अध्याय **7**

बारंबारिता बंटन तालिका और आलेख

(FREQUENCY DISTRIBUTION TABLES AND GRAPHS)

7.0 परिचय

जगदीश T.V. पर खेल समाचार देख रहा था। टी.वी.स्क्रीन पर विभिन्न देशों के ओलंपिक खेल वर्ष 2012 के दिखा रहा था, विभिन्न पदकों के बारे में ।

ओलंपिक 2012 - पदकों की तालिका

पद	देश	सोना	चाँदी	कांसा	कुल
1	अमेरिका	46	29	29	104
2	चीन	38	27	23	88
3	ग्रेट ब्रिटेन	29	17	19	65
4	रशिया	24	26	32	82
5	कोरिया	13	8	7	28

उपरोक्त तालिका पाँच प्रमुख देशों के द्वारा प्राप्त (ओलंपिक 2012) को दर्शाता है।

सूचना, संख्या सूचक या शब्दीक सूचक या आलेखिय सूचक यह निर्णय लेने में या उपसंहार के आँकडों को कहते हैं ।

- किस देश को सबसे अधिक पदक मिले ?
- किस देश को सबसे अधिक काँसे के पदक मिले ?
- दिए गए दलों की तालिका से और तीन प्रश्न बनाओं ।

इसे कीजिए :

तीन उदाहरण दीजिए जिसमें आँकडें शब्दीक हो और तीन में अंक हो ।

SCERT TELANGANA

7.1 केन्द्रीय प्रवृत्ति का बुनियादी मापन

जब हम आंकड़ों को इकट्ठा करते हैं तब हमें उपसंहार की आवश्यकता पड़ती है। बुनियादी आंकड़ों के लिए कभी हम कुल, कभी औसत का उपयोग करते हैं। पिछली कक्षा में हमने पढ़ा कि बुनियादी मापन जैसे मध्यमान, बहुलक और माध्यिमका, उसका स्मरण करेंगे।

7.1.1 मध्यमान (Arithmatic Mean)

समानांतर माध्य या मध्यमान केन्द्रीय प्रवृत्ति का सबसे सामान्य और विस्तृत रूप से उपयोगी मापन है। सांख्यिकीय दलों का मध्यमान सभी राशियों के योग को राशियों की संख्या से भाग देने पर प्राप्त भागफल होता है।

> $\sum x_i$ सूचित करता है कि x_i का योग और 1 से n तक का मूल्य

समानांतर माध्य $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\ldots. x_n$ में

समानांतर माध्य $= \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots\ldots + x_n}{N}$

$\bar{x} = \dfrac{\sum x_i}{N}$ (संक्षिप्त वर्णन)

उदाहरण 1: अशोक को विभिन्न विषयों में इकाई परीक्षा में 20, 11, 21, 25, 23 और 14 इस प्रकार अंक मिले तो इन अंको का समानांतर माध्य ज्ञात कीजिए ।

हल: निरीक्षण = 20, 11, 21, 25, 23 and 14

समानांतर माध्य $\bar{x} = \dfrac{\sum x_i}{N}$

$= \dfrac{20+11+21+25+23+14}{6} = \dfrac{114}{6}$

$\bar{x} = 19$

उदाहरण 2: 7 निरीक्षणों का मध्यमान 32 पाया गया । यदि एक और निरीक्षण 48 दलों में जोड़ा गया तो वास्तविक मध्यमान क्या होगा ?

हल : 7 निरीक्षण का मध्यमान $\bar{x} = 32$

7 निरीक्षणों का योग $\sum x_i = 32 \times 7 = 224$

जोड़ा गया निरीक्षण $= 48$

8 निरीक्षणों का योग $\sum x_i = 224 + 48 = 272$

$\therefore$ 8 निरीक्षणों का मध्यमान $\bar{x} = \dfrac{\sum x_i}{N} = \dfrac{272}{8} = 34$

SCERT TELANGANA

उदाहरण 3: 25 व्यक्तियों की मध्य आयु 38 वर्ष है एक क्लब की यदि 5 व्यक्तियों की मध्य आयु 42 क्लब में छूट गये तो उपस्थित मध्य आयु क्लब के व्यक्तियों की होगी?

हल: 25 व्यक्तियों की माध्य आयु एक क्लब की = 38 वर्ष

25 व्यक्तियों की कुल आयु = 38×25 = 950

5 व्यक्तियों की मध्य आयु (जो क्लब में छूट गये) = 42 वर्ष

5 व्यक्तियों की कुल आयु = 42×5 = 210

शेष 20 व्यक्तियों की कुल आयु = $950 - 210$ = 740

$\therefore$ उपस्थित व्यक्तियों की मध्य आयु $\bar{x} = \dfrac{\sum x_i}{N} = \dfrac{740}{20} = 37$ वर्ष

उदाहरण 4: 9 निरीक्षणों का मध्यमान 45 लिया गया। गलती से एक निरीक्षण को 24 के 42 पर अंकित किया गया तो सही मध्यमान ज्ञात कीजिए।

हल: 9 निरीक्षणों का मध्यमान = 45

9 निरीक्षणों का योग = $45 \times 9 = 405$

गणना करते समय 24 के बदले 42 लिया जाय ।

$\therefore$ 9 निरीक्षणों का सही मध्यमान = $405 - 42 + 24$ = 387

9 निरीक्षणों का वास्तविक मध्यमान = $\dfrac{\sum x_i}{N} = \dfrac{387}{9} = 43$

टिप्पणी,

- उपर के उदाहरण से हम यह देखते हैं कि समानांतर माध्य का निर्धारण उनके डाटा के मूल्य पर रहता है।
- समानांतर माध्य संख्याएँ और निरीक्षणों के मूल्यों दोनों पर आधारित रहता है।
- यह अद्वितीय रूप से सभी निरीक्षणों पर आधारित है।
- जब सभी निरीक्षणों के डाटा बढ़ते हैं और घटते हैं तब माध्यामान भी बढ़ते हैं और घटते हैं उसी संख्या से।
- जब सभी निरीक्षण डाटा से गुणा या भाग किसी संख्या से करते हैं तब माध्य भी गुणा और भाग देते हैं उसी संख्या से।

7.1.2 मध्यमान विचलन पद्धति से :

दिये गये डाटा में पाँच निरीक्षण 7, 10, 15, 21, 27 हैं जब अध्यापिका मध्यमान ज्ञात करने को कहती है बिना वास्तविक हल के तीन विद्यार्थी कमल, नीलिमा और लेखा उत्तर देते हैं।

कमल अनुमान लगाता है कि इसका मूल्य17 से अधिक या कम होगा।

नीलिमा अनुमान लगाता है कि दिये गये क्रम में बीच की संख्या 15 होगी।

लेखा सभी निरीक्षणों को जोड़ कर उनकी संख्या से विभाजित करती है। तो संख्या 16 होगा।

हम इन सभी अनुमान को अनुमान माध्य या कम्पित माध्य से सूचित करेंगे। ‘A’.

अब हम यह देखेंगे कि कौन-सा अनुमान वास्तविक माध्य से मिलता हो।

SCERT TELANGANA

स्थिति 1: मान लो कमल का निर्धारित समानांतर माध्य $A = 17$

समानांतर माध्य $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{7+10+15+21+27}{5} = \frac{80}{5} = 16$

यदि प्रत्येक निरीक्षण विचलन पद्धति में A, के रूप में लिया गया हो तो

स्कोर	A	विचलन
7	17	$7 = 17 - 10$
10	17	$10 = 17 - 7$
15	17	$15 = 17 - 2$
21	17	$21 = 17 + 4$
27	17	$27 = 17 + 10$

$$\bar{x} = \frac{(17-10)+(17-7)+(17-2)+(17+4)+(17+10)}{5}$$

$$= \frac{5 \times 17}{5} + \frac{-10-7-2+4+10}{5}$$

$$= 17 + \frac{-5}{5} = 17 - 1 = 16$$

∴ समानांतर माध्य = अनुमानित मूल्य+ विचलन का औसत

स्थिति 2: नीलिमा द्वारा निर्धारित समानांतर माध्य $A = 15$

समानांतर माध्य $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{7+10+15+21+27}{5}$

$\Rightarrow \bar{x}$ विचलन में $= \frac{(15-8)+(15-5)+(15-0)+(15+6)+(15+12)}{5}$

$$= \frac{(5 \times 15)}{5} + \frac{(-8-5-0+6+12)}{5}$$

$$= 15 + \frac{5}{5} = 15 + 1 = 16$$

स्थिति 3: लेखा द्वारा अनुमानित समानांतर माध्य $A = 16$

उनका समानांतर माध्य $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{7+10+15+21+27}{5}$

$\Rightarrow \bar{x}$ का विचलन मान में $= \frac{(16-9)+(16-6)+(16-1)+(16+5)+(16+11)}{5}$

$$= \frac{(5 \times 16)}{5} + \frac{(-9-6-1+5+11)}{5}$$

$$= 16 + \frac{0}{5} = 16$$

इसे कीजिए :

ऊपर के चर्चा से यह मालूम होता है कि निर्धारित कह सकते कि माध्य वास्तविक समानांतर माध्य। यदि सभी विचलन का (औसत) सभी निरीक्षणों का सभी निर्धारण माध्य 0 होगा।

हम इस विधि से समानांतर माध्य दिये गये डाटा में मालूम कर सकते हैं।

SCERT TELANGANA

इन स्थितियों में यह मालूम होता है कि समानांतर माध्य का निर्धारण और

समानांतर माध्य= निर्धारित मान + निरीक्षणों का औसत

$$= \text{निर्धारित माध्य} + \frac{\text{निरीक्षणों का योग}}{\text{निरीक्षणों की संख्या}}$$

$$\bar{x} = A + \frac{\sum (x_i - A)}{N}$$

उदाहरण 5: 10 निरीक्षणों का मध्यमान 14, 36, 25, 28, 35, 32, 56, 42, 50, 62 और कल्पित मूल्य 40 सूत्र से माध्य ज्ञात करो और तुम क्या बदलाव देखोगे?

हल: डाटा के 10 निरीक्षण= 14, 25, 28, 32, 35, 36, 42, 50, 56, 62

मान लो कल्पित मध्यमान A = 40

$$\therefore \text{ समानांतर माध्य } = A + \frac{\sum (x_i - A)}{N}$$

$$\bar{x} = 40 + \frac{(14-40)+(25-40)+(28-40)+(32-40)+(35-40)+(36-40)+(42-40)+(50-40)+(56-40)+(62-40)}{10}$$

$$= 40 + \frac{(-26)+(-15)+(-12)+(-8)+(-5)+(-4)+(2)+(10)+(16)+(22)}{10}$$

$$= 40 + \frac{(-70+50)}{10}$$

$$= 40 - \frac{20}{10}$$

$$= 40 - 2 = 38$$

$$\text{समाकरण } \bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{14+25+28+32+35+36+42+50+56+62}{10}$$

$$= \frac{380}{10} = 38$$

दोनों विधियों से हमें उत्तर एक ही प्राप्त होता है।

अर्थात समानांतर माध्य की गणना से विचलन पद्धति सुविधाजनक है, अधिक संख्याओं के, दशमलव डाटा..............

निम्न उदाहरण में

SCERT TELANGANA

उदाहरण 6: एक हफ्ते का बाजार भाव बदलते रहता है। 3672, 3657, 3673, 3665, 3668 तो शेयर का समानांतर मूल्य ज्ञात करो।

हल: डाटा का निरीक्षण = 3657, 3665, 3668, 3672, 3673

मध्यमान= 3668

समानांतर माध्य $\bar{x} \quad = \quad A + \frac{\sum(x_i - A)}{N}$

$$= 3668 + \frac{(3657-3668)+(3665-3668)+(3668-3668)+(3672-3668)+(3673-3668)}{5}$$

$$= 3668 + \frac{(-11-3-0+4+5)}{5} = 3668 + \frac{(-5)}{5} = 3668 - 1 = \text{रु.}3667$$

इसे कीजिए :

1. निम्न डाटा का समानांतर माध्य मालूम करो।

   (i) 17, 25, 28, 35, 40

   (ii) 5, 6, 7, 8, 8, 10, 10, 10, 12, 12, 13, 19, 19, 19, 20

2. बिना हल किये ज्ञात कीजिए।

प्रयोगात्मक कार्य

1. 10 विद्यार्थियों के विभिन्न विषयों के अंकों को लो, प्रत्येक विषय के समानांतर माध्य बिना हल किये ज्ञात करो। तो बताओं कि वास्तविक माध्य क्या है.............
2. अपने कक्षा के विद्यार्थियों के ऊँचाई का माध्य मालूम करो और तुम्हारे खेल के अध्यापक के रिकार्ड से जाँच करो।

7.1.3 माध्यिका (Median)

माध्यिका केन्द्रिय प्रवृत्ति का दूसरा रूप है। मूल्यों के डाटा को आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर इस व्यवस्था के मध्य का मूल्य माध्यिका कहलाता है।

यदि n निरीक्षण आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित किया गया।

- जब n विषम है, $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{th}$ निरीक्षण माध्यिका है।

SCERT TELANGANA

- जब n सम सांख्यिक है तब श्रेणीबद्ध डाटा की माध्यिका का मान बीच के दो डाटा रहते हैं जो कि $\left(\frac{n}{2}\right)^{th}$ और $\left(\frac{n}{2}+1\right)^{th}$ का मूल्य रहता है।

उदाहरण 7: 9 निरीक्षणों की माध्यिका ज्ञात करो 14, 36, 25, 28, 35, 32, 56, 42, 50.

हल: मूल्यों का आरोही क्रम = 14, 25, 28, 32, 35, 36, 42, 50, 56

n निरीक्षणों = 9 (विषम संख्या)

डाटा की माध्यिका $= \left(\frac{n+1}{2}\right)^{th}$ निरीक्षण

$= 5^{th}$ निरीक्षण = 35

$\therefore$ माध्यिका = 35

उदाहरण 8: यदि दूसरा निरीक्षण 61 उन डाटा में मिलाया गया तो माध्यिका क्या होगी?

हल : आरोही क्रम = 14, 25, 28, 32, 35, 36, 42, 50, 56, 61

निरीक्षणों की संख्या n = 10 (सम संख्या)

तो डाटा के मध्य दो सं मूल्य रहते हैं।

डाटा की माध्यिका = समानांतर माध्य $\left(\frac{n}{2}\right)^{th}$ और $\left(\frac{n}{2}+1\right)^{th}$ निरीक्षकों का

= 5 और 6 निरीक्षकों का समानांतर माध्य

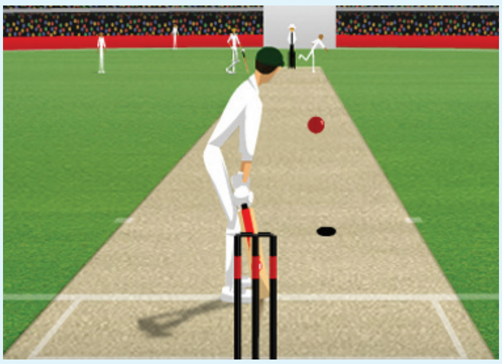
$= \frac{35+36}{2} = 35.5$

इसे कीजिए :

भारतीय क्रिकेट खिलाड़ी की ऊँचाई इस प्रकार है तो माध्यिका की ऊँचाई ज्ञात करो।

क्र. सं.	खिलाड़ी का नाम	ऊँचाई
1.	वी.वी.एस लक्ष्मण	5'11"
2.	पार्थिव पटेल	5'3"
3.	हरभजन सिंह	6'0"
4.	सचिन तेंदुलकर	5'5"
5.	गौतम गंभीर	5'7"
6.	युवराज सिंह	6'1"
7.	राबिन उथप्पा	5'9"
8.	वीरेन्द्र सहवाग	5'8"
9.	जहीर खान	6'0"
10.	एम.एस धोनी	5'11"

5' 10" का अर्थ है 5 फीट 10 इंच



SCERT TELANGANA

टिप्पणी :

- चर राशि के मूल्यों को एक क्रम में व्यवस्थित किया जाता है।
- यह निर्भर करता है कि निरीक्षणों के और क्रमबद्ध डाटा की मान के बीच दो डाटों के यह चरम प्रवेश मूल्यों से प्रभावित नहीं होता।

इसे कीजिए

1. डाटा 24,65,85,12,45,35,15 की माध्यिका ज्ञात करो।
2. x, $2x$, $4x$ की माध्यिका 12 तो मध्यमान ज्ञात करो।
3. 24, 29, 34, 38, x की माध्यिका 29 है तो 'x' का मूल्य
   (i) $x > 38$ (ii) $x < 29$ (iii) x, 29 और 34 के मध्य (iv) कोई भी नहीं

7.1.4 बहुलक (Mode)

यदि हमको मालूम करना है कि सबसे ज्यादा पसंदीदा यूनिफार्म का रंग किसी कक्षा का या सबसे अधिक बिकने वाली शर्ट का रंग क्या है तो हम बहुलक का उपयोग करते है। एक निरीक्षण (संख्या) जिसकी बारम्बारिता सबसे अधिक है उसे दिये गये डाटा का बहुलक कहा जाता है। निम्न उदाहरण में

उदाहरण 9: एक जूते की दुकान में विभिन्न साइज के (इंच में) जूते एक हफ्ते में इस प्रकार बिके 7, 9, 10, 8, 7, 9, 7, 9, 6, 3, 5, 5, 7, 10, 7, 8, 7, 9, 6, 7, 7, 7, 10, 5, 4, 3, 5, 7, 8, 7, 9, 7 अगले हफ्ते बेचने के लिए कौन से साइज का जूता अधिक रखना होगा? कारण बताओ।

हल : यदि हम निरीक्षणों को व्यस्थित करके लिखने पर,

3, 3, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 10.

इस डाटा से यह मालूम होता है कि 7 इंच साइज का (7 नं. का) जूता ज्यादा बिका। अतः दिये गये डाटा का बहुलक 7 है। इंच का जूता ज्यादा बेचने के लिए रखा गया।

उदाहरण 10: 50 दाताओं के ब्लड ग्रुप वाले जिन्हें कैंप में भाग लेना है इस प्रकार है, A, AB, B, A, O, AB, O, O, A, AB, B, A, O, AB, O, O, A, B, A, O, AB, O, O, A, AB, B, O, AB, O, B, A, O, AB, O, O, A, AB, B, A, O, AB, O, A, AB, B, A, O, AB, O, O. उपर्युक्त प्रदत्तों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

हल: डाटा को देखने पर यह पता चलता है कि ग्रुप A 12 बार दुहराया गया, ग्रुप B 7 बार दुहराया गया, AB ग्रुप 12 बार तथा O ग्रुप 19 बार दुहराया गया।

$\therefore$ दलों का बहुलक= 'O' ग्रुप

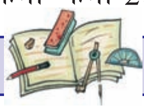
सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

यदि एक या दो से ज्यादा निरीक्षण समान हैं तो वह बहुलक (जो दत्तों में है) क्या है?

SCERT TELANGANA

टिप्पणी :

- दिये गये दत्तों में बहुलक निरीक्षण है।
- यह न संख्याओं पर आधारित है न ही निरीक्षण पर और न ही निरीक्षणों के मूल्य पर ।
- यह शब्दिक और सांख्यिकीय डाटा पर आधारित है।
- डाटा में कभी-कभी 2,3 या उससे भी ज्यादा बहुलक रहते हैं कभी एक भी बहुलक नहीं रहता।



अभ्यास - 7.1

1. एक फेयर प्राइस की दुकान में हफ्ते की बिक्री इस प्रकार है रु.10000, रु.10250, रु.10790, रु.9865, रु.15350, रु.10110 तो समानांतर माध्य ज्ञात करो।
2. दिये गये प्रदत्तों का 10.25, 9, 4.75, 8, 2.65, 12, 2.35 मध्यमान ज्ञात करो।
3. 8 निरीक्षणों का मध्यमान 25 है, यदि एक निरीक्षण 11 छूट गया तो शेष का मध्यमान ज्ञात करो।
4. 9 निरीक्षणों का मध्यमान 38 है तथा गलती से एक निरीक्षण को 72 के बदले 27 लिख दिया गया तो सही मध्यमान ज्ञात करो।
5. पाँच वर्ष पहले एक परिवार की आयु का मध्यमान 25 वर्ष है तो बताइए अब परिवार की वर्तमान मध्यमान आयु कितनी होगी?
6. दो वर्ष पूर्व 40 मनुष्यों की मध्यमान आयु 11 वर्ष थी, अब उनमें से एक मनुष्य चला गया तो बदला हुआ मध्यमान12 वर्ष है तो उस मनुष्य की आयु अब क्या होगी?

7 5, 8, 10, 15, 22 प्रदत्तों का विचलनों के योग से मालूम करो।

8. एक दल के 20 निरीक्षणों का योग 100 है तो माध्य विचलन ज्ञात करो।
9. 12 विद्यार्थियों के इकाई परीक्षा में प्राप्तांक इस प्रकार है- 4, 21, 13, 17, 5, 9, 10, 20, 19, 12, 20, 14. कल्पित मूल्य और दिये गये डाटा का मध्यमान ज्ञात करो। क्या दोनों के उत्तर एक ही हैं? मालूम कीजिए और इस पर चर्चा कीजिए।
10. (25 विद्यार्थियों में से) 10 विद्यार्थियों का मध्यमान 15 है। एक विद्यार्थी करिश्मा ने जाँच किया कि अन्य 9 विद्यार्थी में कितने अधिक या कितने कम अंक उसे मिले। अंकों में अंतर इस प्रकार है – 8, – 6, – 3, – 1, 0, 2, 3, 4, 6 तो करिश्मा के अंक मालूम करो।
11. 'n' निरीक्षणों के 25 विचलनों का योग 25 है और वही n विचलनों के लिए 35 का योग -25 है तो निरीक्षणों का मध्यमान ज्ञात करो।
12. 3.3, 3.5, 3.1, 3.7, 3.2, 3.8 प्रदत्तों की माध्यिका ज्ञात कीजिए।
13. आरोही क्रम में व्यवस्थित असमूहबद्ध डाटा 10, 12, 14, x – 3, x, x + 2, 25 की माध्यिका 15 है तो x का मूल्य ज्ञात कीजिए।

SCERT TELANGANA

14. 10, 12, 11, 10, 15, 20, 19, 21, 11, 9, 10. का बहुलक ज्ञात करो

15. कुछ समूहबद्ध दत्तों का बहुलक x है। यदि प्रत्येक स्कोर में 3 घटता है तो नये श्रेणी का बहुलक ज्ञात करो।

16. 1 से 100 तक के प्राकृतिक संख्याओं में उपयोग होने वाले अंकों का बहुलक ज्ञात करो।

17. किसी रफ प्रदतों का निरीक्षण 5, 28, 15, 10, 15, 8, 24 हैं। उनमें ऐसे और चार निरीक्षण मिलाइए, फिर भी माध्यमान और माध्यिका समान रहे।

प्रयोगात्मक कार्य

एक महीने तक अपने विद्यालय के कमरे का तापमान मालूम कीजिए। सभी कार्य दिवसों का मध्यमान, माध्यिका और बहुलक ज्ञात कीजिए। केन्द्रीय प्रवृत्ति का मूल्य क्षेत्रफल के लिए उचित है, क्या?

7.2 दत्तों का समावेश :

पिछली कक्षाओं में हमने प्रदत्तों की गणना करके तालिका बनाना सीखा। जब डाटा ज्यादा हो तो कैसे होगा? इसे हम दो ग्रुप में बाँट लेंगे। इसे हम समूहबद्ध डाटा कहते हैं। यह उदाहरण को देखिए:

एक मकान बनाने वाली कंपनी कर्मचारियों के वेतन के आधार पर मकान बनाती है। वे 100 कर्मचारियों के मासिक आय के बारे में जानकारी प्राप्त करते हैं, जिन्हें घर चाहिए। उनकी आय 15000, 15750, 16000, 16000,16050, 16400, 16600, 16800, 17000, 17250, 17250.................. 75000.

सबसे ज्यादा 100 निरीक्षणों का योग रु.15000 से रु.75000, जबकि हम निरीक्षणों की तालिका बनाते हैं तो तालिका लम्बी, डाटा को वर्गीकृत छोटे समूह आय वाले जैसे 10001 – 20000, 20001 – 30000, . . . , 70001 – 80000.

इन छोटे समूहों को **वर्गांतर** कहते हैं। वर्गांतर 10001 – 20000 में सभी निरीक्षण 10001 और 20000 के बीच के जिनमें 10001 और 20000 दोनों रहते (या) हैं। इस प्रकार के वर्गांतर को समावेशित रूप तथा 10001 को निम्न सीमांत तथा 20000 को उच्च सीमांत कहते हैं।

7.2.1 समावेशित समूहबद्ध दलों की बारंबारिता तालिका :

उदाहरण 11: 30 विद्यार्थियों के गणित की परीक्षा में प्राप्तांक इस बारंबारिता तालिका में दिये गये हैं।

(i) कितने समूहों में डाटा का वर्गीकृत किया गया ?

क्र. सं.	प्राप्तांक	छात्रों की संख्या
1	0 – 5	5
2	5 – 10	7
3	10 – 15	10
4	15 – 20	6
5	20 – 25	2

SCERT TELANGANA

(ii) तीसरे समूह में कितने विद्यार्थी है?

(iii) यदि किसी छात्र को 10 अंक मिले तो क्या वह दूसरी या तीसरी श्रेणी में होगा?

(iv) 6 विद्यार्थियों के अंक कौन से हैं वे 4 वें वर्गांतर में हैं?

(v) पाँचवीं समूहों के 2 विद्यार्थियों के स्वयं के अंक क्या होंगे?

उत्तर

(i) डाटा का वर्गीकरण 5 समूहों या 5 श्रेणियों में।

(ii) तीसरे समूह में 10 विद्यार्थी होंगे।

(iii) दूसरे श्रेणी की उच्च सीमा और तीसरे श्रेणी की निम्न सीमा में 10 है। इस स्थिति में उच्च सीमा वर्गांतर में नहीं है।

(iv) 4 वें वर्गांतर में विद्यार्थियों के अंक 15 और 20 से कम हैं।

(v) विद्यार्थियों के व्यक्तिगत अंकों को नहीं पहचान सकते। बारंबारिता वर्गांतर में वे 20 से 25 से कम।

इसे कीजिए :

संलग्न बारंबारिता वितरण में एक 90 व्यक्तियों के अपार्टमेंट की आयु दी गई है।

आयु	व्यक्तियों की सं.
1 – 10	15
11 – 20	14
21 – 30	17
31 – 40	20
41 – 50	18
51 – 60	4
61 – 70	2

(i) तालिका में कितने वर्गांतर हैं?

(ii) 21-30 वर्गांतर में कितने व्यक्ति हैं?

(iii) अपार्टमेंट में किस आयु के लोग ज्यादा हैं?

(iv) आखिरी तालिका (61-70) में 61, 70 या 65 दोनों समूह के लोग हैं।

7.2.2 सीमाओं की अवधि

मान लीजिए कि हमें किसी परीक्षा के लिए डाटा का निर्धारण करना है तो हम वर्गांतर इस प्रकार के लेते हैं, 1-10, 11-20 ,...... यदि एक विद्यार्थी 10.5 प्राप्त करता है तो वह किस श्रेणी में आयेगा? वर्गांतर 1-10 या 11-20. इस परिस्थिति में वास्तविक सीमा और अवधि का प्रयोग करेंगे।

SCERT TELANGANA

दी गई तालिका में श्रेणी वर्गांतर इस प्रकार है:

वर्गांतर	
सीमाएँ	अवधि
1 – 10	0.5 - 10.5
11 – 20	10.5 – 20.5
21 – 30	20.5 – 30.5
31 – 40	30.5 – 40.5

- पहले श्रेणी की उच्च सीमा और दूसरे श्रेणी की निम्न सीमा का औसत। उच्च सीमा पहले श्रेणी की और दूसरे श्रेणी की निम्न सीमा अर्थात, 10, 11 का औसत $\frac{10+11}{2} = 10.5$ श्रेणी की सीमा
- सभी 10.5 तक के निरीक्षण समूह 1-10 में आते हैं। लेकिन 10.5 दूसरी श्रेणी में आएगा। 11-20 श्रेणी में श्रेणी सीमांत 10.5 से 20.5 होगा।
- किसी उच्च सीमा का अनुमान लगाओ कक्षा के पहले श्रेणी से और निम्न सीमा को हल करो।

  0 का औसत 1, $\frac{0+1}{2} = 0.5$ LB
- उसी प्रकार LL का अनुमान लगाओ श्रेणी का UB की गणना करो। आखिरी वर्गांतर की 40 का औसत 41, $\frac{40+41}{2} = 40.5$ UB

  यह सीमाएँ ("true class limits") अवधि कहलाती हैं ।

निम्न वर्गांतर में :

वर्गांतर कक्षांतर	सीमाएँ		अवधि	
	निम्न सीमा	उच्च सीमा	निम्न अवधि	उच्च अवधि
1-10	1	10	0.5	10.5
11-20	11	20	10.5	20.5
21-30	21	30	20.5	30.5

वर्गांतर एकमात्र कक्षा	सीमाएँ		अवधि	
	निम्न सीमा	उच्च सीमा	निम्न अवधि	उच्च अवधि
0-10	0	10	0	10
10-20	10	20	10	20
20-30	20	30	20	30

ऊपर के चित्ररूपण में या उदाहरण में हम यह देखते हैं कि डिक्रिएट सीरीज श्रेणी वर्गांतर में अवधि और सीमाएँ अलग हैं। लेकिन कुछ समानांतर श्रेणी में उच्च सीमा और निम्न सीमा का अंतर कक्षा

SCERT TELANGANA

की लंबाई या **क्लास लेंथ** कहलाती है। उसे **'C'** द्वारा लिखते हैं ।

इसे कीजिए:

1. 30 विद्यार्थियों के लंबी कुद का वर्गांतर

दूरी (से.मी.)	101 – 200	201 – 300	301 – 400	401 – 500	501 – 600
छात्रों की सं.	4	7	15	3	1

I. क्या कक्षा वर्गांतर समावेशित हैं या अनन्य?

II. दूसरे वर्गांतर में कितने छात्र हैं?

III. कितने विद्यार्थी 3.01मी या उससे ज्यादा दूरी से कुद सकते हैं?

IV. 4.005मी की दूरी से कौन सी वर्गांतर के छात्र कुदें?

2. श्रेणी सीमा ज्ञात करो।

3. ऊपर के प्रश्न में कक्षा की लंबाई प्रत्येक वर्गांतर में ?

7.2.3 बारंबारिता बंटन (Frequency Distribution) :

50 विद्यार्थियों के गणित में **प्रथम संग्रहणात्मक** परीक्षा के अंक 31, 14, 0, 12, 20, 23, 26, 36, 33,41, 37,25, 22, 14,3, 25, 27, 34, 38, 43, 32, 22, 28, 18, 7, 21, 20, 35, 36, 45, 9, 19, 29, 25, 33, 47, 35, 38, 25, 34, 38, 24, 39, 1, 10, 24, 27, 25, 18, 8.

इन प्रदत्तों को देखने पर आप सोच विचार कर सकते हैं कि, डाटा को कितने वर्गांतर में बाँटा गया? कैसे वर्गांतर तालिका बनाई गई?

समूहबद्ध वर्गांतर तालिका बनाने में निम्न चरण उपयोग में लाये जाते हैं :

चरण 1: प्रदत्तों की व्याप्ति मालूम करो।

व्याप्ति = अधिकतम मूल्य – न्यूनतम मूल्य

= 47 – 0 = 47

चरण 2: वर्गांतर को चुनिए साधारणत : (5 से 8) वर्गांतर

वर्गांतर की संख्या = 6

$\Rightarrow$ वर्गांतर की लंबाई $= \frac{47}{6} \simeq 8$

वर्गांतर (अंक)	गणना चिन्ह	बारंबारिता (छात्रों की संख्या)
0 – 7	||||	4
08 – 15	卌 |	6
16 – 23	卌 ||||	9
24 – 31	卌 卌 |||	13
32 – 39	卌 卌 ||||	14
40 – 47	||||	4

SCERT TELANGANA

चरण 3: विस्तृत वर्गांतर लिखिए जो न्यूनतम मूल्य से शुरू होता है। निरीक्षण इस प्रकार है

0-7 ,8-15 .....

चरण 4: गणना अंकों का उपयोग करते हुए (प्रत्येक वर्गांतर में जो निरीक्षण आते हैं) निरीक्षण के बंटन को विभिन्न वर्गांतरों में बाँटिए।

चरण 5: गणना चिह्नों को गिनिए और तालिका में बारंबारिता लिखिए।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए :

1. निम्न श्रेणियों की बारंबारिता बंटन लिखिए 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7.
2. निम्न श्रेणियों से बारंबारिता बंटन की रचना कीजिए।

   2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 9, 11, 12, 12, 13, 13, 13, 14, 14, 14, 15, 16, 17, 18, 18, 19, 20, 20, 21, 22, 24, 24, 25. (विस्तृत वर्गांतर लीजिए)
3. इन दोनों प्रदत्तों में क्या अंतर है। (ऊपर दिये गये)
4. असंपूर्ण डाटा को किन बारंबारिताओं वर्गांतर डाटा में लिख सकते हैं?

7.2.4 समूहबद्ध बारंबारिता बंटन की विशेषता

1. यह प्रदत्तों को सुविधानुसार छोटे समूह में बाँटता है उसे बारंबारिता बंटन कहते हैं।
2. वर्गांतर 5-10, 5 में 5 निम्न सीमा और 10 उच्च सीमा कहलाती है।
3. वर्गांतर 1-10, 11-20, 21-30 .... समावेशी वर्गांतर कहलाती है, क्योंकि दोनों निम्न और उच्च सीमा कई कक्षा के वर्गांतर में रहते हैं।
4. 0-10, 10-20, 20-30 ... श्रेणी में अपवर्जी वर्गांतर कहलाता है, जिसमें केवल उस कक्षा की निम्न सीमा को ही उस वर्ग में लिया जाता है तथा उच्च सीमा को छोड़ दिया जाता है।
5. किसी कक्षा की उच्च सीमा तथा अगली कक्षा की निम्न सीमा का औसत, उस कक्षा की ऊपरी सीमा और अगली कक्षा की निम्न सीमा बनती है।
6. कुछ अपवर्जी वर्गांतर में, सीमांत और सतह दोनों समान रहते हैं, विस्तृत वर्गांतर में सीमा और सीमांत समान नहीं रहते।
7. उच्च सीमा और निम्न सीमा दोनों के अंतर को कक्षा की लंबाई कहते हैं।
8. सभी निरीक्षणों का विशेष मूल्य इस तालिका से नहीं मालूम कर सकते, लेकिन प्रत्येक निरीक्षण की श्रेणी अनुमानित औसत रहता है। इस मूल्य को प्राप्तांक या मध्य मूल्य कहते हैं।

SCERT TELANGANA

उदाहरण:12: 30 विद्यार्थियों द्वारा सन् 2010 में एसएससी की परीक्षा में प्राप्त प्रतिशत अंक इस प्रकार हैं

45, 56, 75, 68, 35, 69, 98, 78, 89, 90, 70, 56, 59, 35, 46, 47, 13, 29, 32, 39, 93, 84, 76, 79, 40, 54, 68, 69, 60, 59. तो बांरबारिता बंटन तालिका बनाओ। इन वर्गांतर से अनुत्तीर्ण (0 – 34), तीसरी श्रेणी (35 – 49), दूसरी श्रेणी (50 – 60), पहली श्रेणी (60 – 74) और (75 – 100) प्रतिष्ठित श्रेणी।

हल : वर्गांतर पहले से ही दिया गया हो तो हम तीसरे चरण की ओर जायेंगे।

चरण 3: दिये गये वर्गांतर लिखिए।

चरण 4: यह वर्गांतर समावेशित है। उच्च सीमा भी वर्गांतर से संबंधित है। गणना चिन्हों का उपयोग करते हुए, निरीक्षणों को अलग-अलग वर्गांतर में बांट दो।

चरण 5: गणना अंक को गिन कर बांरबारिता तालिका में लिख दो ।

वर्गांतर प्राप्तांक	चिहृन	बारंबारिता (छात्रों की संख्या)
0 – 34	|||	3
35 – 49	卌 ||	7
50 – 59	卌	5
60 – 74	卌 |	6
75 – 100	卌 ||||	9

7.2.5 वर्गांतर की रचना

उदाहरण 13: समूहबद्ध बारंबारिता बंटन तालिका में कक्षा के अंक (वर्गांतर का मध्य मूल्य) और बारंबारिता दिया गया हो तो वर्गांतर ज्ञात कीजिए।

मध्य मूल्य	7	15	23	31	39	47
बारंबारिता	5	11	19	21	12	6

हल: हमें मालूम है कि कक्षा अंक, वर्गांतर का मूल्य है, जो सीमांत प्रति दो कक्षा अंकों के मध्य रहता है।

चरण 1: दो क्रमागत मध्यमूल्यों का अंतर ज्ञात करेंगे $h = 15 - 7 = 8$.

(ज्ञात कीजिए कि क्या दो लगातार वर्गांतरों का अंतर समान है?)

चरण2: प्रत्येक वर्गांतर का निम्नतम और उच्चतम सीमांत ज्ञात कीजिए

यदि मध्यमूल्य अंक, ‘x’ हो तो, $x - h/2$ और $x + h/2$

उदाहरण के लिये पहली वर्गांतर के सीमांत $7 - \frac{8}{2} = 3$ या $7 + \frac{8}{2} = 11$

SCERT TELANGANA

प्राप्तांक	वर्गांतर	बारंबारिता
7	(7 – 4) – (7 + 4) = 03 – 11	5
15	(15 – 4) – (15 + 4) = 11 – 19	11
23	(23 – 4) – (23 + 4) = 19 – 27	19
31	(31 – 4) – (31 + 4) = 27 – 35	21
39	(39 – 4) – (39 + 4) = 35 – 43	12
47	(47 – 4) – (47 + 4) = 43 – 51	6

7.3 संचयी बारंबारिता बंटन (Cummulative Frequency)

किसी परीक्षा में 1000 विद्यार्थियों ने भाग लिया। लिखित परीक्षा उनका समूहबद्ध बारंबारिता बंटन तालिका में दिया गया है।

दो छात्र शरद, शंकर तालिका को देखकर इस प्रकार चर्चा करते हैं।

वर्गांतर प्राप्तांक	(छात्रों की संख्या)
0 – 10	25
10 – 20	45
20 – 30	60
30 – 40	120
40 – 50	300
50 – 60	360
60 – 70	50
70 – 80	25
80 – 90	10
90 – 100	5

शरद : परीक्षा के लिए कितने छात्र हाजिर हुए ?

शंकर : 1000 छात्र हाजिर हुए।

शरद : देखो 360 छात्रों को 50-60 अंक मिले।

शंकर: यदि 60 अंक को चयन निर्धारण माना जाये तो कितने छात्र साक्षात्कार के योग्य हैं?

शरद : तुम्हारा मतलब है कि कितने छात्रों को कुल अंक 60 या उससे अधिक प्राप्त हुए।

शंकर: अर्थात 50 + 25 + 10 + 5 है, 90 छात्र योग्य है।

शरद : लेकिन 105 पद नौकरी के रिक्त पद हैं और 50 अंक कट ऑफ है।

शंकर : 360 + 50 + 25 + 10 + 5 इस स्थिति में कुल 450 उम्मीदवार योग्य हैं जिन्हें साक्षात्कार के लिए बुलाना है।

उन छात्रों की संख्या, जिन्हें समान अंक प्राप्त हों, 90 से ज्यादा अंक मिले (निम्न सीमा) = 5

उन छात्रों की संख्या, जिन्हें नवीं कक्षा के निम्न सीमा के समान या अधिक अंक प्राप्त हुए हैं

= 10 + 5 = 15

उन छात्रों की संख्या, जिन्हें आठवीं कक्षा की निम्न सीमा के समान या अधिक अंक प्राप्त हुए

= 25 + 15 = 40

उन छात्रों की संख्या, जिन्हें सातवीं कक्षा की निम्न सीमा के समान या अधिक अंक प्राप्त हुए

= 50 + 40 = 90

SCERT TELANGANA

अनुक्रमा वर्गांतर तथा बारंबारिता को जोड़ने पर हमको ये मूल्य प्राप्त हुए। इन्हें हम संचित बारंबारिता कहते हैं। हर संचित बारंबारिता तत्संबंधित वर्ग के निचली सीमा के समान या अधिक होने के कारण यह अधिकतम संचित बारंबारिता कहलाती है।

ध्यान दीजिए कि इन अधिकतम संचित बारंबारिता को हम तालिका में कैसे लिखेंगे।

1. अंतिम वर्गांतर की बारंबारिता ही उस वर्ग के संचित बारंबारिता से अधिक है।
2. नौवीं वर्गांतर के बारंबारिता को प्राप्त करने के लिए नौवें अंतर को अधिकतम संचित बारंबारिता से जोड़ना चाहिए।
3. इसी अनुक्रम में यही पद्धति के अनुसार शेष अधिकतम संचित बारंबारिता को ज्ञात कीजिए ।

वर्गांतर (अंक)	LB	बारंबारिता (छात्रों की संख्या)	संचित बारंबारिता से अधिक
0 – 10	0	25	25+975 = 1000
10 – 20	10	45	545+930 = 975
20 – 30	20	60	60+870 = 930
30 – 40	30	120	120+750 = 870
40 – 50	40	300	300+450 = 750
50 – 60	50	360	360+ 90 = 450
60 – 70	60	50	50 + 40 = 90
70 – 80	70	25	25 + 15 = 40
80 – 90	80	10	10 + 5 = 15
90 – 100	90	5	5

दत्तों की कुल संख्या का निरीक्षण जो न्यूनतम सीमा से अधिक है, प्रत्येक वर्गांतर के लिए यह उस वर्गांतर का अधिकतम संचित बारंबारिता कहलाती है,

इसी तरह कुछ परिस्थितियों में न्यूनतम संचित बारंबारिता ज्ञात करने की आवश्यकतायें होती है।

उदाहरण के लिए अध्यापक उन छात्रों की सहायता करना चाहते हैं जिन्हें एक निश्चित अंक से कम मिले हों तो उनको चाहिए कि वह न्यूनतम संचित बारंबारिता की गणना करनी चाहिए।

एक इकाई परीक्षा में 43 छात्रों का सामूहिक बारंबारिता वितरण पर ध्यान दीजिए।

वर्गांतर (अंक)	UB	बारंबारिता (छात्रों की संख्या)	संचित बारंबारिता से कम
0 – 5	5	7	7
5 – 10	10	10	10+7 = 17
10 – 15	15	15	15+17 = 32
15 – 20	20	8	8+32 = 40

1. पहले वर्ग की बारंबारिता सीधा न्यूनतम संचित बारंबारिता में लिखी जाती है।
2. दूसरे वर्गांतर को पहले वर्गांतर के संचित बारंबारिता को जोड़िये जिससे दूसरे वर्गांतर का न्यूनतम संचित बारंबारिता प्राप्त हो।
3. इसी अनुक्रम से यही पद्धति के अनुसार शेष न्यूनतम संचित बारंबारिता ज्ञात कीजिए।

SCERT TELANGANA

प्रत्येक वर्गांतर के लिए दत्तों की कुल संख्या का निरीक्षण जो अधिकतम सीमा से कम हो वह न्यूनतम संचित बारंबारिता कहलाती है।

इसे कीजिए:

1. न्यूनतम संचित बारंबारिता का संबंध ________________ से है।
2. अधिकतम संचित बारंबारिता का संबंध ________________ से है।
3. निम्न डाटा की न्यूनतम और अधिकतम संचित बारंबारिता लिखिये।

वर्गांतर	1 -10	11 - 20	21 - 30	31 - 40	41 - 50
बारंबारिता	4	7	12	5	2

4. कुल बारंबारिता तथा अंतिम न्यूनतम संचित बारंबारिता क्या है? आप क्या समझते हैं?

उदाहरण 14: नीचे कुछ छात्रों के अंक न्यूनतम संचित बारंबारिता के वितरण तालिका में दिये गये हैं। बारंबारिता के तत्संबंधी वर्ग लिखिए। अधिकतम संचित बारंबारिता भी ज्ञात कीजिए। तालिका में कितने छात्रों के अंक दिये गये हैं।

वर्गांतर (अंक)	1 -10	11 - 20	21 - 30	31 - 40	41 - 50
L.C.F. (छात्रों की संख्या)	12	27	54	67	75

हल:

वर्गांतर (अंक)	L.C.F.	बारंबारिता (छात्रों की संख्या)	G.C.F.
1 – 10	12	12	12 + 63 = 75
11 – 20	27	27 - 12 = 15	15 + 48 = 63
21 – 30	54	54 - 27 = 27	27 + 21 = 48
31 – 40	67	67 - 54 = 13	13 + 8 = 21
41 – 50	75	75 - 67 = 8	8

SCERT TELANGANA

अभ्यास- 7.2

1. नीचे एक कॉलोनी के 45 लोगों की उम्र तालिका में दी गयी है।

33	8	7	25	31	26	5	50	25	48	56
33	28	22	15	62	59	16	14	19	24	35
26	9	12	46	15	42	63	32	5	22	11
42	23	52	48	62	10	24	43	51	37	48
36										

दिये गये दलों से 6 वर्गांतर से एक सामूहिक बारंबारिता वितरण का निर्माण कीजिए।

2. एक विद्यालय के 30 कक्षाओं के छात्रों की संख्या नीचे दी गई है। 4 वर्गांतर से एक बारंबारिता वितरण तालिका का निर्माण कीजिए।

25	30	24	18	21	24	32	34	22	20	22
32	40	28	30	22	26	31	34	15	38	28
20	16	15	20	24	30	25	18			

3. एक सामूहिक बारंबारिता विभाग में वर्गांतर इस तरह है 4 – 11, 12 – 19, 20 – 27, 28 – 35, 36 – 43 अगले दो वर्गांतर लिखिए। प्रत्येक वर्गांतर की लम्बाई क्या है? सभी कक्षाओं की वर्ग सीमाये भी लिखिए।

4. नीचे दी गयी सामूहिक बारंबारिता वितरण तालिका में कक्षा के अंक दिये गये है।

कक्षा अंक	10	22	34	46	58	70
बारंबारिता	6	14	20	21	9	5

(i) दिये गये दत्तों के वर्गांतर ज्ञात कीजिए (विशेष वर्गांतर)

(ii) न्यूनतम संचित बारंबारिता का निर्माण और

(iii) अधिकतम संचित बारंबारिता का निर्माण कीजिए

5. सांख्यिकी परीक्षा में एक कक्षा के 35 छात्रों द्वारा प्राप्त अंक नीचे दिये गये हैं ।(50 में से)

35	1	15	35	45	23	31	40	21	13	15
20	47	48	42	34	43	45	33	37	11	13
27	18	12	37	39	38	16	13	18	5	41
47	43									

एक समान वर्गांतर से जिसमें से एक10-20 (20 इसमें सम्मिलित नहीं है) बारंबारिता तालिका बनाइये।

SCERT TELANGANA

6. निम्न के बारंबारिता तालिका के वर्ग सीमाएँ ज्ञात कीजिए। न्यूनतम तथा अधिकतम संचित बारंबारिता तालिकाएँ भी बनाइए।

आयु	1 - 3	4 - 6	7 - 9	10 - 12	13 - 15
छात्रों की संख्या	10	12	15	13	9

7. संचित बारंबारिता तालिका नीचे दी गई है। किस प्रकार की संचित बारंबारिता दी गई है। तत्संबंधी वर्गांतर के बारंबारिता का निर्माण कीजिए ।

दौड़	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50
क्रिकेटरों की संख्या	3	8	19	25	30

8. एक पुस्तकालय में पढ़ने वालों की संख्या नीचे दी गई है। तत्संबंधी वर्गों की बारंबारिता लिखिए। न्यूनतम संचित बारंबारिता भी लिखिए।

पुस्तकों की संख्या	1-10	11-20	21-30	31-40	41-50
अधिकतम संचित बारंबारिता	42	36	23	14	6

7.4 बारंबारिता वितरण का आरेखीय प्रदर्शन :

बारंबारिता वितरण एक बार ग्राफ (दंड आरेख) दत्तों का समावेश है या बारंबारिता के वर्गांतर है। हमने बारंबारिता के अखंडित श्रेणियों को चित्रालेखन, दुगुना स्तंभालेखन और वृत्तालेखन द्वारा प्रदर्शित करना सीखा है।

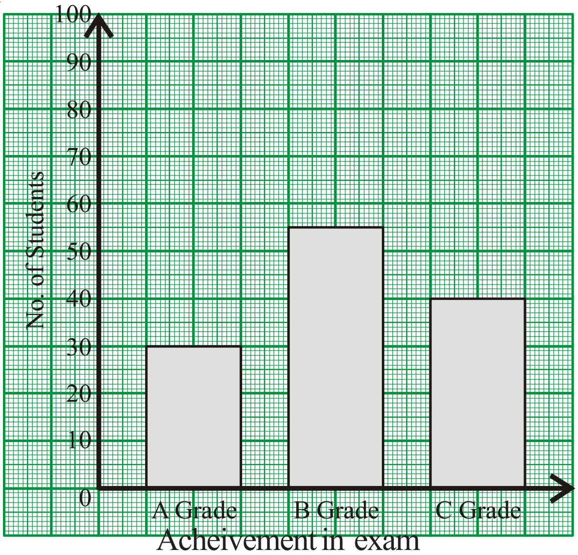
7.4.1 सोपान आलेख (Bar Graph)

दिये गये समाचार को तत्संबंधी मूल्यों के उपयोग से समान चौड़ाई तथा विभिन्न लंबाई के स्तंभों द्वारा प्रदर्शित करना स्तांभालेखन कहलाता है।

आइए हम देखें कि स्तंभालेखन में क्या प्रदर्शित करना है? नीचे दिये गये ऊर्ध्वाधर स्तंभालेखन का अध्ययन कीजिए।

(i) यह स्तंभालेखन क्या सूचित करता है?

(ii) कितने छात्रों को A, B या C ग्रेड प्राप्त हुए?

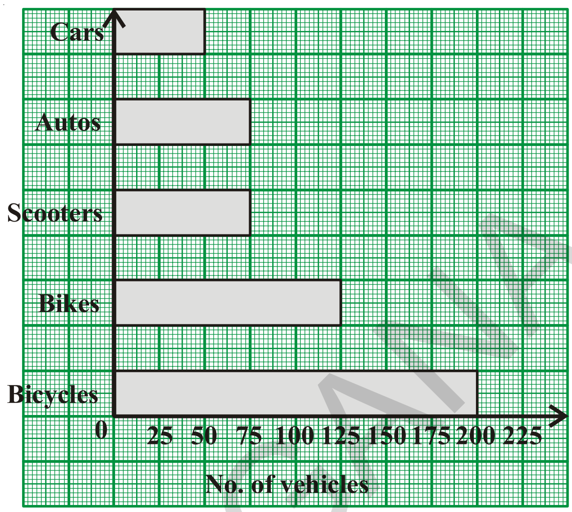


(iii) अधिक छात्रों को कौन-सा ग्रेड मिला?

(iv) कक्षा में कितने छात्र हैं?

ये प्रश्नों के उत्तर आलेख देखकर बताना सरल है।

कुछ आलेखों में स्तंभ क्षैतिज रूप में भी उतारे जा सकते हैं। उदाहरण के लिए दूसरे आलेख का निरीक्षण कीजिये। इसमें नेल्लूर जिला के संगम गाँव के वाहनों के संख्याओं के डाटा दिये गये हैं।



सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

1. एक स्तंभालेख में सारे स्तंभ (आयत) में

   (a) लंबाई समान (b) चौड़ाई समान (c) क्षेत्रफल समान (d) मूल्य समान होता है।

2. क्या एक स्तंभ की लंबाई दूसरे स्तंभ की लम्बाइयों पर निर्भर है?

3. स्तंभों में मूल्यों के अंतर से क्या दूसरे स्तंभों पर प्रभाव पड़ेगा?

4. ऊर्ध्वाधर स्तंभालेख तथा दैनिक स्तंभालेक का उपयोग कहाँ होता है?

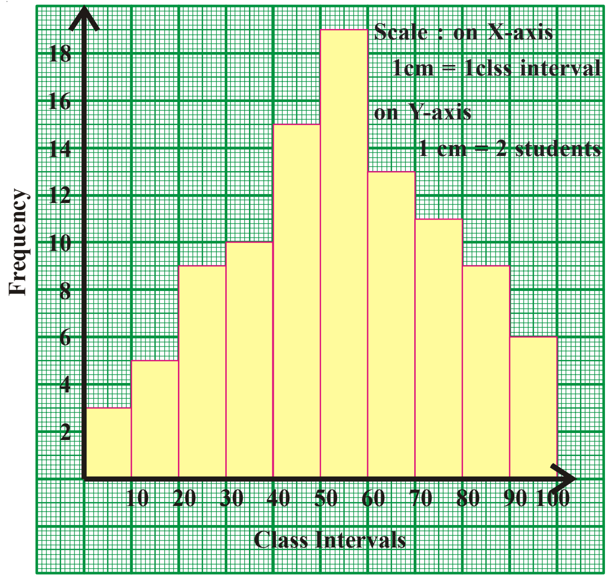
7.5 सामूहिक बारंबारिता बंटन का अलेखीय प्रदर्शन

आइए अब हम सामूहिक बारंबारिता बंटन का आलेखीय प्रस्तुतीकरण सीखेंगे, जिसमें अनन्य वर्गांतर की लगातार श्रेणियाँ हैं। इस तरह का पहला रूप सोपान आलेख है।

7.5.1 सोपान आलेख

7.5.1.1 सोपान आलेख का निर्वचन:

नीचे दिये गये समुचित बारंबारिता बंटन का निरीक्षण कीजिए।



वर्गांतर (अंक)	बारंबारिता (छात्रों की सं.)
0 – 10	3
10 – 20	5
20 – 30	9
30 – 40	10
40 – 50	15
50 – 60	19
60 – 70	13
70 – 80	11
80 – 90	9
90 -100	6

(i) एक आलेख में कितने स्तंभ होते हैं?

(ii) स्तंभ की लंबाई को किस अनुपात में उतारा गया?

(iii) सभी स्तंभों की चौड़ाई समान है। इसका क्या कारण होगा?

(iv) क्या हम दो स्तंभों को बदल सकते हैं?

आलेख से आपको यह ज्ञात हुआ होगा कि

(i) 10 वर्गांतर के 10 बारंबारिताएँ हैं।

(ii) स्तंभों की ऊँचाई, बारंबारिता के समानुपाती है।

(iii) वर्गांतर समान होने के कारण स्तंभों की चौड़ाई समान है। मुख्यतः इस उदाहरण में सभी वर्गांतर की लंबाई समय है।

(iv) यहाँ अनन्य लगातार श्रेणीयों के वर्गांतर के लगातार श्रेणियों का प्रतिरूपण होने के कारण दो स्तंभ आपस में बदले नहीं जायेंगे।

इसे कीजिए

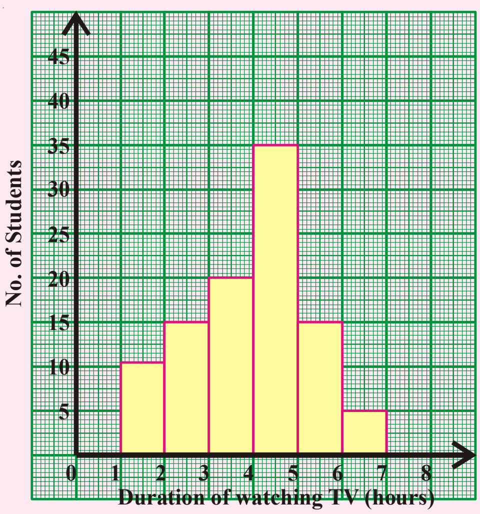
दिए गए सोपान आलेख का निरीक्षण कीजिए और निम्न प्रश्नों का उत्तर दीजिये।

(i) इस सोपान आलेख में क्या सूचनाएँ दी गई हैं?

(ii) कौन से समूह में सबसे अधिक छात्र हैं?

(iii) कितने छात्र 5 घंटे से अधिक टी.वी. देखते हैं?

(iv) कुल कितने छात्रों का सर्वेक्षण हुआ?



SCERT TELANGANA

7.5.1.2 सोपान आलेख का निर्माण (Construction of a Histogram)

एक टीवी चैनल वाले जानना चाहते हैं कि उनका चैनल किस आयु वर्ग के लोग अधिक देखते हैं। उन्होंने एक अपार्टमेंट में सर्वेक्षण किया। प्राप्त प्रदत्तों को आयत-चित्र के रूप में प्रस्तुत किया।

वर्गांतर (आयु समूह)	बारंबारिता (दर्शकों की संख्या)	वर्गांतर
11 – 20	10	10.5 – 20.5
21 – 30	15	20.5 – 30.5
31 – 40	25	30.5 – 40.5
41 – 50	30	40.5 – 50.5
51 – 60	20	50.5 – 60.5
61 – 70	5	60.5 – 70.5
सीमाएँ		अवधि

चरण 1 : यदि दिये गये वर्गांतर समावेशी हो तो उन्हें अपवर्ती में बदलना होगा क्योंकि हम एक सोपान आलेख का निर्माण करना चाहते हैं।

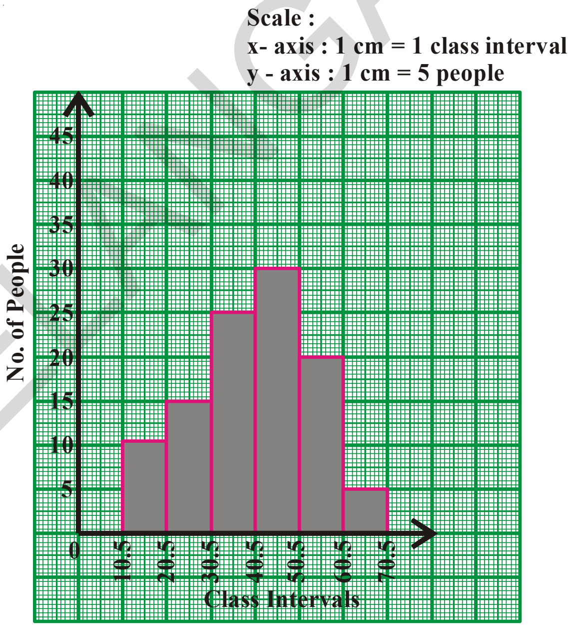
चरण 2 : x-अक्षांश के लिए माप चुनकर उस पर वर्गांतर बनाइए।

चरण 3 : y-अक्षांश के लिए माप चुनिए और इसपर बारंबारिता अंकित कीजिए। (दोनों अक्षों पर माप समान नहीं होना चाहिए।)

माप : x-अक्ष 1 सेमी = एक वर्गांतर

y-अक्ष 1 सेमी = 5 लोग

चरण 4 : आधार में वर्गांतर लेकर संगत बारंबारिताओं की ऊँचाई से आयत बनाइए।



7.5.1.3 विभिन्न वर्गांतर वाले सोपान आलेख

निम्न बारंबारिता बंटन तालिका पर ध्यान दीजिए।

वर्ग	वर्गांतर (अंक)	छात्रों का प्रतिशत
अनुत्तीर्ण	0-35	28
तृतीय श्रेणी	35-50	12
द्वितीय श्रेणी	50-60	16
प्रथम श्रेणी	60-100	44

हम इस तालिका में देखते हैं कि सभी वर्गों में अंकों की संख्या समान रूप नहीं है।

यदि हम तालिका पर ध्यान दें तो प्रथम श्रेणी में पास होने वाले छात्र 44 % हैं जिनके वर्गांतर की लंबाई 40 (60 से 100) है। यहाँ द्वितीय श्रेणी प्राप्त करने वाले छात्र 16% हैं जिनके वर्गांतर की लंबाई 10 (50 से 60) है। अतः इस तालिका को सोपान आलेख के रूप में प्रस्तुत करने के लिए वर्गांतर की चौड़ाइयों के रूप में लेना आवश्यक है।

SCERT TELANGANA

इकाई वर्गांतर (बारंबारिता घनत्व) की गणना करते हुए संबंधित ऊँचाइयों से सोपान आलेख का निर्माण करना चाहिए। बारंबारिता घनत्व ज्ञात करने के लिए किसी भी वर्गांतर को लिया जा सकता है। अपनी सुविधानुसार न्यूनतम वर्ग लंबाई को इकाई वर्गांतर के रूप में लिया जा सकता है।

∴ किसी भी आयत की संशोधित लंबाई उसके संगत बारंबारिता घनत्व के समानुपाती होती है।

$$\text{घनत्व} = \frac{\text{वर्ग की बारंबारिता}}{\text{वर्ग की लंबाई}} \times \text{न्यूनतम वर्ग लंबाई}$$

वर्गांतर	छात्रों का प्रतिशत	वर्गांतर की लंबाई	आयत की ऊँचाई
0 – 35	28	35	$\frac{28}{35}\times 10 = 8$
35 – 50	12	15	$\frac{12}{15}\times 10 = 8$
50 – 60	16	10	$\frac{16}{10}\times 10 = 16$
60 – 100	44	40	$\frac{44}{40}\times 10 = 11$

पिछले उदाहरण के अनुसार इसकी भी संशोधित ऊँचाई से सोपान आलेख बना सकते हैं।

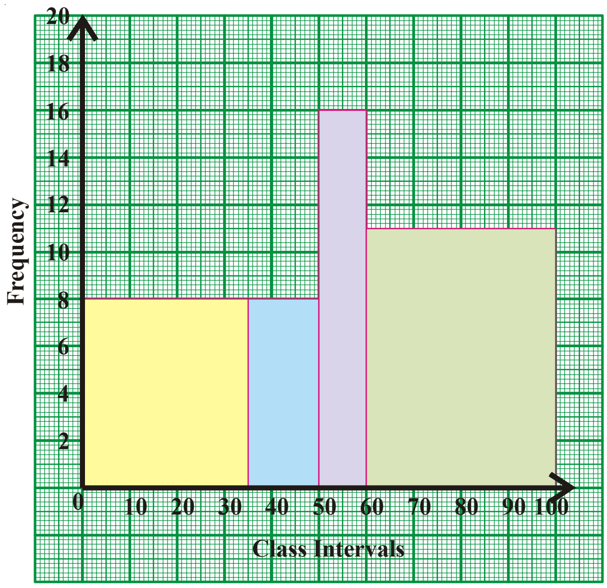
चरण 1: एक उचित पैमाने से लंबाई X-अक्ष पर वर्गांतर अंकित कीजिए।

चरण 2: उचित पैमाना लेकर बारंबारिता को Y-अक्ष पर अंकित कीजिए। (दोनों अक्षों का पैमाना समान रहना आवश्यक नहीं है।)

पैमाना: X-अक्ष 1 सेमी = 1 मिनट वर्गांतर

Y-अक्ष 1 सेमी = 2 %

चरण 3: आधार में वर्गांतर को लेकर संगत बारंबारिता की ऊँचाइयों से आयत बनाइए।



SCERT TELANGANA

7.5.1.4 समूहबद्ध बारंबारिता बंटन का मध्य मूल्य के साथ सोपान आलेख

उदाहरण 15: कक्षा सात के 65 छात्रों द्वारा प्राप्त कुल अंकों की बंटन तालिका के लिए सोपान आलेख का निर्माण कीजिए।

प्राप्तांक (मध्य मूल्य)	150	160	170	180	190	200
छात्रों की संख्या	8	10	25	12	7	3

हल : मध्य मूल्य दिये गये हैं इसलिए वर्गांतर की गणना करनी होगी।

चरण 1: दो क्रमगत वर्गों का अंतर ज्ञात कीजिए। h = 160 -150 = 10.

(ज्ञात कीजिए क्या प्रत्येक दो क्रमगत वर्गों का अंतर समान है।)

चरण 2: प्रत्येक वर्ग के मध्य मूल्य 'x' के साथ निम्न और उच्च सीमांतर की गणना कीजिए।

$x - \frac{h}{2}$ और $x + \frac{h}{2}$.

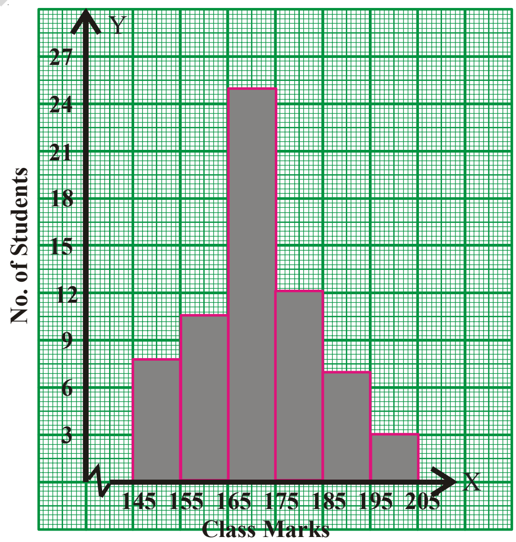
चरण 3: उचित पैमाना चयनित कीजिए।

X-अक्ष 1 सेमी = एक वर्गांतर

Y-अक्ष 1 सेमी = 4 छात्र

चरण 4: वर्गांतर को आधार मानकर और संगत बारंबारिताओं की ऊँचाई लेकर आयत बनाइए।

मध्य मूल्य (x)	वर्गांतर	छात्रों की संख्या
150	145 – 155	8
160	155 – 165	10
170	165 – 175	25
180	175 – 185	12
190	185 – 195	7
200	195 – 205	3



सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए।

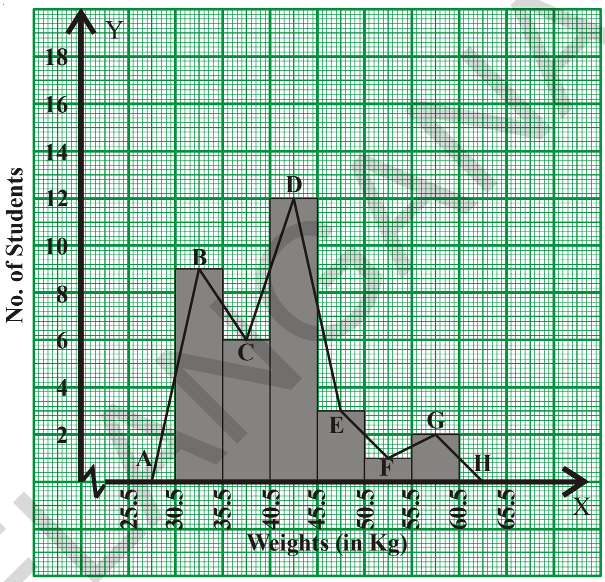
1. 'X'-अक्ष पर श्रेणी सीमांत लिए जाते हैं। श्रेणी सीमा क्यों नहीं?
2. सोपान आलेख में प्रत्येक आयत की चौड़ाई किस मूल्य द्वारा ज्ञात होती है?
3. सभी आयतों की लंबाइयों का योग क्या दर्शाता है?

SCERT TELANGANA

7.5.2 बारंबारिता बहुभुज

7.5.2.1 बारंबारिता बहुभुज की प्रस्तुति (Interpretation of Frequency Polygon)

दत्तों का परिमाणात्मक दत्तों का प्रतिरूपण और उनकी बारंबारिता को प्रस्तुत करने की एक दूसरी पद्धति है- 'बारंबारिता बहुभुज' आइए अब हम इस आलेख के लाभ देखें।



सोपान आलेख में एक कंपनी के 33 लोगों के भार की प्रस्तुति है। सोपान आलेख के संगत आयतों की ऊपरी भुजाओं के मध्यबिंदु को रेखाखंडों से मिलाइए। हम इन मध्य बिंदुओं को B,C,D,E,F और G मान लें। इन रेखाखंडों को जोड़ने पर हमें आकृति BCDEFG प्राप्त होगी। इस बहुभुज को पूरा करने के लिए हम मानेंगे कि 30.5-35.5 से पहले और 55.5-60.5 के बाद के वर्गांतर की बारंबारिता शून्य होगी। उनके मध्य बिंदु क्रमशः A और H हैं। ABCDEFGH बारंबारिता बहुभुज है। सामान्यतः निम्न वर्ग के पहले तथा उच्च वर्ग के बाद किसी भी वर्ग की संभावना नहीं होती है। शून्य बारंबारिता वाले दो वर्गांतरों का योग हमें बारंबारिता बहुभुज का क्षेत्रफल प्रदान करता है वही सोपान आलेख का क्षेत्रफल भी होगा। ऐसा क्यों होता है?

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए।

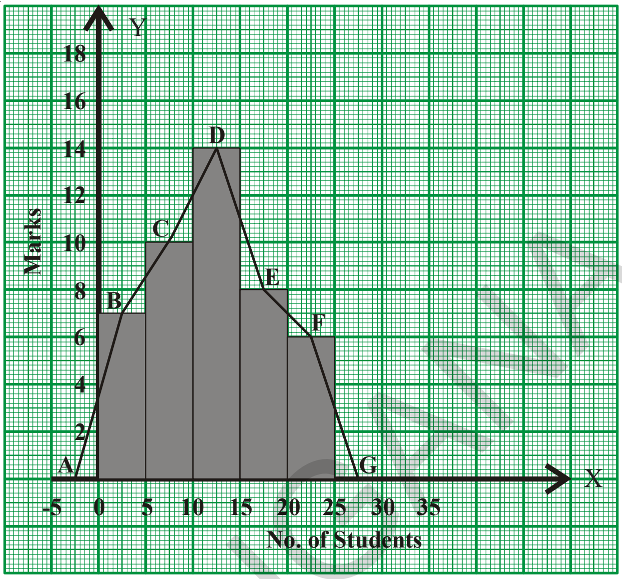
1. प्रथम वर्ग के पहले कोई वर्ग न हो तो बारंबारिता बहुभुज कैसे पूरा करोगे?
2. दत्तांशों के सोपान आलेख का क्षेत्रफल और बारंबारिता बहुभुज का क्षेत्रफल समान है। कैसे?
3. बारंबारिता बहुभुज बनाने के लिए क्या सोपान आलेख बनाना आवश्यक है?
4. समूहबद्ध बारंबारिता बंटन के लिए क्या हम बारंबारिता बहुभुज बना सकते हैं?

7.5.2.2 बारंबारिता बहुभुज की रचना (Construction of a Frequency Polygon)

एक कक्षा में 45 छात्रों के प्राप्तांकों (25 में से) पर ध्यान दीजिए। बारंबारिता बंटन तालिका से बारंबारिता बहुभुज बनाइए।

SCERT TELANGANA

वर्गांतर (प्राप्तांक)	बारंबारिता (छात्रों की संख्या)	मध्य मूल्य
0-5	7	2.5
5-10	10	7.5
10-15	14	12.5
15-20	8	17.5
20-25	6	22.5
कुल	45	



रचना के सोपान

चरण 1: दिये गये दत्तों के मध्यमूल्य ज्ञात कीजिए।

चरण 2: दिये गये दत्तों के सोपान आलेख बनाइए। उनके मध्य बिंदुओं को आयत के ऊपरी सिरों पर अंकित कीजिए। (उदाहरणतः क्रमशः B, C, D, E, F हैं।)

चरण 3: क्रमगत मध्य बिंदुओं को जोड़िए।

चरण 4: प्रथम वर्ग के पहले तथा अंतिम वर्ग के बाद के वर्गांतर का अनुमानित मूल्य लीजिए और उनका मध्य मूल्य ज्ञात कीजिए। (A और H) इसे अक्ष पर अंकित कीजिए। (यहाँ पर पहली श्रेणी 0 – 5 है। इसलिए 0 - 5 श्रेणी की पिछली श्रेणी को ज्ञात करने के लिए क्षितिज रेखा को ऋणात्मक दिशा में बढ़ाकर इसे अनुमानित वर्गांतर का मध्यमूल्य -5, 0 ज्ञात कीजिए)

चरण 5: पहले अंतिम बिंदु B से A को मिलाया गया और अंतिम बिंदु F से G को मिलाकर बारंबारिता बहुभुज को पूर्ण किया गया है।

बारंबारिता बहुभुज को बिना सोपान आलेख खींचे, स्वतंत्र रूप से भी उतारा जा सकता है। इसके लिए हमें कक्षा वर्गांतर के मध्यबिंदुओं की आवश्यकता होती है।

इसे कीजिए।

1. दी गई बारंबारिता बंटन तालिका से बारंबारिता बहुभुज की रचना कीजिए।

(i) एक कक्षा के क्रिकेट मैच में बनाये गये रनों की तालिका इस प्रकार है-

बनाये गये रन	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60
छात्रों की संख्या	3	5	8	4	2

(ii) एक नाटक के बेचे हुए टिकट

टिकट का मूल्य	10	15	20	25	30
टिकटों की संख्या	50	30	60	30	20

SCERT TELANGANA

7.5.2.3 बारंबारिता बहुभुज के लक्षण (Characteristics of a Frequency Polygon):

1. बारंबारिता बंटन का आलेखीय रूप ही बारंबारिता बहुभुज है।
2. अनुक्रम के मध्य मूल्य या प्राप्तांकों को X-अक्ष पर और संलग्न बारंबारिता को Y-अक्ष पर अंकित किया जाता है।
3. समान दत्तांशों वाले बारंबारिता बहुभुज का क्षेत्रफल और सोपान आलेख का क्षेत्रफल समान होता है।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए।

1. सोपान आलेख दिये गये वर्गांतर की बारंबारिता को दर्शाता है? क्या वह एक निश्चित मूल्य की बारंबारिता को दर्शा सकता है?
2. क्या बारंबारिता बहुभुज दिए गए दत्तों के निश्चित मूल्य की बारंबारिता को बता सकता है?

7.5.2.4 समूहबद्ध बारंबारिता बंटन तालिका के लिए सोपान आलेख के बिना बारंबारिता बहुभुज बनाना

मधुमेह रोगियों के अध्ययन की जानकारी इस तालिका में दी गई है।

आयु	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60
रोगियों की संख्या	5	9	16	11	3

आइए अब हम बारंबारिता बहुभुज की रचना बिना सोपान आलेख के करें।

चरण 1: विभिन्न श्रेणियों के प्राप्तांक ज्ञात कीजिए।

चरण 2: पैमाने का चयन कीजिए: X-अक्ष 1 सेमी = 1 वर्गांतर

Y-अक्ष 1 सेमी = 2 अंक

चरण 3: यदि 'x' को प्राप्तांक से तथा संलग्न बारंबारिता को 'f' से सूचित करते हैं तो ('x', f) के लिए आलेख का निर्माण कीजिए।

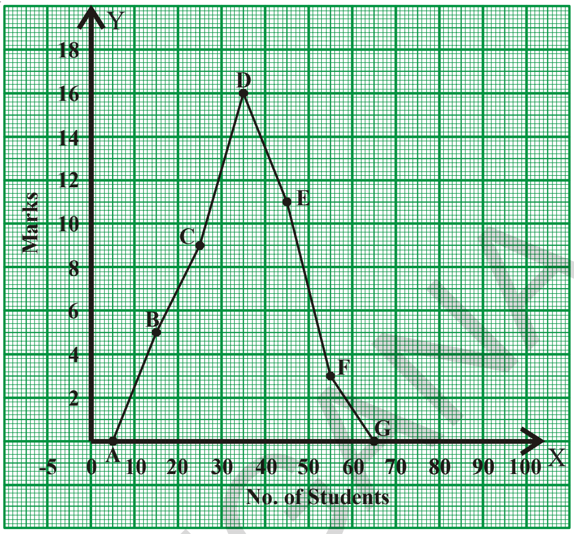
चरण 4 : रेखांखडों द्वारा बिंदुओं को मिलाइए।

चरण 5 : इसी प्रकार और दो श्रेणियों की कल्पना कीजिए। प्रथम श्रेणी के पहले और अंतिम श्रेणी के बाद प्रत्येक में बारंबारिता शून्य होगी। आलेख में उनके मध्य बिंदुओं को अंकित कीजिए।

चरण 6 : बहुभुज पूर्ण कीजिए।

SCERT TELANGANA

वर्गांतर (आयु)	रोगियों की संख्या	मध्य मूल्य	क्रमित युग्म
0 – 10	0	5	(5, 0)
10 – 20	5	15	(15, 5)
20 – 30	9	25	(25, 9)
30 – 40	16	35	(35, 16)
40 – 50	11	45	(45, 11)
50 – 60	3	55	(55, 3)
60 – 70	0	65	(65, 0)



7.5.3 समूहबद्ध बारंबारिता बंटन के लिए बारंबारिता वक्र

यहाँ दत्तों को सरलीकृत वक्रों द्वारा प्रदर्शित करने की एक अन्य विधि है।

आइए दिए गये दत्तों के बिना सोपान आलेख वाले बारंबारिता वक्र की रचना करें।

चरण 1: विभिन्न वर्गांतरों के मध्य मूल्य ज्ञात कीजिए।

चरण 2: पैमाना निर्धारित कीजिए।

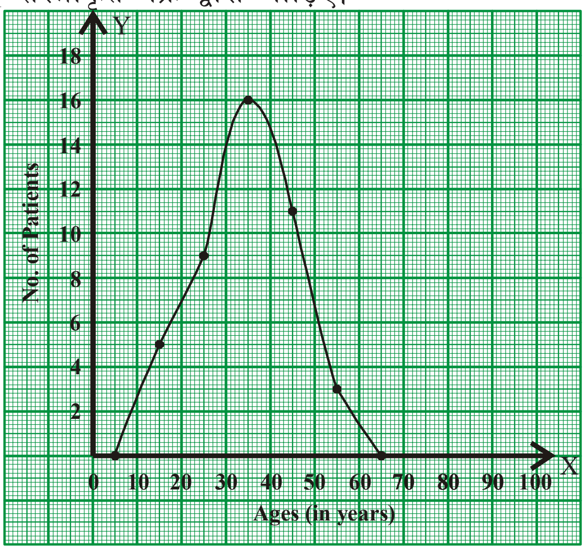
X-अक्ष 1 सेमी = 1 वर्गांतर

Y-अक्ष 1 सेमी = 2 अंक

चरण 3: किसी कक्षा के प्राप्तांकों के लिए 'x' मध्य मूल्य और 'f' संगत बारंबारिता हो तो क्रमित युग्म (x, f) आलेख पर अंकित कीजिए।

चरण 4: क्रमागत आनेवाले बिंदुओं को क्रमशः सरलीकृत वक्र द्वारा जोड़िए।

वर्गांतर (आयु)	रोगियों की संख्या	मध्य मूल्य	क्रमित युग्म
0 – 10	0	5	(5, 0)
10 – 20	5	15	(15, 5)
20 – 30	9	25	(25, 9)
30 – 40	16	35	(35,16)
40 – 50	11	45	(45,11)
50 – 60	3	55	(55, 3)
60 – 70	0	65	(65, 0)



SCERT TELANGANA

7.5.4 संचयी बारंबारिता (cumulative frequencies) बंटन का आलेख

किसी समूहबद्ध बारंबारिता बंटन की संचयी बारंबारिता और क्रमशः वर्गांतरों के संगत निम्न/उच्च सीमा के आलेख को संचयी बारंबारिता वक्र या चाप विकर्ण वक्र कहते हैं।

ये वक्र एक सतत श्रेणी के प्रत्येक स्तर में एकत्रित शेष निरीक्षणों को समझने में सहायक होते हैं।

7.5.4.1 अवरोही संचयी बारंबारिता वक्र (Less than Cummulative frequency curve)

समयानुसार सरकारी कार्यों के लिए ठेकेदारों को प्राप्त कुछ टेंडरों की संख्या समूहबद्ध बारंबारिता तालिका देखिए।

वर्गांतर (दिन)	0 – 4	4 - 8	8 - 12	12 – 16	16 – 20
टेंडरों की संख्या	2	5	12	10	3

चरण 1: यदि दिया गया बारंबारिता बंटन समावेशी रूप में हो तो उसे सतत् रूप में परिवर्तित कीजिए।

चरण 2: आवरोही संचयी बारंबारिता तालिका बनाइए।

चरण 3: X-अक्ष पर वर्गांतरों के उच्च सीमांत औ Y-अक्ष पर उनके संगत संचित बारंबारिता अंकित कीजिए।

पैमाना निर्धारित कीजिए :

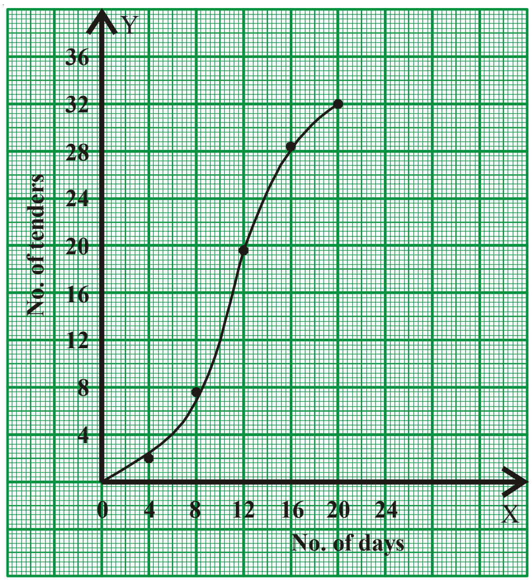
X-अक्ष 1 सेमी = 1 वर्गांतर

Y-अक्ष 1 सेमी = 4 टेंडर

वर्गांतर (आयु)	टेंडरों की संख्या	उच्च सीमांत	निम्न संचयी बारंबारिता
0 – 4	2	4	2
4 – 8	5	8	7
8 – 12	12	12	19
12 – 16	10	16	29
16 – 20	3	20	32

चरण 4: पहले वर्गांतर के निम्न सीमांत (पहली श्रेणी से पूर्व की श्रेणी के उच्च सीमांत) की संचयी बारंबारिता 0 अंकित कीजिए।

चरण 5: इस बिंदुओं को सरलीकृत वक्र द्वारा जोड़कर चाप विकर्ण वक्र प्राप्त कीजिए।



इसी प्रकार हम 'आरोही' संचित बारंबारिता वक्र की रचना भी करसकते हैं। इसमें Y-अक्ष पर आरोही संचित बारंबारिताएँ और X-अक्ष पर संगत 'निम्न सीमांत' लिया जाता है।

SCERT TELANGANA

अभ्यास - 7.3

1. बुद्धि लब्धि के विभिन्न स्तरों के लिए 45 विद्यार्थियों का वितरण निम्न तालिका में दिया गया है। दत्तों सोपान आलेख खींचिए।

बुद्धि लब्धि	60-70	70-80	80-90	90-100	100-110	110-120	120-130
छात्रों की संख्या	2	5	6	10	9	8	5

2. कक्षा सात की वार्षिक परीक्षा में 600 छात्रों द्वारा प्राप्तांकों के लिए सोपान आलेख बनाइए।

प्राप्तांक	360	400	440	480	520	560
छात्रों की संख्या	100	125	140	95	80	60

3. एक फैक्टरी के 250 मज़दूरों का साप्ताहिक वेतन निम्न तालिका में दिया गया है। दिये गये दत्त कार्यों के लिए एक ही आलेख पर सोपान आलेख और बारंबारिता बहुभुज बनाइए।

साप्ताहिक वेतन	500-550	550-600	600-650	650-700	700-750	750-800
मज़दूरों की संख्या	30	42	50	55	45	28

4. एक मंडल के प्राथमिक विद्यालयों के 60 अध्यापकों की आयु निम्न बारंबारिता तालिका में दी गई है। बारंबारिता बहुभुज और बारंबारिता वक्र निम्न दत्त के लिए बिना सोपान आलेख के बनाइए। (भिन्न-भिन्न आलेख के कागज उपयोग कीजिए।)

आयु	24 – 28	28 – 32	32 – 36	36 – 40	40 – 44	44 – 48
अध्यापकों की संख्या	12	10	15	9	8	6

5. निम्न बारंबारिता बंटन तालिका के लिए वर्गांतर एवं बारंबारिता की रचना कीजिए। साथ ही साथ चाप विकर्ण वक्र भी बनाइए।

प्राप्ताह्नक	5 से कम	10 से कम	15 से कम	20 से कम	25 से कम
छात्रों की संख्या	2	8	18	27	35

SCERT TELANGANA

हमने क्या सीखा?

1. **असमूहबद्ध दत्तों का समानान्तर माध्यम** $= \dfrac{x_1+x_2+x_3+......+x_n}{n}$ या $\bar{x} = \dfrac{\sum x_i}{N}$ (संक्षिप्त रूप) जहाँ $\sum x_i$ सभी x_i का योग है जहाँ 'i' का मान 1 से n तक है।

2. **समानान्तर माध्यम** = कल्पित मध्यमान + विचलन का औसत

   या $\bar{x} = A + \dfrac{\sum(x_i - A)}{N}$

3. मध्यमान के उपयोग से सांख्यिक दत्तों का विश्लेषण किया जा सकता है।

4. **दत्तों के निरिक्षण को क्रमबद्ध** आरोही या अवरोही क्रम में **व्यवस्थित करने के बाद बीच वाले परीक्षण को माध्यिका कहते हैं।**

5. माध्यिका के उपयोग से सांख्यिक दत्तों का किया जा सकता है, जब बहुत भिन्नता वाले कम निरीक्षण हो तो कम यह अत्यधिक उपयोगी है।

6. **बहुलक का उपयोग शाब्दिक और सांख्यिकी विश्लेषण के लिये किया जाता हैं।**

7. **बहुलक एक ऐसी संख्या है जो दिये गये दत्तों में कई बार दोहराई जाती हैं।**

8. दत्तों के भिन्न-भिन्न निरीक्षणों का उनकी बारंबारिता के साथ प्रदर्शन को बारंबारिता बंटन या बंटन तालिका कहते हैं।

9. किसी श्रेणी की उच्च सीमा और निम्न सीमा में अंतर को श्रेणी की लंबाई कहते हैं। इसे 'C' द्वारा दर्शाते हैं।

10. दिये गये दत्तों के लिए किसी विशेष वर्गांतर की निम्न सीमा के बराबर या उससे अधिक निरीक्षणों की कुल संख्या को अवरोही संचित बारंबारिता कहते हैं।

11. दिये गये दत्तों के लिए किसी विशेष वर्गांतर की निम्न सीमा के बराबर या उससे कम निरीक्षणों की कुल संख्या को आरोही संचित बारंबारिता कहते हैं।

12. समूहबद्ध बारंबारिता बंटन में यदि वर्गांतर भिन्न है तो सोपान आलेख में बारंबारिता घनत्व के आधार पर आयतों की रचना करनी होगी।

    बारंबारिता घनत्व = $\dfrac{\text{श्रेणी की बारंबारिता}}{\text{श्रेणी की लंबाई}} \times$ दत्तों में न्यूनतम श्रेणी की

SCERT TELANGANA

13. बारंबारिता बंटन तालिका को बारंबारिता बहुभुज आलेख के रूप में प्रस्तुत किया जा सकता है। (भिन्न/क्रमगत)

14. बारंबारिता बहुभुज या बारंबारिता वक्र में, किसी कक्षा के प्राप्तांकों या उनके मध्यमान को X-अक्ष तथा Y-अक्ष पर संलग्न बारंबारिता के रूप में प्रस्तुत कर सकते हैं।

15. समान दत्तों का बारंबारिता बहुभुज और सोपान आलेख का क्षेत्रफल समान होता है।

16. **सोपान आलेख बारंबारिता बंदन का आलेखीय प्रस्तुतीकरण है जिसमें लगातार श्रेणियाँ है ।**

17. **किसी समूहबद्ध बारंबारिता बंटन की संचयी बारंबारिता और क्रमशः वर्गांतरों के संगत निम्न/उच्च सीमा के आलेख को संचयी बारंबारिता वक्र या चाप विकर्ण कहते हैं ।**

तार्किक ढंग से सोचिए।

कुछ आलेखों और चार्टों की सहायता से किसी भी विषय से संबंधित प्रदत्तों को एक आकार के रूप में प्रस्तुत किया जा सकता है। इस आकृति को ध्यान से देखिए और प्रत्येक प्रश्न का उत्तर दीजिए और उन्हें पुनः जाँच कीजिए।

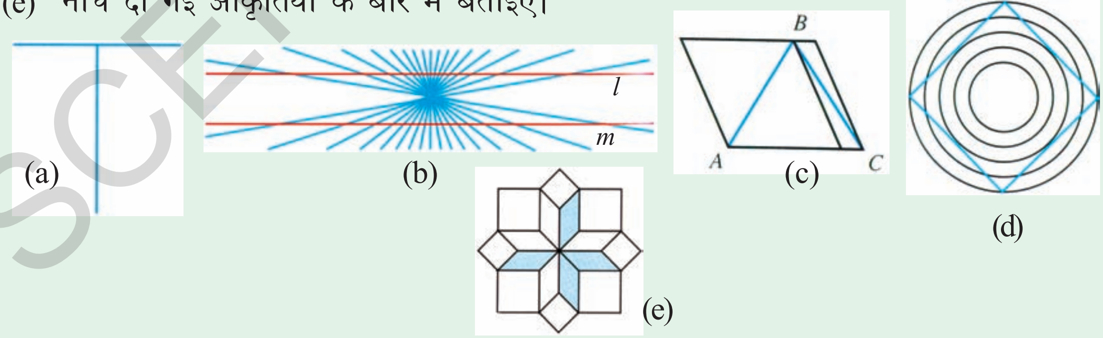
(a) क्षितिजीय या ऊर्ध्वाधर में कौन सा लंबा है?

(b) क्या l और m रेखाएँ सीधी और समांतर हैं?

(c) किसकी लंबाई अधिक है? : $\overline{AB}$ या $\overline{BC}$

(d) बहुभुज की कितनी भुजाएँ होती हैं? क्या यह एक वर्ग होता है?

(e) नीचे दी गई आकृतियों के बारे में बताइए।



(a) (b) (c) (d) (e)

SCERT TELANGANA