ଅଷ୍ଟମ ଅଧ୍ୟାୟ

ସମ୍ଭାବ୍ୟତା

(PROBABILITY)

8.1 ଉପକ୍ରମଣିକା (Introduction) :

ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସମୟରେ ବର୍ଷା ହେବାର ସମ୍ଭାବନା, ପ୍ରତିଯୋଗିତାରେ ଭାଗ ନେବାକୁ ଥିବା ଗୋଟିଏ ଦଳର ଜିତିବାର ସମ୍ଭାବନା, ଲଟେରୀ ଟିକେଟ୍ କିଣିଥିବା ଜଣେ ବ୍ୟକ୍ତି ପ୍ରଥମ ପୁରସ୍କାର ପାଇବାର ସମ୍ଭାବନା, ପରୀକ୍ଷା ଦେବାକୁ ଥିବା ଜଣେ ବିଦ୍ୟାର୍ଥୀ ପ୍ରଥମ ସ୍ଥାନ ଅଧିକାର କରିବାର ସମ୍ଭାବନା ଇତ୍ୟାଦି ବିଷୟ ଗୁଡିକୁ ଅନୁଧ୍ୟାନ କଲେ ଜଣାଯାଏ, ଏଥିରୁ କୌଣସିଟି ନିଶ୍ଚିତ ନୁହେଁ । ମାତ୍ର ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ କିଛି ନା କିଛି ସମ୍ଭାବନା ଅଛି । ପ୍ରଶ୍ନ ଉଠୁଛି ସମ୍ଭାବନା କେତେ ? ''ଏହାକୁ କଣ ମପାଯାଇ ପାରିବ ?'' କୌଣସି ଏକ ଘଟଣାର ସମ୍ଭାବନାର ପରିମାପରୁ ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ତତ୍ତ୍ୱ (Probability Theory) ସୃଷ୍ଟି ହୋଇଥିଲା ।

ଫ୍ରାନ୍ସରେ ପୂରାତନ କାଳରେ ଜୁଆ ଖେଳ ଅତ୍ୟନ୍ତ ଲୋକପ୍ରିୟ ଥିଲା । ଏଣୁ ଖେଳରେ ଅର୍ଥ ଖଟାଇ ବାଜି ଜିତିବାର ସମ୍ଭାବନା କେତେ ? ଏହି ପ୍ରଶ୍ନ, ଅର୍ଥ ଖଟାଉ ଥିବା ଲୋକମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ମୁଖ୍ୟ ଆଲୋଚ୍ୟ ବିଷୟ ଥିଲା । 1654 ମସିହା କଥା । Chevalier de Mere ନାମକ ଜଣେ ବ୍ୟକ୍ତି ଜୁଆ ଖେଳରେ ସିଦ୍ଧ ହସ୍ତ ଥିଲେ । ବାଜି ଜିତିବାର ସମ୍ଭାବନା ସମ୍ପର୍କରେ ସେ ଗଣିତଜ୍ଞ Blaise Pascal (1623 - 1662) ଙ୍କୁ ସେ ବାରମ୍ବାର ପ୍ରଶ୍ନ ପଚାରୁ ଥିଲେ । Blaise Pascal ଓ Pierre de Format (1601 - 1655) ଏହି ଦୁଇଜଣ ଫରାସୀ ଗଣିତଜ୍ଞ ସେମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ବାଜି ଜିତିବାର ସମ୍ଭାବନା ସମ୍ପର୍କରେ ଆଲୋଚନା କରୁଥିଲେ ଏବଂ ପ୍ରତ୍ୟେକେ ବାଜି ଜିତିବାର ସମ୍ଭାବନା ସମ୍ପର୍କିତ ସମସ୍ୟାର ସମାଧାନ କରିଥିଲେ । ଏହି ଦୁଇ ଗଣିତଜ୍ଞଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ସମାଧାନର ସୂତ୍ରରୁ ହିଁ ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ତତ୍ତ୍ୱ ଷୋଡଶ ଶତାବ୍ଦୀରେ ଜନ୍ମଲାଭ କରିଥିଲା । ପରେ ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ତତ୍ତ୍ୱକୁ ଯେଉଁ ଗଣିତଜ୍ଞ ମାନେ ପରିପୁଷ୍ଟ କରିଥିଲେ ସେମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ Jacob Bernoulli (1654 - 1705), P. Laplace (1749 - 1827), Abraham de Moivre (1667 - 1754) ଙ୍କ ନାମ ଉଲ୍ଲେଖ ଯୋଗ୍ୟ। ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ତତ୍ତ୍ୱର ପ୍ରଥମ ପୁସ୍ତକ, ଯାହା 1654 ମସିହାରେ ପ୍ରକାଶିତ ହୋଇଥିଲା, ତାହାର ରଚୟିତା ଥିଲେ ପଦାର୍ଥ ବିଜ୍ଞାନବିତ୍ Christiaan Huygens (1629 - 1695) । ଯେଉଁ ଗଣିତଜ୍ଞସମୂହ ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ତତ୍ତ୍ୱକୁ ଆଧୁନିକ ଗଣିତର ରୂପ ପ୍ରଦାନ କରିଛନ୍ତି; ସେମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ A.N.Kalmogorov, A.A. Markovଙ୍କ ନାମ ଉଲ୍ଲେଖଯୋଗ୍ୟ । ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ତତ୍ତ୍ୱର ବହୁଳ ପ୍ରୟୋଗ ଯେଉଁ ବିଭାଗଗୁଡିକରେ ଅଛି, ସେଗୁଡିକ ହେଲା, ପଦାର୍ଥ ବିଜ୍ଞାନ, ଜୀବବିଜ୍ଞାନ, ଅର୍ଥନୀତି, ଯୋଜନା ପ୍ରକରଣ, ପାଣିପାଗର ପୂର୍ବାନୁମାନ, ବାଣିଜ୍ୟ ବିଭାଗ ଇତ୍ୟାଦି ।

8.2 ସମ୍ଭାବ୍ୟତାର ଧାରଣା :

ସମ୍ଭାବ୍ୟତାର ଧାରଣା ପରୀକ୍ଷଣ (Experiments) ଏବଂ ପର୍ଯ୍ୟବେକ୍ଷଣ (Observations) ଉପରେ ଆଧାରିତ । ପ୍ରକୃତ ପରୀକ୍ଷଣ କରି ଏବଂ ସେଥିରୁ ଉଦ୍ଭବ ଫଳାଫଳର ପ୍ରକୃତ ଉପସ୍ଥାପନା କରାଯାଇ ସମ୍ଭାବ୍ୟତାକୁ ସଂଖ୍ୟାରେ ମାପ କରାଯାଇଥିବାରୁ ଏହାକୁ Empirical Probability କୁହାଯାଏ । ମୁଦ୍ରା ଟସ୍ (Tossing a coin) ଓ ଲୁଡୁ ଗୋଟି ଗଡ଼ାଇବା (Throwing of dice) ଭଳି କେତେକ ପରୀକ୍ଷଣରୁ ଆମେ Probability ର ସ୍ପଷ୍ଟ ଧାରଣା ପାଇପାରିବା । ଗୋଟିଏ ମୁଦ୍ରାର ଦୁଇଟି ପାର୍ଶ୍ୱ Head (H) ଓ ଏହାର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱ Tail (T) ଥାଏ । ମୁଦ୍ରାଟିକୁ ଟସ୍ କଲେ H କିମ୍ବା T ଉପରକୁ ଆସି ପଡ଼ିବ, ତାହା ତୁମେ ଜାଣିଛ । ଟସ୍ ପୂର୍ବରୁ ଆମେ କହିପାରିବା କି, ପଡ଼ିଥିବା ପାର୍ଶ୍ୱଟି Head ହେବ କିମ୍ବା Tail ହେବ ? କାରଣ ଏହି ଫଳାଫଳ କୌଣସି ନିୟମର ଅଧୀନ ନୁହେଁ । ଫଳାଫଳ ଯାହାବି ଆସିବାର ସମ୍ଭାବନା ଅଛି ଏଥିପାଇଁ ବ୍ୟବହୃତ ମୁଦ୍ରାଟି ଅନପେକ୍ଷ ଅଥବା ଅପ୍ରବଣ (unbiased) ଏବଂ ସମତୁଲ୍ୟ (balanced) ହେବା ଦରକାର, ଯେପରିକି ଫଳାଫଳ H କିମ୍ବା T ହେବାର ସମ୍ଭାବନା (Chance) ସମାନ ହେଉଥିବ । ସେହିପରି ଲୁଡୁଗୋଟି ମଧ୍ୟ ଅପ୍ରବଣ ଏବଂ ସମୁତଲ୍ୟ ହେବା ଆବଶ୍ୟକ; ଯେପରିକି ଲୁଡୁଗୋଟି ଗଡ଼ାଇବା ଦ୍ୱାରା ଏଥିରେ ପଡୁଥିବା ଛଅଗୋଟି ଫଳାଫଳ ଯଥା : 1,2,3,4,5 ଓ 6 ପଡ଼ିବାର ସମ୍ଭାବନା ସମାନ ହେଉଥିବ । ଉକ୍ତ ଆଲୋଚନାରେ ସମ୍ଭାବ୍ୟତା କେବଳ ପରୀକ୍ଷଣ (Experiments) ଏବଂ ପର୍ଯ୍ୟବେକ୍ଷଣ (Observations) ଉପରେ ପର୍ଯ୍ୟବେସିତ ହେବ ।

ମନେରଖ : ମୁଦ୍ରା ଟସ୍‌ରେ ମୁଦ୍ରାଟି ସର୍ବଦା ଅପ୍ରବଣ ଓ ସମତୁଲ୍ୟ । ସୁତରାଂ ଏହି ବିଶେଷଣ ଦ୍ୱୟଙ୍କୁ ବ୍ୟବହାର ନ କଲେ ମଧ୍ୟ ବ୍ୟବହୃତ ମୁଦ୍ରାଟି ଅପ୍ରବଣ ଓ ସମତୁଲ୍ୟ ବୋଲି ଧରି ନିଆଯାଏ ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ଘଟଣା (Event) : ଗୋଟିଏ ପରୀକ୍ଷଣରେ ଉପୁଜିଥିବା ସମସ୍ତ ଫଳାଫଳ ମଧ୍ୟରୁ ଯେକୌଣସି ସଂଖ୍ୟକ ଫଳାଫଳମାନଙ୍କୁ ବିଚାର କରିବା ଦ୍ୱାରା ଗୋଟିଏ ଘଟଣା ଉପୁଜିଥାଏ । ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ ମୁଦ୍ରା ଏକଥର ଟସ୍ କଲେ ଫଳ T କିମ୍ବା H ହେବ । ଏଠାରେ ଦୁଇଗୋଟି ଘଟଣା ଉପୁଜିଲା ବୋଲି କହିବାକୁ ହେବ ।

ଆସ, ନିମ୍ନ କେତେକ ପରୀକ୍ଷଣ ସହ ଜଡ଼ିତ ହେବା ଯାହା ଦ୍ୱାରା ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ତତ୍ତ୍ୱକୁ ବୁଝିବା ଆମ ପକ୍ଷେ ସହଜ ହୋଇପାରିବ ।

ପ୍ରଥମ ପରୀକ୍ଷଣ, ମୁଦ୍ରା ଟସ୍ (Tossing a coin) :

ପ୍ରଥମେ ଗୋଟିଏ ମୁଦ୍ରାକୁ 10 ଥର ଟସ୍ କରିବା । ଆମେ ଜାଣିଛେ ଥରେ ଟସ୍ କଲେ, H କିମ୍ବା T ପଡ଼ିବ । ଆସ ଗୋଟିଏ ସାରଣୀ ଏପରି ପ୍ରସ୍ତୁତ କରିବା ଯେଉଁଥିରେ 10 ଥର ଟସ୍‌ରେ ପଡୁଥିବା H ଏବଂ T କୁ ଠିକ୍ ଭାବେ ଲିପିବଦ୍ଧ ପାଇଁ ଅନୁରୂପ ସ୍ତମ୍ଭରେ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଟିକ୍ (✓) ଚିହ୍ନ ଦେଇପାରିବା ।

ଟେବୁଲ - 1

ଟସ୍ ସଂଖ୍ୟା	ମୁଦ୍ରାର H ପାର୍ଶ୍ୱ	ମୁଦ୍ରାର T ପାର୍ଶ୍ୱ
1.		
2.		
3.		
....		
....		
9.		
10.		

(i) ତଳେ ଟିକ୍ ଚିହ୍ନକୁ ଗଣି ଟସ୍ ଦ୍ୱାରା ପଡ଼ିଥିବା ସମୁଦାୟ H ପାର୍ଶ୍ୱ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ ସମୁଦାୟ T ପାର୍ଶ୍ୱ ସଂଖ୍ୟା ସ୍ଥିର କର ।

(ii) ସମୁଦାୟ H ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ ମୁଦ୍ରା ଟସ୍ ସଂଖ୍ୟାକୁ ନେଇ ସେମାନଙ୍କର ଅନୁପାତ ସ୍ଥିର କର ।
ସେହିପରି ସମୁଦାୟ T ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ ମୁଦ୍ରା ଟସ୍ ସଂଖ୍ୟାର ଅନୁପାତ ମଧ୍ୟ ସ୍ଥିର କର ।

ଅର୍ଥାତ୍ 10 ଗୋଟି ଟସ୍ ପାଇଁ $\frac{\text{ସମୁଦାୟ H ସଂଖ୍ୟା}}{\text{ମୁଦ୍ରା ଟସ୍ ସଂଖ୍ୟା}}$ ଏବଂ $\frac{\text{ସମୁଦାୟ T ସଂଖ୍ୟା}}{\text{ମୁଦ୍ରା ଟସ୍ ସଂଖ୍ୟା}}$ ସ୍ଥିର କରିବା ।

ପୁଣି 20 ଥର ମୁଦ୍ରା ଟସ୍ ପାଇଁ ଏବଂ 30 ଥର ମୁଦ୍ରା ଟସ୍ ପାଇଁ ଉକ୍ତ ପରୀକ୍ଷଣର ପୁନରାବୃତ୍ତି କରିବା । ସେଥିରୁ ପୂର୍ବଭଳି ମୁଦ୍ରା ଟସ୍‌ରେ ପଡୁଥିବା H ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ T ସଂଖ୍ୟା ସ୍ଥିର କରିବା ଏବଂ ପରେ ଦ୍ୱିତୀୟ ସୋପାନକୁ ଆଧାର କରି ପ୍ରତ୍ୟେକ ପରୀକ୍ଷଣ ପାଇଁ ଆନୁପାତିକ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକୁ ସ୍ଥିର କରିବା । ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ ପୂର୍ବ ଭଳି ଗୋଟିଏ ଲେଖାଏଁ ଟେବୁଲ ପ୍ରସ୍ତୁତ କର ଏବଂ ଟେବୁଲ୍‌ରୁ ନିର୍ଣ୍ଣିତ ତଥ୍ୟ ଆଧାରରେ ଆନୁପାତିକ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକୁ ସ୍ଥିର କରିବା ପାଇଁ ଚେଷ୍ଟା କର ।

ଏହିପରି ଟସ୍ ସଂଖ୍ୟା (n) କ୍ରମେ କ୍ରମେ ବଢ଼ିଚାଲିଲେ (H) ର ବାରମ୍ବାରତା (m) (ଟସ୍‌ରେ ପଡୁଥିବା ସମୁଦାୟ H ସଂଖ୍ୟା) $\frac{n}{2}$ ର ନିକଟବର୍ତ୍ତୀ ହେବ । ଏହି ପରୀକ୍ଷଣରୁ ଆମେ କହିପାରିବା ଯେ, ଟସ୍ ସଂଖ୍ୟା n ଅତି ବୃହତ୍ ହେଲେ

$\frac{\text{H ର ବାରମ୍ବାରତା}}{\text{ଟସ୍ ସଂଖ୍ୟା}} = \frac{m}{n} \approx \frac{1}{2}$ ହେବ । ସେହିପରି T ର ବାରମ୍ବାରତା ଓ ଟସ୍ ସଂଖ୍ୟାର ଅନୁପାତ ମଧ୍ୟ $\frac{1}{2}$ ହେବ ।

ସଂକ୍ଷେପରେ ଆମେ ଲେଖିବା, H ର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା $= \frac{1}{2}$, ଏବଂ T ର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା $= \frac{1}{2}$ । ଏହାକୁ ସଂକେତ ମାଧ୍ୟମରେ ଲେଖିବା $P(H) = \frac{1}{2}$ ଓ $P(T) = \frac{1}{2}$ ।

ଏକ ପରୀକ୍ଷଣ କରି ନିମ୍ନ ଟେବୁଲ୍‌ଟି ଗଠନ କରାଯାଇଛି । ଏଥିରେ ଟସ୍ ସଂଖ୍ୟାର ବୃଦ୍ଧି କରାଯାଇଛି ଏବଂ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଟସ୍‌ରେ ପଡୁଥିବା H ସଂଖ୍ୟାକୁ ମଧ୍ୟ ଲିପିବଦ୍ଧ କରାଯାଇଛି । ତତ୍ପରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ P(H) ନିରୂପଣ କରାଯାଇଛି ।

ଟେବୁଲ - 2

ପରୀକ୍ଷଣର କ୍ରମିକ ନଂ	ଟସ୍ ସଂଖ୍ୟା (n)	H ର ବାରମ୍ବାରତା (m)	$P(H)=\frac{m}{n}$
1	20	13	0.650
2	50	23	0.460
3	100	56	0.560
4	200	107	0.535
5	500	259	0.518
6	1000	496	0.496

ଏହି ଟେବୁଲ୍‌ରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ, ଟସ୍ ସଂଖ୍ୟା (n) ର ବୃଦ୍ଧି ଘଟିଲେ ଶେଷ ସ୍ତମ୍ଭରେ ପାଇଥିବା ସଂଖ୍ୟା ଓ 0.5 ଅର୍ଥାତ୍ $\frac{1}{2}$ ମଧ୍ୟରେ ପାର୍ଥକ୍ୟ କ୍ରମେ କ୍ରମେ କମି ଆସୁଛି । ସେହିପରି ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ T ର ସମ୍ଭାବ୍ୟତାକୁ ସ୍ଥିର କରାଯାଇପାରେ ।

ମନେରଖ: H ର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ଓ T ର ସମ୍ଭାବ୍ୟତାର ସମଷ୍ଟି = P(H) + T(H) = 1 ହେବ । (ନିଜେ ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ)

ଦ୍ୱିତୀୟ ପରୀକ୍ଷଣ (ଲୁଡୁ ଗୋଟି ଗଡ଼ାଇବା) :

ଗୋଟିଏ ଲୁଡୁ ଗୋଟିକୁ 15 ଥର ଗଡ଼ାଇବା । ପ୍ରତ୍ୟେକ ଥର 1, 2, 3, 4, 5 ଓ 6 ମଧ୍ୟରୁ ଯେକୌଣସି ଗୋଟିଏ ସଂଖ୍ୟା, ଗୋଟିର ଉପର ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଦୃଶ୍ୟମାନ ହେବ । (ଅବଶ୍ୟ କେତେକ ଗୋଟିରେ ଉକ୍ତ ସଂଖ୍ୟା ପରିବର୍ତ୍ତେ ସେହି

ସଂଖ୍ୟକ ଚିହ୍ନ ମଧ୍ୟ ଥାଏ) । ପ୍ରଥମ ପରୀକ୍ଷଣ ଭଳି ପ୍ରତ୍ୟେକ ଥର ଲୁଡୁ ଗୋଟି ଗଡ଼ାଇବା ପରେ ଗୋଟିର ଉପରକୁ ଦେଖାଯାଉଥିବା ସଂଖ୍ୟାକୁ ନିମ୍ନ ଟେବୁଲରେ ଟିକ୍ ଚିହ୍ନ ଦ୍ୱାରା ଅନୁରୂପ ସ୍ତମ୍ଭମାନଙ୍କରେ ଲିପିବଦ୍ଧ କର ।

ଟେବୁଲ - 3

ଲୁଡୁଗୋଟି ଗଡ଼ାଇବା ସଂଖ୍ୟା	1	2	3	4	5	6
I						
II						
III						
.....						
XV						

ଟେବୁଲରୁ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଫଳ ଅର୍ଥାତ୍ 1, 2, 3, 4, 5 ଓ 6 ର ବାରମ୍ବାରତା ସ୍ଥିର କର ଏବଂ ପ୍ରତ୍ୟେକର ବାରମ୍ବାରତା ଓ ଲୁଡୁଗୋଟି ଗଡ଼ାଇବାର ସଂଖ୍ୟାର ଅନୁପାତକୁ ସ୍ଥିର କର । ଏଠାରେ ଲୁଡୁଗୋଟି ଗଡ଼ାଇବାର ସଂଖ୍ୟାକୁ ଯଥାକ୍ରମେ 40 ଥର ଓ 50 ଥରକୁ ବଢ଼ାଅ ଏବଂ ପୂର୍ବ ଭଳି 1, 2, 3, 4, 5 ଓ 6 ର ବାରମ୍ବାରତା ଓ ଟସ୍ ସଂଖ୍ୟାର ଅନୁପାତଗୁଡ଼ିକୁ ସ୍ଥିର କର । ଉକ୍ତ ପରୀକ୍ଷଣରୁ ଜାଣିପାରିବା ପ୍ରତ୍ୟେକ ଫଳର ବାରମ୍ବାରତା ଓ ଲୁଡୁଗୋଟି ଗଡ଼ାଇବାର ସଂଖ୍ୟାର ଅନୁପାତ $\frac{1}{6}$ ଅର୍ଥାତ୍ 0.166 ର ନିକଟବର୍ତ୍ତୀ ହେବ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ଲୁଡୁଗୋଟି ଗଡ଼ାଯାଉଥିବା ସଂଖ୍ୟା (n) କୁ ବୃଦ୍ଧି କରାଯାଇ ଗୋଟିଏ ପରୀକ୍ଷଣରେ କେବଳ ଫଳ '4' ର ବାରମ୍ବାରତା (m) ସ୍ଥିର କରାଯାଇଛି । ତତ୍ପରେ $\frac{m}{n}$ ସ୍ଥିର କରି ନିମ୍ନ ଟେବୁଲର ଅନୁରୂପ ସ୍ତମ୍ଭଗୁଡ଼ିକରେ ଲିପିବଦ୍ଧ କରାଯାଇଛି ।

ଟେବୁଲ - 4

ଗୋଟି ଗଡ଼ାଯାଉଥିବା ସଂଖ୍ୟା (n)	ଫଳ 4 ର ବାରମ୍ବାରତା (m)	$P(4) = \frac{m}{n} = \frac{\text{'4' ର ବାରମ୍ବାରତା}}{\text{ଗୋଟି ଗଡ଼ିଥିବା ସଂଖ୍ୟା}}$
10	4	0.4
30	3	0.333
60	12	0.200
120	18	0.150
600	98	0.163
1200	202	0.167

ଏଠାରେ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ଯେ n ର ମୂଲ୍ୟରେ ବୃଦ୍ଧି ଘଟିଲେ $\frac{m}{n}$ ର ମାନ 0.166 କିମ୍ବା $\frac{1}{6}$ ନିକଟବର୍ତ୍ତୀ ହେଉଛି ।
ଏଠାରେ ସଂକ୍ଷେପରେ ଲେଖିପାରିବା 4 ର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା $= P(4) = \frac{1}{6}$

ସେହିପରି 1, 2, 3, 5 ଓ 6 ପ୍ରତ୍ୟେକର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା $\frac{1}{6}$ ନିରୂପଣ କରାଯାଇପାରେ । ଏଠାରେ ଆମେ ଏହି ପରୀକ୍ଷଣରୁ ଏହି ସିଦ୍ଧାନ୍ତରେ ଉପନୀତ ହେବା ଯେ, ଗୋଟିଏ ଫଳର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା $= \frac{\text{ଫଳଟିର ବାରମ୍ବାରତା}}{\text{ସମୁଦାୟ ଗୋଟି ଗଡିବାର ସଂଖ୍ୟା}}$

ସୁତରାଂ E ଏକ ଘଟଣା ହେଲେ ଏହାର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା $= P(E) = \frac{m}{n}$

ଉପରୋକ୍ତ ପରୀକ୍ଷଣଦ୍ୱୟରୁ ଜାଣିଲେ,

(i) $0 < P(E) < 1$ ଅର୍ଥାତ୍ ଯେକୌଣସି ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଫଳର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା 0 ଏବଂ 1 ମଧ୍ୟସ୍ଥ ଏକ ସଂଖ୍ୟା ।

(ii) ଗୋଟିଏ ପରୀକ୍ଷଣରେ ଫଳାଫଳଗୁଡ଼ିକର ସମ୍ଭାବ୍ୟତାର ସମଷ୍ଟି ସର୍ବଦା 1 ସହ ସମାନ ହେବ ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : (a) ପରୀକ୍ଷଣରେ ଯଦି ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଫଳ ନିଶ୍ଚିତ ଭାବେ ଘଟେ, ତେବେ ଉକ୍ତ ଫଳର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା 1 ସହ ସମାନ ହେବ ।

(b) ପରୀକ୍ଷଣରେ ଯଦି କୌଣସି ଫଳ କେବେ ହିଁ ଉପୁଜି ନ ଥାଏ ତେବେ ଏହାର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ଶୂନ ।

ତେଣୁ, $\mathbf{0 \le P(E) \le 1}$

ଉଦାହରଣ - 1 : ଗୋଟିଏ ଅପ୍ରବଣ ମୁଦ୍ରାକୁ ଏକ ସଙ୍ଗେ 500 ଥର ଟସ୍ କରାଯିବାରୁ ନିମ୍ନ ପ୍ରକାରରେ ଫଳ ଘଟିଲା । H : 260, T : 240

ପ୍ରତ୍ୟେକ ଫଳ ପାଇଁ ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ସ୍ଥିର କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ ସମୁଦାୟ ଟସ୍ ସଂଖ୍ୟା = 500, H ର ବାରମ୍ବାରତା = 260 ଏବଂ T ର ବାରମ୍ବାରତା = 240

ଅତଏବ $P(H) = \dfrac{\text{H ର ବାରମ୍ବାରତା}}{\text{ଟସ୍ ସଂଖ୍ୟା}} = \dfrac{260}{500} = \dfrac{13}{25}$ ଅଥବା 0.52

ସେହିପରି $P(T) = \dfrac{\text{T ର ବାରମ୍ବାରତା}}{\text{ଟସ୍ ସଂଖ୍ୟା}} = \dfrac{240}{500} = \dfrac{12}{25}$ ଅଥବା 0.48

ଲକ୍ଷ୍ୟ କର, $P(H) + P(T) = 1$

ଉଦାହରଣ - 2 : ଦୁଇଗୋଟି ଅପ୍ରବଣ ମୁଦ୍ରାକୁ ଏକ ସଙ୍ଗେ 500 ଥର ଟସ୍ କରାଯିବାରୁ ଫଳ ନିମ୍ନ ପ୍ରକାରର ଲବ୍ଧ ହେଲା ।

(i) ଦୁଇଟି H : 105 ଥର, (ii) ଗୋଟିଏ H : 275 ଥର, (iii) କୌଣସିଟି H ନୁହେଁ : 120 ଥର

ପ୍ରତ୍ୟେକ ଫଳ ପାଇଁ ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ନିରୂପଣ କରି ସେମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟି ସ୍ଥିର କର ।

ସମାଧାନ : ଦୁଇଟି H କୁ HH, ଗୋଟିଏ H କୁ HT କିମ୍ବା TH ଓ କୌଣସିଟି H ନୁହେଁ କୁ TT ରୂପେ ସୂଚିତ କରାଯାଇ ଥାଏ । କାରଣ ଦୁଇଟି ମୁଦ୍ରାକୁ ଟସ୍ କରାଇଲେ ସମ୍ଭାବ୍ୟ ଫଳାଫଳଗୁଡ଼ିକ ହେବ HH, HT, TH, TT ।

ସମୁଦାୟ ଟସ୍ ସଂଖ୍ୟା (n) = 500 ଏବଂ HH ର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା = $P(HH) = \dfrac{105}{500} = \dfrac{21}{100}$,

HT କିମ୍ବା TH ର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା = $P(\text{HT କିମ୍ବା TH}) = \dfrac{275}{500} = \dfrac{11}{20}$

ଏବଂ HH ର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା = $P(TT) = \dfrac{120}{500} = \dfrac{6}{25}$;

ଏଠାରେ ନିରୂପିତ ସମ୍ଭାବ୍ୟତାଗୁଡ଼ିକର ସମଷ୍ଟି $= P(HH) + P(\text{HT କିମ୍ବା TH}) + P(TT)$

$$= \frac{21}{100} + \frac{11}{20} + \frac{6}{25} = \frac{21+55+24}{100} = \frac{100}{100} = 1$$

ଉଦାହରଣ – 3 : ଗୋଟିଏ ଅପ୍ରବଣ ଲୁଡୁ ଗୋଟିକୁ 1000 ଥର ଗଡ଼ାଇ ଦିଆଯିବାରୁ ନିମ୍ନରେ ପ୍ରଦତ୍ତ ଫଳ ଗୁଡ଼ିକ ଲବ୍ଧ ହେଲା ।

ଫଳ :	1	2	3	4	5	6
ବାରମ୍ବାରତା :	150	157	149	180	179	185

ଏହି ତଥ୍ୟକୁ ଉପଯୋଗ କରି (i) 6 ର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା, (ii) ଏକ ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟାପଡିବାର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ଓ (iii) 2 କିମ୍ବା 4 ର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ସ୍ଥିର କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ ମୋଟ୍ ପରୀକ୍ଷଣ ସଂଖ୍ୟା (n) = 1000

(i) ଫଳ 6 ର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା = P (6) = $\frac{185}{1000}$ = 0.185

(ii) ଫଳ 1 ର ବାରମ୍ବାରତା = 150, ଫଳ 3 ର ବାରମ୍ବାରତା = 149 ଓ ଫଳ 5 ର ବାରମ୍ବାରତା = 179 ;

ଅତଏବ ଫଳ ଅଯୁଗ୍ମ ହେବାର ବାରମ୍ବାରତାର ସମଷ୍ଟି = 150 + 149 + 179 = 478

ସୁତରାଂ ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟାର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା = $\frac{478}{1000}$ = 0.478 ।

(iii) 2 ର ବାରମ୍ବାରତା = 157, 4 ର ବାରମ୍ବାରତା = 180 ;

ସୁତରାଂ 2 କିମ୍ବା 4 ର ବାରମ୍ବାରତା = 157 + 180 = 337 ।

$\therefore$ 2 କିମ୍ବା 4 ର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା = $\frac{337}{1000}$ = 0.337

ଉଦାହରଣ - 4 : ଏକ ସହରରେ ଥିବା 2000 ସଂଖ୍ୟକ ଗାଡିଚାଳକ ମାନଙ୍କ ପର୍ଯ୍ୟବେକ୍ଷଣରୁ ନିମ୍ନଲିଖିତ ତଥ୍ୟ ଉପଲବ୍ଧ ହେଲା ।

ଚାଳକ ମାନଙ୍କ ବୟସ	ଗୋଟିଏ ବର୍ଷରେ ଘଟିଥିବା ଗାଡି ଦୁର୍ଘଟଣା ସଂଖ୍ୟା				
(ବର୍ଷରେ)	0	1	2	3	3 ରୁ ଊର୍ଦ୍ଧ୍ୱ
18 ରୁ 29	440	160	110	61	35
30 ରୁ 50	505	125	60	22	18
50 ରୁ ଊର୍ଦ୍ଧ୍ୱ	360	45	35	15	9

ଏହି ତଥ୍ୟକୁ ବ୍ୟବହାର କରି ନିମ୍ନଲିଖିତ କ୍ଷେତ୍ର ଗୁଡିକରେ ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ସ୍ଥିର କର ।

(i) 18 ରୁ 29 ବର୍ଷ ବୟସର ଚାଳକ ବର୍ଷରେ ଠିକ୍ 3 ଗୋଟି ଦୁର୍ଘଟଣା ଘଟାଇଥିବ;

(ii) 30 ରୁ 50 ବର୍ଷ ବୟସର ଚାଳକ ବର୍ଷରେ ଅତି କମ୍‌ରେ ଗୋଟିଏ ଦୁର୍ଘଟଣା ଘଟାଇଥିବ ଓ

(iii) ଯେ କୌଣସି ଚାଳକ ବର୍ଷରେ କୌଣସି ଦୁର୍ଘଟଣା ଘଟାଇ ନଥିବ ।

ସମାଧାନ : ପର୍ଯ୍ୟବେକ୍ଷଣରେ ସମୁଦାୟ ଗାଡି ଚାଳକଙ୍କ ସଂଖ୍ୟା = 2000

(i) ବର୍ଷକୁ 3 ଟି ଦୁର୍ଘଟଣା ଘଟାଉଥିବା 18 ରୁ 29 ବର୍ଷ ବର୍ଗର ଗାଡିଚାଳକଙ୍କ ସଂଖ୍ୟା = 61

$\therefore$ P (18 ରୁ 29 ବର୍ଷ ବର୍ଗରେ ବର୍ଷକୁ 3 ଟି ଦୁର୍ଘଟଣା ଘଟାଇଥିବା) = $\frac{61}{2000}$

(ii) 30 ରୁ 50 ବର୍ଷ ବର୍ଗରେ ବର୍ଷକୁ ଅତି କମ୍‌ରେ ଗୋଟିଏ ଦୁର୍ଘଟଣା ଘଟାଉଥିବା ଚାଳକଙ୍କ ସଂଖ୍ୟା

= 125 + 60 + 22 + 18 = 225 ;

P (30 ରୁ 50 ବର୍ଷ ବର୍ଗରେ ବର୍ଷରେ ଅତି କମ୍‌ରେ ଗୋଟିଏ ଦୁର୍ଘଟଣା ଘଟାଇବା) = $\frac{225}{2000} = 0.1125$ ।

(iii) ବର୍ଷକୁ କୌଣସି ଦୁର୍ଘଟଣା ଘଟାଇ ନଥିବା ଚାଳକଙ୍କ ସଂଖ୍ୟା = 440 + 505 + 360 = 1305 ;

$\therefore$ P (ଜଣେ ଚାଳକ କୌଣସି ଦୁର୍ଘଟଣା ଘଟାଏ ନାହିଁ) = $\frac{1305}{2000} = 0.6525$ ।

ଅନୁଶୀଳନୀ - 8 (a)

1. ଗୋଟିଏ ଅପ୍ରବଣ ମୁଦ୍ରାକୁ ଟସ୍ କଲେ ଫଳାଫଳ ଦ୍ୱୟକୁ ସୂଚାଅ ।
2. ଗୋଟିଏ ଅପ୍ରବଣ ଲୁଡୁ ଗୋଟିକୁ ଗଡାଇଲେ ଫଳାଫଳ ଗୁଡ଼ିକ କଣ ହେବ ଲେଖ ।
3. ଗୋଟିଏ ଅପ୍ରବଣ ମୁଦ୍ରାକୁ ଥରେ ଟସ୍ କରାଗଲା । ଫଳ H କିମ୍ୱା T ମିଳିବାର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା କେତେ ?
4. ଗୋଟିଏ ଲୁଡୁ ଗୋଟିକୁ ଥରେ ଗଡାଇଲେ ଫଳ < 7 ହେବାର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା କେତେ ?
5. ଦୁଇଟି ମୁଦ୍ରାକୁ ଏକ ସଙ୍ଗେ ଟସ୍ କରାଗଲା । ଫଳ HH କିମ୍ୱା TT କିମ୍ୱା HT କିମ୍ୱା TH ମିଳିବାର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା କେତେ ?
6. ଗୋଟିଏ କ୍ରିକେଟ୍ ଖେଳରେ ଜଣେ ବ୍ୟାଟ୍ସ୍‌ମ୍ୟାନ୍ 30 ବଲ୍ ଖେଳି 6 ଟି ବଲ୍‌କୁ ସୀମା ପାର କରାଇ ଥିଲେ । ବ୍ୟାଟ୍ସ୍‌ମ୍ୟାନ୍ (i) ବଲ୍‌କୁ ସୀମା ପାର କରାଇବାର (ii) ସୀମା ପାର ନ କରାଇବାର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ନିରୂପଣ କର ।
7. କୌଣସି ଏକ ସହରର ଦୈନିକ ପାଣିପାଗର ସୂଚନା 305 ଦିନ ପାଇଁ 2008 ମସିହାରେ ସତ୍ୟ ହେଲା । ତେବେ କୌଣସି ଦିବସର ପାଣିପାଗ ସୂଚନା ଅସତ୍ୟ ହେବାର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ନିରୂପଣ କର ।
8. ଗୋଟିଏ ସ୍ଥାନରେ 1500 ପରିବାର ଯଦୃଚ୍ଛା (randomly) ବଛାଗଲେ । ପରିବାରରେ ଥିବା ଝିଅ ମାନଙ୍କ ସଂଖ୍ୟା ସମ୍ପର୍କିତ ତଥ୍ୟ ନିମ୍ନ ଟେବୁଲ୍‌ରେ ଦିଆଯାଇଛି ।

ପରିବାରରେ ଝିଅ ସଂଖ୍ୟା	0	1	2
ପରିବାର ସଂଖ୍ୟା	211	814	475

ତେବେ ଯେ କୌଣସି ଏକ ପରିବାରରେ

(i) ଦୁଇଟି ଝିଅ ଥିବାର (ii) ଗୋଟିଏ ଝିଅ ଥିବାର (iii) କୌଣସି ଝିଅ ନଥିବାର ; ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ନିରୂପଣ କର ।

9. ତିନିଗୋଟି ଅପ୍ରବଣ ମୁଦ୍ରାକୁ ଏକ ସଙ୍ଗେ 500 ଥର ଟସ୍ କରାଯିବାରୁ ଲବ୍ଧ ଫଳ ନିମ୍ନ ପ୍ରକାରର ହେଲା ।

ଫଳାଫଳ	ତିନିଟି H	ଦୁଇଟି H	ଗୋଟିଏ H	କୌଣସିଟି ନୁହେଁ H
ବାରମ୍ବାରତା	60	180	195	65

ନିମ୍ନଲିଖିତ ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ନିରୂପଣ କର ।

(i) P (ତିନିଟି H), (ii) P (ଦୁଇଟି H), (iii) P (ଗୋଟିଏ H), (iv)P(କୌଣସିଟି ନୁହେଁ H) ଉପରେ ନିର୍ଣ୍ଣିତ ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ମାନଙ୍କ ସମଷ୍ଟି ନିରୂପଣ କର ।

10. ଗୋଟିଏ ଗୋଟିକୁ ୪00 ଥର ଗଡ଼ାଗଲା । ଗୋଟି ଗଡ଼ାଇବାରେ ପଡୁଥିବା ଫଳର ବାରମ୍ବାରତାକୁ ନିମ୍ନ ସାରଣୀରେ ଦିଆଯାଇଛି । ତେବେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଫଳର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ସ୍ଥିର କର ।

ଫଳାଫଳ	1	2	3	4	5	6
ବାରମ୍ବାରତା	144	152	136	128	118	122

୪.3 ସେଟ୍ ତତ୍ତ୍ୱ ଉପରେ ଆଧାରିତ ସମ୍ଭାବ୍ୟତାର ଧାରଣା :

ସେଟ୍ ମାଧ୍ୟମରେ ସମ୍ଭାବ୍ୟତାର ସଂଜ୍ଞା ଓ ଧାରଣା **ଗଣିତଜ୍ଞ Kalmogorov** ପ୍ରଦାନ କରିଥିଲେ ।

ମନେକର ଏକ ଅପ୍ରବଣ ମୁଦ୍ରାକୁ ଟସ୍ କରାଗଲା । ଫଳ H ଓ T ମଧ୍ୟରୁ ଯେକୌଣସି ଗୋଟିଏ ପଡ଼ିବ । ସମସ୍ତ ଫଳାଫଳ ମାନଙ୍କ ସେଟ୍ S ହେଲେ, $S = \{H, T\}$ ହେବ । (1)

ଏଠାରେ ସେଟ୍ S କୁ **ସାମ୍ପଲ୍ ସ୍ପେସ୍ (Sample space)** କୁହାଯାଏ । ସେହିପରି ଗୋଟିଏ ମୁଦ୍ରାକୁ ଦୁଇଥର ଟସ୍ କଲେ ପରୀକ୍ଷଣର ସାମ୍ପଲ ସ୍ପେସ୍ $S = \{ HH, HT, TH, TT \}$ ହେବ । (2)

ମନେରଖ ଯେ, ଗୋଟିଏ ମୁଦ୍ରାକୁ ଦୁଇଥର ଟସ୍ କରିବା ଓ ଦୁଇଟି ମୁଦ୍ରାକୁ ଏକ ସଙ୍ଗେ ଥରେ ଟସ୍ କରିବା ଏ ଦୁଇ କ୍ଷେତ୍ରରେ ସାମ୍ପଲ ସ୍ପେସ୍ ସମାନ ।

ସେହିପରି ଏକ ନିରପେକ୍ଷ ଲୁଡୁ ଗୋଟିକୁ ଭୂମିରେ ଗଡ଼ାଇଲେ ଫଳାଫଳ 1, 2, 3, 4, 5, 6 ମଧ୍ୟରୁ ଯେ କୌଣସି ଗୋଟିଏ ହେବ । ଏଠାରେ ସମସ୍ତ ଫଳାଫଳ ମାନଙ୍କ ସେଟ୍ ଅର୍ଥାତ୍ ସାମ୍ପଲ ସ୍ପେସ୍ $S = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$

ଘଟଣା (Event) : ଏକ ପରୀକ୍ଷଣରେ ସାମ୍ପଲ ସ୍ପେସ୍ S ହେଲେ ଏହାର ଯେକୌଣସି ଉପସେଟ୍ (Sub set) E ଏକ ଘଟଣା । ଅର୍ଥାତ୍ ଏକ ଘଟଣା $E \subset S$ ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, ଗୋଟିଏ ମୁଦ୍ରାକୁ ଥରେ ଟସ୍ କଲେ ଘଟଣା E : ଶୂନସେଟ୍ ϕ, $\{H\}$, $\{T\}$, $\{H,T\}$ ରୁ ଯେ କୌଣସି ଗୋଟିଏ । $E = \phi$ କୁ ବାକ୍ୟରେ ଆମେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ମତେ ପ୍ରକାଶ କରି ପାରିବା ।

E : ମୁଦ୍ରାଟି ଥରେ ଟସ୍ ହେତୁ ଫଳ H ଓ T ରୁ କୌଣସିଟି ନୁହେଁ ।

ସେହିପରି $E = S$ କୁ ବାକ୍ୟରେ ପ୍ରକାଶ କଲେ E : ମୁଦ୍ରାଟି ଥରେ ଟସ୍ ହେତୁ ଫଳ H କିମ୍ବା T

$E = \{H\}$ ର ଅର୍ଥ ମୁଦ୍ରାଟି ଥରେ ଟସ୍ ହେତୁ ଫଳ H ଏବଂ $E = \{T\}$ ର ଅର୍ଥ ହେଉଛି ମୁଦ୍ରାଟି ଥରେ ଟସ୍ ହେତୁ ଫଳ T ।

ସଂଜ୍ଞା : ଏକ ପରୀକ୍ଷଣରେ ସାମ୍ପଲ ସ୍ପେସ୍ S ହେଲେ, S ର ଯେ କୌଣସି ଉପସେଟ୍ E ଏକ ଘଟଣା ଓ E ଘଟଣାର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା $P(E) = \dfrac{\text{E ର ଉପାଦାନ ସଂଖ୍ୟା}}{\text{S ର ଉପାଦାନ ସଂଖ୍ୟା}} = \dfrac{|E|}{|S|}$

ସୁତରାଂ ଗୋଟିଏ ମୁଦ୍ରା ଟସ୍ ପରୀକ୍ଷଣରେ $|S| = 2$ $(\because S = \{H, T\})$

$E = \{H\}$ ହେଲେ, $|E| = 1$ ଓ $P(E) = \dfrac{|E|}{|S|} = \dfrac{1}{2}$, $E = \{T\}$ ହେଲେ $|E| = 1$ ଓ $P(E) = \dfrac{1}{2}$,

$E = \phi$ ହେଲେ, $|E| = 0$ ଓ $P(\phi) = \dfrac{0}{2} = 0$, $E = S$ ହେଲେ $|S| = 2$ ଓ $P(S) = \dfrac{2}{2} = 1$,

ଉଦାହରଣ - 5 : ଗୋଟିଏ ମୁଦ୍ରାକୁ ଦୁଇ ଥର ଟସ୍ କରାଗଲେ ଫଳ ଦୁଇଟି H ମିଳିବାର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ : ଗୋଟିଏ ମୁଦ୍ରାକୁ ଦୁଇ ଥର ଟସ୍ କରାଗଲେ ଫଳ ଗୁଡିକ HH, HT, TH ଓ TT ।

ସୁତରାଂ ସାମ୍ପଲ ସ୍ପେସ୍ $S = \{HH, HT, TH, TT\}$ $\therefore |S| = 4$

ଦତ୍ତ ଘଟଣା $E = \{HH\}$, ତେଣୁ $|E| = 1$ ସୁତରାଂ $P(E) = P(\{HH\}) = \frac{|E|}{|S|} = \frac{1}{4}$ ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ଯଦି ଫଳ ଅତି କମ୍‌ରେ ଗୋଟିଏ H ଆଶା କରାଯାଏ ତେବେ $E = \{HH, HT, TH\}$ ଓ $|E| = 3$

ସୁତରାଂ ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ $P(E) = \frac{|E|}{|S|} = \frac{3}{4}$

ଉଦାହରଣ - 6 : ଗୋଟିଏ ଲୁଡୁ ଗୋଟିକୁ ଥରେ ଗଡ଼ାଇବାରେ ଫଳ ଏକ ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟା ପାଇବାର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ : ଗୋଟିଏ ଲୁଡୁ ଗୋଟିକୁ ଥରେ ଗଡ଼ାଇଲେ ଫଳଗୁଡ଼ିକ 1, 2, 3, 4, 5 ଓ 6 ।

ସୁତରାଂ ସାମ୍ପଲ ସ୍ପେସ୍ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\therefore |S| = 6$

ଦତ୍ତ ଘଟଣା $E = \{2,3,5\}$, $\therefore |E| = 3$

$\therefore P(E) = \frac{|E|}{|S|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ (ଉତ୍ତର)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 8 (b)

1. ଗୋଟିଏ ମୁଦ୍ରାକୁ (i) ଥରେ, (ii) ଦୁଇଥର ଟସ୍ କଲେ ସାମ୍ପଲ ସ୍ପେସ୍ ଗୁଡ଼ିକୁ ଲେଖ ।
2. ଗୋଟିଏ ଲୁଡୁ ଗୋଟିକୁ ଥରେ ଗଡ଼ାଇଲେ ସାମ୍ପଲ ସ୍ପେସ୍ ଟି କଣ ହେବ ଲେଖ ।
3. ଗୋଟିଏ ମୁଦ୍ରାକୁ ଥରେ ଟସ୍ କରାଗଲା । ଘଟଣା $E = \{T\}$ ହେଲେ ସମ୍ଭାବ୍ୟତା P(E) ନିରୂପଣ କର ।
4. ଗୋଟିଏ ମୁଦ୍ରାକୁ ଦୁଇଥର ଟସ୍ କଲେ ଘଟଣାଟି ଅତି ବେଶିରେ ଗୋଟିଏ T ପାଇବାର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ନିରୂପଣ କର ।
5. ଗୋଟିଏ ଲୁଡୁ ଗୋଟିକୁ ଥରେ ଗଡ଼ାଇବାରେ ସାମ୍ପଲ ସ୍ପେସ୍‌ଟି କଣ ହେବ ଲେଖ ଓ E ଘଟଣାଟି ଫଳ 5 ରୁ କମ୍ ହେଲେ ଘଟଣାଟିକୁ ପ୍ରକାଶ କର ।
6. ଗୋଟିଏ ଲୁଡୁ ଗୋଟିକୁ ଥରେ ଗଡ଼ାଇବାରେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ଘଟଣା ମାନଙ୍କ ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ନିରୂପଣ କର ।
   (i) E : ଫଳ 5 ;
   (ii) E : ଫଳ ଏକ ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା ; [ଏଠାରେ ଫଳ 2 କିମ୍ବା 4 କିମ୍ବା 6]
   (iii) E : ଫଳ ଏକ ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା ; [ଏଠାରେ ଫଳ 1 କିମ୍ବା 3 କିମ୍ବା 5]
   (iv) E : ଫଳ ଏକ ସଂଖ୍ୟା $k < 5$ [ଏଠାରେ ଫଳ ଗୁଡ଼ିକ 1, 2, 3, 4]
7. ଗୋଟିଏ ମୁଣି ଭିତରେ ଧଳା, ନାଲି, କଳା, ହଳଦିଆ ଓ ସବୁଜ ରଙ୍ଗର ଏକ ଆକାରର 5 ଗୋଟି ମାର୍ବଲ ଗୋଟି ଅଛି । ଗୋଟିଏ ଗୋଟି ମୁଣି ଭିତରୁ ହାତ ପୂରାଇ କଢାଗଲା । ନିମ୍ନଲିଖିତ ଘଟଣା ଗୁଡ଼ିକର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ନିରୂପଣ କର ।
   (i) E : ଗୋଟିଟି ଧଳା (ii) E : ଗୋଟିଟି ଧଳା କିମ୍ବା କଳା କିମ୍ବା ନାଲି
8. ଗୋଟିଏ ବ୍ୟାଗ୍‌ରେ 1, 2, 3,..... 13, 14, 15 ଲେଖାଥିବା 15 ଟି କାର୍ଡ଼ ଅଛି । ବ୍ୟାଗ୍‌ରୁ ଗୋଟିଏ କାର୍ଡ଼ ବାହାର କରିବାକୁ ହେବ । ନିମ୍ନ ଲିଖିତ ଘଟଣାମାନଙ୍କ ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ନିରୂପଣ କର ।
   (i) E : ଫଳ ଗୋଟିଏ ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟା ଲେଖାଥିବା କାର୍ଡ଼ ।
   (ii) E : ଫଳ ଗୋଟିଏ ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା ଲେଖାଥିବା କାର୍ଡ଼ ।

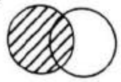
ଉତ୍ତରମାଳା

ଅନୁଶୀଳନୀ - 1 (a)

1. (i) $\in$, (ii) $\notin$, (iii) =, (iv) =, (v) $\subset$, (vi) $\neq$; 2. (i) $\{3, 4, 5, 6\}$, (ii) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, (iii) $\{1, 2, 3, 5, 6\}$, (iv) $\{5\}$, (v) $\{3\}$, (vi) ϕ, (vii) $\{3, 4\}$, (viii) $\{1, 2\}$, (ix) $\{1, 2, 3\}$, (x) $\{6\}$, (xi) $\{4, 5\}$, (xii) $\{5, 6\}$; 4.(i) $\{1, -1\}$, (ii) $\{2, 4\}$, (iii) ϕ, (iv) $\{0, 1, 2, 3\}$

5. (i) {a, b, d, e, p}, (ii) {a, b, p, n, m, x, y}, (iii) {a, b, p, m, y} ;

7. (i) A B

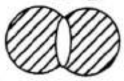


$(A \cap B) \cup (A - B) = A$

(ii) A B

$(A \cap B) \cup (B - A) = B$

(iii) A B



$(A \cup B) - (A \cap B = (A - B) \cup (B - A)$

9. $I_{20} - I_{16} = \{17, 18, 19, 20\}$, $I_{16} - I_{20} = \{\}$ କିମ୍ବା ϕ ;

ଅନୁଶୀଳନୀ - 1 (b)

1. (i) $\{1, 3, 5\}$, (ii) E, (iii) ϕ, (iv) E, (v) A, (vi) $(A \cap B)'$, (vii) $(A \cup B)'$, (viii) $A \Delta B$, (ix) $(A \cup B) - (A \cap B)$, (x) ϕ, (xi) $A \cap B$ (xii) $A' \cap B'$;

2. ଠିକ୍ ଉକ୍ତି : (i) , (ii), (iv), (v), (vi) ; 3. (i) $\{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots\ldots\}$, (ii) E ଓ ϕ (iii) 11;

ଅନୁଶୀଳନୀ - 1(c)

1. (a). (i) 12, (ii) 9, (iii) 3, (iv) 6, (v) 13, (vi) 4, (vii) 7, (viii) 12 ;
   (b). (i) $x = -2, y = 3$, (ii) $x = 2, y = 3$, (iii) $x = \pm 2, y = \pm 3$, (iv) $x = 2, y = 1$;
   (c). (i) {(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)} (ii) {(2, 3)} ;

2. 15 ; 3. 90 ; 4 . 31 ; 5 . 30 ; 6 . 50 ; 7 . 35, 40 ; 8 . 5 ; 9 . 52 ; 10 . 11, 34 ; 11. 500 ; 12. 60,100;

ଅନୁଶୀଳନୀ - 2(a)

1. (i) T, (ii) T, (iii) F, (iv) F, (v) T, (vi)T, (vii) F, (viii) T, (ix) T, (x) F, (xi) T, (xii) F ;

2. (i) $-\frac{1}{2}$, (ii) $-\frac{1}{7}$, (iii) 0, (iv) 1 (କିମ୍ବା –1), (v) ଅଯୁଗ୍ମ (vii) 2, (viii)3, (ix) ଯୋଗ, (x) 0, (xi) N, (xii) –1;

3. (i) d, (ii) a, (iii) c, (iv) a, (v) b, (vi) b, (vii) a, (viii) c, (ix) c ; 4. ନାହିଁ, କାରଣ 2 ଏକ ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟା; 8. ନାହିଁ, କାରଣ 7 + 5 = 12 ଓ ଏହା ଯୁଗ୍ମ; 9. 29, 50 ଓ 77; 10. ହଁ, କାରଣ ଏହା ଅସରନ୍ତି ପୌନଃପୁନିକ ଦଶମିକରାଶି; 11. $\frac{131}{1000}$; 12. $0.\bar{3}$ 13. $q_1 = 300, p_2 = -34, \frac{6}{18}$; 14. ବଡ଼ ସଂଖ୍ୟା = $\frac{-15}{15}$ ଓ ସାନ ସଂଖ୍ୟା = $\frac{-15}{1}$; 15. $\frac{9}{40}, \frac{19}{80}, \frac{39}{160}$ ଓ $\frac{79}{320}$; 16. $-\frac{5}{12}, -\frac{11}{24}, -\frac{23}{48}$; 17. $3.\overline{857142}$; 19. (i) $\frac{1}{9}$ (ii) $\frac{1}{9}$ (iii) $\frac{89}{99}$ (iv) $\frac{37}{99}$, (v) $\frac{123}{999}$, (vi) $\frac{289}{900}$, (vii) $-\frac{49}{90}$, (viii) $\frac{69}{10}$, (ix) $-\frac{4}{33}$, (x) $\frac{641}{49500}$

20. (i) 1 (ii) 0 (iii) 1 (iv) 1 (v) $\frac{1}{3}$ (vi) 1 (vii) $\frac{1}{27}$

ଅନୁଶୀଳନୀ - 2(b)

1. (i) c, (ii) b, (iii) a, (iv) c, (v) a, (vi)d, (vii) d, (viii) b, (ix) c, (x) b, (xi) a, (xii) a, (xiii)d
2. (i), (ii), (iv), (vi), (ix), (x), (xii), (xiii), (xvi), (xvii) - ସତ୍ୟ;
3. (i), (ii), (iii), (iv), (v), (x), (xi) ...... ପରିମେୟ, ଅବଶିଷ୍ଟ ଅପରିମେୟ;
4. (i) $\frac{1}{2}$, (ii) $\frac{1}{\sqrt{2}}$, (iii) $-\sqrt{2}$, (iv) ଆସନ୍ନ, (v) $-4+\sqrt{3}$ (vi) 1 (କିମ୍ବା −1), (vii) $p \neq 0$, (viii) R, (ix) π, (x) 0; 5. (i) → (vii), (ii) → (ix), (iii) → (iii), (iv) → (ii), (v) → (iv), (vi) → (viii), (vii) → (vi), (viii) → (i), (ix) → (v);
6. (i) $\sqrt{2}$ ଓ $-\sqrt{2}$, (ii) $2\sqrt{2}$ ଓ $-1+\sqrt{2}$, (iii) $\sqrt{2}-1$ ଓ $\sqrt{2}+1$, (iv) $\sqrt{2}-1$ ଓ $\sqrt{2}+1$, (v) $\sqrt{2}$ ଓ $\sqrt{3}$ (vi) $\sqrt{2}$ ଓ $-\sqrt{2}$, (vii) $\sqrt{2}$ ଓ $\sqrt{6}$; 7. (i) 0, (ii) 1 (କିମ୍ବା −1) (iii) ନାହିଁ, କାରଣ ଏହା ହେବା ଅର୍ଥ 0 ଦ୍ଵାରା ଭାଗ କରିବା ଯାହା ଅସମ୍ଭବ, (iv) $\sqrt{2}+1$ ଓ $\sqrt{2}-1$, (v) $4+\sqrt{2}$ ଓ $3-\sqrt{2}$ (vi) ଉଭୟେ ଅସରନ୍ତି (କେବଳ ପରିମେୟର ଲବଟି ଯଦି 2 କିମ୍ବା 5 ଉତ୍ପାଦକ ବିଶିଷ୍ଟକୁ ଛାଡି - ଯେତେବେଳେ ରୂପଟି ସରନ୍ତି) ମାତ୍ର ପରିମେୟ କ୍ଷେତ୍ରରେ ପୌନଃପୁନିକ ମାତ୍ର ଅପରିମେୟ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଅଣ ପୌନଃପୁନିକ ।
8. (i) $9\sqrt{2}$, (ii) $10\sqrt{2}$, (iii) 0, (iv) $18\sqrt{3}$; 9. (i) $\sqrt{10}$, (ii) 10, (iii) 7, (iv) 90
10. (i) $\frac{\sqrt{3}}{3}$, (ii) $\frac{\sqrt{2}}{6}$, (iii) $2-\sqrt{3}$, (iv) $\frac{(\sqrt{5}+1)}{4}$, (v) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$; 11. ଅପରିମେୟ, କାରଣ ଏହା ଅସରନ୍ତି ଓ ଅଣ ପୁନଃ ପୁନିକ ଦଶମିକ । 12. (i) 7, (ii) 7.2, (iii) 2.4, (iv) 4π; 13. (i) $\frac{2(\sqrt{3}-2)}{3}$, (ii) $2(\sqrt{2}-1)$, (iii) $\frac{2(3-\sqrt{2})}{7}$, (iv) $\sqrt{2}-1$, (v) $\frac{5(3+\sqrt{2})}{7}$, (vi) $\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-2$, (vii) $\frac{\sqrt{10}-\sqrt{5}-\sqrt{2}+2}{3}$, (viii) $\frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$, (ix) $\frac{5\sqrt{6}-2\sqrt{15}-3\sqrt{10}+12}{12}$; 14.(i) 8, (ii) 12; 15.(i) 2, −1, (ii) $\frac{21}{11}, \frac{8}{11}$, (iii) $\frac{-7}{5}, -\frac{3}{5}$; 18. $2+4\sqrt{6}$; 20.(i)a, (ii) 3, (iii) 81; 21. (i) a−b, (ii) 1 − a, (iii) 1 − a, (iv) x+y, (v) $x^{-2}+x^{-1}y^{-1}+y^{-2}$; 22.(i) $x^{-\frac{1}{6}}\, y^{-\frac{1}{9}} z^{-\frac{2}{9}}$, (ii) $xy^{\frac{1}{3}}z^{-\frac{1}{6}}$, 25. (i) 1, (ii) 1, (iii) $\frac{1}{2}$
28. (i) −4, 10 (ii) 10, −12, (iii) 2, −1, (iv) $\frac{1}{3}$, −3; 29. (i) $\frac{9}{4}-\frac{3\sqrt{5}}{4}$ (ii) $\frac{4}{7}-\frac{\sqrt{2}}{7}$ (iii) $2-\sqrt{3}$
30. (i) $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$, (ii) $x < -1$ କିମ୍ବା $x > 1$ (iii) $-\frac{5}{3} \le x \le \frac{5}{3}$ (iv) $x \le -\frac{3}{2}$ କିମ୍ବା $x \ge \frac{3}{2}$ (v) $-2 \le x \le \frac{8}{3}$ (vi) $x \le -\frac{8}{7}$ କିମ୍ବା $x \ge \frac{2}{7}$

ଅନୁଶୀଳନୀ - 3 (a)

1. $\frac{11}{13}y^9$, $7y^8$, $-8y^4$, $1.4y^3$, $\sqrt{2}\,y^2$, $\sqrt{3}\,y$; 2. $12x^2$, $-5x^2$; $-3x$, $\frac{x}{7}$; $\frac{1}{\sqrt{2}}x^3$, $\sqrt{3}\,x^3$; 15, $\frac{8}{11}$; $10x^4$; 3. (i) −5, $\frac{2}{3}$ (ii) $2x^2$, $-\frac{4}{5}x^2$ (iii) x^3-1, $2x^3+5x$ (iv) x^2-5x+2, $2x^2-3x-7$, (ଅନ୍ୟ ଉଦାହରଣ ମଧ୍ୟ ସମ୍ଭବ ।); 4. (i) y^3+2y-2, (ii) $2x^4+x^3-3x^2-4$, (iii) x^2-1, (iv) $4x^3+2x^2-x+4$, (v) z^3+z^2+6z-5, (vi) $9xyz$, (vii) $x^2+xy+3y^2$

ଅନୁଶୀଳନୀ - 3(b)

1. (i) 4, (ii) –4, (iii) $\frac{11}{4}$, (iv) 31; 2. (a) (i) –6, (ii) 5, (iii) –21, (iv) 60, (v) –3, (b) (i) –1 ଓ $-\frac{1}{3}$, (ii) $\frac{d}{c}$, (iii) $\frac{1}{2}$ ଓ $-\frac{1}{2}$, (iv) 1 ଓ –2 ; 3. (i) x + 3, (ii) x – 2, (iii) 2x – 1, (iv) 2x – 3; 4. (i) (iv) ; 5. (i) ଓ (iii) ; 6. (i) –2, (ii) $-\left(2+\sqrt{2}\right)$, (iii) $\sqrt{2}-1$, (iv) $-\frac{3}{2}$; 7. (i) 0, (ii) 9, (iii) 11, (iv) –1; 8. (i) (x – 4) (x – 3), (ii) (x – 4) (x + 1), (iii) (x – 2) (x + 1) (x – 1), (iv) (y – 1) $(y^2 - 2)$

ଅନୁଶୀଳନୀ - 3(c)

1. (i) (x–2) (x–1), (ii) $x^2 - 4x + 3$, (iii) $(x^2 + y^2)(x + y)(x - y)$, (iv) (2a – b) (2a – b) (2a – b)
(v) $(25 + 5x^2 + x^4)(25 - 5x^2 + x^4)$ (vi) (1 – a + b) (vii) 6 (2x – 3y) (3y – 4z) (2z – x)
(viii) 16380 (ix) 3 (a – b) (b – c) (c – a) (x) (x – 1)

2. (i) (2x+1) (x–1), (ii) (2x – 1) (x – 1), (iii) (5x + 4) (x – 1), (iv) (4x + 3) (x – 2)
(v) (3x + 2) (x + 3) (vi) (7x – 6) (x + 1), (vii) (2x + 7) (x – 1)
(viii) (4x – 1) (x – 1), (ix) (4x – 7) (b – c) (x + 1)

3. (i) $(5a^2 + 4b)(5a^2 - 4b)$, (ii) (3 + 8pq) (3 – 8pq), (iii) $(2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$,
(iv) $(2x - 3y)(4x^2 + 6xy - 9y^2)$, (v) (a + b + 3) (a + b – 3) (vi) (2a + 9) (2a + 1)
(vii) 3y (2x + y), (viii) (8a + p) (7p – 4a), (ix) 3 (12a – 3b + 5) (8a – 7b + 5),
(x) $(4a^2 + 2a + 1)(4a^2 - 2a + 1)$, (xi) $p(p - 3q^2)(p^2 + 3q^2 + 9q^4)$,
(xii) $-(a + 1)(a^2 + 5a + 7)$, (xiii) $(5 - 2x)(4x^2 - 8x + 7)$, (xiv) $5p^2q(8p^2 + q^3)(8p^2 - q^3)$
(xv) $(a + 3)(a^2 + 3a + 3)$, (xvi) $(2x - 1)(4x^2 - 16x + 19)$, (xvii) (a + 2b) (a + 2b) (a+2b)
(xviii) (a + 3) (a + 3) (a + 3), (xix) (2 – 3p) (2 – 3p) (2 – 3p) (xx) (b – c)(b – c) (b – c)

4. (i) $(a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)$, (ii) $(a^2b^2 + ab + 1)(a^2b^2 - ab + 1)$,
(iii) $(4a^2 + 6ab + 9b^2)(4a^2 - 6ab + 9b^2)$, (iv) $(a^4 - a^2 + 1)(a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)$,
(v) $(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$, (vi) $2(a^2 + 2ab + 2b^2)(a^2 - 2ab + 2b^2)$,
(vii) $9(2a^2 + 2ab + b^2)(2a^2 - 2ab + b^2)$, (viii) $(2a^2 + 3a + 4)(2a^2 - 3a + 4)$,
(ix) $(a^2 + 2ab + 3b^2)(a^2 - 2ab + 3b^2)$, (x) $(a^2 + a - 1)(a^2 - a - 1)$,
(xi) $(5a^2 + 7ab + 3b^2)(5a^2 - 7ab + 3b^2)$, (xii) (3x + y + 2z) (3x + y – 2z),
(xiii) (4 – 3y + x) (4 + 3y – x), (xiv) (ax – by + ay + bx) (ax – by – ay – bx)
(xv) {x (a – b) + y (a + b)} {x (a – b) – y (a + b)};

5. (i) $(a + b + x)(a^2 + b^2 + x^2 - ab - bx - ax)$, (ii) $(2a + b + c)(4a^2+b^2+c^2-2ab-bc-2ac)$,
(iii) $(a + b - 2)(a^2 + b^2 + 4 - ab + 2b + 2a)$, (iv) $(l - 3m - n)(l^2 + 9m^2 + n^2 + 3lm - 3mn + ln)$,
(v) $2a[(a - b) + (b - c)^2 + (c - a)^2]$, (vi) $(a^2 + a - 1)(a^4 - a^3 + 2a^2 + a + 1)$
(vii) $(x + 6)(x^2 - 6x + 12)$, (viii) $(m - 1)(m + 2)(m^4 - m^3 + 3m^2 + 2m + 4)$
(ix) $\left(a^2 + \frac{1}{a^2} - 2\right)\left(a^4 + a^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^4}\right)$, (x) $(r^2 + 3r - 2)(r^4 - 3r^3 + 11r^2 + 6r + 4)$
(xi) $2(2x - 3y^2 - z)(4x^2 + 9y^4 + z^2 + 6xy^2 + 2xz - 3y^2z)$; (xii) $\left(a + b - \frac{1}{3}c\right)$ $\left(a^2 + b^2 + \frac{1}{9}c^2 - ab + \frac{ac}{3} + \frac{bc}{3}\right)$, (xiii) $(3a - 2b^2 + 5c)(9a^2 + 4b^4 + 25c^2 + 6ab^2 + 10b^2c - 15ac)$
(xiv) –3 (2x + 3) (3x – 2) (5x + 1); 7. 3 (x – y) (y – z) (z – x)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 3 (d)

1. (i) xy, (ii) $2a^2b^2$, (iii) $3ab^2c$, (iv) xy, (v) $36x^3y^6z^6$; 2. (i) $x+1$, (ii) $a-b$, (iii) $2a-b$, (iv) $(x-1)^2$, (v) x^2-xy+y^2, (vi) $2(a-2b)$, (vii) $x+4$, (viii) $2x+3$, (ix) $a+b+c$, (x) $a+b+c$, (xi) $a-b$, (xii) $x-b$; 3. (i) $12a^3b$, (ii) $12a^3b^4$, (iii) $340a^3b^3c^5$, (iv) $12a^2b^2$ (v) $150x^3y^3z^3$; 4. (i) $ab(a+b)(a-b)$, (ii) $12x(x+y)(x-y)$, (iii) $xy(x+y)(x^2-xy+y^2)$, (iv) $24a^2b(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)$, (v) $(x+y)(x-y)^3$, (vi) $x(x+y)(x-y)^2$, (vii) $24(a+b)^2(a-b)^2$ (viii) $(2x-1)^2(x+3)$, (ix) $a(a+2)(3a+2)$, (x) $x(2x-3)^2(3x+2)$, (xi) $2x(x+2)(3x+1)(3x-1)$, (xii) $(x+y)(y+z)(z+x)$, (xiii) $(a-b)(b-c)(c-a)$, (xiv) $(a+b+c)(a-b-c)(c-a-b)$, (xv) $(a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$, (xvi) $(a+b)^3(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$ (xvii) $3(x-y)(y-z)(z-x)$

ଅନୁଶୀଳନୀ - 3 (e)

1. (i) ✗ (ii) ✗ (iii) ✔ (iv) ✗ (v) ✔ (vi) ✗ ; 2. (i) $\frac{2x}{x^2-y^2}$ (ii) $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ (iii) 0 (iv) $\frac{4xy}{y^2-x^2}$

(v) $\frac{-2y}{(x+y)(x-y)^2}$ (vi) $\frac{b^2}{a+b}$ (vii) 0 (viii) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$ (ix) $\frac{6(x^2-2)}{(x^2-1)(x^2-4)}$ (x) $\frac{x^2}{6(x+3)(x-3)}$

3. (i) $\frac{x^2y^2z^2}{abc}$, (ii) $\frac{x}{y(x+y)}$, (iii) 1, (iv) $\frac{(x-5)(x^2-2x+4)}{(x-7)(x^2+2x+4)}$, (v) $\frac{y^6-x^6}{y^6}$, (vi) $\frac{x^2(z+x)}{y}$

(vii) $\frac{2ab}{a^2+b^2}$ (viii) 1 (ix) xy (x) $\frac{a-b}{a}$ (xi) $\frac{(a-3)(a-7)}{(a-2)(a-6)}$; 4.(i) $\frac{2x+1}{3x+2}$, (ii) a^2, (iii) y,(iv) $\frac{x^3}{x^3-x-1}$

ଅନୁଶୀଳନୀ - 4(a)

1. (i) ସମସ୍ତ ମାନ (ii) 3, (iii) 2, (iv) –1, (v) 8, (vi) 2; 2. (i) ଓ (iv) ଅଭେଦ ; (ii) , (iii) ଓ (v) - ସଙ୍ଗତ; (vi) ଅସଙ୍ଗତ ; ii, iii ଅନୁରୂପ [(ii) 3, (iii) 3, (v) $3b-4$]; 3. (i) 3, (ii) –30, (iii) $3b-2a$, (iv) 3, (v) 11, (vi) 4; 4. (i) –6 (ii) 6, (iii) 12, (iv) 2, (v) $\frac{15}{17}$, (vi) 10, 5. (i) –7, (ii) 2, (iii) –1, (iv) $-\frac{6}{13}$, (v) $-\frac{19}{25}$, (vi) 1

ଅନୁଶୀଳନୀ - 4(b)

1. (iii) ବ୍ୟତୀତ ଅନ୍ୟ ସମସ୍ତ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ, 2. (i) 0 ଓ 3 (ii) 2 ଓ –2, (iii) 1 ଓ 2, (iv) $\sqrt{2}$ ଓ $-2\sqrt{2}$, (v) –1 ଓ 2; 3. (i) 14 ଓ –14 (ii) 0 ଓ $\frac{2}{5}$, (iii) 2 ଓ 1, (iv) 4 ଓ –7, (v) $\sqrt{3}$, $-\frac{2}{\sqrt{3}}$, (vi) 3 ଓ $-\frac{1}{2}$, (vii) a ଓ –2a, (viii) $-(a+b)$ ଓ $b-a$; 4. (i) 3 ଓ $\frac{5}{2}$ (ii) 4 ଓ $-\frac{2}{3}$, (iii) –9 ଓ –2, (iv) 1 ଓ –2; 5. (i) 12, 4, (ii) –2, –3

ଅନୁଶୀଳନୀ - 4(c)

1. 10, 11; 2. 0, 1 3. 42, 9 4. 3, 4, 5 5. 15, 8 6. 4, $\frac{1}{4}$
7. 22, 14 8. 18 9. 5, 6, 7 10. 11, 13 11. 6, 8 12. 12 କି.ମି. 13. 9, 5
14. 19, 7 15. 48, 32 16. 5 କି.ମି 17. 36

ଅନୁଶୀଳନୀ - 4(d)

1. (ii), (iv) ଓ (vi) : ଘାତାଙ୍କୀୟ ସମୀକରଣ; 2. (i) $\frac{3}{2}$, (ii) –4, (iii) 3, (iv) $\frac{1}{3}$, (v) 2, (vi)–4; 3. (i) 2, (ii) 2, (iii) $\frac{3}{2}$, (iv) $\frac{3}{2}$; 4. (i) 15, (ii) $\frac{1}{2}$, (iii) $\frac{3}{2}$, (iv) – 4, (v) $\frac{1}{2}$, (vi) 1, (vii) 2, (viii) 1, (ix) 3, (x) 1 ଓ 2

ଅନୁଶୀଳନୀ - 5(a)

3. (i) ଏକ, (ii) ଦୁଇ, (iii) Rene Descartes, (iv) 4, (v) $\overrightarrow{ox}$, (vi) $\overrightarrow{OY'}$, (vii) ବୀଜଗଣିତ (viii) 5, 4

5. (i) Q_4 (ii) Q_2 (iii) Q_3 (iv) ଅଧଃ, (v) ବାମ, (vi) Q_3

ଅନୁଶୀଳନୀ - 5(b)

1. (i) $ax + by + c = 0$ $(a \neq 0)$ $(b \neq 0)$, (ii) ସରଳରେଖା, (iii) $y = 0$, (iv) $x = 0$, (v) $x = 3$, (vi) $y= -2$, (vii) $y = mx$, (viii) ନୁହେଁ, (ix) ହଁ, (x) (0, 0); 2. (i) $-\frac{1}{2}, -\frac{7}{4}$, (ii) $\frac{1}{2}, \frac{5}{2}$, (iii) $\frac{3}{4}$, 0

3. (i) ଓ (iv); 4. (i) 1, (ii) $\frac{5}{6}$, (iii) 1, (iv) –5, (v) 1, (vi) –1

ଅନୁଶୀଳନୀ - 5(c)

5. (3, 0), (0, 2); 7. (3, 4), (–3, 4), (–3, –4), (3, –4); 9. (1, –1) (–2, –2), 10. (–3, –1)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 6

1. (i) 55:72 (ii) $\frac{8}{125}$ (iii)q:s (iv) 11:13 (v) 6:4:3 (vi) 6:15:20 (vii)k=1

2. (i) (ii) (vii) ଭୁଲ୍ ଉକ୍ତି, ଅବଶିଷ୍ଟ ଠିକ୍ ଉକ୍ତି । 3. (i) 21, (ii) 0.0001, (iii) a^3b^3, (iv)1 (v)12 (vi) a^2-ab+b^2 । 4. (i) 25 (ii) b^3 (iii) $\frac{x + y}{x - y}$ (iv) ab

5. (i) ±15 (ii) ± 6abc (iii)$(a^2-b^2)^2$ 6. (i) $a = -1$ (ii) $x = 3$

7. (i) 8; (ii)2; (iii)1; (iv)2; 8.(i) 8:23; (ii) 38:31; (iii) 245, 196, 140 (iv) –11 : 1 (v) 5:13

15. ସ୍ମିତିର 14 ବର୍ଷ ଓ ସୁନିଲ୍‌ର 12 ବର୍ଷ । 16. ଅନିଲ୍‌ର 16 ବର୍ଷ ଓ ସୁନିଲ୍‌ର 24 ବର୍ଷ । 17. 32 ଜଣ ।

18. 5 ଲିଟର 19. B ର ଆୟ 6000 ଟଙ୍କା 21. 35, 40, 45, 22. 7:11;

23. (i) $-\frac{3}{2}$ (ii) 8 (iii) $\frac{2ab}{b^2+1}$

ଅନୁଶୀଳନୀ - 7 (a)

1.

ଲବ୍ଧାଙ୍କ	10	11	12	13	14	15	16	17	18
ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା	5	13	30	59	100	136	163	179	189

2.

ଲବ୍ଧାଙ୍କ	1	2	3	4	5	6	7	8
ବାରମ୍ବାରତା	5	8	12	18	13	10	7	4

3. (b) (i) 158 ସେ.ମି., (ii) 3 ଜଣ (iii) 170, (iv) 24, (v) 9; 4. (i) 27 (ii) A – 2, B – 11, C – 14, D – 3, E – 0; 5. (c) (i) 42, (ii) 93 (iii) 73 (iv) 30

ଅନୁଶୀଳନୀ - 7 (b)

1. (a) 32, 8 (b) 24 (d) 5 (e) (15 –19) (f) (5 –9)

2. (a) 120,127 (b) 107 (d) 10 (e) (150 – 160) (f) (130 –140) ଏବଂ (180 – 190) (g) (220 – 230) 3. ସଂଭାଗ ବିସ୍ତାର, 10 ଏବଂ ସଂଭାଗମାନ (20 – 30), (30 – 40), ... (80 – 90)

4.

ସଂଭାଗ	0 - 9	10-19	20-29	30-39	40-49
ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା	8	21	42	57	63

39ର ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା 57

5. (a)

ସଂଭାଗ	0 -9	10-19	20-29	30-39	40-49	50- 59	60-69
ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା	5	9	14	24	32	37	40

(b) 24 (c) (30-39) (d) (60-69)

6. (i) 27 (ii) 65 (iii) 89 (iv) 19

ଅନୁଶୀଳନୀ - 8 (a)

1. {H, T}, 2. {1, 2, 3, 4, 5, 6}, 3. $\frac{1}{2}$; 4. 1; 5. $\frac{1}{4}$, 6. (i) $\frac{1}{5}$, (ii) $\frac{4}{5}$; 7. $\frac{61}{366}$, 8.(i) $\frac{475}{1000}$, (ii) $\frac{814}{1000}$, (iii) $\frac{211}{1000}$; 9.(i) $\frac{60}{500}$, (ii) $\frac{180}{500}$, (iii) $\frac{195}{500}$, (iv) $\frac{65}{500}$

ଅନୁଶୀଳନୀ - 8 (b)

1. { H,T}, {HH, HT, TH, TT}, 2. {1, 2, 3, 4, 5, 6}, 3. $\frac{1}{2}$, 4. $\frac{1}{2}$, 5. {1,2,3,4,5,6},{1,2,3,4}
6.(i) $\frac{1}{6}$, (ii) $\frac{1}{2}$, (iii) $\frac{1}{2}$, (iv) $\frac{2}{3}$, 7.(i) $\frac{1}{5}$, (ii) $\frac{3}{5}$, 8.(i) $\frac{2}{5}$, (ii) $\frac{7}{15}$

ଓଡ଼ିଆପୋର୍ଟାଲ.ଇନ୍‌ଙ୍କର
ପାଠାଗାର
Pathagara.OdiaPortal.IN