അധ്യായം 5

സമ്മിശ്രസംഖ്യകളും രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യങ്ങളും (COMPLEX NUMBERS AND QUADRATIC EQUATIONS)

❖ *ശാസ്ത്രങ്ങളുടെ രാജ്ഞിയാണ് ഗണിതം, ഗണിതത്തിന്റെ രാജ്ഞിയാണ് അങ്കഗണിതം – ഗോസ്* ❖

5.1 ആമുഖം

ആദ്യകാലങ്ങളിൽ നാം സംഖ്യകൾ എണ്ണാൻ വേണ്ടി മാത്രമാണ് ഉപയോഗിച്ചിരുന്നത്. ഒരാളുടെ പരിമിതമായ ആവശ്യങ്ങൾക്ക് എണ്ണൽസംഖ്യകൾ മതിയായിരുന്നു. എന്നാൽ മനുഷ്യന്റെ ദൈനംദിന ആവശ്യങ്ങളുടെ വർദ്ധനവിനനുസൃതമായി ഗണിതപരമായ ആവശ്യങ്ങൾ വർദ്ധിക്കുകയും പുതിയ സംഖ്യകൾ കണ്ടെത്തേണ്ടിവരികയും ചെയ്തു. ന്യൂനസംഖ്യകൾ സ്വീകരിക്കുന്നതുവരെ $x + 3 = 2$ പോലുള്ള സമവാക്യങ്ങൾക്ക് പരിഹാരമില്ല എന്ന് വിശ്വസിച്ചിരുന്നു.

ഡബ്ല്യു. ആർ. ഹാമിൽട്ടൺ (1805-1865)

ന്യൂനസംഖ്യകളുടെ ഗുണന നിയമമനുസരിച്ച് വർഗങ്ങൾ എല്ലാം അധിസംഖ്യകളാണ്. അപ്പോൾ ന്യൂനസംഖ്യകൾക്ക് വർഗമൂലമില്ല. എന്നാൽ ഗണിതത്തിൽ ന്യൂനസംഖ്യകൾക്ക് വർഗമൂലം ഉണ്ട് എന്ന സങ്കൽപം ഒരു ഘട്ടത്തിൽ ആവശ്യമായി വന്നു. മൂന്നാംകൃതി സമവാക്യപ്രശ്നങ്ങളുടെ പരിഹാരം കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള ശ്രമമാണ് ഇതിനു കാരണമായത്. $ax^2 + bx + c = 0$ എന്ന രൂപത്തിലുള്ള രണ്ടാംകൃതിസമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരം $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടെത്താം. എന്നാൽ ഒരു മൂന്നാംകൃതി സമവാക്യത്തിന് ഇത്തരത്തിൽ ഒരു സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിച്ചുള്ള പൊതുരീതി സാധ്യമല്ല എന്ന് ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞർ വളരെ വർഷങ്ങളോളം വിശ്വസിച്ചിരുന്നു.

ഇറ്റാലിയൻ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞൻ ദെൽഫെറോ ഒരു മൂന്നാംകൃതിസമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരം കണ്ടുപിടിക്കുന്നത് ഒരു വെല്ലുവിളിയായി ഏറ്റെടുക്കുകയും $x^3 + ax = b$ പോലുള്ള സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരം

$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}$ എന്ന് കണ്ടെത്തുകയുമുണ്ടായി. എല്ലാ മൂന്നാംകൃതിസമവാക്യങ്ങളുടെയും പരിഹാരം ഈ രീതിയിൽ കണ്ടുപിടിക്കാൻ കഴിയുമോ? ഉദാഹരണത്തിന് $x^3 - 15x = 4$ എന്ന സമവാക്യത്തിന് പരിഹാരം കാണാൻ ദെൽഫെറോയുടെ രീതി ഉപയോഗിച്ചാൽ

$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} - \sqrt[3]{-2 + \sqrt{-121}}$ എന്ന് കിട്ടും. ന്യൂനസംഖ്യകളുടെ ഗുണനം നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത് അനുസരിച്ച്, ഓരോ സംഖ്യയുടേയും വർഗം ന്യൂനം ആകില്ലല്ലോ. അപ്പോൾ $\sqrt{-121}$ ന് അർത്ഥമില്ല. എന്നാൽ സമവാക്യത്തിന് പരിഹാരമില്ല എന്ന് കരുതാനും കഴിയില്ല, കാരണം $x = 4$ എന്നെടുത്താൽ ഈ സമവാക്യം ശരിയാണെന്ന് കാണാൻ കഴിയും. ഇവിടെ $\sqrt{-121}$ നെ $11 \times \sqrt{-1}$ എന്നെടുക്കുകയും $\sqrt{-1}$ നെ ഒരു സാങ്കല്പികസംഖ്യയായി എടുത്ത് സാധാരണ ഗണിതനിയമങ്ങളനുസരിച്ച് മുന്നോട്ട് പോയാൽ ഈ മൂന്നാം കൃതി സമവാക്യത്തിന് 4 എന്ന പരിഹാരം കിട്ടും.

ഇത്തരം സാങ്കല്പികസംഖ്യകൾക്ക് ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞരുടെ അംഗീകാരം നേടാൻ ഏറെക്കാലം വേണ്ടിവന്നു. പ്രശസ്ത ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനായ ഓയിലറാണ് $\sqrt{-1}$ ന് i എന്ന ചിഹ്നം ആദ്യമായി നൽകിയത്. ഇന്ന് വൈദ്യുതകാന്തതരംഗങ്ങളുടെ പഠനത്തിലും, ദ്രാവകങ്ങളുടെയും വാതകങ്ങളുടെയും ചലനത്തിന്റെ പഠനത്തിലും സമ്മിശ്രസംഖ്യകൾ ഉൾപ്പെടുന്ന സമവാക്യങ്ങളാണ് സൗകര്യം എന്ന് ശാസ്ത്രം തിരിച്ചറിഞ്ഞു. സൂക്ഷ്മകണികകളുടെ പഠനത്തിൽ സമ്മിശ്രസംഖ്യകൾ ഒഴിവാക്കാൻ കഴിയാത്ത ഘടകമായി നിലനിൽക്കുന്നു.

5.2 ന്യൂന രേഖീയസംഖ്യയുടെ വർഗമൂലം

മുകളിൽ വിശദീകരിച്ച ചരിത്ര പശ്ചാത്തലത്തിൽ നിന്നും $\sqrt{-1} = i$ എന്ന ചിഹ്നം ഉപയോഗിക്കുന്നതിനെ കുറിച്ച് മനസ്സിലായി.

അതായത്, $i^2 = -1$

അതുപോലെ; $(-i)^2 = -i \times -i = i^2 = -1$

ചുരുക്കി പറഞ്ഞാൽ -1 ന് രണ്ട് വർഗമൂലങ്ങൾ $-i$, i യുമാണ്.

$x^2 + 1 = 0$ അഥവാ $x^2 = -1$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരങ്ങളാണ് i യും $-i$ യും മറ്റൊരു ഉദാഹരണം പരിഗണിക്കാം.

$$\left(\sqrt{3}\,i\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 (i)^2 = 3(-1) = -3$$

$$\left(-\sqrt{3}\,i\right)^2 = \left(-\sqrt{3}\right)^2 (i) = 3(-1) = -3$$

അതായത് -3 ന്റെ രണ്ട് വർഗമൂലങ്ങൾ $\sqrt{3}\,i$ യും $-\sqrt{3}\,i$ യും ആണ്.

$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ എന്ന പ്രസ്താവന $a > 0, b > 0$ അഥവാ $a > 0, b < 0$ അഥവാ $a < 0, b > 0$ എന്നീ നിബന്ധനകൾ ശരിയാണ്. എന്നാൽ $a < 0, b < 0$ എന്ന നിബന്ധനക്ക് ഈ പ്രസ്താവന ശരിയാകുമോ? നമുക്ക് പരിശോധിച്ചു നോക്കാം.

$$i^2 = i \times i = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)\,(-1)} = \sqrt{1} = 1$$

ഇത് $i^2 = -1$ എന്ന വസ്തുതക്ക് വിരുദ്ധമാണ്. അതുകൊണ്ട് $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ എന്ന പ്രസ്താവന $a < 0, b < 0$ എന്ന നിബന്ധനക്ക് ശരിയാകില്ല.

5.3 രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യങ്ങൾ

$x^2 + x + 1 = 0$ എന്ന രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരം കണ്ടെത്താം.

അതായത്; $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4 \times 1 \times 1}}{2 \times 1} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$

മുൻപ് വിശദീകരിച്ചത് പ്രകാരം $\sqrt{-3} = \sqrt{-1 \times 3} = \sqrt{-1}\sqrt{3} = i\sqrt{3}$ എന്ന് എഴുതാം.

അങ്ങനെയെങ്കിൽ $x = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ എന്നാകും.

CAS ഉപയോഗിച്ച് $x^2 + x + 1 = 0$ എന്ന രണ്ടാം കൃതി സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരങ്ങൾ കാണാം. ഇതിനായി View ൽ നിന്നും CAS എടുക്കണം. Complex root [x^2 + x + 1] എന്ന Comand നൽകി Enter നൽകിയാൽ സമവാക്യത്തിന്റെ രണ്ട് പരിഹാരങ്ങൾ $\frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ എന്നിങ്ങനെ ലഭിക്കും. ഇടതു വശത്തുള്ള check box click ചെയ്താൽ ഈ സമ്മിശ്രസംഖ്യകളുടെ പരിഹാരങ്ങൾ Graphic ൽ അടയാളപ്പെടുത്താം. Complex root [x^2 + x + 1] എന്ന input നൽകിയും മേൽ വിശദീകരിച്ച ആശയങ്ങളിലേക്ക് എത്തിച്ചേരാൻ സാധിക്കും. പരിശീലന പ്രശ്നം 5.1 ലെ ചോദ്യങ്ങൾ ഇതേ രീതിയിൽ അടയാളപ്പെടുത്തി പരിഹാരങ്ങളുടെ പ്രത്യേകതകൾ മനസ്സിലാക്കാം.

അതായത് $x = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$; $x = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ എന്നിവ $x^2 + x + 1 = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരങ്ങളാണ്.

ഉദാഹരണം : 1

പരിഹാരം കാണുക: $x^2 + 2 = 0$

പരിഹാരം

$x^2 = -2$ അതായത്, $x = \pm\sqrt{-2} = \pm\sqrt{-1}\sqrt{2} = \pm i\sqrt{2}$

ഉദാഹരണം : 2

പരിഹാരം കണ്ടെത്തുക : $\sqrt{5}x^2 + x + \sqrt{5} = 0$

പരിഹാരം

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}}}{2\sqrt{5}} = \frac{-1\pm\sqrt{1-20}}{2\sqrt{5}} = \frac{-1\pm\sqrt{-19}}{2\sqrt{5}}$$

$$x = \frac{-1-i\sqrt{19}}{2}, \quad x = \frac{-1+i\sqrt{19}}{2}$$

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 5.1

ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്ന സമവാക്യങ്ങൾക്ക് പരിഹാരം കണ്ടെത്തുക.

1. $x^2 + 3 = 0$
2. $2x^2 + x + 1 = 0$
3. $x^2 + 3x + 9 = 0$
4. $-x^2 + x - 2 = 0$
5. $x^2 + 3x + 5 = 0$
6. $x^2 - x + 2 = 0$
7. $\sqrt{2}x^2 + x + \sqrt{2} = 0$
8. $\sqrt{3}x^2 - \sqrt{2}x + 3\sqrt{3} = 0$
9. $x^2 + x + \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 0$
10. $x^2 + \dfrac{x}{\sqrt{2}} + 1 = 0$

5.4 സമ്മിശ്ര സംഖ്യകൾ (Complex Numbers)

$x^2 + x + 1 = 0$ എന്ന രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരങ്ങൾ $\dfrac{-1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ആണ്. ഈ പരിഹാരങ്ങൾക്ക് ഒരു പൊതുഘടനയുള്ളതായി കാണാം. അതായത് ഈ സംഖ്യകൾക്ക് രണ്ട് ഭാഗങ്ങളുണ്ട്. ഒന്ന് രേഖീയഭാഗവും മറ്റൊന്ന് മുമ്പ് പരിചയപ്പെട്ട i ചേർന്നുവരുന്ന സാങ്കൽപ്പികഭാഗവും. ഈ പൊതുഘടന പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 5.1 ലെ എല്ലാ പരിഹാരങ്ങൾക്കുമുള്ളതായി കാണാം.

ന്യൂനസംഖ്യയുടെ വർഗമൂലം ഉൾപ്പെടുന്ന രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യങ്ങളുടെ പരിഹാരമായിവരുന്ന സംഖ്യകൾക്ക് പൊതുഘടനയുണ്ട്. അതായത് a, b എന്നിവ രേഖീയസംഖ്യയാക്കുകയും $a + ib$ എന്ന രൂപത്തിൽ വരുന്നതുമാണ് ഈ സംഖ്യകൾ. ഇതിനെ സമ്മിശ്ര സംഖ്യകൾ (Complex numbers) എന്ന് പറയുന്നു.

ഉദാഹരണമായി $2 + 3i$, $2 - 3i$, $4+i\left(\frac{-1}{3}\right)$, $2 = 2 + i0$.

$z = a + ib$ എന്ന സമ്മിശ്ര സംഖ്യയിൽ 'a' യെ രേഖീയഭാഗം (Real part) എന്നും 'b' യെ സാങ്കല്പിക ഭാഗം (Imaginary part) എന്നും പറയുന്നു. രേഖീയഭാഗത്തെ Re(z) കൊണ്ടും സാങ്കല്പിക ഭാഗത്തെ Im(z) കൊണ്ടും സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ഉദാഹരണത്തിന് $z = 2 + i\,5$ ആയാൽ Re(z)= 2, Im(z)= 5 ആണ്.

കുറിപ്പ്

- ഒരു രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യത്തിന്റെ ഒരു പരിഹാരം $a + ib$ ആണെങ്കിൽ $a - ib$ മറ്റൊരു പരിഹാരമായിരിക്കും. ഇവയെ കോൺജുഗേറ്റ് ജോടികൾ എന്ന് പറയുന്നു.
- സമ്മിശ്രസംഖ്യകളുടെ തുല്യത: $z_1 = a+ib, z_2 = c+id$ എന്നീ സമ്മിശ്ര സംഖ്യകൾ തുല്യം ആകണമെങ്കിൽ $a = c$; $b = d$ ആകണം എന്ന് നിർവ്വചിക്കുന്നു.
- ഏതൊരു രേഖീയസംഖ്യയെയും ഒരു സമ്മിശ്രസംഖ്യയായി പരിഗണിക്കാവുന്നതാണ്. ഇവിടെ സാങ്കൽപ്പികഭാഗം പൂജ്യമാണ്.

ഉദാഹരണം : 3

$x, y \in \mathbb{R}$, $4x + i(3x - y) = 3 + i\,(-6)$, ആയാൽ x, y കാണുക.

പരിഹാരം

$$4x+i(3x-y)=3+i(-6)....(1)$$

രേഖീയ ഭാഗം തുല്യമായതുകൊണ്ട് $4x = 3$ എന്നും സാങ്കൽപ്പികഭാഗം തുല്യമായതുകൊണ്ട് $3x - y = -6$ എന്നും കിട്ടുന്നു.

ഈ രണ്ടു സമവാക്യങ്ങളിൽ നിന്നും $x = \frac{3}{4}; y = \frac{33}{4}$.

5.5: i യുടെ കൃത്യങ്കം

-1 ന്റെ ഏത് കൃത്യങ്കത്തിനും -1, 1 എന്ന ക്രമത്തിൽ ആവർത്തിക്കുന്നു എന്ന് അറിയാമല്ലോ. സമാനമായ ഒരു സ്വഭാവമാണ് i യുടെ ഏത് കൃത്യങ്കത്തനും ഉണ്ടാകുന്നത്.

$$i^2 = -1$$
$$i^3 = i^2 \times i = -1 \times i = -i$$
$$i^4 = i^2 \times i^2 = -1 \times -1 = 1$$
$$i^5 = i^4 \times i = 1 \times i = i$$
$$i^6 = i^4 \times i^2 = 1 \times -1 = -1$$
$$i^7 = -i$$

$i^8 = 1$ മുതലായവ

അതായത്, $i, -1, -i, 1$ എന്ന ക്രമത്തിൽ ആവർത്തിക്കുന്നു.

> Mini = 1, Max = 30 ആകുന്ന വിധത്തിൽ n എന്ന integer slider നിർമിക്കുക. $(i)^n$ എന്നതിനെ വിപുലീകരിക്കാൻ CAS ഉപയോഗിക്കാം. (View → CAS).Sqrt(-1)^n എന്ന input നൽകി CAS ന്റെ ഇടതുവശത്തെ checkbox click ചെയ്താൽ Algebra view ൽ $z_1 = 0 + i$ എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യ ലഭിക്കും. അതുപോലെ Graphics view ൽ z_1 എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യ അടയാളപ്പെടുത്തി കാണാം. Slider അനക്കി z_1 ന്റെ വ്യത്യസ്ത സ്ഥാനവും പ്രത്യേകതയും കാണാം.

പൊതുവായി k ഒരു പൂർണസംഖ്യ ആയാൽ $i^{4k} = 1$, $i^{4k-1} = i$, $i^{4k-2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$ എന്നു കാണാം.

ഉദാഹരണം : 4

ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യകളെ $a + ib$ രൂപത്തിൽ എഴുതുക

(i) $(-5i)\left(\frac{1}{8}i\right)$ (ii) $(-i)(2i)\left(-\frac{1}{8}i\right)^3$

പരിഹാരം

(i) $$(-5i)\left(\frac{1}{8}i\right) = \frac{-5}{8}i^2 = \frac{-5}{8}(-1) = \frac{5}{8} = \frac{5}{8} + i0$$

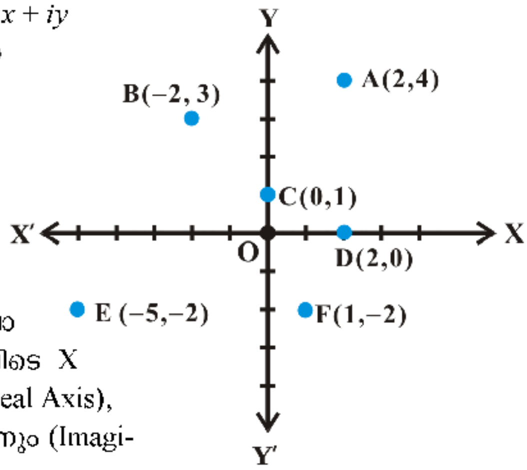
(ii) $$(-i)(2i)\left(-\frac{1}{8}i\right)^3 = 2 \times \frac{1}{8 \times 8 \times 8}(i)^5 = \frac{1}{256}(i^2)^2(i) = \frac{1}{256}i$$

5.6 ആർഗന്റ്തലവും പോളാർ രൂപവും (Argand Plane and Polar Representation)

ആർഗന്റ് തലം, പോളാർ രൂപം എന്നീ ആശയങ്ങൾ സമ്മിശ്രസംഖ്യകൾക്ക് ജ്യാമിതീയ വ്യാഖ്യാനം നൽകുന്നു. അതിലൂടെ സമ്മിശ്രസംഖ്യകളുടെ ബീജഗണിതത്തെ കുറിച്ച് മനസിലാക്കാൻ കഴിയുന്നു.

5.6.1 ആർഗന്റ് തലം അഥവാ സമ്മിശ്രതലം (Argand Plane or Complex Plane)

XY പ്രതലത്തിൽ ഏതൊരു ബിന്ദുവിനെയും (x, y) എന്ന സൂചകസംഖ്യ ഉപയോഗിച്ച് സൂചിപ്പിക്കാമെന്ന് അറിയാം. $z = x + iy$ എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യയുടെ രേഖീയ ഭാഗം (അതായത് x) സാങ്കൽപ്പിക ഭാഗം, (അതായത് y) എന്നിവ ചേർന്ന് സൂചകസംഖ്യയായി പരിഗണിച്ചാൽ, $z = x + iy$ എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യയെ XY പ്രതലത്തിൽ (x, y) എന്ന ബിന്ദു കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കാവുന്നതാണ്.



ചിത്രം 5.1

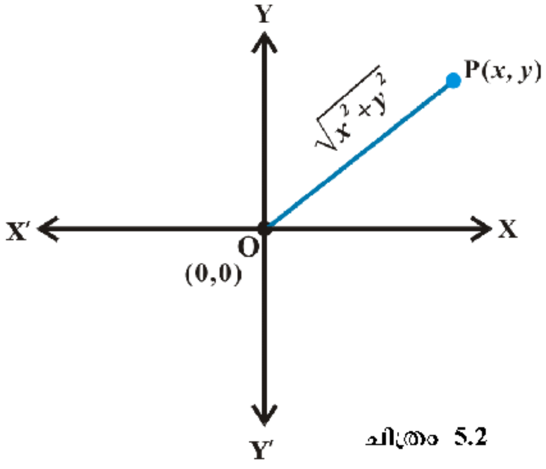
ഈ പ്രതലത്തെ സമ്മിശ്രതലം അഥവാ ആർഗന്റ് തലം എന്ന് പറയുന്നു. ഇവിടെ X അക്ഷത്തെ രേഖീയ അക്ഷമെന്നും (Real Axis), Y അക്ഷത്തെ സാങ്കൽപ്പിക അക്ഷമെന്നും (Imaginary Axis) പറയുന്നു.

$a + i\,0$ എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യ X അക്ഷത്തിലും $0 + i\,b$ എന്നത് Y അക്ഷത്തിലും സ്ഥിതിചെയ്യുന്നു എന്നു മനസിലാക്കാം. ഒരു രേഖീയസംഖ്യയുടെ കേവലവില ആ സംഖ്യക്ക് സംഖ്യാരേഖയിലെ ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്നുള്ള അകലമാണെന്ന് മുൻ ക്ലാസുകളിൽ പഠിച്ചിട്ടുണ്ടല്ലോ. ഒരു സമ്മിശ്രസംഖ്യയുടെ കേവലവില എന്താണെന്ന് നോക്കാം. മുകളിലെ ആർഗന്റ് തലത്തിലെ ഒരോ സമ്മിശ്രസംഖ്യയും പരിഗണിച്ച് ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്ന പട്ടിക ശ്രദ്ധിക്കാം.

സമ്മിശ്ര സംഖ്യ	X Y തലത്തിലെസൂചക സംഖ്യകൾ	ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്നുള്ളദൂരം
$2+4i$	$(2,4)$	$\sqrt{(2)^2+(4)^2}=\sqrt{20}$
$-2+3i$	$(-2,3)$	$\sqrt{(-2)^2+(3)^2}=\sqrt{13}$
$2+0i$	$(2,0)$	$\sqrt{(2)^2+(0)^2}=2$
$1-2i$	$(1,-2)$	$\sqrt{(1)^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$
$-5-2i$	$(-5,-2)$	$\sqrt{(-5)^2+(-2)^2}=\sqrt{29}$

2 + 4i എന്ന input നൽകി സമ്മിശ്രസംഖ്യ അടയാളപ്പെടുത്തുക. Segment tool ഉപയോഗിച്ച് ആധാരബിന്ദുവിനെയും സമ്മിശ്രസംഖ്യയേയും ബന്ധിപ്പിക്കുക. Distance tool ഉപയോഗിച്ച് വരയുടെ നീളം കാണുക. ഇതുപോലെ പട്ടികയിലെ മറ്റ് സമ്മിശ്രസംഖ്യകളും അടയാളപ്പെടുത്തി ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്നുള്ള ദൂരം കണ്ടെത്താം. ഈ വിലകളും പട്ടികയിലെ ദൂരവും തമ്മിൽ താരതമ്യം ചെയ്യുക.

ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്നുള്ള ദൂരത്തെ ആ സമ്മിശ്രസംഖ്യയുടെ കേവലവില (Modulus) എന്ന് പറയുന്നു. $z = x + iy$ എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യയുടെ കേവലവില $\sqrt{x^2 + y^2}$ ആണ്. അതിനെ $|z|$ എന്ന ചിഹ്നം കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കുന്നു.



ചിത്രം 5.2

5.6.2 പോളാർ രൂപം (Polar Form)

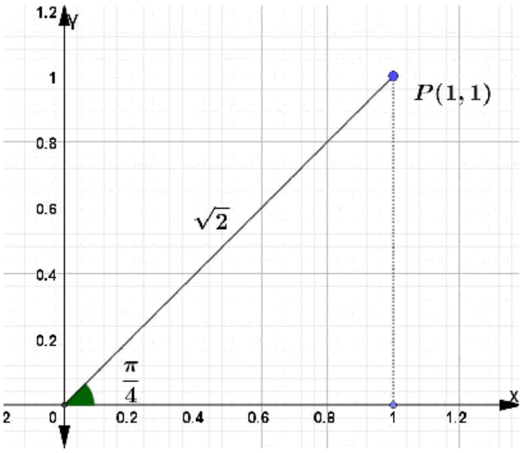
സമ്മിശ്രതലത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയ ഒരു സമ്മിശ്രസംഖ്യയെ മറ്റൊരു രൂപത്തിൽ കൂടി വ്യാഖ്യാനിക്കാൻ കഴിയും. സമ്മിശ്രതലത്തിലെ ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്നും സമ്മിശ്രസംഖ്യയിലേക്കുള്ള ദൂരവും (കേവലവില) ആധാരബിന്ദുവിനേയും സമ്മിശ്രസംഖ്യയേയും ബന്ധിപ്പിക്കുന്ന വര രേഖീയ അക്ഷത്തിന്റെ അധിദിശയുമായി (Positive direction) ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണളവും ഉപയോഗിച്ച് സംഖ്യയെ കൃത്യമായി സൂചിപ്പിക്കുവാൻ കഴിയും.

ഉദാഹരണമായി ചിത്രം 5.3 ലെ **P** എന്ന ബിന്ദു പരിഗണിക്കുക. ഇത് $z = 1 + i$ എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യയെയാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്.

$$OP = Z = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$-1 + i, 1 - i, -1 - i, sqrt(2) + 0i, -sqrt(2) + 0i, i * sqrt(2), -i * sqrt(2)$ എന്നീ input command കൾ നൽകി $-1 + i,\ 1 - i,\ -1 - i,\ \sqrt{2}, -\sqrt{2}, i\sqrt{2}, -i\sqrt{2}$ എന്നീ സമ്മിശ്രസംഖ്യകൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഇവയിൽ ഏതെങ്കിലും ഒരു സമ്മിശ്രസംഖ്യയിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന ആധാരബിന്ദു കേന്ദ്രമായ ഒരു വൃത്തം വരക്കാം. ഇതിനായി circle with center through point എന്ന tool ഉപയോഗിക്കാം. മറ്റ് സമ്മിശ്രസംഖ്യകളും ഈ വൃത്തത്തിലാണ് എന്ന് കാണാം.

ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്നും P യിലേക്കുള്ള അകലം $\sqrt{2}$ ആയി വരുന്ന വേറെയും സമ്മിശ്രസംഖ്യകൾ ഉണ്ട്. $-1+i, 1-i, -1-i, \sqrt{2}, -\sqrt{2}, i\sqrt{2}, -i\sqrt{2}$ തുടങ്ങിയ ധാരാളം സംഖ്യകൾക്ക് കേവലവില $\sqrt{2}$ ആണ്. ജിയോജിബ്രയുടെ സഹായത്തോടുകൂടി ഇവ സമ്മിശ്രതലത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയാൽ $\sqrt{2}$ ആരമുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുക്കളായിരിക്കും. അതായത് $Z| = \sqrt{2}$ ആയ സമ്മിശ്രസംഖ്യകളെല്ലാം $\sqrt{2}$ ആരമായ ഒരു വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുക്കളാണ്. ഇതിൽ രേഖീയ അക്ഷത്തിന്റെ A [nZri b pamb n $45°$ കോണുണ്ടാക്കുന്ന വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുവാണ് $z = 1 + i$ എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നത്.



ചിത്രം 5.3

ഇവിടെ;

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 1 = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}$$

$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 1 = \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}$$

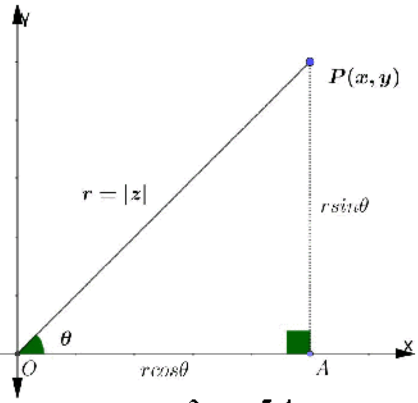
എങ്കിൽ;

$$z = 1 + i = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} + i\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

അതായത് $z = 1 + i$ എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യയെ $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ എന്ന രൂപത്തിൽ സൂചിപ്പിക്കാം. ഇതിനെ $z = 1 + i$ എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യയുടെ പോളാർ രൂപമെന്ന് പറയുന്നു.

$z = x + iy$ എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യയെ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നതുപോലെ ഒരു സമ്മിശ്രതലത്തിൽ സൂചിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു എന്ന് കരുതുക.



ചിത്രം 5.4

ഇവിടെ $r = \text{OP} = \sqrt{(x)^2 + (y)^2}$, OP രേഖീയ അക്ഷവുമായുള്ള കോൺ θ യുമാണ്. എങ്കിൽ (r, θ) എന്ന രേഖീയ ക്രമജോഡി ഉപയോഗിച്ച് ആ സമ്മിശ്രസംഖ്യയെ സൂചിപ്പിക്കുവാൻ കഴിയും. (r, θ) എന്നതിനെ പോളാർ സൂചക

സംഖ്യകൾ എന്ന് പറയുന്നു. കൂടാതെ ത്രികോണം OAP പരിഗണിച്ചാൽ
$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ യുമാണ്

അതായത് $z = x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ എന്ന രൂപത്തിൽ ഒരു സമ്മിശ്രസംഖ്യയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നതിനെ ആ സംഖ്യയുടെ പോളാർ രൂപമെന്ന് പറയുന്നു. $z \neq 0$ എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യ എടുക്കുകയാണെങ്കിൽ $0 \leq \theta < 2\pi$ എന്ന ഇടവേളയിൽ θ ക്ക് ഒരു വിലമാത്രമാണ് ഉണ്ടാകുക. ഇതിനെ z ന്റെ ആർഗ്യുമെന്റ് (Argument) അഥവാ ആംപ്ലിറ്റ്യൂഡ് എന്ന് പറയുന്നു. സൗകര്യത്തിനായി $-\pi < \theta \leq \pi$ ലുള്ള വിലയാണ് പരിഗണിക്കുന്നത്. അതിനെ പ്രഥമ ആർഗ്യുമെന്റ് (Principal Argument) എന്ന്, അതിനെ 'arg z' എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

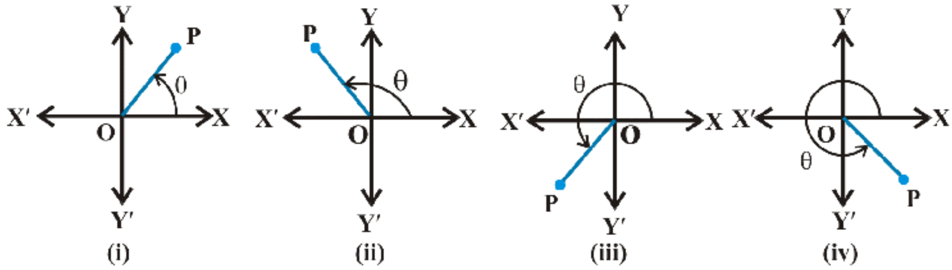
പൊതുവായി പോളാർ രൂപത്തിൽ ഒരു സമ്മിശ്രസംഖ്യയെ മാറ്റി എഴുതാൻ പ്രഥമ ആർഗ്യുന്റ്ാണ് ഉപയോഗിക്കുന്നത്. ഇനി വ്യത്യസ്ത ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ സമ്മിശ്ര സംഖ്യ വരുമ്പോൾ arg z കണ്ടെത്തുന്നതും പോളാർ രൂപം എഴുതുന്നതും പരിചയപ്പെടാം.

ഒന്നും രണ്ടും ചതുർത്ഥാംശത്തിലാണ് സമ്മിശ്രസംഖ്യകൾ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നതെങ്കിൽ, സമ്മിശ്രസംഖ്യയും ആധാരബിന്ദുവുമായി ബന്ധിച്ചിരിക്കുന്ന രേഖ രേഖീയ അക്ഷത്തിന്റെ അധിദിശയുമായി ഉണ്ടാകുന്ന കോണളവ് $(0, \pi)$ എന്ന ഇടവേളയിലാണ്. അതുകൊണ്ട് ഇവിടെ ലഭിക്കുന്ന കോണളവ് arg z ആയി എടുക്കാം. മൂന്നും നാലും ചതുർത്ഥാംശത്തിലാണ് സമ്മിശ്ര സംഖ്യകൾ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നതെങ്കിൽ, സമ്മിശ്രസംഖ്യയും ആധാരബിന്ദുവുമായി ബന്ധിപ്പിക്കുന്ന രേഖ രേഖീയ അക്ഷത്തിന്റെ അധിദിശയുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണളവ് $(\pi, 2\pi)$എന്ന ഇടവേളയിലാണ്. ഇവിടെ ലഭിക്കുന്ന കോണളവ് arg z ആയി എടുക്കാൻ കഴിയില്ല. പകരം രേഖീയ അധിദിശയിൽ നിന്നും OP എന്ന രേഖയിലേക്കുള്ള കോണളവ് പ്രദക്ഷിണമായി അളക്കുന്നു. പ്രദിക്ഷിണമായി കോൺ അളക്കുകയാണെങ്കിൽ അതിന്റെ വില ന്യൂനമാക്കും. അതുകൊണ്ട് $(-\pi, 0)$ എന്ന ഇടവേളയിൽ വരുന്ന ന്യൂനസംഖ്യയായ കോൺ ലഭിക്കുകയും ഇതിനെ arg z ആയി പരിഗണിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു.

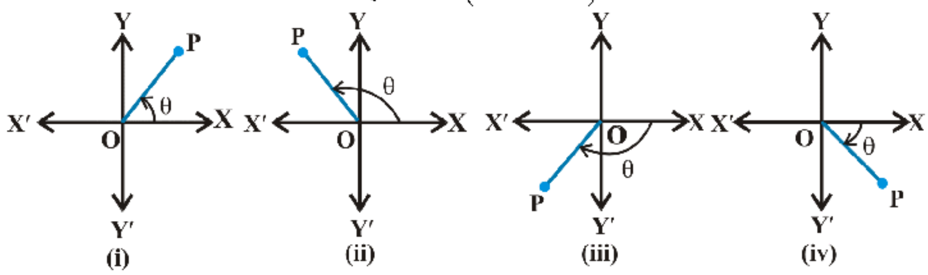
$1 + i$ എന്ന input നൽകി z_1 എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യ അടയാളപ്പെടുത്തുക. തുടർന്ന് സംഖ്യയും ആധാര ബിന്ദുവും തമ്മിൽ ബന്ധിപ്പിക്കുന്ന വര നിർമ്മിച്ച് വരയുടെ നീളം (കേവലവില) കണ്ടെത്തുക. x അക്ഷത്തിന്റെ അധിദിശയും വരയും തമ്മിലുള്ള കോൺ Angle tool ഉപയോഗിച്ച് കണക്കാക്കുക. ഇവിടെ കേവലവില 1.41 എന്നും കോൺ $45°$ യും ലഭിക്കുന്നു. അതായത് $1 + i$ എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യയെ $(1.41, 45°)$ എന്ന സൂചകസംഖ്യകൊണ്ട് അടയാളപ്പെടുത്താം. സമ്മിശ്രസംഖ്യയേ move tool ഉപയോഗിച്ച് മറ്റ് ചതുർത്താംശത്തിലേക്ക് മാറ്റി അവയുടെ പോളാർ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടെത്തുക. സമ്മിശ്ര സംഖ്യ 3, 4 ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ വരുമ്പോൾ x അക്ഷത്തിന്റെ അധിദിശയുമായി പ്രദക്ഷിണമായി അളന്നു നോക്കാം.

abs എന്ന കമാന്റുപയോഗിച്ച് ഒരു സമ്മിശ്ര സംഖ്യയുടെ കേവല വില കണ്ടെത്താം. z എന്ന സമ്മിശ്ര സംഖ്യയുടെ കേവല വില കാണാൻ abs(z) എന്ന് നൽകിയാൽ മതി.

ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്ന ചിത്രങ്ങളിൽ നിന്നും ഇത് വ്യക്തമാകും.

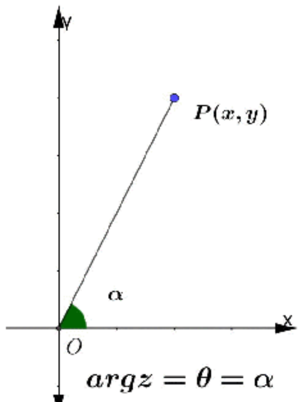


ചിത്രം 5.5 $(0 \le \theta < 2\pi)$

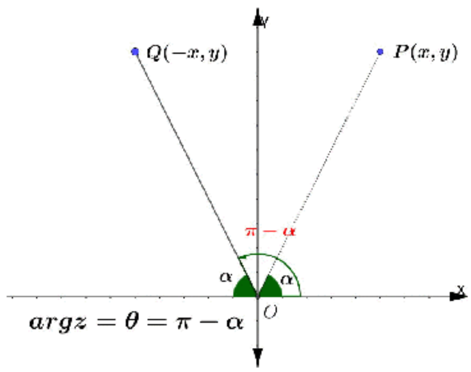


ചിത്രം 5.6 $(-\pi < \theta \le \pi)$

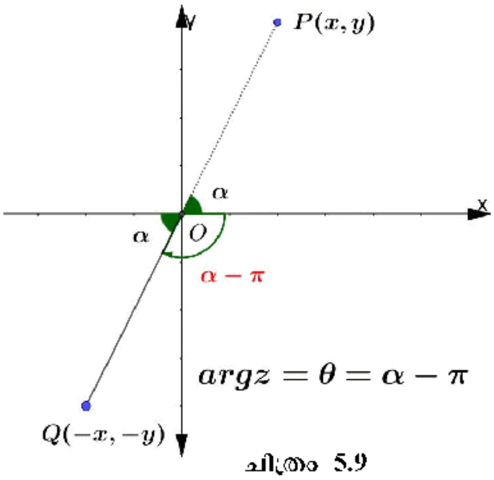
ഒരു സമ്മിശ്രസംഖ്യയുടെ രേഖീയഭാഗത്തിന്റെയും സാങ്കൽപ്പികഭാഗത്തിന്റെയും ചിഹ്നം അനുസരിച്ച് അവ ഏത് ചതുർത്ഥാംശത്തിലാണ് സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നത് എന്ന് മനസ്സിലാക്കാം. ഇവിടെ ചതുർത്ഥാംശം അനുസരിച്ച് പ്രഥമ ആർഗ്യുന്റ് വ്യത്യസ്തമാകുന്നു. ഇത് കണ്ടെത്താൻ $\tan\alpha = \left|\frac{y}{x}\right|$ എന്ന സമവാക്യത്തിന് പരിഹാരമായി വരുന്ന α വില കണക്കാക്കുന്നു. ഒന്നാം ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ $z = x + iy$ എന്ന സമ്മിശ്ര സംഖ്യകൾ വ്യത്യസ്ത ചതുർഥാംശത്തിൽ വരുന്നതും അവയുടെ ആർഗ്യുമെന്റിന്റെ മാറ്റം നിരീക്ഷിക്കാം.



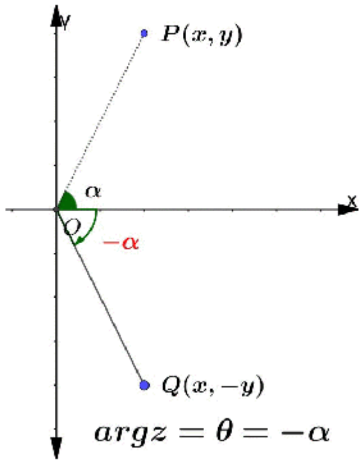
ചിത്രം 5.7



ചിത്രം 5.8



ചിത്രം 5.9



ചിത്രം 5.10

കുറിപ്പ്

- $z = i$ എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യയെ $z = 0 + i$ എന്നെഴുതാം. ഇത് x അക്ഷവുമായി ഉണ്ടാകുന്ന കോണളവ് $\frac{\pi}{2}$ ആണ്. അതുകൊണ്ട് i യുടെ പോളാർ രൂപം $\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$ ആണ്.
- $z = 1$ എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യയെ $z = 1 + i0$ എന്നെഴുതാം. ഇത് x അക്ഷവുമായി ഉണ്ടാകുന്ന കോണളവ് 0 ആണ്. അതുകൊണ്ട് 1 ന്റെ പോളാർ രൂപം, $\cos 0 + i \sin 0$ ആണ്.
- $z = -1$ എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യയെ $z = -1 + i0$ എന്നെഴുതാം. ഇത് x അക്ഷവുമായി ഉണ്ടാകുന്ന കോണളവ് π ആണ്. അതുകൊണ്ട് -1 ന്റെ പോളാർ രൂപം $\cos \pi + i \sin \pi$ ആണ്.

$z_1 = 1 + i\sqrt{3}$; $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$; $-z_2 = -1 + i\sqrt{3}$; $-z_1 = -1 - i\sqrt{3}$ എന്നീ സമ്മിശ്രസംഖ്യകൾ ഒരു സമ്മിശ്രതലത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തി അവയുടെ മറ്റ് പ്രത്യേകതകൾ പരിചയപ്പെടാം.

നിരീക്ഷണങ്ങൾ:

- $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ എന്നീ സമ്മിശ്രസംഖ്യകളുടെ ആർഗ്യുമെന്റുകൾ യഥാക്രമം $\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}$ മാണ്. ഇവ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം ചിഹ്നത്തിൽ മാത്രമാണ്.

ഇങ്ങനെയുള്ള സമ്മിശ്രസംഖ്യകളെ പരസ്പരം കോൺജുഗേറ്റ് (conjugate) എന്ന് പറയുന്നു. അതായത് $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ കോൺജുഗേറ്റാണ് $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ എന്നും, z_2 ന്റെ കോൺജ്യുഗേറ്റാണ് z_1 എന്ന് തിരിച്ചും പറയുന്നു. ഇതുപോലെ $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$, $-z_1 = -1 - i\sqrt{3}$ എന്നിവയും പരസ്പരം കോൺജുഗേറ്റുകളാണ്. പൊതുവായി $z = x + iy$ എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യയുടെ കോൺജുഗേറ്റ് $\bar{z} = x - iy$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു. $\bar{z} = x - iy$ എന്നത് $z = x + iy$ സമ്മിശ്രസംഖ്യയുടെ X –അക്ഷത്തിലെ പ്രതിബിംബമായിരിക്കും. അതായത് $\arg \bar{z} = -\arg z$

- $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $-z_1 = -1 - i\sqrt{3}$ ഇവയുടെ ആഗുമെന്റിന്റെ വ്യത്യാസം π ആണെന്ന് കാണാം. അതായത് $z = x + iy, -z = -x - iy$ എന്നീ രണ്ട് സമ്മിശ്രസംഖ്യകളുടെ ആഗുമെന്റിന്റെ വ്യത്യാസം π ആണെന്ന് പൊതുവായി പറയാം.

കുറിപ്പ്

- സമ്മിശ്രസംഖ്യകൾ z, z_1, z_2 ഇവയ്ക്ക് ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന പ്രസ്താവനകൾ ശരിയായിരിക്കും.

i. $z\bar{z} = |z|^2$

ii. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

iii. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$; $z_2 \neq 0$

iv. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \, \bar{z}_2$

v. $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$

vi. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$; $z_2 \neq 0$

ഉദാഹരണം : 5

$z = -\sqrt{3} - i$ എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യയുടെ പോളാർ രൂപമെഴുതുക.

പരിഹാരം

$-\sqrt{3} - i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ആയാൽ

$$r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$$

$$\tan\alpha = \left|\frac{-1}{\sqrt{3}}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$$

$z = -\sqrt{3} - i$ എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യ മൂന്നാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നതു കൊണ്ട്

$$\theta = \arg z = -\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}$$

$$-\sqrt{3} - i = 2\left(\cos\frac{-5\pi}{6} + i\sin\frac{-5\pi}{6}\right)$$

ഉദാഹരണം : 6

$z = -2 + i\,2\sqrt{3}$ എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യയുടെ പോളാർ രൂപമെഴുതുക.

പരിഹാരം

$$-2 + i2\sqrt{3} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$r = \sqrt{(-2)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4+12} = 4$$

$$\tan\alpha = \left|\frac{2\sqrt{3}}{-2}\right| = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$-2 + i2\sqrt{3}$ എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യ രണ്ടാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നതുകൊണ്ട്. $\theta = \arg z = \pi - \alpha = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

$$\Rightarrow -2 + i2\sqrt{3} = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

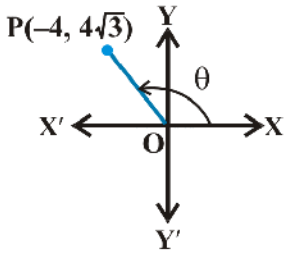
ഉദാഹരണം : 7

$\frac{-16}{1+i\sqrt{3}}$ എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യയെ പോളാർ രൂപത്തിൽ എഴുതുക.

പരിഹാരം

തന്നിരിക്കുന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യ $a + ib$ രൂപത്തിലല്ലാത്തതുകൊണ്ട്, ആ രൂപത്തിലേക്ക് മാറ്റാം. $\frac{-16}{1+i\sqrt{3}} = \frac{-16}{1+i\sqrt{3}} \times \frac{1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$

$$= \frac{-16\left(1-i\sqrt{3}\right)}{1-\left(i\sqrt{3}\right)^2} = \frac{-16\left(1-i\sqrt{3}\right)}{1+3} = -4\left(1-i\sqrt{3}\right) = -4+i4\sqrt{3}$$



ചിത്രം 5.11

ഇവിടെ; $-4 + i4\sqrt{3} = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$

$$r = \sqrt{(-4)^2 + \left(4\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{16+48} = 8$$

$$\tan\alpha = \left|\frac{4\sqrt{3}}{-4}\right| = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$-4 + i4\sqrt{3}$ എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യ രണ്ടാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്നതുകൊണ്ട്

$$\theta = \arg z = \pi - \alpha = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow -4 + i4\sqrt{3} = 8\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 5.2

I. ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യകളുടെ കേവലവിലയും, ആംപ്ലിറ്റ്യൂഡും കാണുക.

1. $z = -1 - i\sqrt{3}$ 2. $z = -\sqrt{3} + i$

II. തന്നിരിക്കുന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യകളുടെ പോളാർരൂപമെഴുതുക.

3. $1 - i$ 4. $-1 + i$ 5. $-1 - i$

6. -3 7. $\sqrt{3} + i$ 8. i

5.7 സമ്മിശ്രസംഖ്യകളുടെ ബീജഗണിതം

രണ്ട് സമ്മിശ്രസംഖ്യകളുടെ സങ്കലനം, വ്യവകലനം, ഗുണനം, ഹരണം എന്നീ അടിസ്ഥാന ആശയങ്ങൾ പരിചയപ്പെടാം.

5.7.1 രണ്ട് സമ്മിശ്രസംഖ്യകളുടെ സങ്കലനം

രണ്ട് സമ്മിശ്രസംഖ്യകളുടെ തുക രേഖീയഭാഗങ്ങളുടെ തുക രേഖീയഭാഗവും സാങ്കൽപ്പിക ഭാഗങ്ങളുടെ തുക സാങ്കൽപ്പിക ഭാഗവുമായി വരുന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യയാണ്. അതായത് $z_1 = a + ib, z_2 = c + id$ എന്നീ സമ്മിശ്രസംഖ്യകൾ പരിഗണിക്കുകയാണെങ്കിൽ, അവയുടെ തുക $z_1 + z_2$ എന്നത് $z_1 + z_2 = (a + c) + i(b + d)$ എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യയായി നിർവചിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണത്തിന്;

$(4 + i) + (1 + 3i)$

$$= (4 + 1) + i(1 + 3)$$
$$= 5 + 4i$$

സങ്കലനത്തിന്റെ ചില സ്വഭാവ സവിശേഷതകൾ

1. **സംവൃതിനിയമം:** രണ്ട് സമ്മിശ്രസംഖ്യകളുടെ തുക ഒരു സമ്മിശ്രസംഖ്യയായിരിക്കും. z_1, z_2 എന്നിങ്ങനെയുള്ള എല്ലാ സമ്മിശ്രസംഖ്യകളുടേയും തുകയായ $z_1 + z_2$ ഒരു സമ്മിശ്രസംഖ്യയായിരിക്കും.

2. **ക്രമനിയമം:** z_1, z_2 എന്നിങ്ങനെയുള്ള എല്ലാ സമ്മിശ്രസംഖ്യകൾക്കും $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ ആയിരിക്കും.

3. **സംയോജനനിയമം:** z_1, z_2, z_3 എന്നിങ്ങനെയുള്ള എല്ലാ സമ്മിശ്രസംഖ്യകൾക്കും $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ ആയിരിക്കും.

4. **അനന്യദത്തിന്റെ അസ്തിത്വം:** 0 ഒരു സമ്മിശ്രസംഖ്യയാണല്ലോ. z എന്ന ഏതൊരു സമ്മിശ്രസംഖ്യ 0 ത്തോട് കൂട്ടിയാലും, തുക z ആയിരിക്കും. z+0=0+z=z ആണ്.

   $z = x + iy;\ z + 0 = (x + iy) + (0 + i0) = (x + 0) + i(y + 0) = x + iy = z$

5. **വിപരീതത്തിന്റെ അസ്തിത്വം:**

   $z = a + ib$ എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യയോട് $-z = -a - ib$ എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യ കൂട്ടിയാൽ '0' കിട്ടുന്നു.

   അതിനാൽ $-z$ നെ z ന്റെ സങ്കലന വിപരീതം എന്നു വിളിക്കുന്നു.

   $z-a-ib$ എന്ന രീതിയിലുള്ള എല്ലാ സമ്മിശ്രസംഖ്യകൾക്കും $-z--a-ib$ എന്ന തരത്തിലുള്ള ഒരു സമ്മിശ്രസംഖ്യ നിർവ്വചിക്കുവാൻ കഴിയും. ഇവ രണ്ടിന്റെയും തുക സങ്കലനത്തിലെ അനന്യദമായിരിക്കുമെങ്കിൽ $[z\ (-z)-a+ib+(-a-ib)-0]$. $z-a-ib$ ന്റെ സങ്കലനത്തിലെ വിപരീതം $-z--a-ib$ എന്നും, തിരിച്ചും പറയാം.

5.7.2 രണ്ട് സമ്മിശ്രസംഖ്യകളുടെ വ്യവകലനം

z_1, z_2 എന്നീ സമ്മിശ്രസംഖ്യകൾ പരിഗണിച്ചാൽ, ഇവയുടെ വ്യവകലനം $z_1 - z_2$ എന്നത് $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$ എന്ന് നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണത്തിന് $(4+i)-(1+3i) = 4+i+(-1-3i) = 3-2i$

$(1+3i)-(4+i) = 1+3i+(-4-i) = -3+2i$

5.7.3 രണ്ട് സമ്മിശ്രസംഖ്യകളുടെ ഗുണനം

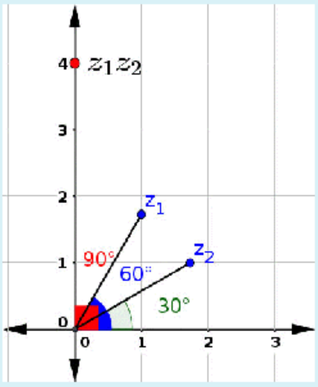
$z_1 = a+ib, z_2 = c+id$ എന്നീ രണ്ട് സമ്മിശ്രസംഖ്യകൾ പരിഗണിച്ചാൽ, അവയുടെ ഗുണനഫലം $z_1 z_2$ ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്നതുപൊലെ നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നു.

$z_1 = a + ib,\ z_2 = c + id$ എന്നിവയുടെ ഗുണനഫലം

$z_1.z_2 = (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$ എന്ന് നിർവചിക്കാം.

$z_1 z_2 = (ac - bd) + i(ad + bc)$

ഉദാഹരണത്തിന് $(3+i5)(2+i6) = (3\times 2 - 5\times 6) + i(3\times 6 + 5\times 2) = -24 + i28$



$1 + isqrt(3)$; $sqrt(3) + i$ എന്നീ input കൾ നൽകി $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = \sqrt{3} + i$ എന്നീ സമ്മിശ്രസംഖ്യകൾ അടയാളപ്പെടുത്താം. $\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$, $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ യഥാക്രമം z_1, z_2 ന്റെ പോളാർ സൂചക സംഖ്യകളാണ്. z_1, z_2 എന്ന input command നൽകി അവയുടെ ഗുണനഫലത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യ അടയാളപ്പെടുത്താം. Graph ൽ നിന്നും $z_1z_2 = 4i$ എന്ന സംഖ്യയുടെ പോളാർ സൂചക സംഖ്യകൾ $\left(4, \frac{\pi}{4}\right)$ എന്ന് കാണാൻ കഴിയും. അതായത് z_1z_2 ന്റെ കേവലവില z_1, z_2 ന്റെ കേവലവിലകളുടെ ഗുണനഫലമാണ്. അതുപോലെ z_1z_2 ന്റെ ആർഗ്യുമെന്റ് z_1, z_2 ഇവയുടെ ആർഗ്യുമെന്റുകളുടെ തുകയാണ്. സംഖ്യകൾ മാറ്റി നൽകി ഈ ആശയം ശരിയാണെന്ന് മനസ്സിലാക്കാം. $i * z - 1$, $-1 * z - 1$, $conjugate\ (z - 1)$ എന്നിവ അടയാളപ്പെടുത്തി ആർഗ്യുമെന്റിന്റെ മാറ്റങ്ങൾ നിരീക്ഷിക്കാം.

ഗുണനത്തിന്റെ ചില സ്വഭാവ സവിശേഷതകൾ

1. **സംവൃതിനിയമം:** രണ്ട് സമ്മിശ്രസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം ഒരു സമ്മിശ്രസംഖ്യയായിരിക്കും.

2. **ക്രമനിയമം:** z_1, z_2 എന്നിങ്ങനെയുള്ള എല്ലാ സമ്മിശ്രസംഖ്യകൾക്കും $z_1z_2 = z_2z_1$ ആയിരിക്കും.

3. **സംയോജനനിയമം:** z_1, z_2, z_3 എന്നിങ്ങനെയുള്ള എല്ലാ സമ്മിശ്രസംഖ്യകൾക്കും $z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3$ ആയിരിക്കും

4. **അനന്യദത്തിന്റെ അസ്തിത്വം:** $1 + i0$ എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യകൊണ്ട്, z എന്ന ഏതോരു സമ്മിശ്രസംഖ്യ ഗുണിച്ചാലും ഗുണനഫലം z തന്നെയായിരിക്കും. അതായത് $z(1+i0) = z = (1 + i0)z$

5. **വിപരീതത്തിന്റെ അസ്തിത്വം:** $z = a + ib, a \neq 0, b \neq 0$ എന്ന രീതിയിലുള്ള എല്ലാ സമ്മിശ്രസംഖ്യകൾക്കും $\frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{-b}{a^2+b^2}$ ($\frac{1}{z}$ അഥവാ z^{-1} എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു) എന്ന ഒരു സമ്മിശ്രസംഖ്യ നിർവചിക്കുവാൻ കഴിയും. ഇവ

തമ്മിൽ ഗുണിച്ചാൽ 1 കിട്ടുന്നു. അതിനാൽ z ന്റെ ഗുണന വിപരീതം $\dfrac{1}{z}$,

$z \neq 0$ എന്നും തിരിച്ച് $\dfrac{1}{z}$ ന്റെ ഗുണനവിപരീതം z എന്നും പറയാം.

6. **വിതരണനിയമം:** z_1, z_2, z_3 എന്നീ മൂന്ന് സമ്മിശ്രസംഖ്യകൾ പരിഗണിച്ചാൽ

(a) $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

(b) $(z_1 + z_2)z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$

ഉദാഹരണം : 8

$(-\sqrt{3} + \sqrt{-2})(2\sqrt{3} - i)$ എന്നതിനെ $a + ib$ രൂപത്തിൽ എഴുതുക

പരിഹാരം

$$(-\sqrt{3} + \sqrt{-2})(2\sqrt{3} - i) = (-\sqrt{3} + i\sqrt{2})(2\sqrt{3} - i)$$

$$= -6 + \sqrt{3}i + 2\sqrt{6}i - \sqrt{2}i^2 = (-6 + \sqrt{2}) + \sqrt{3}(1 + 2\sqrt{2})i$$

5.7.4 രണ്ട് സമ്മിശ്രസംഖ്യകളുടെ ഹരണം

z_1, z_2 എന്നീ സമ്മിശ്രസംഖ്യകൾ പരിഗണിക്കുകയാണെങ്കിൽ, ഇവയുടെ ഹരണം

$\dfrac{z_1}{z_2} = z_1\left(\dfrac{1}{z_2}\right)$ എന്ന് നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നു; $z_2 \neq 0$

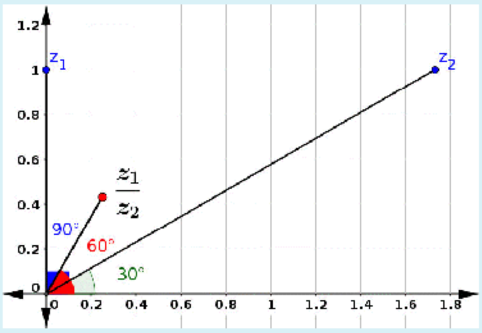
ഉദാഹരണത്തിന് $z_1 = 6 + 3i, z_2 = 2 - i$

$$\frac{z_1}{z_2} = (6+3i)\left(\frac{1}{2-i}\right)$$

$$= (6+3i)\left(\frac{2}{2^2+(-1)^2} + i\frac{-(-1)}{2^2+(-1)^2}\right)$$

$$= (6+3i)\left(\frac{2+i}{5}\right) = \frac{1}{5}(12-3+(6+6)) = \frac{1}{5}(9+12i)$$

$z_1 = i,\ z_2 = \sqrt{3} + i$ എന്നീ സമ്മിശ്രസംഖ്യകൾ input ൽ command കൾ നൽകി അടയാളപ്പെടുത്താം. ഇവയുടെ പോളാർ സൂചകസംഖ്യകൾ യഥാക്രമം $\left(1, \frac{\pi}{2}\right), \left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ ആണ്. $\frac{z_1}{z_2}$ എന്ന command input ൽ നൽകി ഹരണഫലത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യ അടയാളപ്പെടുത്താം. Graphic ൽ നിന്നും $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$ ന്റെ പോളാർ സൂചകസംഖ്യകൾ $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8}\right)$ എന്നു കാണാൻ കഴിയും. അതായത് $\frac{z_1}{z_2}$ ന്റെ കേവലവില z_1 ന്റെ ആർഗ്യുമെന്റിൽ നിന്നും z_2 ന്റെ ആർഗ്യുമെന്റ് കുറക്കുന്നതാണ്. സംഖ്യകൾ മാറ്റിനൽകി ഈ ആശയം ശരിയാണെന്ന് മനസ്സിലാക്കാം.



ഉദാഹരണം : 9

$2-3i$ എന്നതിന്റെ ഗുണനവിപരീതം കാണുക

പരിഹാരം

$$\frac{1}{2-3i} = \frac{1}{2-3i} \times \frac{2+3i}{2+3i} = \frac{2+3i}{4+9} = \frac{2+3i}{13} = \frac{2}{13} + i\frac{3}{13}$$

ഉദാഹരണം : 10

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യകളെ $a + ib$ രൂപത്തിൽ എഴുതുക

(i) $\frac{5+\sqrt{2}i}{1-\sqrt{2}i}$, (ii) i^{35}

പരിഹാരം

(i) $$\frac{5+\sqrt{2}i}{1-\sqrt{2}i} = \frac{5+\sqrt{2}i}{1-\sqrt{2}i} \times \frac{1+\sqrt{2}i}{1+\sqrt{2}i}$$

$$= \frac{5+5\sqrt{2}i+\sqrt{2}i-2}{1+2} = \frac{3+6\sqrt{2}i}{3} = 1+2\sqrt{2}i$$

(ii) $$i^{35} = \frac{1}{i^{35}} = \frac{1}{i^3} = \frac{1}{-i} = -\frac{1}{i} \times \frac{i}{i} = i$$

5.8 സർവസമവാക്യങ്ങൾ

z_1, z_2 എന്നീ പൊതുവായ സമ്മിശ്രസംഖ്യകൾക്ക് $(z_1+z_2)^2 = z_1^2 + z_2^2 + 2z_1z_2$ എന്ന് നമുക്ക് തെളിയിക്കാം

തെളിവ്

$$(z_1+z_2)^2 = (z_1+z_2)(z_1+z_2)$$
$$= (z_1+z_2)z_1 + (z_1+z_2)z_2$$
$$= z_1^2 + z_2z_1 + z_1z_2 + z_2^2$$
$$= z_1^2 + z_2^2 + 2z_1z_2$$

ഇതുപൊലെ ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്ന സർവ്വസമവാക്യങ്ങളും തെളിയിക്കാവുന്നതാണ്.

(i) $(z_1-z_2)^2 = z_1^2 + z_2^2 - 2z_1z_2$

(ii) $(z_1+z_2)^3 = z_1^3 + 3z_1^2z_2 + 3z_1z_2^2 + z_2^3$

(iii) $(z_1-z_2)^3 = z_1^3 - 3z_1^2z_2 + 3z_1z_2^2 - z_2^3$

(iv) $z_1^2 - z_1^2 = (z_1+z_2)(z_1-z_2)$

ഇങ്ങനെ രേഖീയസംഖ്യകൾ പാലിക്കുന്ന പല സർവസമവാക്യങ്ങളും സമ്മിശ്രസംഖ്യകളും പാലിക്കുന്നതായി കാണാം.

ഉദാഹരണം : 11

$(5-3i)^3$ എന്നതിനെ $a + ib$ രൂപത്തിൽ എഴുതുക

പരിഹാരം

$$(5-3i)^3 = 5^3 - 3\times 5^2(3i) + 3\times 5(3i)^2 - (3i)^3$$
$$= 125 - 225i - 135 - 27i = -10 - 198i$$

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 5.3

I. ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യകളെ $a+ib$ രൂപത്തിൽ

1. $(5i)\left(-\frac{3}{5}i\right)$
2. $i^9 + i^{19}$
3. i^{39}
4. $3(7+7i)+i(7+7i)$
5. $(1-i)-(-1+6i)$
6. $\left(\frac{1}{5}+i\frac{2}{5}\right)-\left(4+\frac{5}{2}i\right)$
7. $\left[\left(\frac{1}{3}+i\frac{7}{3}\right)+\left(4+\frac{1}{3}i\right)\right]-\left(-\frac{4}{3}+i\right)$
8. $(1-i)^4$
9. $\left[\frac{1}{3}+3i\right]^3$
10. $\left[-2-\frac{1}{3}i\right]^3$

11 മുതൽ 13 വരെയുള്ള സമ്മിശ്രസംഖ്യകളുടെ ഗുണനവിപരീതം കാണുക

11. $4-3i$ 12. $\sqrt{5}+3i$ 13. $-i$

14. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന വാക്യത്തെ $a+ib$ രൂപത്തിൽ എഴുതുക.

$$\frac{\left(3+i\sqrt{5}\right)\left(3-i\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}i\right)-\left(\sqrt{3}-i\sqrt{2}\right)}$$

5.9. സമ്മിശ്രസംഖ്യയുടെ വർഗമൂലം

ഒരു സമ്മിശ്രസംഖ്യയുടെ വർഗമൂലം കണ്ടുപിടിക്കുന്നത് ഒരു ഉദാഹരണത്തിലൂടെ പരിചയപ്പെടാം.

ഉദാഹരണം : 11

$-7 - 24i$ യുടെ വർഗമൂലം കാണുക.

പരിഹാരം

$x+iy=\sqrt{-7-24i}$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

$(x+iy)^2 = -7 - 24i$

$\Rightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = -7 - 24i$

രേഖീയഭാഗവും സാങ്കൽപ്പികഭാഗവും സമീകരിച്ചാൽ

$$x^2 - y^2 = -7;\ 2xy = -24 \text{ --------(1)}$$

സർവസമവാക്യം ഉപയോഗിച്ച്

$$\left(x^2+y^2\right)^2 = \left(x^2-y^2\right)^2+\left(2xy\right)^2$$
$$= 49+576$$
$$= 625$$

അങ്ങനെ; $x^2 + y^2 = 25$ -------(2)

(1), (2) ഉപയോഗിച്ച്

$x^2 = 9;\ y^2 = 16$

$$\Rightarrow x = \pm 3,\ y = \pm 4$$

എന്നാൽ xy യുടെ വില ന്യൂനസംഖ്യയായതുകൊണ്ട്

$x = 3, y = -4$ അല്ലെങ്കിൽ $x = -3, y = 4$

അപ്പോൾ $\sqrt{-7-24i} = 3 - 4i; -3 + 4i$

ഉദാഹരണം : 12

$-2 + i2\sqrt{3}$ യുടെ വർഗമൂലം കാണുക.

പരിഹാരം

$$\sqrt{-2 + i2\sqrt{3}} = x + iy$$
$$-2 + i\ 2\sqrt{3} = x^2 - y^2 + 2xyi$$
$$x^2 - y^2 = -2;\ 2\sqrt{3} = 2xy \quad \text{-----------(2)}$$
$$\left(x^2 + y^2\right)^2 = \left(x^2 - y^2\right)^2 + \left(2xy\right)^2$$
$$= 4 + 12 = 16$$
$$x^2 + y^2 = 4 \quad \text{-----------(2)}$$

(1), (2) ഉപയോഗിച്ച്

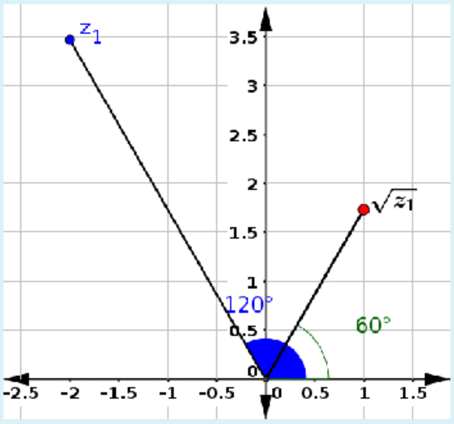
$$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$
$$y^2 = 3 \Rightarrow y = \pm\sqrt{3}$$

ഇവിടെ xy അധിസംഖ്യയായതുകൊണ്ട്

$\sqrt{-2 + i2\sqrt{3}} = 1 + i\sqrt{3}$ അല്ലെങ്കിൽ $-1 - i\sqrt{3}$

ഒരു സമ്മിശ്രസംഖ്യയുടെ വർഗമൂലം കണ്ടുപിടിക്കുമ്പോൾ അതിന്റെ കേവലവിലക്കും പ്രഥമ ആർഗ്യുമെന്റിനും ഉണ്ടാകുന്ന മാറ്റത്തെക്കുറിച്ച് ഒരു ഉദാഹരണത്തിലൂടെ പരിചയപ്പെടാം. ഉദാഹരണം 6 ലെ സമ്മിശ്രസംഖ്യ എടുക്കാം.

–2 + i * 2sqrt (3) എന്ന input നൽകി $z_1 = -2 + i2\sqrt{3}$ എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യ അടയാളപ്പെടുത്താം. Graphics view ൽ നിന്നും z_1 പോളാർ സൂചകസംഖ്യ $\left(4, \frac{2\pi}{3}\right)$ ആണെന്ന് കാണാം. sqrt (z – 1) എന്ന input നൽകി $\sqrt{z_1}$ നെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യ അടയാളപ്പെടുത്താം. $\sqrt{z_1} = 1 + i\sqrt{3}$ ന്റെ പോളാർ സൂചകസംഖ്യകൾ $\left(2, \frac{2\pi}{3}\right)$ ആണെന്ന്



കാണാം. അതായത് $\sqrt{z_1}$ ന്റെ ആഗുമെന്റ് z_1 ന്റെ ആഗുമെന്റിന്റെ പകുതിയായിരിക്കും. സമ്മിശ്രസംഖ്യ മാറ്റി നൽകി ഈ ആശയം ശരിയാണെന്ന് മനസ്സിലാക്കാം. അതുപോലെ $-\left(\sqrt{z_1}\right) = -1 - i\sqrt{3}$, z_1 ന്റെ മറ്റൊരു വർഗമൂലമാണ്.

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 5.4

ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്നവയുടെ വർഗമൂലം കണ്ടുപിടിക്കുക.

1. $-15 - 8i$
2. $-8 - 6i$
3. $1 - i$
4. $-i$
5. i
6. $1 + i$

കൂടുതൽ ഉദാഹരണങ്ങൾ

ഉദാഹരണം : 13

$\frac{(3-2i)(2+3i)}{(1+2i)(2-i)}$ ന്റെ കോൺജുഗേറ്റ് (conjugate) കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$$\frac{(3-2i)(2+3i)}{(1+2i)(2-i)}$$

$$= \frac{6+9i-4i+6}{2-i+4i+2} = \frac{12+5i}{4+3i} \times \frac{4-3i}{4-3i}$$

$$= \frac{48-36i+20i+15}{16+9} = \frac{63-16i}{25} = \frac{63}{25} - \frac{16}{25}i$$

$\frac{(3-2i)(2+3i)}{(1+2i)(2-i)}$ ന്റെ കോൺജുഗേറ്റ് $\frac{63}{25} + \frac{16}{25}i$ ആണ്.

ഉദാഹരണം : 14

ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യകളുടെ കേവലവിലയും, ആംപ്ലിറ്റ്യൂഡും കണ്ടെത്തുക.

1. $\frac{1+i}{1-i}$ 2. $\frac{1}{1+i}$

പരിഹാരം

1. $$\frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{1-1+2i}{1+1} = i$$

$\frac{1+i}{1-i}$ യുടെ കേവലവില 1, ആംപ്ലിറ്റ്യൂഡും $\frac{\pi}{2}$.

2. $\dfrac{1}{1+i}=\dfrac{1}{1+i}\times\dfrac{1-i}{1-i}=\dfrac{1-i}{1+1}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$

$$r=\sqrt{(\frac{1}{2})^2+(-\frac{1}{2})^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan\alpha=\left|\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right|=1\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{4}$$

$\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$ എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യ നാലാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നതു കൊണ്ട്

$$\theta=\arg z=-\alpha=-\frac{\pi}{4}$$

$\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$ യുടെ കേവലവില $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, ആപ്ലിറ്റ്യൂഡ് = $-\dfrac{\pi}{4}$

ഉദാഹരണം : 15

$x+iy=\dfrac{a+ib}{a-ib}$ ആയാൽ എന്ന് $x^2+y^2=1$ തെളിയ്ക്കുക

പരിഹാരം

ഇവിടെ $x+iy=\dfrac{a+ib}{a-ib}\times\dfrac{a+ib}{a+ib}=\dfrac{(a+ib)(a+ib)}{a^2+b^2}$

$$=\frac{(a+ib)(a+ib)}{a^2+b^2}=\frac{a^2-b^2+2abi}{a^2+b^2}$$

$$=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}+\frac{2ab}{a^2+b^2}i$$

ഇതുപോലെ; $x-iy=\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}-\dfrac{2ab}{a^2+b^2}i$

$$x^2+y^2=(x+iy)(x-iy)\ =\frac{(a^2-b^2)^2}{(a^2+b^2)^2}+\frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)^2}=\frac{(a^2+b^2)^2}{(a^2+b^2)^2}=1$$

ഉദാഹരണം : 16

$\frac{3+2i\sin\theta}{1-2i\sin\theta}$ ഒരു രേഖീയസംഖ്യ ആയാൽ θ യുടെ വില കണ്ടെത്തുക.

പരിഹാരം

ഇവിടെ; $\frac{3+2i\sin\theta}{1-2i\sin\theta} = \frac{(3+2i\sin\theta)(1+2i\sin\theta)}{(1-2i\sin\theta)(1+2i\sin\theta)}$

$$= \frac{3+6i\sin\theta+2i\sin\theta-4\sin^2\theta}{1+4\sin^2\theta} \quad = \frac{3-4\sin^2\theta}{1+4\sin^2\theta} + i\,\frac{8\sin\theta}{1+4\sin^2\theta}$$

ഇത് ഒരു രേഖീയസംഖ്യ ആയതിനാൽ

$$\frac{8\sin\theta}{1+4\sin^2\theta} = 0 \Rightarrow \sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = n\pi, n \in Z$$

ഉദാഹരണം : 17

$z = \frac{i-1}{\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}}$ എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യയെ പോളാർരൂപത്തിലേക്ക് മാറ്റുക

പരിഹാരം

ഇവിടെ; $z = \frac{i-1}{\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{i-1}{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$$= \frac{2(i-1)}{1+i\sqrt{3}} \times \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} = \frac{2(i+\sqrt{3}-1+\sqrt{3}i)}{1+3}$$

$$= \frac{2(\sqrt{3}-1+(\sqrt{3}+1)i)}{4} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}i$$

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$r=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{2\left((\sqrt{3})^2+1\right)}{4}}=\sqrt{2}$$

$$\tan\alpha=\left|\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right|=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\Rightarrow\alpha=45^\circ+30^\circ=75^\circ=\frac{5\pi}{12}$$

$\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{\sqrt{3}+1}{2}i$ എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യ ഒന്നാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നതു കൊണ്ട്

$$0=\arg z=\alpha=\frac{5\pi}{12}$$

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{\sqrt{3}+1}{2}i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$$

കൂടുതൽ പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ

1. $\left[i^{18}+\left(\frac{1}{i}\right)^{25}\right]^3$ ന്റെ വില കണ്ടെത്തുക.

2. z_1, z_2 എന്നീ ഏതെങ്കിലും രണ്ട് സമ്മിശ്രസംഖ്യകൾ പരിഗണിക്കുകയാണെങ്കിൽ $\text{Re}(z_1z_2)=\text{Re}\,z_1\,\text{Re}\,z_2-\text{Im}\,z_1\,\text{Im}\,z_2$ എന്ന് തെളിയിക്കുക

3. $\left(\frac{1}{1-4i}-\frac{2}{1+i}\right)\left(\frac{3-4i}{5+i}\right)$ നെ സാമാന്യ രൂപത്തിലേക്ക് മാറ്റുക ($a+ib$ രൂപം)

4. $x-iy=\sqrt{\frac{a-ib}{c-id}}$ ആയാൽ $\left(x^2+y^2\right)^2=\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക

5. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യകളുടെ പോളാർ രൂപമെഴുതുക.

   (i) $\frac{1+7i}{(2-i)^2}$ (ii) $\frac{1+3i}{1-2i}$

6 മുതൽ 9 വരെയുള്ള സമവാക്യങ്ങൾക്ക് പരിഹാരം കണ്ടെത്തുക.

6. $3x^2 - 4x + \frac{20}{3} = 0$

7. $x^2 - 2x + \frac{3}{2} = 0$

8. $27x^2 - 10x + 1 = 0$

9. $21x^2 - 28x + 10 = 0$

10. $z_1 = 2 - i, z_2 = 1 + i$ ആയാൽ $\left|\frac{z_1 + z_2 + 1}{z_1 - z_2 + i}\right|$ കാണുക.

11. $a + ib = \frac{(x+i)^2}{2x^2+1}$ ആയാൽ $a^2 + b^2 = \frac{(x^2+1)^2}{(2x^2+1)^2}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക

12. $z_1 = 2 - i, z_2 = -2 + i$ ആയാൽ

(i) $\text{Re}\left(\frac{z_1 z_2}{\overline{z_1}}\right)$ കണ്ടെത്തുക (ii) $\text{Im}\left(\frac{1}{z_1 \overline{z_1}}\right)$ കണ്ടെത്തുക

13. $\frac{1+2i}{1-3i}$ എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യയുടെ കേവലവിലയും, ആർഗ്യുമെന്റും കണ്ടെത്തുക.

14. $(x - iy)(3 + 5i)$ എന്നത് $-6-24i$ ന്റെ കോൺജുഗേറ്റ് ആയാൽ x, y എന്നീ രേഖീയ സംഖ്യകൾ കണ്ടെത്തുക.

15. $\frac{1+i}{1-i} - \frac{1-i}{1+i}$ ന്റെ കേവലവില കണ്ടെത്തുക.

16. $(a + iy)^3 = u + iv$ ആയാൽ $\frac{u}{x} + \frac{v}{y} = 4(x^2 - y^2)$ എന്ന് തെളിയിക്കുക

17. α, β എന്നീ വ്യത്യസ്ത സമ്മിശ്രസംഖ്യകളിൽ $|\beta| = 1$ ആയാൽ $\left|\frac{\beta - \alpha}{1 - \overline{\alpha}\beta}\right|$ കാണുക.

18. $|1 - i|^x = 2^x$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ പൂജ്യമല്ലാത്ത പൂർണസംഖ്യാ പരിഹാരം കണ്ടെത്തുക.

19. $(a + ib)(c + id)(e + if)(g + ih) = A + iB$ ആയാൽ

$(a^2+b^2)(c^2+d^2)(e^2+f^2)(g^2+h^2)=A^2+B^2$ എന്ന് തെളിയിക്കുക

20. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^m=1$ ആയാൽ 'm' ന്റെ ഏറ്റവും ചെറിയ പൂർണ്ണ അധിസംഖ്യാവില കണ്ടെത്തുക.

സംഗ്രഹം

- a, b ഇവ രേഖീയ സംഖ്യയായാൽ, $a+ib$ രൂപത്തിൽ എഴുതാവുന്ന സംഖ്യകളെ സമ്മിശ്രസംഖ്യകൾ എന്ന് പറയുന്നു. ഈ സമ്മിശ്രസംഖ്യയുടെ രേഖീയ ഭാഗം 'a' യും സാങ്കൽപ്പിക ഭാഗം 'b' യും ആണ്.
- $z_1 = a+ib$, $z_2 = c+id$, ആയാൽ
  (i) $z_1+z_2 = (a+c)+i(b+d)$
  (ii) $z_1 z_2 = (ac-bd)+i(ad+bc)$
- പൂജ്യമല്ലാത്ത ഒരു സമ്മിശ്രസംഖ്യ $z=a+ib$ $(a\neq 0, b\neq 0)$ യുടെ ഗുണന വിപരീതം $\frac{1}{z}$ അഥവാ z^{-1} എന്നത് $\frac{a}{a^2+b^2}+i\frac{-b}{a^2+b^2}$ എന്ന സമ്മിശ്ര സംഖ്യയാണ്. അതായത് $(a+ib)\left(\frac{a^2}{a^2+b^2}+i\frac{-b}{a^2+b^2}\right)=1+i0=1$.
- ഏതൊരു പൂർണസംഖ്യ k ക്കും, $i^{4k}=1$, $i^{4k+1}=i$, $i^{4k-2}=-1$, $i^{4k-3}=-i$ ആയിരിക്കും.
- $z=a+ib$ എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യയുടെ കൊൺജുഗേറ്റ് $\overline{z}=a-ib$ ആണ്.
- $z=x+iy$ യുടെ സമ്മിശ്രസംഖ്യയുടെ പോളാർ രൂപം $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$, ആണ്. ഇവിടെ $r=\sqrt{x^2+y^2}$ (z ന്റെ കേവലവില), $\cos\theta=\frac{x}{r}$, $\sin\theta=\frac{y}{r}$. (θ എന്നത് z ന്റെ ആർഗ്യുമെന്റുമാണ്). $-\pi<\theta\leq\pi$, എന്ന ഇടവേളയിലെ θ യുടെ വിലയെ പ്രിൻസിപ്പൽ ആർഗ്യുമെന്റ് എന്ന് പറയുന്നു.
- കൃതി n ആയ ഒരു ബഹുപദസമവാക്യത്തിന് n പരിഹാരമൂല്യങ്ങൾ ഉണ്ട്.
- $a, b, c \in \mathrm{R}$, $a\neq 0$, $b^2-4ac<0$ ആയ $ax^2+bx+c=0$, എന്ന രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യങ്ങളുടെ പരിഹാരം $x=\frac{-b\pm\sqrt{4ac-b^2}\,i}{2a}$ ആണ്.

ചരിത്രക്കുറിപ്പ്

ഗ്രീക്കുകാരാണ് ഒരു ന്യൂനസംഖ്യയുടെ വർഗമൂലം രേഖീയസംഖ്യാ സമ്പ്രദായത്തിൽ നിലനിൽക്കില്ല എന്ന വസ്തുത തിരിച്ചറിഞ്ഞത്. പക്ഷെ ഈ വസ്തുത ആദ്യമായി വിശദീകരിച്ചതിന്റെ അംഗീകാരം ലഭിച്ചത് ഭാരതീയ ഗണിതശാസ്ത്ര Ú ³ al nh œ\ nW v(Mahavira (850)). ഒരു വസ്തുവിന്റെ സ്വഭാവം പോലെ ന്യൂന അളവ് ഒരു അളവിന്റെയും വർഗമല്ല, അതുകൊണ്ട് വർഗമൂലമില്ല എന്ന് "ഗണിതസാര സംഗ്രഹ" (Ganithasara Sangraha) എന്ന അദ്ദേഹത്തിന്റെ കൃതിയിൽ പരാമർശിച്ചിട്ടുണ്ട്. ഭാസ്ക്കര എന്ന മറ്റൊരു ഭാരതീയ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞൻ 1150–ൽ രചിച്ച ബീജഗണിത എന്ന കൃതിയിൽ "വർഗം അല്ലാത്തതുകൊണ്ട് ഒരു ന്യൂനഅളവിനും വർഗമൂലം ഉണ്ടാകില്ല." എന്ന് എഴുതിയിട്ടുണ്ട്. കാർഡാൻ (1545) $x + y = 10, xy = 40$ എന്ന പ്രശ്നപരിഹാരം പരിഗണിക്കുകയുണ്ടായി. ഇതിന്റെ പരിഹാരമായ $x = 5 + \sqrt{-15}$ നും $y - 5 \quad \sqrt{-15}$ നും അർത്ഥമില്ലാത്ത സംഖ്യകളാണെന്ന് പറഞ്ഞ് ഉപേക്ഷിച്ചു. ന്യൂനസംഖ്യയുടെ വർഗമൂലം ഉണ്ടെന്ന് അംഗീകരിക്കുകയാണെങ്കിൽ ഒരു ബഹുപദത്തിന്റെ കൃതിയുടെ എണ്ണം അനുസരിച്ചുള്ള പരിഹാരമൂല്യങ്ങൾ ലഭിക്കും എന്ന് ആൽബർട്ട് ഗിറാഡിന്റെ (ഏകദേശം 1625) പ്രസ്താവിച്ചു. ഓയിലറാണ് $\sqrt{-1}$ എന്നതിന് ആദ്യമായി i എന്ന ചിഹ്നം നൽകി. ഡബ്ല്യു. എച്ച്. ഹാമിൽട്ടൻ $a + ib$ എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യയെ (a, b) എന്ന രേഖീയ ക്രമജോഡിയായി പരിഗണിക്കുകയും അങ്ങനെ സമ്മിശ്രസംഖ്യകൾക്ക് ഗണിതശാസ്ത്രപരമായ നിർവചനം ലഭിക്കുകയും സാങ്കൽപ്പികസംഖ്യ എന്ന പ്രയോഗം ഒഴിവാക്കാനും സാധിച്ചു.