अध्याय 14

सरल समीकरण

14.1 पिछली कक्षा में हमने बीजीय पद, बीजीय व्यंजक एवं समीकरण के बारे में पढ़ा। इसके कुछ उदाहरण इस प्रकार हैं।

बीजीय पद $2x$, 3y, 5p आदि।
बीजीय व्यंजक $3x + 5$, 2y - 3, 5p- 7 आदि।
समीकरण $x = 2$, y = z + 1, p + 1 = 5 आदि।

हमने गणितीय कथनों को समीकरण के रुप में लिखना अर्थात् एक चर राशि वाले समीकरणों का निरुपण और उनका हल ज्ञात करने की ''प्रयास एवं भूल विधि'' का अध्ययन किया और सीखा कि यदि समीकरण का हल (चर का मान) कथन के सभी प्रतिबंधों (शर्तों) को संतुष्ट नहीं करता है तो समीकरण बनाने या उसे हल करने में कहीं कोई त्रुटि है। अतः पुनः विचार कर संशोधन की आवश्यकता है। अर्थात् चर का कोई मान जिसके लिए यह कथन सत्य हो इस समीकरण का हल या मूल कहलाता है। अब अन्य विधियों का अध्ययन करेंगे।

14.2 समीकरण हल करना

समीकरण में दो पक्ष होते हैं प्रथम पक्ष बाईं ओर है जिसे वाम पक्ष या L.H.S कहते है। दूसरा पक्ष दाईं ओर है दक्षिण पक्ष या R.H.S. कहते हैं। दोनों पक्षों के बीच समता '=' का चिह्न होता है। दोनों पक्षों का संख्यात्मक मान बराबर होता है। समीकरण के दोनों पक्ष तुला के दो संतुलित पलड़ों के समान है। यदि दोनों पक्षों में समान गणितीय संक्रियाएँ (किसी संख्या को जोड़ना, घटाना, गुणा करना या भाग लगाना) की जाए तो भी समीकरण संतुलित रहता है। हाँ ऐसा करने से उसका स्वरूप अवश्य बदल जाता है।

किसी समीकरण $3x - 7 = 5$ को हल करने के लिए उसका स्वरुप बदलकर $x = \frac{5 + 7}{3}$ करना होता है अर्थात् LHS में केवल चर राशि हो तथा RHS में संख्यात्मक राशि हो। इसके लिए नीचे लिखे चरणों में से एक या अधिक चरणों का प्रयोग करते हैं।

1. दोनों पक्षों में एक ही संख्या को जोड़ना।
2. दोनों पक्षों मे से एक ही संख्या को घटाना ।
3. दोनों पक्षों को एक ही शून्येतर संख्या से गुणा करना।
4. दोनों पक्षों में एक ही शून्येतर संख्या से भाग देना।

समीकरण हल करने की उपर्युक्त विधि को **''तुला विधि''** कहते हैं।

इसे निम्नलिखित उदाहरण से समझते हैं।

उदाहरण 1 समीकरण $3x - 7 = 5$ को हल कीजिए।

हल दोनों पक्षों में 7 जोड़ने पर

$$3x - 7 + 7 = 5 + 7$$

$$3x = 12$$

दोनों पक्षों में 3 का भाग देने पर

$$\frac{3x}{3} = \frac{12}{3}$$

$$x = 4$$

उत्तर की जाँच

समीकरण $3x - 7 = 5$ का हल $x = 4$ प्राप्त हुआ तो x के स्थान पर 4 प्रतिस्थापित करके दोनों पक्षों का मान ज्ञात करें।

$$\text{LHS} = 3x - 7$$

$$= 3 \times 4 - 7$$

$$= 12 - 7$$

$$= 5 = \text{RHS}$$

$$\text{LHS} = \text{RHS}$$

एक पक्ष में से किसी पद को चिह्न बदल कर दूसरे पक्ष में ले जाने तथा चर के गुणांक को दूसरे पक्ष में ले जाकर गुणा करने अथवा भाग लगाने को **पक्षांतरण** कहते हैं।

उदाहरण 2 पक्षांतरण द्वारा समीकरण $5x + 2 = 17$ को हल कीजिए।

हल

$$5x + 2 = 17$$

$$5x = 17 - 2 \quad \text{(2 के पक्षांतरण से)}$$

$$5x = 15$$

$$x = \frac{15}{5} \quad \text{(गुणांक 5 के पक्षांतरण से)}$$

$$x = 3$$

उत्तर की जाँच $\text{LHS} = 5x + 2 = 5 \times 3 + 2 = 15 + 2 = 17 = \text{RHS}$

अतः उत्तर $x = 3$ सही है।

करो और सीखो

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

तुला विधि

$7x + 6 = 34$

$7x + 6 - \ldots = 34 - \ldots$

$7x = \ldots\ldots.$

$x = \ldots$

पक्षांतरण विधि

$7x + 6 = 34$

$7x = 34 - \ldots$

$x = \dfrac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{7}$

$x = 4$

उत्तर की जाँच LHS = $7x + 6$

$= 7x \ldots\ldots\ldots +6$

$= \ldots\ldots\ldots +6$

= RHS

2. सही/गलत बताइए।

(i) $4x + x - 13 = 7$ में $x = 4$ सही/गलत

(ii) $3x - 8 = 25$ में $x = 12$ सही/गलत

(iii) $7x - 5 = 3x + 7$ में $x = 3$ सही/गलत

(iv) $5x - 7 = 4x + 1$ में $x = 5$ सही/गलत

परिमेय गुणांक वाले समीकरण को हल करने के लिए समीकरण में आई भिन्नों के हरों का लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात करते हैं। और समीकरण के दोनों पक्षों को उस ल.स. से गुणा करते हैं।

उदाहरण 3 समीकरण $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 1$ में x का मान ज्ञात कीजिए एवं उत्तर की जाँच भी कीजिए।

हल (यहाँ हर 3 और 4 का ल.स. 12 है)

या $\frac{x}{3} \times 12 - \frac{x}{4} \times 12 = 1 \times 12$

या $4x - 3x = 12$

या $x = 12$

उत्तर की जाँच LHS $= \frac{x}{3} - \frac{x}{4}$

$= \frac{12}{3} - \frac{12}{4} = 4 - 3 = 1 =$ RHS

अतः उत्तर $x = 12$ सही है।

उदाहरण 4 $2(x + 4) = 12$ को हल कीजिए।

हल

$2x + 8 = 12$

$2x + 8 - 8 = 12 - 8$ (दोनों पक्षों में से 8 घटाने पर)

$2x = 4$

$\frac{2x}{2} = \frac{4}{2}$ (दोनों पक्षों में 2 का भाग देने पर)

$x = 2$

(पंक्षातरण विधि)

$2(x + 4) = 12$

$2x + 8 = 12$

$2x = 12 - 8$

$2x = 4$

$2x = \frac{4}{2}$

$x = 2$

प्रश्नावली 14.1

नीचे दिए गए समीकरण हल कीजिए एवं उत्तर की जाँच कीजिए।

1. $2x + 1 = 9$
2. $5x - 4 = 26$
3. $5x - 2x + 7 = 31$
4. $5x + 8 = 12 + 6$
5. $12x + 3x = 60$
6. $\frac{7x}{9} = 21$
7. $\frac{2x}{3} - \frac{x}{2} = 3$
8. $\frac{3x}{4} - \frac{2x}{5} = 7$
9. $\frac{7x + 1}{2} = 11$
10. $\frac{3l}{2} = \frac{2}{3}$
11. $7m + \frac{19}{2} = 13$
12. $6z + 10 = -2$
13. $\frac{q}{4} + 7 = 5$
14. $4 (2-x) = 8$
15. $3 (n - 5) = 21$
16. $4 = 5 (t -2)$
17. $0 = 16 + 4 (m - 6)$

14.3 इबारती प्रश्नों (समस्याओं) का हल करना

सरल समस्याओं को हल करने में हम सरल समीकरण का प्रयोग करते हैं। इसके लिए निम्नलिखित चरणों के क्रम में काम किया जाता है।

1. दी गई समस्या को ध्यान से पढ़ें और ''क्या दिया है'' एवं क्या ज्ञात करना है लिखे।
2. अज्ञात राशि को किसी चर राशि से व्यक्त करें।
3. समस्या में दिए गए कथनों को गणितीय कथनों अर्थात् पद या व्यंजक में बदलें।
4. प्रश्न की शर्त के अनुसार जो राशियाँ (पद या व्यंजक) समान हो उन्हें समीकरण के रुप में लिखें।
5. समीकरण हल करके चर राशि का मान निकालें और समस्या का समाधान प्रस्तुत करें।
6. अपने उत्तर की जाँच करें।

उदाहरण 5 किसी संख्या के 4 गुने से सात अधिक 43 होता है वह संख्या ज्ञात कीजिए।

हल माना कि अज्ञात संख्या x है।

संख्या का चार गुना = $4x$

संख्या के 4 गुने से 7 अधिक = $4x + 7$

प्रश्न की शर्त के अनुसार -

$4x + 7 = 43$

$4x = 43 - 7$

$4x = 36$

$x = 9$

उत्तर की जाँच :—

संख्या के 4 गुने से 7 अधिक

= 4 x 9 + 7

= 36 + 7

= 43 अतः उत्तर सही है।

उदाहरण 6 किसी त्रिभुज का एक कोण दूसरे कोण से 20^0 बड़ा है तथा तीसरे से 20^0 छोटा है। तीनों कोणों का मान ज्ञात कीजिए।

हल माना कि पहला कोण $= x$

दूसरा कोण $= x - 20^0$

तीसरा कोण $= x + 20^0$

शर्त के अनुसार –

$x + x - 20 + x + 20 = 180^0$ (त्रिभुज के तीनों कोणों का योग दो समकोण होता है)

$x + x + x = 180^0$

$3x = 180^0$

$\boxed{x = 60^0}$

पहला कोण $x = 60^0$

दूसरा कोण $x - 20 = 60 - 20 = 40^0$

तीसरा कोण $x + 20 = 60 + 20 = 80^0$

अतः तीनों कोण $= 60^0, 40^0, 80^0$

उत्तर की जाँच $= 60^0 + 40^0 + 80^0 = 180^0$ अतः उत्तर सही है।

प्रश्नावली 14.2

1. किसी संख्या में 12 जोड़ने पर 43 प्राप्त होता है। वह संख्या ज्ञात कीजिए।
2. किसी संख्या के 4 गुने में से 5 घटाने पर 27 प्राप्त होता है। वह संख्या ज्ञात कीजिए।
3. किसी संख्या के 5 गुने में संख्या का दुगुना जोड़ने पर 42 आता है। वह संख्या बताइए।
4. तीन क्रमागत संख्याओं का योग 27 है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
5. तीन क्रमागत विषम संख्याओं का योग 39 है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
6. तीन क्रमागत सम संख्याओं का योग 48 है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
7. रामू की आयु 37 वर्ष है जो इसके पुत्र की आयु के तीन गुने से 4 वर्ष अधिक है। पुत्र की आयु ज्ञात कीजिए।
8. इशु के पिता की आयु इशु की आयु के तीन गुने से 5 वर्ष अधिक है। इशु की आयु ज्ञात कीजिए यदि पिता की आयु 44 वर्ष हो।
9. रियाज एक संख्या के बारे में इस प्रकार सोचता है कि वह उसका $2\frac{1}{2}$ गुना करके 7 घटा देता है परिणाम 23 आता है रियाज ने क्या संख्या सोची ?
10. रमनजीत के पिता की आयु 49 वर्ष है उनकी आयु रमनजीत की आयु के तीन गुने से 4 वर्ष अधिक है रमनजीत की आयु ज्ञात कीजिए।
11. जोधपुर में जयपुर के मुकाबले प्रतिमाह सड़क दुर्घटनाएँ 3 गुने से 50 कम है। जयपुर में प्रतिमाह 400 सड़क दुर्घटनाएँ होती है तो जोधपुर में कितनी हुई ?

हमने सीखा

1. समीकरण में चर पर ऐसा प्रतिबंध होता है जिसमें दोनों पक्षों में व्यंजकों का मान बराबर होना चाहिए।
2. चर का वह मान जिसके लिए समीकरण संतुष्ट होता है, वह उस समीकरण का हल कहलाता है।
3. किसी समीकरण में बायाँ पक्ष और दायाँ पक्ष परस्पर बदलने पर समीकरण नहीं बदलता है।
4. समीकरण में हम दोनों पक्षों में एक साथ किसी संख्या को जोड़, घटा, गुणा या भाग कर सकते हैं।
5. समीकरण का हल चरणबद्ध होता है, दोनों पक्षों में एक से अधिक गणितीय संक्रियाएँ करनी पड़ती है, जिससे कि दोनों में से एक पक्ष में हमें केवल चर प्राप्त होता है और समीकरण का हल प्राप्त होता है।
6. पक्षान्तरण अर्थात् समीकरण के अचर या बीजीय पदों का एक पक्ष से दूसरे पक्ष में स्थानान्तरण है। पक्ष में परिवर्तन पर जोड़ व घटा की स्थिति में क्रमशः चिह्न बदल जाते हैं। गुणा की स्थिति में भाग एवं भाग की स्थिति में गुणा हो जाता है।