अद्वितीय शून्यक होता है। एक शून्येतर अचर बहुपद का कोई शून्यक नहीं है और प्रत्येक वास्तविक संख्या शून्य बहुपद का एक शून्यक होती है।
10. शेषांक प्रमेय - यदि $p(x)$, एक या एक से अधिक घातांकों वाला एक बहुपद हो, $p(x)$ को रैखिक बहुपद $x-a$ से भाग दिया गया हो तो, शेष $p(a)$ होता है।

11. गुणन खण्ड प्रमेय :

यदि $p(a) = 0$ हो, तो $x-a$ बहुपद का एक गुणनखंड है और यदि $p(x)$, का एक गुणनखंड $x-a$ हो तो $p(a) = 0$ होता है।

- (i) $(x + y + z)^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$
- (ii) $(x + y)^3 \equiv x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$
- (iii) $(x - y)^3 \equiv x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$
- (iv) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \equiv (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$ also
- (v) $x^3 + y^3 \equiv (x + y)(x^2 - xy + y^2)$
- (vi) $x^3 - y^3 \equiv (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

दिमागी उलझन

यदि $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots}}} = \sqrt{x} \sqrt{x} \sqrt{x} \dots$ तो x का मूल्य क्या होगा ?