14

समीकरण (EQUATIONS)

33R5A9

आप दो संख्याओं की तुलना करने के लिए कहते हैं कि एक संख्या, दूसरी संख्या से बड़ी है, छोटी है या समान है।

क्रियाकलाप (ACTIVITY) 1.

नीचे तुलना पर आधारित कुछ कथन दिए गए हैं जो अपूर्ण हैं। खाली बॉक्सों में $=$, $>$ या $<$ के चिह्न का उपयोग कर कथनों को पूर्ण कीजिए –

जैसे :

1.	$3 + 5$	$>$	7	2.	$8 + 7$	☐	15
3.	$4 + 6$	☐	11	4.	$13 + 8$	☐	18
5.	$23 + 7$	☐	30				

आपने किस तरह इन चिह्नों का उपयोग किया है? अपने तर्कों के बारे में सोचें।

यहाँ पर दो पक्ष दिए गए हैं बाक्स के बाँयें तरफ बाँया पक्ष तथा दायें तरफ दायाँ पक्ष है। कथनों में $3 + 5$ बायाँ पक्ष है, चूंकि यह दायाँ पक्ष 7 से बड़ा है, अतः $3 + 5 > 7$

जिन कथनों में $=$ चिह्न का उपयोग किया गया है, उन्हें छाँटकर अपनी कॉपी में लिखिए।

जिन कथनों को आपने कॉपी में लिखा है उन्हें छोड़ बाकी असमानता के कथन हैं। आइए, कुछ और कथनों को देखें जिनमें चरांकों का उपयोग किया गया है।

जैसे : $x + 5 = 13$ में यदि $x = 5$ हो तो x के स्थान पर 5 रखने पर बायाँ पक्ष $= 5 + 5 = 10$ होता है, दायाँ पक्ष $= 13$ है। अतः यह कथन सही नहीं है, बायाँ पक्ष $\neq$ दायाँ पक्ष, परन्तु x के स्थान पर 8 रखने पर दोनों पक्ष बराबर हो जाते हैं और यह कथन सही हो जाता है।

क्रियाकलाप (ACTIVITY) 2.

नीचे कुछ कथन दिए गए हैं। उनके सामने x का मान दिया गया है। x के दिए गए मानों के लिए कथन सत्य हैं या असत्य बॉक्स में लिखिए –

1.	$x + 3 = 8$ यदि $x = 5$ तो कथन	सत्य	है।
2.	$x - 2 = 4$ यदि $x = 7$ तो कथन	☐	है।
3.	$x + 2 = 10$ यदि $x = 8$ तो कथन	☐	है।
4.	$7 = 12 - x$ यदि $x = 3$ तो कथन	☐	है।
5.	$3 = x - 9$ यदि $x = 5$ तो कथन	☐	है।

जो कथन असत्य हैं क्या वे x के किसी मान के लिए सत्य होंगे? यदि हाँ तो प्रत्येक के लिए x के मान को अपनी कॉपी में लिखिए । इस प्रकार उपरोक्त कथन तभी सत्य होंगे जब दोनों पक्ष आपस में बराबर होंगे। ऐसे कथन जिनमें चरांक शामिल हों और दोनों पक्ष बराबर हों, **समीकरण** कहलाते हैं, अर्थात् समानता वाले

वे कथन जिनमें एक या एक से अधिक बीजीय अंक होते हैं **''समीकरण''** कहलाते हैं। इसमें बराबर के बायीं ओर के समस्त चर और अचर पदों को समीकरण का ''बायाँ पक्ष'' और दायें ओर के समस्त पदों को समीकरण का ''दायाँ पक्ष'' कहते हैं।

समीकरण क्यों (Why Equation ?)

एक दिन नरेश ने अपने साथियों से एक सवाल पूछा। दो टोकरियों में अमरूद रखे हुए हैं। दूसरी टोकरी में पहली टोकरी के 2 गुणे अमरूद हैं। यदि पहली टोकरी में 8 और अमरूद रख दिये जाएं तो दूसरी टोकरी में पहली टोकरी के बराबर अमरूद हो जाते हैं। क्या आप लोग दोनों टोकरियों में अमरूदों की संख्या बता सकते हो?

नरेश के सभी साथी हल सोचने लगे परन्तु उन्हें कुछ सूझ नहीं रहा था । तभी अनु ने बताया कि पहली टोकरी में 8 तथा दूसरी टोकरी में 16 अमरूद हैं। नरेश ने कहा कि उत्तर तो ठीक है परन्तु तुमने इसे कैसे हल किया?

अनु ने बताया – ''मैंने पढ़ा है कि किसी संख्या में यदि उसी संख्या को जोड़ दिया जाए तो उस संख्या का दो गुणा प्राप्त हो जाता है, चूँकि पहली टोकरी में रखे अमरूदों में 8 अमरूद और जोड़ने पर अमरूदों की संख्या दो गुणी हो जाती है तो वह संख्या 16 ही होगी क्योंकि 8 में 8 जोड़ने पर 16 होता है।''

नरेश ने बताया कि इसे एक और तरीके से हल कर सकते हैं –

पहली टोकरी में अमरूद	दूसरी टोकरी में अमरूद पहली टोकरी के 2 गुणा अमरूद

अमरूद (पहली टोकरी में) + 8 = पहली टोकरी का 2 गुणा अमरूद (दूसरी टोकरी में)

8 में 8 जोड़ने पर ही दो गुणा हो सकता है। अतः पहली टोकरी में 8 अमरूद हैं एवं दूसरी टोकरी में 16 अमरूद हैं।

तभी फरीदा ने कहा, ''हमने चर राशि वाले पाठ में पढ़ा है कि जब किसी संख्या का मान मालूम नहीं है तो उसे हम कोई भी चरांक मान सकते हैं।''

माना कि पहली टोकरी में x अमरूद हैं।

तो दूसरी टोकरी में $2x$ अमरूद होंगे।

अब पहली टोकरी में 8 अमरूद और मिलाने पर उसमें $x + 8$ अमरूद हो गए और यह दूसरी टोकरी के अमरूद के बराबर हैं।

अर्थात् $x + 8 = 2x$

नरेश ने कहा, ''अरे वाह! यह तो एक समीकरण बन गया और यहाँ x का मान 8 रखने पर यह कथन सत्य हो जाता है। इसका मतलब यही हुआ कि अज्ञात मान वाले सवालों को समीकरण की सहायता से बड़ी आसानी से हल किया जा सकता है।''

आपने भी देखा कि अज्ञात राशियों का मान निकालने के लिए समीकरण किस प्रकार उपयोगी हैं। आइए, अब हम समीकरण कैसे बनाया जाता है, देखें।

समीकरण कैसे बनाएं (How to Make Equations)

एक खेल खेलते हैं। आप सब अपने मन में अपनी–अपनी उम्र सोचिए। इसमें 5 जोड़ दीजिए। योगफल को 2 से गुणा कर उसमें 10 घटाइए। जो अन्तर आया उसमें अपनी उम्र को घटा दीजिए। आपका उत्तर ही आपकी उम्र है।

नरेश का हल		शिक्षक के निर्देश		अनु का हल
12 वर्ष	←	अपनी उम्र सोचें	→	11 वर्ष
12 + 5 = 17 वर्ष	←	5 जोड़िये	→	11 + 5 = 16 वर्ष
17 x 2 = 34 वर्ष	←	2 से गुणा कीजिए	→	2 x 16 = 32 वर्ष
34 – 10 = 24 वर्ष	←	10 घटाइए	→	32 – 10 = 22 वर्ष
24 – 12 = 12 वर्ष	←	उम्र को घटाइए	→	22 – 11 = 11 वर्ष

इसी प्रकार सभी ने पाया कि उन्होंने जो अपनी उम्र सोची थी वही उत्तर के रूप में आ रही है। यह कैसे हुआ? आइए, इसे समझें –

माना कि सोची गई उम्र x वर्ष है

उम्र में 5 जोड़ा = $x + 5$

योगफल को 2 से गुणा किया $2(x+5) = 2x + 10$

10 घटाया $2x + 10 - 10 = 2x$

सोची गयी उम्र को घटाया $2x - x = x$

आप वही हल प्राप्त कर रहे हैं जो उम्र आपने सोची थी ।

इस हल को देखते ही राजू ने कहा, ''अब मैं भी समीकरण बनाने के प्रश्न पूछ सकता हूँ। किसी संख्या में 2 का गुणा कर 5 घटाने से 3 आता है तो समीकरण क्या होगी ? अनु ने तत्काल समीकरण बनाया – ''माना कि संख्या x है, 2 का गुणा करने पर आया $2x$। इसमें 5 घटाने पर मिला $2x - 5$ जो 3 के बराबर है अर्थात समीकरण होगा –

$2x - 5 = 3$

अनु ने कहा, ''अब मैं तुम्हें एक समीकरण दे रही हूँ। तुम इसे शब्द रूप में कैसे बदलोगे?

समीकरण : $7y - 5 = 9$

हमीदा ने तुरंत सोचा किसी संख्या में 7 का गुणा करके 5 घटाने पर 9 के बराबर है।

अब सभी विद्यार्थी समीकरण बनाने और समीकरण को शब्द रूप में बदलने में दिलचस्पी दिखाने लगे।

प्रश्नावली (EXERCISE) 14.1

प्रश्न 1 निम्नलिखित में से समीकरण छांटकर लिखिए –

i. $x - 4 = 10$

ii. $x - 4 - 10$

iii. $2y - 3 + 9$

iv. $5(2y - 3) = 15$

v. $3x + 4$

(vi) $7 = 2x - 5$

(vii) $3x - 2x = 2x$

(viii) $\frac{5}{x} = 3$

(ix) $4.5 + 3.2x + z$

(x) $ly + lx = px$

प्रश्न 2. निम्नलिखित समीकरणों का बायाँ एवं दायाँ पक्ष बताइए –

i. $x - 5 = 9$
ii. $2x - 3 = 7$
iii. $2y = 9 - y$
iv. $2y = 6$
v. $15 = 2a + 5$

प्रश्न 3. निम्नलिखित कथनों में अज्ञात संख्या y का प्रयोग करके समीकरण में बदलिए –

i. किसी संख्या के दुगुने में से 3 कम करने पर 17 आता है।
ii. किसी संख्या का छठा भाग 7 है।
iii. किसी संख्या एवं 5 का अन्तर 8 है।
iv. किसी संख्या में 7 का गुणा कर 5 घटाने से 9 बचता है।

प्रश्न 4 समीकरणों को कथन के रूप में लिखिए।

i. $x - 6 = 9$
ii. $7y - 14 = 0$
iii. $\frac{2x}{3} = 6$
iv. $\frac{x}{2} + 5 = 10$
v. $38 - 2x = 4$

समीकरण हल करना (Solving Equations)

आपने क्रियाकलाप 2 में यह देखा कि प्रत्येक कथन x के केवल एक मान के लिए ही सत्य है, जैसे– $x + 2 = 4$ में यदि $x = 7$, हो तब कथन असत्य है क्योंकि x का मान 7 रखने पर बायाँ पक्ष दायें पक्ष के बराबर नहीं होता। यह $x = 2$ रखने पर ही सत्य होता है अर्थात् इस प्रकार के प्रत्येक समीकरण का केवल एक ही हल है।

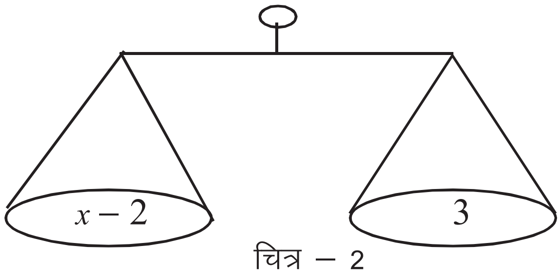
क्रियाकलाप 3.

नीचे दी गई सारणी में x के चरांक वाले समीकरण दिए गए हैं। x के अलग–अलग मान के लिए इस समीकरण के दोनों पक्ष समान हैं या असमान उदाहरण के अनुसार भरिए –

क्र.	समीकरण	समीकरण का बायाँ पक्ष	समीकरण का दायाँ पक्ष	x के विभिन्न मानों के लिए बायाँ पक्ष < या, = या > है दाँयें पक्ष से					
				x = 0	**x = 1**	**x = 2**	**x = 3**	**x = 4**	**x = 5**
1.	**x + 3 = 5**	**x + 3**	5	<	<	=	>	>	>
2.	**x - 2 = 3**								
3.	**x + 3 = 2x**								
4.	**x + 4 = 4**								
5.	**3x + 1 = 3 + x**								
6.	**x + 5 = 10**								

x के जिस मान के लिए समीकरण के दोनों पक्ष बराबर हैं, वही समीकरण का हल है। इस विधि को त्रुटि एवं प्रयास विधि कहा जाता है।

आइए, तराजू के माध्यम से समीकरण के कुछ गुणों को चित्रित करके देखें :



चित्र – 2

बायाँ पक्ष दाँया पक्ष

चित्र 2 के समीकरण $x-2=3$ में बायाँ पक्ष $x-2$ है तथा दायाँ पक्ष 3 है। यह तराजू संतुलन की अवस्था में है। अब यदि हम तराजू के बायें पलड़े में कुछ भार रखें तो संतुलन लाने के लिए दाएँ पक्ष में भी उतना ही भार रखना पड़ेगा। उसी प्रकार यदि दाएँ पक्ष से कुछ भार निकाल लें तो संतुलन के लिए बाएँ पक्ष से भी उतना ही भार निकालना पड़ेगा अर्थात् यदि किसी समीकरण के एक पक्ष में कोई संक्रिया की जाए तो दूसरे पक्ष में भी वही संक्रिया करनी होगी। तभी समीकरण के दोनों पक्ष बराबर रहेंगे।

यह ज्ञात है कि $(-2)+(2)=0$ होता है, उपरोक्त समीकरण में बायें पक्ष में यदि 2 जोड़ दिया जाए तो x बचेगा, चूंकि बायें पक्ष में दो जुड़ रहा है तो समीकरण को संतुलन में रखने के लिए दाएँ पक्ष में भी 2 जोड़ना पड़ेगा।

अर्थात् – $x-2=3$

$$x-2+2=3+2$$

$$x+[(-2)+(2)]=5$$

$$x=5$$

इसी प्रकार, यदि $7x = 21$ हो,

7 में 7 का भाग दिया जाए तो 1 प्राप्त होता है, यदि $7x$ में 7 का भाग दें तो x प्राप्त होगा। चूंकि बाएँ पक्ष में 7 का भाग दिया जा रहा है तो दाएँ पक्ष में भी 7 का भाग देना पड़ेगा।

अर्थात् – $7x = 21$

$$\frac{7x}{7}=\frac{21}{7}$$

$$x = 3$$

उदाहरणों में आपने सीखा कि किसी समीकरण के दोनों पक्षों में यदि कोई स्थिरांक जोड़ दिया जाए या किसी स्थिरांक को घटा दिया जाए अथवा किसी स्थिरांक से गुणा किया जाये या भाग दिया जाए तो समीकरण के संतुलन में कोई परिवर्तन नहीं होता।

✍ क्रियाकलाप 4.

नीचे दी गयी सारणी में समीकरणों के दोनों पक्षों में क्या जोड़ें, घटायें, गुणा करें या भाग दें कि चर का मान प्राप्त हो जाए। दिए गए उदाहरण के अनुसार रिक्त खानों को भरिए –

क्र.स.	समीकरण	दोनों पक्षों में क्या संक्रिया की जाए कि चरांक के पक्ष से स्थिरांक हट जाए	संक्रिया करने पर समीकरण	हल करने पर चर का मान
1.	$x + 3 = 5$	3 घटाने पर	$x + 3 - 3 = 5-3$	$x = 2$
2.	$x - 5 = 7$			
3.	$2x = 6$			
4.	$x/3 = 5$			
5.	$x + 7 = 2$			
6.	$7 = z - 4$			
7.	$5 + x = 9$			
8.	$4 + x = 2$			
9.	$-7 = 3 + y$			
10.	$4 = 8y$			

निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए –

i. $x + 3 = 10$

ii. $6 = y + 4$

iii. $S + 6 = 15$

iv. $7 + t = 25$

✍ क्रियाकलाप 5

आपने सरल समीकरण (जिसमें संक्रिया एक ही बार करनी पड़ रही है) को हल करना सीख लिया है। आइए, अब कुछ ऐसे समीकरण हल करें जिसमें दो संक्रिया करनी पड़ रही है।

क्र. सं.	समीकरण	दोनों पक्षों में क्या संक्रिया की जाए कि चरांक वाले पक्ष से स्थिरांक हट जाए	पहली संक्रिया करने पर समीकरण	x के गुणांक को हटाने के लिए दोनों पक्षों में क्या संक्रिया की जाए	दूसरी संक्रिया करने पर समीकरण	x का मान
1.	$2x+3=9$	3 घटाने पर	$2x+3-3=9-3$ या $2x=6$	$2x=6$ दोनों पक्षों में 2 से भाग देने पर	$\frac{2x}{2}=\frac{6}{2}=3$	$x=3$
2.	$18x-11=61$					
3.	$\frac{x}{7}-13=1$					
4.	$1+\frac{x}{5}=3$					
5.	$\frac{x}{4}-5=-6$					
6.	$0=\frac{x}{14}-\frac{1}{7}$					

अभ्यास (Practice) 1

1. निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए –

(i)	$3x + 8 = 20$	(ii)	$4x + 10 = 30$
(iii)	$5x - 7 = 8$	(iv)	$6x - 7 = 11$
(v)	$3x + \frac{21}{7} = 0$	(vi)	$29 = 7x + 1$
(vii)	$60 - 8x = -4$	(viii)	$19x + 7 = 45$

समीकरण बनाना एवं हल करना तो आप भली भाँति सीख चुके हैं। कुछ संख्याओं से सम्बन्धित समस्याओं को समीकरण के द्वारा हल करें।

उदाहरण 1. किसी संख्या में 5 की वृद्धि की जाए तो संख्या 20 हो जाती है वह संख्या क्या होगी?

हल :

माना कि वह संख्या x है। तो संख्या में 5 जोड़ने पर = $x + 5$

समस्या अनुसार,

अब $x + 5 = 20$

दोनों पक्षों में 5 घटाने पर

$x + 5 - 5 = 20 - 5$

$\Rightarrow \quad x = 15$

सत्यापन –

बायाँ पक्ष = $x + 5$

= $15 + 5$ (x का मान रखने पर)

= 20

= दायाँ पक्ष

उदाहरण 2. किसी संख्या में 6 की कमी करने पर वह संख्या 10 हो जाती है। वह संख्या क्या होगी?

हल : मानाकि वह संख्या x है।

तो प्रश्नानुसार संख्या में 6 की कमी करने पर संख्या $x - 6$ हो जाती है जो 10 के बराबर है।

अर्थात् $\quad x - 6 = 10$

दोनों पक्षों में 6 जोड़ने पर $\quad x - 6 + 6 = 10 + 6$ (यहाँ $-6 + 6 = 0$ और $10 + 6 = 16$)

$x = 16$

सत्यापन :– बायाँ पक्ष = $x - 6 = 16 - 6$ (x का मान रखने पर)

= 10

= दायाँ पक्ष

उदाहरण 3. किसी संख्या के दुगुने में 7 जोड़ने पर संख्या 37 हो जाती है। वह संख्या क्या होगी?

हल : माना कि वह संख्या x है ।

तो प्रश्नानुसार उस संख्या के दुगने में 7 जोड़ने पर संख्या 37 हो जाती है।

पहला चरण : संख्या का दो गुणा $= 2x$

दूसरा चरण : $2x$ में 7 जोड़ने पर $2x + 7$

तीसरा चरण : कथनानुसार, $2x + 7 = 37$

$2x + 7 - 7 = 37 - 7$ (दोनों पक्षों में 7 घटाने पर)

$2x = 30$

$\frac{2x}{2} = \frac{30}{2}$ (दोनों पक्षों में 2 का भाग देने पर)

$x = 15$

सत्यापन :

बायाँ पक्ष $= 2x + 7 = 2 \times 15 + 7$ (x का मान रखने पर)

$= 30 + 7$

$= 37$

= दायाँ पक्ष

उदाहरण 4. किसी संख्या का एक तिहाई करने पर वह संख्या 11 हो जाती है। वह संख्या ज्ञात कीजिए।

हलः माना कि वह संख्या x है।

प्रश्नानुसार

इस संख्या का एक तिहाई अर्थात् $\frac{x}{3}$ बराबर है 11 के।

अर्थात् $\frac{x}{3} = 11$

x का मान निकालने के लिए समीकरण के बायें पक्ष के हर से 3 को हटाना होगा।

इसलिए दोनों पक्षों में 3 का गुणा करने पर,

$$\frac{x}{3} \times 3 = 11 \times 3$$

$$x = 33$$

सत्यापन : 33 का एक तिहाई $= \frac{33}{3} = 11$

उदाहरण 5. मालती एवं उसके पिता की आयु का योग 49 वर्ष है। यदि मालती की आयु 12 वर्ष हो तो उसके पिता की आयु ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि मालती के पिता की आयु x वर्ष है।

प्रश्नानुसर, मालती की आयु 12 वर्ष है।

दोनों की आयु का योग $= x + 12$

चूंकि दोनों की आयु का योग 49 वर्ष है ।

अतः $x + 12 = 49$

$x + 12 - 12 = 49 - 12$ (दोनों पक्षों में 12 घटाने पर)

$x + 0 = 37$

$\Rightarrow x = 37$

पिता की आयु 37 वर्ष है ।

सत्यापन – पिता की आयु एवं मालती की आयु का योग

$= 37 + 12$

$= 49$ वर्ष

उदाहरण 6. शिवांगी के पर्स में केवल 50 पैसे के सिक्के हैं । यदि पर्स में 25 रु. हों तो सिक्कों की संख्या ज्ञात कीजिए–

हल : मान लो कि सिक्कों की संख्या x है

प्रत्येक सिक्के का मूल्य $= 50$ पैसे $= \frac{1}{2}$ रुपये

x सिक्कों का मूल्य $= \frac{1}{2}\, x$ रुपये

अतः प्रश्नानुसार $\frac{1}{2}\, x = 25$

$\frac{1}{2} x \times 2 = 25 \times 2$ (दोनों पक्षों में 2 का गुणा करने पर)

$x = 50$

अतः शिवांगी के पर्स में 50 पैसे के 50 सिक्के हैं।

जाँच : 50 सिक्कों का मूल्य $= 50 \times 50$

$= 2500$ पैसे

$= 25.00$ रु.

प्रश्नावली (EXERCISE) 14.2

1. निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए –

3411BH

i. $x - 3 = -4$

ii. $z - 8 = 0$

iii. $3y = 9$

iv. $16 = 3y + 7$

v. $5 + \frac{x}{3} = 7$

vi. $9z - 7 = 14$

2. निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए एवं अपने उत्तर की जाँच कीजिए –

(i) $3\,(2 + x) = 12$

(ii) $10 - z = 6$

(iii) $\frac{x}{5} = 15$

(iv) $7 - 4y = 3$

3. किसी संख्या का दोगुना 10 है संख्या क्या होगी ?
4. किसी संख्या के दुगने में 35 जोड़ा जाए तब 85 प्राप्त होता है। वह संख्या क्या होगी ?
5. 25 पैसे के कितने सिक्के 10 रु. के बराबर होगें ?

6. किसी संख्या के आधे में से यदि 4 घटाये तब 6 प्राप्त होता है संख्या क्या होगी ?
7. उमा के पास कुछ मीटर कपड़ा है। उसमें से 2–2 मीटर कपड़े के वह 4 पर्दे बना देती है उसके बाद भी उसके पास 5 मीटर कपड़े बचे रहते है तब प्रारंभ में उसके पास कितने मीटर कपड़े थे ?

हमने सीखा (We Learnt)

किसी भी समस्या को समीकरण के द्वारा हल करने के लिए निम्नलिखित बातों पर विशेष ध्यान दिया जाना चाहिए –

1. समस्या को अच्छी तरह पढ़िए एवं निर्धारित कीजिए कि कौन–कौन सी ज्ञात राशि एवं कौन–कौन सी अज्ञात राशि है।
2. अज्ञात राशि को x, y, z इत्यादि से व्यक्त कीजिए।
3. समस्या को एक–एक शब्द के अनुसार जहाँ तक संभव हो, गणितीय कथन में परिवर्तित कीजिए।
4. वे राशियाँ निर्धारित कीजिए जो बराबर हों और उनसे एक उचित समीकरण बनाइए।
5. समीकरण को अज्ञात राशि के लिए हल कीजिए।
6. यह जाँच कीजिए कि आपका उत्तर समस्या में दी हुई शर्तों को संतुष्ट करता है अथवा नहीं।