அத்தியாயம்

2 மாதிரிப்பரவல் அடிப்படையிலான சோதனைகள் I

W.S. காஸ்ஸட்
(1876–1937)

இங்கிலாந்தில் பிறந்த W.S. காஸ்ஸட் ஆக்ஸ்போர்டு, நியூ கல்லூரியில் வேதியியல் மற்றும் கணிதத்தில் 1899 இல் பட்டம் பெற்றார். பிறகு, அவர் அயர்லாந்தில் ஒரு மதுபான தயாரிப்பு நிறுவனத்தில் சேர்ந்தார். மதுபான நிறுவனத்திற்கு உரிய பண்ணைகளில், சிறந்த வகை பார்லிகளைத் தேர்வு செய்வதற்கு காஸ்ஸட் தனது புள்ளிவிவர அறிவைப் பயன்படுத்தியுள்ளார். 1906-1907 இல் கார்ல் பியர்சானின் உயிரியளவுகள் ஆய்வகத்தில் காஸ்ஸட் பலமுறை முயற்சி செய்தபின் அனுபவ வாயிலாக அவ்வறிவைப் பெற முடிந்தது. காஸ்ஸட்டிற்கும் பியர்சனுக்கும் இடையே நல்ல உறவு இருந்தது. காஸ்ஸட்டின் கணித ஆய்வுக்கட்டுரையை வெளியிடுவதற்கு பியர்சன் பெரிதும் உதவி புரிந்தார். அவர் பணிபுரிந்த மதுபான தயாரிப்பு நிறுவனம் அவரது ஆய்வுக் கட்டுரையை "ஸ்டூடண்ட்" என்ற புனைப்பெயரில் வெளியிடுவதற்கு அனுமதித்தது. எனவே, அவரது குறிப்பிடத்தக்க அச்சாதனை ஆய்வுகள் காஸ்ஸட்டின் t-பரவல் என்று அழைக்கப்படுவதை காட்டிலும், ஸ்டூடண்ட்-t சோதனை என்றே அழைக்கப்படுகிறது.

கற்றல் குறிக்கோள்கள்

- ❖ t-சோதனை மற்றும் கைவர்க்க சோதனைகளைப் பயன்படுத்துவதன் நோக்கங்களைப் புரிந்து கொள்ளுதல்.
- ❖ சிறு கூறுகளைப் பயன்டுத்தி கருதுகோள் சோதனைகளைப் பயன்படுத்தும் முறையை அறிந்துகொள்ளுதல்.
- ❖ t-பரவலைப் பயன்படுத்தி சராசரிகளுக்கான கருதுகோள் சோதனை சார்ந்த கணக்குகளுக்குத் தீர்வு காணும் முறையை அறிந்துகொள்ளுதல்.
- ❖ ஒரு முழுமைத்தொகுதி குறிப்பிட்ட ஒரு மாறுபாட்டைக் கொண்டுள்ளதா என்பதை அறியும் கருதுகோள் சோதனை சார்ந்த கணக்குகளுக்குத் தீர்வு காணல்.
- ❖ பண்பளவைகளின் சார்பற்ற தன்மையையும், பொருத்துதலின் செம்மைதன்மையையும் அறியும் கருதுகோள் சோதனை சார்ந்த கணக்குகளுக்குத் தீர்வு காணல்.

KBTQFE

அறிமுகம்

முந்தைய பாடத்தில் மிகைகாண் சோதனைகளைப் (Test of significance) பெருங்கூறுகளைக் கொண்டு திட்ட இயல்நிலைப் பரவலைப் பயன்படுத்திக் கற்றறிந்தோம். எனினும், கூறுகளின் அளவு மிகக்குறைவு எனில் ($n < 30$) புள்ளியியல் அளவைகளின் மாதிரிப் பரவல், இயல்நிலை பரவலிலிருந்து வேறுபட்டிருக்கும். மேலும் முந்தைய பாடத்தில் பின்பற்றிய முறைகளை, பிரிவு 1.8 இல் கொடுக்கப்பட்ட பொது முறைகளைத் தவிர்த்து, பயன்படுத்த இயலாது. ஆனால் இம்மாதிரியான சூழலில் திட்ட இயல்நிலைப் பரவலுக்குப் பதிலாக t-பரவல் என்றழைக்கப்படும், ஒரு நிகழ்தகவுப் பரவலானது சிறுகூறுகள் சார்ந்த சூழலை ஆய்வதற்குப் பயன்படுகிறது.

02_12th_Statistics_TM_Unit_2.indd 42 1/28/2020 7:11:44 PM

2.1 ஸ்டூடன்ஸ் t-பரவல் மற்றும் அதன் பயன்பாடுகள்

2.1.1 வரையறை

$X \sim N(0,1)$ மற்றும் $Y \sim \chi^2_n$ சார்பற்ற வாய்ப்பு மாறிகள் எனில்,

$T = \dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$ என்பது n கட்டின்மை கூறுகள் உடைய ஒரு t-பரவலைக் கொண்டுள்ளது என்கிறோம். இது t_n எனக் குறிக்கப்படுகிறது.

குறிப்பு 1: t இன் கட்டின்மை கூறுகளும், அதன் தொடர்புடைய χ^2 வாய்ப்பு மாறியின் கட்டின்மை கூறுகளும் ஒன்றேயாகும்

குறிப்பு 2: ஒரு இயல்நிலை முழுமைத்தொகுதியிலிருந்து பெறப்பட்ட வாய்ப்பு மாறி(கள்) யில் வரையறுக்கப்பட்ட புள்ளியியல் அளவையின் மாதிரிப்பரவலாக t-பரவல் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

i) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ என்பது $N(\mu, \sigma^2)$ என்ற தொகுயிலிருந்து பெறப்பட்ட வாய்ப்பு மாதிரி எனில்

$$X = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \text{ மற்றும் } Y = \frac{\sum\left(X_i - \bar{X}\right)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1} \text{ என்பன சார்பற்றவைகள்.}$$

எனவே,

$$T_1 = \frac{X}{\sqrt{Y/(n-1)}}$$

$$= \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \times \frac{\sigma\sqrt{(n-1)}}{\sqrt{\sum\left(X_i-\bar{X}\right)^2}}$$

$$= \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1} \qquad \text{இங்கு } S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{(n-1)}}$$

ii) $(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ மற்றும் $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ என்பன முறையே $N(\mu_X, \sigma^2)$ மற்றும் $N(\mu_Y, \sigma^2)$ என்ற முழுமை தொகுதிகளிலிருந்து பெறப்பட்ட சார்பற்ற வாய்ப்பு மாறிகள் எனில்,

$$\frac{\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)-\left(\mu_X-\mu_Y\right)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}} \sim N(0,1) \text{ மற்றும் } \frac{\sum_{i=1}^{m}\left(X_i-\bar{X}\right)^2+\sum_{j=1}^{n}\left(Y_j-\bar{Y}\right)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{m+n-2}$$ என்பன சார்பற்ற வாய்ப்பு மாறிகள்.

மேலும்,

$$T_2 = \frac{\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)-\left(\mu_X-\mu_Y\right)}{S_p\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}} \sim t_{m+n-2}$$

இங்கு $S_p^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{m}\left(X_i-\bar{X}\right)^2+\sum_{j=1}^{n}\left(Y_j-\bar{Y}\right)^2}{m+n-2}$

குறிப்பு

கட்டின்மை கூறுகள் (Degress of Freedom)

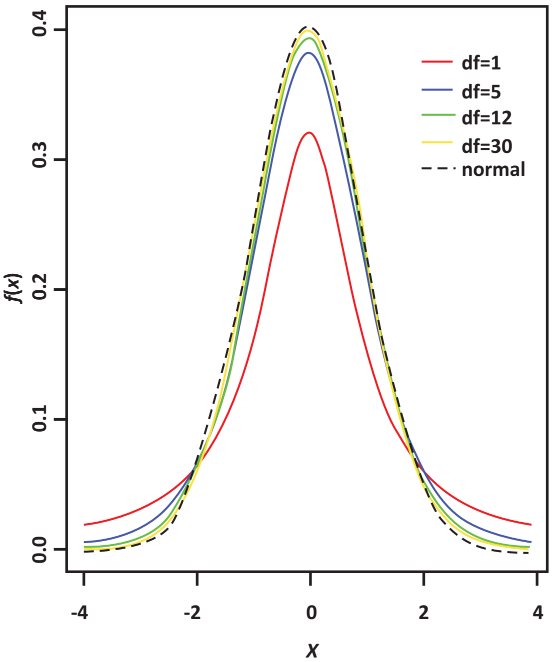
கட்டின்மை கூறுகள் அல்லது கட்டின்மை படிகள் என்பது சார்பற்ற உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைக் குறிப்பதாகும். இதனுடைய மதிப்பு சோதனையின் சூழலை பொறுத்து கணக்கிடப்படுகிறது.

iii) If $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_n, Y_n)$ என்பது இருமாறிகளில் இயல்நிலை முழுமை தொகுதியிலிருந்து சோடிபடுத்தப்பட்டு பெறப்பட்ட n தரவுகள் கொண்ட ஒரு வாய்ப்பு மாதிரி எனில் $D_i = X_i - Y_i, i = 1, 2, \ldots, n$ என்பது $N(\mu_D, \sigma_D^2)$ என்ற இயல்நிலை முழுமைத்தொகுதியிலிருந்து பெற்ற வாய்ப்பு மாதிரி ஆகும். இங்கு $\mu_D = \mu_X - \mu_Y$,

$$T_3 = \frac{\overline{D} - \mu_D}{S_D / \sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

2.1.2 *t*–பரவலின் பண்புகள்

1. ஆதியைப் பொறுத்து t–பரவலானது ஒரு சமச்சீர் பரவலாகும்.
2. t-பரவலின் வளைவரையானது கீழ்க்கண்ட இரண்டு காரணங்களைத் தவிர்த்து இயல்நிலைப்பரவலை ஒத்து இருக்கும்:
   i. மையப் பகுதியில் இயல் நிலைப்பரவலானது t-பரவலை விட அதிக மதிப்புடையதாக இருக்கும்.
   ii. t-பரவலானது பக்கவாட்டில் இயல் நிலைப்பரவலை விட விரிந்து காணப்படும். அதாவது t-பரவலின் முனைபகுதிகளில் அதிக பரப்புள்ளது என்பது தெளிவாகிறது.
3. X அச்சு t-பரவலுக்கு தொலைத்தொடுகோடாக அமைகிறது. அதாவது இப்பரவல் முடிவிலி வரை இருபக்கமும் நீள்கிறது.
4. கட்டின்மை கூறுகளைப் பொறுத்து t-பரவலின் வடிவம் மாறுபடும். கட்டின்மைக் கூறுகள் அதிகமாகும்போது இப்பரவல், திட்ட இயல்நிலைப் பரவலை நெருங்குகிறது. (படம் 2.1).



படம் 2.1 ஸ்டூடண்ட்-t பரவல்

5. t-பரவலானது முழுமைத் தொகுதியின் பண்பளவை சார்ந்தது அல்ல இது கட்டின்மைக் கூறு கள் $(n-1)$ ஐச் சார்ந்தது.

2.1.3 *t*–பரவலின் பயன்பாடுகள்

சிறு கூறுகளின் கருதுகோள் சோதனைகளில் t–பரவலானது கீழ்க்கண்ட பயன்பாடுகளைக் கொண்டுள்ளது.

1. முழுமைத்தொகுதியின் மாறுபாட்டு அளவை தெரியாத நிலையில், முழுமைத் தொகுதியின் சராசரியின் மிகைகாண் சோதனையில் T_1 ஐப் பயன்படுத்திச் சோதனை செய்யப்படுகிறது.
2. முழுமைத்தொகுதியின் மாறுபாடு சமமாகவும், தெரியாத நிலையிலும் இருக்கும்போது, அத்தொகுதிகளின் சராசரிகளின் சமமான நிலையைக் காணும் மிகைகாண் சோதனையில் பயன்படுகிறது. (T_2 ஐப் பயன்படுத்தி).
3. இணை t–சோதனை இரு சராசரிகளின் சமமான நிலையைக் காணும் சோதனைக்குப் பயன்படுகிறது. (T_3 ஐப் பயன்படுத்தி)

02_12th_Statistics_TM_Unit_2.indd 44 1/28/2020 7:11:46 PM

அறிந்து கொள்ள வேண்டியவை

t–பரவல் மேலும் சில பயன்பாடுகளைப் பெற்றிருந்தாலும் இந்த அத்தியாயத்தில் அவை குறிப்பிடப்படவில்லை. அவற்றை மேல் வகுப்புகளில் படித்து அறிந்துகொள்ளலாம் .

2.1.4 முழுமைத்தொகுதி சராசரியின் மிகைகாண் சோதனை (முழுமைத்தொகுதியின் மாறுபாட்டளவை தெரியாத நிலையில்)

வழிமுறைகள்:

படி 1 : ஆய்வுக்கு எடுத்துக்கொள்ளப்பட்ட முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி μ மற்றும் மாறுபாடு σ^2 (இங்கு σ^2 ன் மதிப்பு அறியாத நிலையில்) என்க. μ_0 என்பது μ ன் ஏற்றுக்கொள்ளப்பட்ட மதிப்பு எனில் இன்மை கருதுகோளைக் கீழ்க்காண்டவாறு வடிவமைக்கவும்.

H_0: $\mu = \mu_0$ (இன்மை கருது கோளுக்கு ஏற்ப கீழ்க்கண்டவற்றில் ஏதாவது ஒன்றை மாற்று எடுகோளாகத் தெரிவு செய்யவும்)

(i) H_1: $\mu \neq \mu_0$ (ii) H_1: $\mu > \mu_0$ (iii) H_1: $\mu < \mu_0$

படி 2 : கூறு/தரவு அளவைகளைப் பற்றி விவரிக்கவும். $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ என்பது ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட n அளவுகள் கொண்ட ஒரு சமவாய்ப்பு கூறு என்க. (இங்கு n மிகச் சிறியது, $n < 30$).

படி 3 : மிகைகாண் நிலை (Level of significance) α ஐக் குறிப்பிடுக.

படி 4 : H_0 இன் படி மாதிரிப் பண்பளவைச் சோதனை $T = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$ என எடுத்துக்கொள்க. இங்கு $\overline{X}$ மற்றும் S என்பன முறையே மாதிரி சராசரி மற்றும் மாதிரி திட்டவிலக்கம் ஆகும். H_0 ஐப் பொறுத்து எடுக்கப்பட்ட மாதிரிப் பண்பளவைச் சோதனையின் மாதிரிப் பரவலானது தோராயமாக $(n-1)$ கட்டின்மை கூறுகள் கொண்ட ஒரு t-பரவலாகும்.

படி 5 : கொடுக்கப்பட்ட கூறு $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ இலிருந்து $T = \dfrac{\overline{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}$ எனக் கொண்டு t இன் மதிப்பை கணக்கிடுக.

இங்கு $\overline{x}$ என்பது மாதிரியின் சராசரி மேலும் $s = \sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$ என்பது மாதிரியின் திட்ட விலக்கம்.

படி 6 : கீழ்க்கண்ட அட்டவணையிலிருந்து α மற்றும் H_1 ஐ சார்ந்து தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பைத் (Critical value) தெரிவு செய்க.

மாற்று கருதுகோள் (H_1)	$\mu \neq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$\mu < \mu_0$
தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு (t_e)	$t_{n-1,\alpha/2}$	$t_{n-1,\alpha}$	$-t_{n-1,\alpha}$

படி 7 : கீழ்க்கண்ட அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி தகுந்த மறுக்கும் விதியைத் (Rejection Rule) தேர்ந்தெடுத்து H_0 ஐத் தீர்மானிக்க.

மாற்று கருதுகோள் (H_1)	$\mu \neq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$\mu < \mu_0$
மறுக்கும் விதி	$\lvert t_0 \rvert \geq t_{n-1,\alpha/2}$	$t_0 > t_{n-1,\alpha}$	$t_0 < -t_{n-1,\alpha}$

02_12th_Statistics_TM_Unit_2.indd 45 1/28/2020 7:11:48 PM

எடுத்துக்காட்டு 2.1

ஒரு பல்பொருள் அங்காடியில் ஒரு குறிப்பிட்ட வகை பற்பசையின் மாத சராசரி விற்பனை ₹ 200. தயாரிப்பு நிர்வாகத்தால் ஒரு விளம்பரம் பிரச்சராத்தைக் கையாண்டபின் 26 மாதிரி பல்பொருள் அங்காடிகளைத் தேர்வு செய்ததில் சராசரியாக ஒவ்வொரு அங்காடியிலும் குறிப்பிட்ட பற்பசையின் விற்பனை சராசரியாக ₹ 216 என்றும் திட்டவிலக்கம் ₹ 8 எனவும் கண்டறியப்பட்டது. இவ்விளம்பர பிராச்சாரம் விற்பனையை அதிகரிக்க உதவியதா என சோதித்து அறிக.

தீர்வு:

படி 1 : கருதுகோள்கள் (Hypotheses)

இன்மை கருதுகோள் $H_0: \mu = 200$

அதாவது, ஒரு குறிப்பிட்ட பற்பசையின் சராசரி விற்பனை குறிப்பிடத்தக்க வகையில் ₹ 200 இலிருந்து மாறுபட்டது அல்ல.

மாற்று கருதுகோள் $H_1: \mu > 200$

அதாவது ஒரு குறிப்பிட்ட பற்பசையின் சராசரி விற்பனை ₹ 200 ஐ விட அதிகம். இது ஒரு முனை (வலமுனை) மாற்று கருதுகோள்.

படி 2 : தரவு தொகுப்பு (Data from sample)

கொடுக்கப்பட்ட மாதிரியின் விவரம்

மாதிரியின் அளவு $(n) = 26$. (எனவே இது சிறு கூறு).

மாதிரி சராசரி $(\bar{x}) = 216$, மாதிரியின் திட்ட விலக்கம் $(s) = 8$

படி 3 : மிகைகாண் நிலை (Level of significance) $\alpha = 5\%$

படி 4 : மாதிரிப்பண்பளவை அல்லது கூறு பண்பளவைச் சோதனை (Test statistic)

H_0 இன் கீழ் மாதிரிப்பண்பளவை $t = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$,

n ஆனது சிறியது ஆதலால் மாதிரி பரவலானது $(n\text{-}1)$ கட்டின்மை கூறுகள் (Degrees of freedom) கொண்ட t-பரவலாகும்

படி 5 : மாதிரிப்பண்பளவை சோதனைக்கு ஏற்ப கணக்கிடுதல் (Calcualtion of Test statistic)

t–இன் மதிப்பு கொடுக்கப்பட்ட மாதிரியின் தகவலைக் கொண்டு.

$t_0 = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$ என்பதன் மூலம் கணக்கிடப்படுகிறது

$$t_0 = \frac{216 - 200}{8/\sqrt{26}} = 10.20$$

படி 6 : தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு (Critical values)

H_1 என்பது ஒரு முனை (வலமுனை) மாற்று எடுகோள் என்பதால் தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு $\alpha = 0.05$ பொறுத்து $t_e = t_{n\text{-}1,\,\alpha} = t_{25,0.05} = 1.708$

படி 7 : முடிவு (Decision)

இது வலமுனை சோதனை என்பதால் தீர்மானிக்கும் பகுதியானது மறுக்கும் விதி $t_0 > t_e = t_{n\text{-}1,\,\alpha} = t_{25,0.05} = 1.708$ என்பதன் மூலம் தீர்மானிக்கப்படுகிறது. கொடுக்கப்பட்ட மாதிரியின் தகவல்கள் H_0 ஐ ஏற்றுக் கொள்ளாததற்கு போதுமான ஆதாரங்களை கொண்டுள்ளதை குறிக்கிறது. எனவே, உற்பத்தியாளரின் விளம்பர பிரச்சாரம் பற்பசையின் விற்பனையை அதிகரிப்பதில் உதவியிருக்கிறது.

02_12th_Statistics_TM_Unit_2.indd 46 1/28/2020 7:11:48 PM

எடுத்துக்காட்டு 2.2

ஒரு பள்ளியில் இருந்து 10 மாணவர்கள் கொண்ட ஒரு மாதிரி தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டது ஒரு குறிப்பிட்ட பாடத்தில் அவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள் 72, 82, 96, 85, 84, 75, 76, 93, 94 மற்றும் 93. இதைக் கொண்டு வகுப்பின் சராசரி மதிப்பெண் 90 என்ற கூற்றை நாம் ஏற்று கொள்ள முடியுமா?

தீர்வு:

படி 1 : கருதுகோள்கள்

இன்மை கருதுகோள் $H_0: \mu = 90$

அதாவது வகுப்பின் சராசரி மதிப்பெண் 90 லிருந்து குறிப்பிடத்தக்க வகையில் மாறுபடவில்லை.

மாற்று கருதுகோள் $H_1 : \mu \neq 90$

அதாவது வகுப்பின் சராசரி மதிப்பெண் 90லிருந்து குறிப்பிடத்தக்க அளவு வேறுபடுகிறது இது ஒரு இருமுனை மாற்று கருதுகோள்.

படி 2 : தரவு தொகுப்பு

கொடுக்கப்பட்ட மாதிரியின் விவரம்

மாதிரியின் அளவு $(n) = 10 < 30$ எனவே, இது சிறு கூறு.

படி 3 : மிகைகாண் நிலை $\alpha = 5\%$

படி 4 : மாதிரிப் பண்பளவைச் சோதனை

H_0 இன் கீழ் மாதிரிப் பண்பளவைச் சோதனை $T = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$

n ஆனது 30 ஐ விட குறைவாக உள்ளதால் மாதிரி பரவலானது $(n\text{-}1)$ கட்டின்மை கூறுகள் கொண்ட t-பரவலாகும்.

படி 5 : மாதிரிப்பண்பளவை சோதனைக்கு ஏற்ப கணக்கிடுதல்

t-இன் மதிப்பு கொடுக்கப்பட்ட மாதிரியின் தகவல்களைக் கொண்டு $t_0 = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$ என்க கணக்கிடப்படுகிறது.

(a) மாதிரி சராசரி ($\overline{X}$) மற்றும் (b) மாதிரியின் திட்டவிலக்கம் காணல்

x_i	$u_i = x_i - A; (A = 85)$	u_i^2
72	–13	169
82	–3	9
96	11	121
85	0	0
84	–1	1
75	–10	100
76	–9	81
93	8	64
94	9	81
93	8	64
	$\sum_{i=1}^{10} u_i = 0$	$\sum_{i=1}^{10} u_i^2 = 690$

02_12th_Statistics_TM_Unit_2.indd 47 1/28/2020 7:11:49 PM

மாதிரி சராசரி:

$$\bar{x} = A + \frac{\sum_{i=1}^{10} u_i}{n} \text{ இங்கு } A \text{ என்பது ஊக சராசரி}$$

$= 85 + 0 = 85$

மாதிரி திட்டவிலக்கம்:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{10} u_i^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{9} \times 690}$$

$$= \sqrt{76.67}$$

$= 8.756$

எனவே, $t_0 = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$

$$= \frac{85-90}{8.756/\sqrt{10}} = \frac{-5}{2.77}$$

$= -1.806$ மற்றும்

$|t_0| = 1.806$

படி 6 : **தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு**

H_1 என்பது இருமுனை மாற்று கருதுகோள் என்பதால் தீர்வு கட்ட மதிப்பு $\alpha = 0.05$ ஐப் பொறுத்து $t_e = t_{n-1, \frac{\alpha}{2}} = t_{9,0.025} = 2.262$

படி 7 : **முடிவு**

இது இருமுனை சோதனை என்பதால் தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பானது, மறுக்கும் விதி $|t_0| > t_e = t_{n-1, \frac{\alpha}{2}} = t_{9,0.025} = 2.262$. என்பதன் மூலம் தீர்மானிக்கப்படுகிறது. கொடுக்கப்பட்ட கூறு தகவல் $|t_0| = 1.806 < t_e = 2.262$. கொடுக்கப்பட்ட மாதிரி தகவல்கள் H_0 ஐ நிராகரிக்க போதுமான ஆதாரங்களை தரவில்லை என்பதைக் குறிக்கிறது. எனவே வகுப்பு சராசரி மதிப்பெண்கள் 90 என்பதிலிருந்து முக்கியத்துவம் அளிக்கும் வகையில் வேறுபடவில்லை.

2.1.5 இரு முழுமைத்தொகுதிகளில் உள்ள சராசரிகளின் சமனித்தன்மை காண்பதற்கான கருதுகோள் சோதனை (சார்பற்ற வாய்ப்பு மாதிரிகள்)

வழிமுறைகள்:

படி 1 : μ_X மற்றும் μ_Y என்பவை முறையே ஆய்வுக்கு எடுத்துக்கொள்ளப்பட்ட முழுமைத் தொகுதிகள் I மற்றும் II ஆகியவற்றின் சராசரிகள் என்க.

இன்மை கருதுகோள் $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ என அமைக்க. மேலும் கீழ்க்கண்டவற்றில் இருந்து தகுந்த ஒரு மாற்று கருதுகோளைத் தெரிவு செய்க.

(i) $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$ (ii) $H_1 : \mu_X > \mu_Y$ (iii) $H_1 : \mu_X < \mu_Y$

02_12th_Statistics_TM_Unit_2.indd 48 1/28/2020 7:11:49 PM

படி 2 : மாதிரி தரவுகளை விவரிக்க: $(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ என்பது முழுமைத்தொகுதி I இலிருந்து வாய்ப்பு முறையில் பெறப்பட்ட m கூறுகள் கொண்ட ஒரு மாதிரி என்க. $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ என்பது முழுமைத் தொகுதி II இலிருந்து வாய்ப்பு முறையில் பெறப்பட்ட n கூறுகள் கொண்ட ஒரு மாதிரி என்க. இங்கு m மற்றும் n என்பன மிகக் குறைந்த எண்கள் அதாவது $m < 30$, மேலும் $n < 30$. இவ்விரு மாதிரிகளும் சார்பற்றவை ஆகும்.

படி 3 : மிகைகாண் நிலை α: (5% அல்லது 1%) என்பதை நிர்மானிக்க.

படி 4 : மாதிரிப்பண்பளவைச் சோதனை

$$T = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{S_p\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}}$$ என

H_0: $\mu_X = \mu_Y$ என்ற கருதுகோளின்படி எடுத்து கொள்க.

இங்கு

$$S_p = \sqrt{\frac{(m-1)s_X^2 + (n-1)s_Y^2}{m+n-2}}$$ என்பது ஒருங்கிணைந்த திட்டவிலக்கம்;

மேலும்

$$s_X{}^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_i - \bar{X})^2$$

$$s_Y{}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2$$

இந்த மாதிரிப் பண்பளவையின் மாதிரிப் பரவல் தோரயமாக H_0 ஐப் பொறுத்து

$$T = \frac{(\bar{X} - \bar{Y})}{S_p\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}}$$

என்ற $m+n-2$ கட்டின்மை கூறுகள் கொண்ட ஒரு t-பரவலாகும். அதாவது $t \sim t_{m+n-2}$.

படி 5 : கொடுக்கப்பட்ட $(x_1, x_2, \ldots x_m)$ மற்றும் $(y_1, y_2, \ldots y_n)$ என்ற மாதிரிகளுக்கு $t_0 = \frac{(\bar{x} - \bar{y})}{s\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}}$ எனக்கொண்டு t இன் மதிப்பை காணவும்.

இங்கு $\bar{x}$ மற்றும் $\bar{y}$ என்பன மாதிரிகளின் சராசரிகள். $\bar{X}$ மற்றும் $\bar{Y}$ ன் மதிப்புகள் ஆகும்.

மேலும் $s_x{}^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(x_i - \bar{x})^2$, $s_y{}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$ என்பன மாதிரிகளின் மாறுபாட்டு அளவைகள் ஆகும். மேலும் $s_p = \sqrt{\frac{(m-1)s_x^2 + (n-1)s_y^2}{m+n-2}}$.

படி 6 : α மற்றும் H_1 ஐப் பொறுத்து கீழ்க்கண்ட அட்டவணையிலிருந்து தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு t_e ஐத் தேர்ந்தெடுக்க:

மாற்று கருதுகோள் (H_1)	$\mu_X \neq \mu_Y$	$\mu_X > \mu_Y$	$\mu_X < \mu_Y$
தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு (t_e)	$t_{n-1, \frac{\alpha}{2}}$	$t_{n-1, \frac{\alpha}{2}}$	$-t_{(n-1), \alpha}$

02_12th_Statistics_TM_Unit_2.indd 49 1/28/2020 7:11:50 PM

படி 7 : தகுந்த மறுக்கும் விதியினை கீழ்க்கண்ட H_1 என்பதற்கான அட்டவணையிலிருந்து தேர்ந்தெடுத்து H_0 ஐப் பற்றி முடிவு எடுக்க.

மாற்று எடுகோள் (H_1)	$\mu_X \neq \mu_Y$	$\mu_X > \mu_Y$	$\mu_X < \mu_Y$
மறுக்கும் விதி	$\lvert t_0 \rvert \geq t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}$	$t_0 > t_{n-1,\alpha}$	$t_0 < -t_{n-1,\alpha}$

எடுத்துக்காட்டு 2.3

கீழ்க்கண்ட அட்டவணை இருபிரிவு மாணவர்கள், 15 மதிப்பெண் கொண்ட ஒரு தேர்வில் பெற்ற மதிப்பெண்களை குறிப்பதாகும்.

பிரிவு I	6	7	9	2	13	3	4	8	7	11
பிரிவு II	5	6	5	7	1	7	2	7		

இரு பிரிவு மாணவர்களும் சராசரியாக சமமான மதிப்பெண்களைப் பெற்றுள்ளனரா?

தீர்வு:

படி 1 : கருதுகோள் μ_X மற்றும் μ_Y என்பன முறையே இரு பிரிவு மாணவர்கள் பெறும் சராசரி மதிப்பெண்கள் என்க. எனவே, இன்மை மற்றும் மாற்று கருதுகோள் கீழ்க்கண்டவாறு உள்ளன.

இன்மை கருதுகோள் $H_0 : \mu_X = \mu_Y$

இரு பிரிவு மாணவர்கள் பெறும் மதிப்பெண்களின் சராசரிகள் சமம்.

மாற்று கருதுகோள் $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$ (இருமுனை)

அதாவது இரு பிரிவு மாணவர்கள் பெறும் மதிப்பெண்கள் சமம் அல்ல.

படி 2 : தரவு தொகுப்பு

கொடுக்கப்பட்ட மாதிரி தகவல்கள்:

பிரிவு I மாதிரியின் அளவு : $m = 10$

பிரிவு II மாதிரியின் அளவு : $n = 8$

படி 3 : மிகைகாண் நிலை

$\alpha = 1\%$

படி 4 : மாதிரிப் பண்பளவைச் சோதனை

H_0 ஐப் பொறுத்து மாதிரிப் பண்பளவைச் சோதனை

$$T = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{S_p \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}}$$

H_0 ஐப் பொறுத்து t ன் மாதிரி பரவலானது $m+n-2$ கட்டின்மை கூறுகள் கொண்ட ஒரு t–பரவலாகும் அதாவது $t \sim t_{m+n-2}$

02_12th_Statistics_TM_Unit_2.indd 50 1/28/2020 7:11:51 PM

படி 5 : மாதிரிப்பண்பளவை சோதனைக்கு ஏற்ப கணக்கிடுதல்

மாதிரியின் சராசரி மற்றும் திட்டவிலக்கம் காணல்:

x_i	$u_i = x_i - \bar{x}$ $(\bar{x} = 7)$	u_i^2	y_i	$v_i = y_i - \bar{y}$ $(\bar{y} = 5)$	v_i^2
6	-1	1	5	0	0
7	0	0	6	1	1
9	2	4	5	0	0
2	-5	25	7	2	4
13	6	36	1	-4	16
3	-4	16	7	2	4
4	-3	9	2	-3	9
8	1	1	7	2	4
7	0	0			
11	4	16			
$\sum_{i=1}^{10} x_i = 70$	$\sum_{i=1}^{10} u_i = 0$	$\sum_{i=1}^{10} u_i^2 = 108$	$\sum_{i=1}^{8} y_i = 40$	$\sum_{i=1}^{8} v_i = 0$	$\sum_{i=1}^{8} v_i = 0$

மாதிரி சராசரி காணல்

$(x_1, x_2, ..., x_{10})$ மற்றும் $(y_1, y_2, ..., y_8)$ என்பன பிரிவு I மற்றும் II இல் உள்ள மாணவர்கள் பெறும் மதிப்பெண்கள் என்க.

x, y என்பன முறை I மற்றும் முறை II இல் உள்ள மதிப்புகள் என்க.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10} = \frac{70}{10} = 7$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{8} y_i}{8} = \frac{40}{8} = 5$$

இணைந்த திட்டவிலக்கம் காணல்

$$s_X^2 = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10} u_i^2 = \frac{108}{9} = 12$$

$$s_Y^2 = \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{8}(y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{8} v_i^2 = \frac{38}{7} = 5.4$$

இணைந்த திட்டவிலக்கம்

$$S_p = \sqrt{\frac{(m-1)s_x^2 + (n-1)s_y^2}{m+n-2}} = \sqrt{\frac{108+38}{10+8-2}} = \sqrt{9.125} = 3.021$$

கொடுக்கப்பட்ட தகவல்களில் இருந்து t இன் மதிப்பானது

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s_p\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} = \frac{7-5}{3.021\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{8}}} = 1.3957$$ எனக் கணக்கிடப்படுகிறது.

படி 6 : தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு

H_1 என்பது இரு முனை மாற்று எடுகோள் என்பதால் தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு $\alpha = 0.01$ ஐப் பொறுத்து $t_e = t_{m+n-2,\frac{\alpha}{2}} = t_{16,0.005} = 2.921$

படி 7 : முடிவு

இது இரு முனை சோதனை என்பதால் தீர்மானிக்கும் பகுதியானது மறுக்கும் விதி $|t_0| < t_e = t_{m+n-2,\frac{\alpha}{2}} = t_{16,0.005} = 2.921$ என்பதன் மூலம் தீர்மானிக்கப்படுகிறது கொடுக்கப்பட்ட மாதிரி தகவல்களுக்கு $|t_0| = 1.3957 < t_e = 2.921$ கொடுக்கப்பட்ட மாதிரி தகவல்கள் H_0ஐ மறுப்பதற்கு போதுமான ஆதாரங்கள் தரவில்லை என்பதைக் குறிக்கிறது. எனவே இருபிரிவுகளிலும் மாணவர்கள் பெறும் மதிப்பெண்கள் சமம் என அறிகிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 2.4

இருவகையான மின்கலங்களின் ஆயுட் காலத்தை (மணிகளில்) அறிந்துகொள்ள சோதனைக்கு உட்படுத்த பட்டதில் கீழ்க்கண்டத் தரவுகள் பெறப்பட்டன.

வகை	மின்கலங்களின் எண்ணிகை	சராசரி ஆயுட் காலம் (மணிகளில்)	மாதிரி திட்டவிலக்கம்
A	14	94	16
B	13	86	20

இருவகையான மின்கலங்களின் ஆயுட்காலத்தில் குறிப்பிடத்தக்க வகையில் மாறுபாடு உள்ளதா என 5% மிகைகாண் நிலையில் காண்க.

தீர்வு:

படி 1 : கருதுகோள்கள்

இன்மை கருதுகோள் $H_0 : \mu_X = \mu_Y$

A மற்றும் B வகை மின்கலங்களின் ஆயுட்காலத்தில் குறிப்பிடத்தக்க அளவில் மாற்றம் இல்லை.

மாற்று கருதுகோள் $H_0 : \mu_X \neq \mu_Y$

A மற்றும் B இருவகையான மின்கலங்களின் சராசரி ஆயுட்காலம் குறிப்பிடத்தக்க வகையில் வெவ்வேறானவை. (இது ஒரு இரு முனை மாற்று கருதுகோள்).

படி 2 : தரவு தொகுப்பு

கொடுக்கப்பட்ட மாதிரி தரவுகள்:

$m = A$ வகை மின்கலங்களின் எண்ணிக்கை $= 14$

$n = B$ வகை மின்கலங்களின் எண்ணிக்கை $= 13$

$\bar{x} = A$ வகை மின்கலத்தின் சராசரி ஆயுட்காலம் (மணிகளில்) $= 94$

$\bar{y} = B$ வகை மின்கலத்தின் சராசரி ஆயுட்காலம் (மணிகளில்) $= 86$

$s_X = A$ வகை மின்கலத்தின் திட்டவிலக்கம் $=16$

$s_Y = B$வகை மின்கலத்தின் திட்டவிலக்கம் $= 20$

02_12th_Statistics_TM_Unit_2.indd 52 1/28/2020 7:11:54 PM

படி 3 : மிகைகாண் நிலை

$\alpha = 5\%$

படி 4 : மாதிரிப்பண்பளவைச் சோதனை:

H_0 ஐப் பொறுத்து மாதிரிப்பண்பளவைச் சோதனை

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_p\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}.$$

H_0 ஐப் பொறுத்து t இன் மாதிரி பரவலானது $m+n-2$ கட்டின்மை கூறுகள் கொண்ட ஒரு t-பரவலாகும். அதாவது, $t \sim t_{m+n-2}$ ஆகும்

படி 5 : மாதிரிப்பண்பளவைச் சோதனைக்கு ஏற்ப கணக்கிடல்

H_0 ஐப் பொறுத்து:

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s_p\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}$$

இங்கு இணைந்த திட்டவிலக்கம் (S_p) என்பது,

$$s_p = \sqrt{\frac{(m-1)s_X^2 + (n-1)s_Y^2}{m+n-2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(14-1)(16)^2 + (13-1)(20)^2}{14+13-2}} = \sqrt{325.12} = 18.03$$

கொடுக்கப்பட்ட தகவல்களில் இருந்து t இன் மதிப்பானது

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s_p\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}} = \frac{94-86}{18.03\sqrt{\frac{1}{14}+\frac{1}{13}}} = \frac{8}{6.944} = 1.15$$

படி 6 : தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு

H_1 என்பது இருமுனை மாற்று கருதுகோள் என்பதால் தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு $\alpha = 0.05$ ஆனது $t_e = t_{m+n-2, \frac{\alpha}{2}} = t_{25,\, 0.025} = 2.060$.

படி 7 : முடிவு

இது ஒரு இருமுனை சோதனை என்பதால் தீர்மானிக்கும் பகுதி, மறுக்கும் விதியின்படி $|t_0| < t_e = t_{m+n-2, \frac{\alpha}{2}} = t_{25,\, 0.025} = 2.060$. என்பதன் மூலம் தீர்மானிக்கப்படுகிறது கொடுக்கப்பட்ட மாதிரி தகவல்களுக்கு $|t_0| = 1.15 < t_e = 2.060$ மாதிரியின் தரவுகள் H_0ஐ மறுப்பதற்குப் போதுமான ஆதாரங்களைத் தரவில்லை என்பதைக் குறிக்கிறது எனவே இருவகையான மின்கலங்களின் சராசரி ஆயுட் காலத்தில் குறிப்பிடத்தக்க மாற்றம் இல்லை.

02_12th_Statistics_TM_Unit_2.indd 53 1/28/2020 7:11:55 PM

2.1.6 இரு சராசரிகளின் சமனித்தன்மையைச் சோதித்தல்–t இன் இணை சோதனை :

வழிமுறைகள்:

படி 1 : X மற்றும் Y என்பன முறையே $N(\mu_X, \sigma_X^2)$ மற்றும் $N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ என்ற இரு இயல்நிலை முழுமைத்தொகுதியிலிருந்து பெறப்பட்ட ஒட்டுறவுடைய வாய்ப்பு மாறிகள் என்க. இங்கு $D = X - Y$ எனில், D என்பது $N(\mu_D = \mu_X - \mu_Y, \sigma_D^2)$ என்ற இயல் நிலைப் பரவலைப் பெற்றிருக்கும்.

கருதுகோள் அமைத்தல்

இன்மை கருதுகோள் $H_0 : \mu_D = 0$

மாற்று கருதுகோளாக கீழ்க்கண்ட ஒன்றைத் தெரிவு செய்க.

(i) $H_1 : \mu_D \neq 0$ (ii) $H_1 : \mu_D > 0$ (iii) $H_1 : \mu_D < 0$

படி 2 : மாதிரித்தரவு விவரித்தல் $(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ என்பது முழுமைத் தொகுதி I இலிருந்து பெறப்பட்ட m உறுப்புகள் கொண்ட வாய்ப்பு மாதிரி மற்றும் $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ என்பது முழுமைத் தொகுதி II இலிருந்து பெறப்பட்ட n உறுப்புகள் கொண்ட வாய்ப்பு மாதிரி இவ்விரு மாதிரி உறுப்புகளும் சோடியாக ஒட்டுறவு கொண்டவை.

படி 3 : மிகைகாண் நிலை: α (5% அல்லது 1%)

படி 4 : மாதிரிப் பண்பளவைச் சோதனை

$$T = \frac{\bar{D}}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

இங்கு $\bar{D} = \frac{\sum_{i=1}^{n} D_i}{n}$; $D_i = X_i - Y_i$ மற்றும் $S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(D_i - \bar{D})^2}{n-1}}$.

இன்மை கருதுகோளைப் பொறுத்து இந்த மாதிரிப் பண்பளவைச் சோதனையின் மாதிரி பரவல் $(n-1)$ கட்டின்மை கூறு கொண்ட ஒரு t-பரவலாகும்.

படி 5 : கொடுக்கப்பட்ட தரவிற்கு t இன் மதிப்பு கணக்கிடுதல்

$$t_0 = \frac{\bar{d}}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

இங்கு $d_i = x_i - y_i$, மாதிரி சராசரி $\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}$

திட்ட விலக்கம் $s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i - \bar{d})^2}{n-1}}$

படி 6 : α மற்றும் H_1 ஐ பொறுத்து கீழ்க்கண்ட அட்டவணையிலிருந்து தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு t_e-ஐ தேர்வு செய்க.

மாற்று கருதுகோள் (H_1)	$\mu_D \neq 0$	$\mu_D > 0$	$\mu_D < 0$
தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு (t_e)	$t_{n-1, \frac{\alpha}{2}}$	$t_{n-1, \alpha}$	$-t_{n-1, \alpha}$

02_12th_Statistics_TM_Unit_2.indd 54 1/28/2020 7:11:57 PM

படி 7 : கீழ்க்கண்ட அட்டவணையிலிருந்து H_1–ஐ சார்ந்த தகுந்த மறுக்கும் விதியைத் தெரிவு செய்து H_0–ஐப் பற்றி முடிவெடுத்தல்.

மாற்று கருதுகோள் (H_1)	$\mu_D \neq 0$	$\mu_D > 0$	$\mu_D < 0$
மறுக்கும் விதி	$\lvert t_0 \rvert \geq t_{n-1, \frac{\alpha}{2}}$	$t_0 > t_{n-1, \alpha}$	$t_0 < -t_{n-1, \alpha}$

எடுத்துக்காட்டு 2.5

ஒரு நிர்வாகம் தன்னுடைய விற்பனையாளர்களுக்கு ஒரு சிறப்பு பயிற்சி அளிக்கிறது. வாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட 10 விற்பனையாளர்களின் பயிற்சிக்கு முன் மற்றும் பயிற்சிக்குப்பின் பெற்ற விற்பனை மதிப்புகள் (இலட்சத்தில்) கீழ்க்கண்ட அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. சராசரி விற்பனை அதிகரித்துள்ளதா என 5% மிகைகாண் நிலையில் சோதனை செய்க.

விற்பனையாளர்	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
பயிற்சிக்கு முன்	15	22	6	17	12	20	18	14	10	16
பயிற்சிக்குப் பின்	17	23	16	20	14	21	18	20	10	11

தீர்வு:

படி 1 : கருதுகோள்கள்

இன்மை கருதுகோள் $H_0 : \mu_D = 0$

பயிற்சிக்குப்பின் பெறப்பட்ட சராசரி விற்பனை மதிப்பில் எந்தவித அதிகரிப்பும் இல்லை .

மாற்று கருதுகோள் $H_1 : \mu_D > 0$

பயிற்சிக்குப்பின் பெறப்பட்ட சராசரி விற்பனை மதிப்பில் அதிகரிப்பு உள்ளது. இது ஒரு முனை மாற்று கருதுகோளாகும்.

படி 2 : தரவு

கொடுக்கப்பட்டவை

மாதிரி அளவு $n = 10$

படி 3 : மிகைகாண் நிலை

$\alpha = 5\%$

படி 4 : மாதிரிப் பண்பளவைச் சோதனை

இன்மை கருதுகோளின்படி, மாதிரிப் பண்பளவைச் சோதனை

$$T = \frac{\overline{D}}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

H_0 இன்மை கருதுகோளின்படி t-இன் மாதிரிப் பரவலானது, கட்டின்மை கூறு 9 உடைய ஒரு t-பரவலாகும்.

02_12th_Statistics_TM_Unit_2.indd 55 1/28/2020 7:11:57 PM

படி 5 : மாதிரிப் பண்பளவைச் சோதனைக்கு ஏற்ப கணக்கிடல்

$\bar{d}$ மற்றும் s காணல்:

x, y என்பன முறையே பயிற்சிக்கு முன் மற்றும் பயிற்சிக்கு பின் ஆன விற்பனை மதிப்புகள் என்க.

விற்பனையாளர்கள்	x_i	y_i	$d_i = y_i - x_i$	$d_i - \bar{d}$	$(d_i - \bar{d})^2$
1	15	17	2	0	0
2	22	23	1	-1	1
3	6	16	10	8	64
4	17	20	3	1	1
5	12	14	2	0	0
6	20	21	1	-1	1
7	18	18	0	-2	4
8	14	20	6	4	16
9	10	10	0	-2	4
10	16	11	-5	-7	49
		மொத்தம்	$\sum_{i=1}^{n} d_i = 20$	$\sum_{i=1}^{n}(d_i - \bar{d}) = 0$	$\sum_{i=1}^{n}(d_i - \bar{d})^2 = 140$

குறிப்பு: இங்கு $d_i = x_i - y_i$ என்பதற்கு பதிலாக $d_i = y_i - x_i$ என எளியமுறையில் கணக்கிட எடுக்கப்பட்டிருக்கிறது.

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n} = \frac{20}{10} = 2$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(d_i - \bar{d})^2} = \sqrt{\frac{140}{9}} = \sqrt{15.56} = 3.94$$

எனவே t_0 ன் கணக்கிடப்பட்ட மதிப்பு

$$t_0 = \frac{\bar{d}}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{2}{\frac{3.94}{\sqrt{10}}} = 1.6052$$

படி 6 : தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு

H_0 என்பது ஒரு முனை மாற்று கருதுகோள் என்பதால் 5% மிகைகாண் நிலையில் தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு $t_e = t_{n-1,\,\alpha} = t_{9,0.05} = 1.833$

படி 7 : முடிவு

$|t_0| = 1.6052 < t_e = t_{n-1,\,\alpha} = t_{9,0.05} = 1.833$ என்பதால் H_0 ஆனது மறுக்கப்படுவது இல்லை. எனவே பயிற்சிக்குப் பின்னர் சராசரி விற்பனையில் குறிப்பிடத்தக்க வகையில் முன்னேற்றம் இல்லை.

02_12th_Statistics_TM_Unit_2.indd 56 1/28/2020 7:11:59 PM

2.2 கை–வர்க்க பரவல் மற்றும் அதன் பயன்பாடுகள்

கார்ல் பியர்சான்
1857–1936

கார்ல் பியர்சான் என்பவர் ஓர் ஆங்கிலேய கணித வல்லுநர் மற்றும் உயிரி–புள்ளியியலாளர் ஆவார். உலகிலேயே முதல் பல்கலைகழகப் புள்ளியியல் துறையினை லண்டனில் உள்ள பல்கலைகழகக் கல்லூரியில் 1911 இல் நிறுவியவர் இவரே. கண்டெடுக்கப்பட்ட தரவுகள் ஒரு குறிப்பிட்ட நோக்கத்திற்கு சாதகமாக உள்ளதா என்பதை சோதித்தலில் முதன்மையானவர் என்பதை அவர் 1900 இல் வெளியிட்ட ஓர் ஆய்வு கட்டுரையின் மூலம் தெரியவந்தது. இச்சோதனையை அவர் கைவர்க்க செம்மைதன்மை பொருத்துதல் சோதனை என்றழைத்தார். இது அனுமானப் புள்ளியியல் ஆய்விற்கு உந்துதலாக இருந்தது. மேலும் புள்ளியியல் தனிப் பிரிவாக வளர்வதற்கு இது காரணமானது.

கார்ல் பியர்சானின் கைவர்க்க சோதனையான அனுமனாப் புள்ளியியலின் உதயம்.

– C.R ராவ்

1900–இல் வெளியிடப்பட்ட கார்ல் பியர்சானின் கைவர்க்க ஆய்வுக்கட்டுரை, புள்ளியியல் துறையில் அந்நூற்றாண்டின் இனிய தொடக்கமாகக் கருதப்படுகிறது.

– B. எஃபரன்

2.2.1 கை–வர்க்க பரவலின் வரையறை

ஒரு திட்ட இயல்நிலை மாறியின் வர்க்கமானது, கட்டின்மை கூறு உடைய ஒரு கைவர்க்க மாறி என அறியப்படுகிறது. அதாவது $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ எனில், $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ என அறிவோம். மேலும் Z^2 என்பது கட்டின்மைகூறு ஒன்று உடைய ஒரு கைவர்க்க மாறியாகும். (χ^2 என்பது கைவர்க்கம் என அழைக்கப்படுகிறது)

குறிப்பு: i) $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, எனில், $\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)/\sigma^2$ என்பது கட்டின்மைகூறு n உடைய ஒரு χ^2 (கைவர்க்க) மாறி ஆகும். (கைவர்க்கத்தின் கூட்டல் பண்பு)

ii) μ ஆனது $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ என்றமாறியால் மாற்றப்பட்டால் $\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2}$ என்பது கட்டின்மை கூறு χ_{n-1}^2 உடைய கைவர்க்க மாறியாகும்.

2.2.2 கைவர்க்க பரவலின் பண்புகள்

- இது ஒரு தொடர் பரவல்.
- இந்த பரவல் ஒரே ஒரு பண்பளவையை கொண்டுள்ளது. அதாவது n (கட்டின்மை கூறு) மட்டுமே இதன் பண்பளவை ஆகும்.
- பரவலின் வளைவரை வடிவம் அதன் கட்டின்மை கூறு சார்ந்து இருக்கிறது.
- கைவர்க்க பரவலின் சராசரி n மற்றும் அதன் திட்டவிலக்கம் $2n$ ஆகும்.
- U மற்றும் V என்ற இரு சார்பற்ற வாய்ப்பு மாதிரிகள் முறையே $\chi_{n_1}^2$ மற்றும் $\chi_{n_2}^2$ பரவல்களைப் பெற்றிருப்பின் அவற்றின் கூடுதல் $U + V$ என்பது ஒரு $\chi_{n_1+n_2}^2$ பரவலைப் பெற்றிருக்கும்.

2.2.3 கைவர்க்கப் பரவலின் பயன்பாடுகள்

- ஒரு முழுமைத் தொகுதியின் மாறு பாட்டளவையை சோதித்தல் (பிரிவு 2.2.1 ஐக் காண்க)
- பண்புகளின் சார்பற்ற தன்மையை அறியும் சோதனையில் பயன்படுகிறது. (பிரிவு 2.2.5 ஐக் காண்க)

02_12th_Statistics_TM_Unit_2.indd 57 1/28/2020 7:12:00 PM

- ஒரு முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபட்டளவையைச் சோதித்தல். (பிரிவு 2.2.6 ஐக் காண்க)
- இவ்விரு வளைவரைகளும் மிக அதிகமாக விலகாமல் இருந்தால், பொருத்துதல் மிக நேர்த்தியாக இருக்கிறது என்று பொருள். மேற்கண்ட இருபயன்பாட்டிலுள்ள இருபுள்ளியியல் அளவையின் ஒரு கைவர்க்க சோதனை மாதிரிபரவல்.

2.2.4 இயல்நிலை முழுமைத்தொகுதியின் மாறுபாட்டளவைக் காண பொறுத்து கருதுகோள் சோதனை (முழுமைத்தொகுதியின் சராசரி தெரியாத நிலையில்)

வழிமுறைகள்:

படி 1 : μ மற்றும் σ^2 என்பன முறையே ஆய்வுக்கு எடுத்துக்கொள்ளப்பட்ட முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி மற்றும் மாறுபாடு என்க. இங்கு σ^2 என்பதன் மதிப்பு தெரியாத ஒன்றாகும். σ_0^2 என்பது σ^2 ன் ஒரு அனுமதிக்கப்பட்ட மதிப்பு எனில்

இன்மை கருதுகோள்: H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$ என்றும்

கீழ்க்கண்டவற்றுள் தகுந்த ஒன்றை மாற்று கருதுகோளாகவும் தேர்வு செய்யவும்

(i) H_1: $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ (ii) H_1: $\sigma^2 > \sigma_0^2$ (iii) H_1: $\sigma^2 < \sigma_0^2$

படி 2 : மாதிரி/தரவுகளை விவரி மேலும் அவற்றின் விளக்க அளவுகளையும் தருக. ($X_1, X_2, \ldots, X_n$) என்பது ஒரு தொகுதியிலிருந்து பெறப்பட்ட n உறுப்புகள் கொண்ட ஒரு வாய்ப்பு மாதிரி என்க. மேலும் $n < 30$.

படி 3 : விரும்பிய மிகைகாண் நிலை α என்பதை நிர்ணயிக்க

படி 4 : H_0 ஐப் பொறுத்து மாதிரிப் பண்பளவைச் சோதனை $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ எனக் கருதுக.

H_0 ன் படி இப்புள்ளியியல் அளவையின் மாதிரிப் பரவல் தோரயமாக கட்டின்மை கூறு $(n-1)$ கொண்ட ஒரு கைவர்க்கப் பரவலாகும்.

படி 5 : கொடுக்கப்பட்ட மாதிரிக்கு χ^2ன் மதிப்பை $\chi_0^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$ எனக் கொண்டு கணக்கிடுக.

படி 6 : α மற்றும் H_1 ஐப் பொறுத்து கீழ்க்கண்ட அட்டவணையிலிருந்து தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பைத் தேர்வு செய்க.

மாற்று கருதுகோள் (H_1)	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$
தீர்வு கட்ட மதிப்பு (χ_e^2)	$\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}$ மற்றும் $\chi_0^2 \leq \chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$	$\chi^2_{n-1,\alpha}$	$\chi^2_{n-1,1-\alpha}$

படி 7 : H_1 சார்ந்த கொடுக்கப்பட்ட அட்டவணையிலிருந்து தகுந்த மறுத்தளிக்கும் விதியினைத் தெரிவு செய்து H_0 ஐ பற்றி முடிவெடுக்க.

மாற்று கருதுகோள் (H_1)	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$
மறுக்கும் விதி	$\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}$ மற்றும் $\chi_0^2 \leq \chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$	$\chi_0^2 > \chi^2_{n-1,\alpha}$	$\chi_0^2 < \chi^2_{n-1,1-\alpha}$

02_12th_Statistics_TM_Unit_2.indd 58 1/28/2020 7:12:02 PM

குறிப்பு

முழுமைத்தொகுதியின் சராசரி μ (தெரிந்த மதிப்புடையது) எனில் $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ என்ற கருதுகோளை எந்தவொரு மாற்று கருதுகோளுக்கு எதிராக சோதிக்கையில் $\chi_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}$ என்ற கட்டின்மை கூறு n உடைய மாறியைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 2.6

ஏழாம் வகுப்பில் உள்ள 8 மாணவர்களின் எடைகள் (கி.கி) 38, 42, 43, 50, 48, 45, 52 மற்றும் 50. முழுமைத்தொகுதியின் மாறுபாடு 48 கி.கி என்ற கருதுகோளை சோதிக்கவும். முழுமைத்தொகுதி இயல் நிலைதொகுதி என்றும் அதன் சராசரி μ என்பது தெரியாதது என்பதாகவும் கொள்க.

தீர்வு:

படி 1 : இன்மை கருதுகோள் H_0: $\sigma^2 = 48$ kg.

அதாவது முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாடு 48 கி.கி என எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

மாற்று கருதுகோள் H_1: $\sigma^2 \neq 48$ kg.

அதாவது முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாடு 48 கி.கி. என எடுத்துக்கொள்ள முடியாது.

படி 2 : கொடுக்கப்பட்ட மாதிரிப் பரவல்

மாதிரி அளவை $(n) = 8$

படி 3 : மிகைகாண் நிலை $\alpha = 5\%$

படி 4 : மாதிரிப்பண்பளவைச் சோதனை

அளவை, H_0 ன் படி, $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ என்பது, கட்டின்மை கூறு $(n-1)$ கொண்ட ஒரு கைவர்க்க பரவலாகும்.

படி 5 : மாதிரிப்பண்பளவைச் சோதனைக்கு ஏற்ப கணக்கிடல்

$\bar{x}$ மற்றும் மாதிரியின் மாறுபாடு (s^2) காணல்

x_i	$(x_i - 46)$	$(x_i - 46)^2$
38	-8	64
42	-4	16
43	-3	9
50	4	16
48	2	4
45	-1	1
52	6	36
50	4	16
$\sum_{i=1}^{8} x_i = 368$	0	$\sum_{i=1}^{8}(x_i - \bar{x})^2 = 162$

02_12th_Statistics_TM_Unit_2.indd 59 1/28/2020 7:12:05 PM

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{8} x_i}{n} = \frac{368}{8} = 46$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{8}(x_i - \bar{x})^2}{(n-1)} = \frac{\sum_{i=1}^{8}(x_i - 46)^2}{(8-1)} = \frac{162}{7} = 23.143.$$

$$\chi_0^{\,2} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{8}(x_i - \bar{x})^2}{\sigma_0^2} = \frac{162}{48} = 3.375$$

படி 6 : தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு

H_1 என்பது இருமுனை மாற்று கருதுகோள் என்பதால், $\alpha = 0.05$ என்ற நிலையில் தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு, $\chi^2_{7,\,0.025} = 16.01$ மற்றும் $\chi^2_{7,0.975} = 1.69$.

படி 7 : முடிவு

இது ஒரு இருமுனை சோதனை என்பதால், தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு, $\chi_0^{\,2} \geq \chi^{\,2}_{n-1,\frac{\alpha}{2}}$ அல்லது $\chi_0^{\,2} \leq \chi^{\,2}_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$ என்ற மறுக்கும் விதியின் கீழ் தீர்மானிக்கப்படுகிறது.

கொடுக்கப்பட்ட மாதிரி தரவுகளின்படி மறுக்கும் விதி பூர்த்தியாகாது.

அதாவது $1.69 = \chi^2_{7,\,0.975} < \chi_0^{\,2}\ (=3.375) < \chi^2_{7,0.025} = 16.01.$

எனவே $H_1: \sigma^2 \neq 48$ கி.கி. என்ற கருதுகோளுக்கு சாதகமாக H_0–ஐ நிராகரிக்க முடியாது. எனவே முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாடு 48 கி.கி என எடுத்துக்கொள்ளலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 2.7

ஒரு இயல்நிலை தொகுதியின் சராசரி μ (தெரியாதது) மற்றும் மாறுபாடு 9. மாதிரி அளவு 9 உள்ள ஒரு மாதிரி எடுக்கப்பட்டு அதன் மாறுபாட்டு அளவையின் அளவு 5.4 எனக் கணக்கிடப்படுகிறது. $H_1: \sigma^2 > 9$ என்ற மாற்று கருதுகோளுக்கு எதிராக இன்மை கருதுகோள் $H_0: \sigma^2 = 9$ என்பதை சோதிக்க.

தீர்வு:

படி 1 : இன்மை கருதுகோள் $H_0: \sigma^2 = 9.$

அதாவது, முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாடு 9 என கருதலாம்.

மாற்று கருதுகோள் $H_1: \sigma^2 > 9.$

அதாவது, முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாடு 9 என கருது முடியாது.

படி 2 : தரப்பட்ட மாதிரி தரவு

மாதிரியின் அளவு $(n) = 9$

மாதிரியின் மாறுபாடு $(s^2) = 5.4$

படி 3 : மிகைகாண் நிலை $\alpha = 5\%$

படி 4 : மாதிரிப் பண்பளவைச் சோதனை

இன்மை கருதுகோள் H_0-இன் படி $\chi^{\,2} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$

என்பது கட்டின்மை கூறு $(n\text{-}1)$ கொண்ட கைவர்க்கப் பரவலாகும்.

படி 5 : மாதிரிப் பண்பளவைச் சோதனைக்கு ஏற்ப கணக்கிடல்

H_0 ன் கீழ் கைவர்க்க மதிப்பு கீழ்க்கண்டவாறு கணக்கிடப்படுகிறது.

$$\chi_0^{\ 2} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{8 \times 5.4}{9} = 4.8$$

படி 6 : தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு

H_1 என்பது இருமுனை மாற்று கருதுகோள் என்பதால் α =0.05 ன் படி தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு $\chi_e^{\ 2} = \chi^2_{8,\,0.05} = 15.507$.

படி 7 : முடிவு

இது ஒருமுனை சோதனை ஆதலால், தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பானது, $\chi_0^{\ 2} > \chi_e^{\ 2}$.
என்ற மறுக்கும் விதியின் கீழ் தீர்மானிக்கப் படுகிறது. கொடுக்கப்பட்ட மாதிரிதரவுகளுக்கு, மறுக்கும் விதி பூர்த்தியாகாது.
அதாவது $\chi_0^{\ 2} = 4.8 < \chi^2_{8,\,0.05} = 15.507$.
எனவே $H_1: \sigma^2 \neq 9$ என்ற கருதுகோளுக்கு சாதகமாக H_0 ஐ மறுக்க முடியாது.

எடுத்துக்காட்டு 2.8

ஒரு இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதி சராசரி μ (தெரியாது) மற்றும் மாறுபாட்டளவை 0.018 கொண்டுள்ளது என்க. மாதிரி அளவு 20 உள்ள ஒரு வாய்ப்பு மாதிரி இதிலிருந்து பெறப்பட்டு அதன் மாறுபாட்டளவை 0.024 என கணடறியப்படுகிறது $H_1: \sigma^2 < 0.018$ என்ற மாற்றுகருதுகோளுக்கு எதிராக $H_0: \sigma^2 = 0.018$ என்ற இன்மை கருதுகோளை 5% மிகைகாண் நிலையில் சோதிக்க.

தீர்வு:

படி 1 : இன்மை கருதுகோள் $H_0: \sigma^2 = 0.018$.

அதாவது முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாட்டளவு 0.018 என கருதலாம்.

மாற்று கருதுகோள் $H_1: \sigma^2 < 0.018$.

அதாவது முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாட்டளவு 0.018 என கருது முடியாது.

படி 2 : தரவு

மாதிரி அளவு $(n) = 20$

மாதிரியின் மாறுபாடு $(s^2) = 0.024$

படி 3 : மிகைகாண் நிலை

$\alpha = 5\%$

படி 4 : மாதிரிப்பண்பளவைச் சோதனை

இன்மை கருதுகோளின்படி

$$\chi^{\ 2} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$

இது கட்டின்மை கூறு $(n-1)$ உடைய χ^2 பரவலாகும்.

02_12th_Statistics_TM_Unit_2.indd 61 1/28/2020 7:12:08 PM

படி 5 : மாதிரிப்பண்பளவைச் சோதனைக்கு ஏற்ப கணக்கிடல்

H_0 இன் கீழ் மாதிரிப்பண்பளவைச் சோதனையின் அளவு

$$\chi_0^{\ 2} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{19 \times 0.024}{0.018} = 25.3$$

படி 6 : தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு

H_1 ஆனது ஒருமுனை மாற்று எடுகோள் என்பதால் தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு $\alpha = 0.05$ ன் பொறுத்து $\chi_e^{\ 2} = \chi^2_{19,\,0.95} = 10.117.$

படி 7 : முடிவு

இது ஒருமுனை சோதனை ஆதலால், தீர்மானிக்கும் பகுதியானது, $\chi_0^{\ 2} < \chi_e^{\ 2}$ என்ற மறுக்கும் விதியின்படி தீர்மானிக்கப்படுகிறது. கொடுக்கப்பட்ட மாதிரிப்பரவலுக்கு மறுக்கும் விதி சரியாக இருக்காது.

ஏனெனில் $\chi_0^{\ 2} = 25.3 > \chi_e^{\ 2} = \chi^2_{19,\,0.95} = 10.117.$

எனவே H_0 ஆனது $2 < 0.018$ என்பதற்கு சாதகமாக மறுக்கப்படாது.

ஆதலால் முழுமைத்தொகுதியின் மாறுபாடு 0.018 என்று கருதலாம்.

2.2.5 பண்புகளின் சார்பற்ற தன்மையை அறியும் கருதுகோள் சோதனை

பண்பு சார்ந்தவைகள்: பண்பு சார்ந்த மாறிகள் என்பன பண்பால் மட்டுமே அறியக் கூடியவை. உதாரணமாக, கல்வியறிவு எல்லை (பட்டம்), வேலைவாய்ப்பு நிலை போன்றவை. இது போன்றவைகள் மட்டம் (அல்லது) மதிப்பீடு புள்ளிகளால் எண்ணளவு ஆக்கப்படுகின்றன.

நேர்வுப்பட்டியல் அட்டவணை: பண்புகளின் சார்பற்ற தன்மையை அறிதல் என்பது புள்ளியியலின் ஒரு முக்கிய பயன்பாடாகும். இம்முறையில், பண்புசார்ந்த தரவுகள் குறுக்காக பிரிக்கப்பட்டு இரு பரிமாண அட்டவனையாக கொடுக்கப்படுகிறது. ஒருவகை பண்பு சார்ந்தவைகள் நிரைகளில் பிரிக்கப்பட்டு வரிசைபடுத்தப்படுகின்றன. மற்றொரு பண்பு சார்ந்தவைகளில் நிரல்களில் பிரிக்கப்பட்டு வரிசைப்படுத்தப்படுகின்றன. இந்த அட்டவணையே நேர்வுபட்டியல் அட்டவணை எனப்படுகிறது.

படி 1 : கருதுகோள் அமைத்தல்

இன்மை கருதுகோள் H_0: பண்புகள் சார்பற்றவைகள்

மாற்று கருதுகோள் H_1: பண்புகள் சார்பற்றவைகள் அல்ல.

படி 2 : தரவு தொகுப்பை விளக்குதல்

நேர்வுப்பட்டியலில் உள்ள ஒவ்வொரு கட்டத்திற்குமான எதிர்பாக்கப்படும் நிகழ்வெண்ணை

$$E_{ij} = \frac{R_i \times C_j}{N};\ i = 1, 2, \ldots m;\ j = 1, 2, ..n$$

என்ற விதியின்படி கணக்கிடுக

இங்கு N = மாதிரி அளவு

$R_i = i$ ஆவது நிரையின் நிகழ்வெண்களின் கூடுதல்.

$C_j = j$ ஆவது நிரலின் நிகழ்வெண்களின் கூடுதல்.

குறிப்பு

m நிரைகள் மற்றும் n நிரல்கள் உள்ள இணைப்புப் பட்டியல்.
கண்டியறிப்பட்ட தரவுகள் இணைப்பு பட்டியல் மூலம் கீழ்க்கண்டவாறு தரப்படுகிறது.

		பண்பு B						மொத்தம்
		B_1	B_2	…	B_j	…	B_n	
பண்பு A	A_1	O_{11}	O_{12}	…	O_{1j}	…	O_{1n}	R_1
	A_2	O_{21}	O_{22}	…	O_{2j}	…	O_{2n}	R_2
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	A_i	O_{i1}	O_{i2}	…	O_{ij}	…	O_{in}	R_i
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	A_m	O_{m1}	O_{m2}	…	O_{mj}	…	O_{mn}	R_m
மொத்தம்	C_1	C_2	…	C_j	…	C_n	$N = m \times n$	

படி 3 : மிகைகாண் நிலை

விருப்பமான தீர்வு கட்டப் பகுதியை தேர்தெடுக்க α

படி 4 : மாதிரிப்பண்பளவைச் சோதனை

இன்மை கருதுகோளின்படி மாதிரிப் பண்பளவைச் சோதனை,

$$\chi_0^{\,2} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{(O_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}}$$

படி 5 : மாதிரிப்பண்பளவைச் சோதனைக்கு ஏற்ப கணக்கிடல்

$\chi_0^{\,2}$ இன் மதிப்பை கணக்கிடல்

(i) கண்டறியப்பட்ட மற்றும் எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழ்வெண்கள் O_i மற்றும் E_i களுக்கு இடையேயான வித்தியாசத்தை ஒவ்வொரு தரவுக்கும் காண்க.

அதாவது $(O_i - E_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ கணக்கிடுக

(ii) $(O_i - E_i)$ இன் வர்க்கம் காண்க அதாவது $(O_i - E_i)^2$ காண்க.

(iii) ஒவ்வொரு வர்க்கப்படுத்தப்பட்ட மதிப்புகளை அதற்கான எதிர்பாக்கப்படும் நிகழ்வெண்களால் வகுக்க, அதாவது $\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ எனக் கணக்கிடுக.

(iv) படி – (iii) இல் கண்டறியப்பட்ட மதிப்புகளின் கூடுதல் காண்க. இது கைவர்க்க சோதனையின் கணக்கிடப்பட்ட மதிப்பு ஆகும்.

எனவே மாதிரிப்பண்பளவைச் சோதனை $\chi_0^{\,2} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{(O_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}}$

02_12th_Statistics_TM_Unit_2.indd 63 1/28/2020 7:12:09 PM

படி 6 : தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு

தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பானது $(m-1)(n-1)$ கட்டின்மை கூறுகள் கொண்ட கைவர்க்க அட்டவணையிலிருந்து குறிப்பிடப்பட்ட மிகைகாண் நிலையைப் பொறுத்து பெறுகிறோம். அதாவது χ_e^2 ன் மதிப்பைப் பெறுகிறோம்

படி 7 : முடிவு

கணக்கிடப்பட்ட மாதிரிப் பண்பளவைச் சோதனை எடுத்துக்கொண்ட தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பைப் பொறுத்து பெறப்பட்ட அட்டவணை மதிப்புடன் ஒப்பிட்டு இன்மை கருதுகோளை மறுப்பதா அல்லது மறுக்காமல் இருப்பதா என்பதை முடிவு செய்க.

குறிப்பு: மொத்த நிகழ்வெண் 50ஐ விட அதிகமாக இருக்கவேண்டும். எதிர்பார்க்கப்படும் எந்தவொரு கட்ட நிகழ்வெண்ணும் 5ஐ விட குறைவாக இருக்க கூடாது. அவ்வாறு இருந்தது எனில் அதை அதற்கு முந்தைய அல்லது பிந்தைய கட்ட நிகழ்வெண்ணோடு கூட்டி 5ஐ விட அதிகமாக மாற்ற வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.9

கீழ்க்கண்ட அட்டவணையானது, வயது வாரியாகப் பிரிக்கப்பட்ட 500 மாணவர்கள் ஒரு கணிதத் தேர்வில் பெற்ற தர அட்டவணை எனில் வயது மற்றும் தேர்வில் செயல்பாடு என்ற பண்புகள் சார்பற்றவைகளா என்பதை 5% மிகைகாண் நிலையில் சோதிக்க.

செயல்பாடு	வயது 20க்கு கீழ்	வயது 21–30	வயது 30க்கு மேல்	மொத்தம்
சராசரி	138	83	64	285
நன்று	64	67	84	215
மொத்தம்	202	150	148	500

தீர்வு:

படி 1 : இன்மைகருதுகள் H_0 : வயது மற்றும் செயல்பாடு சார்பற்றவை

மாற்று கருதுகோள் H_1: வயது மற்றும் செயல்பாடு சார்புடைவை

படி 2 : தரவு

நேர்வு பட்டியலில் உள்ள ஒவ்வொரு கட்டத்திற்கும் எதிர்பாக்கப்படும் நிகழ்வெண்ணை

$$E_{ij} = \frac{R_i \times C_j}{N} \quad i = 1,2;\ j = 1,2,3$$

என்ற விதியின் படி கணக்கிடுக

இங்கு N = மாதிரி அளவு

$R_i = i$ ஆவது நிரையின் நிகழ்வெண்களின் கூடுதல்.

$C_j = j$ ஆவது நிரலின் நிகழ்வெண்களின் கூடுதல்.

02_12th_Statistics_TM_Unit_2.indd 64 1/28/2020 7:12:10 PM

செயல்பாடு	சராசரிக்கும் கீழ்	சராசரி	சராசரிக்கும் மேல்	மொத்தம்
சராசரி	$\frac{285\times 202}{500}=115.14$	$\frac{285\times 150}{500}=85.5$	$\frac{285\times 148}{500}=84.36$	285
நன்று	$\frac{215\times 202}{500}=86.86$	$\frac{215\times 150}{500}=64.5$	$\frac{215\times 148}{500}=63.64$	215
மொத்தம்	202	150	148	500

படி 3 : மிகைகாண் நிலை $\alpha = 5\%$

படி 4 : மாதிரிப்பண்பளவைச் சோதனை

கை வர்க்க சோதனை,

$$\chi_0^{\,2}=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}\frac{(O_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}}$$

படி 5 : $\chi_0^{\,2}$ இன் மதிப்பைக் கீழ்க்கண்டவாறு கணக்கிடுக

$$\chi_0^2=\frac{(138-115.14)^2}{115.14}+\frac{(83-85.50)^2}{88.50}+\frac{(64-84.36)^2}{84.36}+\frac{(64-86.86)^2}{86.86}+\frac{(67-64.50)^2}{64.50}+\frac{(84-63.64)^2}{63.64}$$

$= 22.152$, கட்டின்மை கூறுகள் $(3-1)(2-1) = 2$

படி 6 : தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு χ^2 அட்டவணையிலிருந்து 5% மிகைகாண் நிலையில் தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு $\chi^2_{2,0.05} = 5.991$

படி 7 : முடிவு

கணக்கிடப்பட்ட $\chi_0^{\,2} = 22.152$ எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு $\chi^2_{2,0.05} = 5.991$ ஐ விட அதிகமாக இருப்பதால் இன்மை கருதுகோள் H_0 மறுக்கப்படுகிறது எனவே பண்புகள் சார்பற்றவைகள் அல்ல

குறிப்பு

நேர்வுபட்டியல் 2 x 2 எனில் χ^2 இன் மதிப்பு கீழ்க்கண்டவாறு கணக்கிடப்படுகிறது.

	A	A அல்ல	மொத்தம்
B	a	b	$a+b$
B அல்ல	c	d	$c+d$
மொத்தம்	$a+c$	$b+d$	$N=a+b+c+d$

எனில்

$$\chi_0^{\,2}=\frac{N(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}\sim\chi_\alpha^{\,2}(1d.f)$$

எடுத்துக்காட்டு 2.10

500 மாணவிகள் கொண்ட ஒரு குழுவில் நடத்தப்பட்ட ஓர் ஆய்வில் 60% புத்திசாலியானவர்கள் அவர்களில் 40% மாணவிகளின் தந்தையர்கள் படிப்பறிவு இல்லாதவர்கள். புத்திசாலியில்லாத

02_12th_Statistics_TM_Unit_2.indd 65 1/28/2020 7:12:15 PM

மாணவிகளில் 30% தந்தையர்கள் படித்தவர்கள். இத்தரவிலிருந்து படித்த தந்தையர்களின் குழந்தைகள் புத்திசாலியானவர்களா என்ற கருதுகோளின் முக்கியத்துவத்தைச் சோதிக்க.

தீர்வு:

படி 1 : இன்மை கருதுகோள் H_0: இப்பண்புகள் சார்பற்றவை அதாவது படித்த தந்தையர்களின், குழந்தைகளின் புத்திசாலிதனத்திற்கு தொடர்பு இல்லை.

மாற்று கருதுகோள் H_1: இப்பண்புகள் சார்புடையவை. அதாவது படித்த தந்தையர்களின் குழந்தைகளின் புத்திசாலிதனத்திற்கு தொடர்பு உள்ளது.

படி 2 : தரவு தொகுப்பு

கண்டயறிப்பட்ட நிகழ்வெண்களைக் கணக்கிடல்: அதாவது (O)ஐ கணக்கிடல்

	புத்திசாலி மாணவிகள்	புத்திசாலிதனமில்லா மாணவிகள்	நிரை கூடுதல்
படித்த தந்தையர்கள்	$300-120=180$	$\frac{30}{100}\times 200=60$	240
படிப்பறிவில்லா தந்தையர்கள்	$\frac{40}{100}\times 300=120$	$200-60=140$	260
நிரலின் கூடுதல்	$\frac{60}{100}\times 500=300$	$500-300=200$	$N=500$

படி 3 : மிகைகாண் நிலை

$\alpha = 5\%$

படி 4 : H_0 வின் படி மாதிரிப் பண்பளவைச் சோதனை.

$$\chi_0^2 = \frac{N(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

படி 5 : χ^2 இன் மதிப்பை காணல்

இங்கு, $a=180, b=60, c=120, d=140, N=500$

$$\chi_0^2 = \frac{500(180\times 140-60\times 120)^2}{(180+60)(120+140)(180+120)(60+140)} = 43.269$$

படி 6 : தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு

கைவர்க்க அட்டவணையிலிருந்து, 5% மிகைகாண் நிலையில், தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு $\chi^2_{1,0.05} = 3.841$

படி 7 : முடிவு

கணக்கிடப்பட்ட χ^2இன் மதிப்பு $\chi_0^2 = 43.269$

இது எதிர்ப்பார்க்கப்படும் $\chi^2_{1,0.05} = 3.841$ ஐ விட அதிகம். எனவே இன்மை கருதுகோள் மறுக்கப்படுகிறது. எனவே படித்த தந்தையர்க்கும், அவர்தம் குழந்தைகளின் (மாணவிகள்) புத்திசாலித் தனத்திற்கும் தொடர்பு உள்ளது.

2.2.6 பொருத்துதலின் செம்மைத்தன்மையை அறியும் சோதனைகள்

கைவர்க்க பரவலின் மற்றொரு முக்கியமான பயன்பாடு என்பது கொடுக்கப்பட்ட தரவுகளை ஒரு முறையோடு (அல்லது) பரவலோடு, பொருத்துதலின் செம்மைத்தன்மை அறிய ஒரு சோதனையாக பயன்படுத்தப்படுகிறது. இப்பயன்பாடு கணித அறிவியலில் மிகமுக்கியமான கண்டுபிடிப்பாக இருபதாம் நூற்றாண்டுகளில் உணரப்பட்டது. பொருத்துதலின் செம்மை என்பது கண்டயறிப்பட்ட நிகழ்வெண்ணிற்கும், எதிர் பார்க்கப்படும் நிகழ்வெண்ணிற்கும் உள்ள நெருக்கத்தைக் குறிக்கிறது. இவ்விரு பரவல்களின் வளைவரைகள் ஒன்றோடு ஒன்று சேராமலோ அல்லது மிக விலகும் தன்மையிலோ இருப்பின், பொருத்துதல் என்பது செம்மையாக இல்லை என்பதைக் குறிக்கிறது.

இவ்விரு வளைவரைகளும் மிக அதிகமாக விலகாமல் இருந்தால், பொருத்துதல் மிக நேர்த்தியாக இருக்கிறது என்று பொருள்.

பொருத்துதலின் செம்மைத்தன்மையின் முக்கியத்துவத்தை அறியும் சோதனைக்கான வழிமுறைகள்

படி 1 : கருதுகோள்களை வடிவமைத்தல்

இன்மை கருதுகோள் H_0 : கொடுக்கப்பட்ட தரவுகளின் தொகுப்புகளைப் பொருத்துதல் செம்மையாக உள்ளது

மாற்று கருதுகோள் H_1 : கொடுக்கப்பட்ட தரவுகளின் தொகுப்புகளைப் பொருத்துதல் செம்மையாக இல்லை

படி 2 : தரவுகளின் தொகுப்பு

கொடுக்கப்பட்ட தரவுகளுக்கு உகந்த கருத்துருபரவலான ஈருறுப்பு பரவல் (அ) பாய்ஸான் பரவல் பயன்படுத்தி எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழ்வெண்களைக் கணக்கிடுக.

படி 3 : தகுந்த மிகைகாண் நிலை α ஐத் தேர்ந்தெடு

படி 4 : மாதிரிப் பண்பளவைச் சோதனை

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

இங்கு k என்பது பிரிவுகளின் எண்ணிக்கை

O_i மற்றும் E_i என்பன முறையே, i–வது பிரிவின் கண்டறியப்பட்ட மற்றும் எதிர்ப்பாக்கப்படும் நிகழ்வெண்பிரிவுகளாகும்.

இவை, $\sum_{i=1}^{k} O_i = \sum_{i=1}^{k} E_i$ என்ற நிபந்தனையுடன் k–1–s என்ற கட்டின்மைகூறு அளவில் பெறப்படுகின்றன.

இங்கு S என்பன தீர்மானிக்கப்படக்கூடிய பண்பளவைகளின் எண்ணிக்கை மற்றும் k என்பது பிரிவுகளின் எண்ணிக்கை

படி 5 : கைவர்க்க மதிப்பைக் கணக்கிடல்

கைவர்க்க மதிப்பைக் கணக்கிடுதல் கீழ்க்கண்ட சூத்திரத்தில் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது.

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

02_12th_Statistics_TM_Unit_2.indd 67 1/28/2020 7:12:16 PM

படி 6 : தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு

கொடுக்கபட்ட மிகைகாண் நிலையில், χ^2ன் அட்டவணையிலிருந்து, தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பைப்பெறுக.

கட்டின்மை கூறு	ஈருறுப்பு பரவல்	பாய்ஸான் பரவல்
γ	$n-1$	$n-2$

படி 7 : முடிவு

கணக்கிடப்பட்ட சோதனைபுள்ளியியலின் அளவை, தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட மிகைகாண் நிலையில், அட்டவணை மதிப்புபோடு ஒப்பிட்டு, இன்மை கருதுகோளை ஏற்கவோ, மறுக்கவோ முடிவெடுக்கவும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.11

5 நாணயங்கள் 640 முறை சுண்டப்பட்டு கீழ்க்கண்ட முடிவுகள் பெறப்பட்டுள்ளன.

தலைகளின் எண்ணிக்கை	0	1	2	3	4	5
நிகழ்வெண்	19	99	197	198	105	22

மேற்கண்ட தரவுக்கு ஈருறுப்புப் பரவலைப் பொறுத்து, அதன் செம்மைத்தன்மையைச் சோதிக்க.

தீர்வு:

படி 1 : இன்மை கருதுகோள் H_0: கொடுக்கப்பட்ட தரவுக்கு ஈருறுப்புப் பரவலைப் பொருத்துதல் உகந்தது.

மாற்று கருதுகோள் H_1: கொடுக்கப்பட்ட தரவுக்கு ஈருறுப்புப் பரவலைப் பொருத்துவது உகந்ததல்ல.

படி 2 : தரவு

எதிர்பார்க்கும் நிகழ்வெண் கணக்கிடல்:

n = ஒரே சமயத்தில் சுண்டப்பட்ட நாணயங்களின் எண்ணிக்கை = 5

N = மீண்டும், மீண்டும் நடத்தப்பட்ட சோதனைகளின் எண்ணிக்கை = 640

பரவலின் சராசரியை காண்பதற்கு

x	f	fx
0	19	0
1	99	99
2	197	394
3	198	594
4	105	420
5	22	110
Total	640	1617

சராசரி: $\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{1617}{640} = 2.526$

02_12th_Statistics_TM_Unit_2.indd 68 1/28/2020 7:12:16 PM

ஈருறுப்பு பரவலின் நிகழ்தகவு திண்மைச்சார்பு:

$$p(x) = {}^{n}C_{x}\, p^{x}\, q^{n-x},\ x = 0,1,\ldots,n \qquad (2.1)$$

ஈருறுப்பு பரவலின் சராசரி $\bar{x} = np$.

எனவே, $$\hat{p} = \frac{\bar{x}}{n} = \frac{2.526}{5} \approx 0.5$$

$$\hat{q} = 1 - \hat{p} \approx 0.5$$

$x = 0$ எனும் போது சமன்பாடு 2.1 லிருந்து

$$P(X = 0) = P(0) = 5c_{0}\,(0.5)^{5} = 0.03125$$

எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழ்வெண்: $E(x) = N\,P(x)$

$x = 0$ எனும் போது

$$E(0) = N \times \mathrm{P}(0)$$

$$= 640 \times 1/32 = 20$$

மறுதரவு தொடர்பின்படி, $x+1$ இல் எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழ்தகவு

$$E(X+1) = \frac{n-x}{x+1}\left(\frac{p}{q}\right) E(X)$$

x	$\frac{n-x}{x+1}$	$\frac{p}{q}$	$\frac{n-x}{x+1}\left(\frac{p}{q}\right)$	எதிர்பார்க்கும் நிகழ்வெண் $E(x) = N\,P(x)$
0	5	1	5	20
1	2	1	2	100
2	1	1	1	200
3	0.5	1	0.5	200
4	0.2	1	0.2	100
5	0	1	0	20

எதிர்பார்க்கும் நிகழ்வெண் பரவல் அட்டவணை (அருகிலுள்ள முழு எண்களுக்கு மாற்றிய பின்)

தலைகளின் எண்ணிக்கை	0	1	2	3	4	5	Total
எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழ்வெண்	20	100	200	200	100	20	640

படி 3 : மிகைகாண் நிலை

$\alpha = 5\%$

படி 4 : மாதிரிப்பண்பளவைச் சோதனை

$$\chi^{2} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(O_{i} - E_{i}\right)^{2}}{E_{i}}$$

படி 5 : χ^2 மதிப்பைக் கணக்கிடல்

H_0 ஐப் பொறுத்து மாதிரிப் பண்பளவைச் சோதனை:

$$\chi_o^2 = \sum \frac{(O-E)^2}{E}$$

கண்டெடுக்கப்பட்ட நிகழ்வெண் (O_i)	எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழ்வெண் (E_i)	$O_i - E_i$	$(O_i - E_i)^2$	$\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$
19	20	–1	1	0.050
99	100	–1	1	0.010
197	200	–3	9	0.045
198	200	–2	4	0.020
105	100	5	25	0.250
22	20	2	4	0.200
			மொத்தம்	0.575

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$
$$= 0.575$$

படி 6 : தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு

கட்டின்மை கூறுகள் $= k - 1 - s = 6 - 1 - 1 = 4$

5% மிகைகாண் நிலையில் கட்டின்மை கூறு 4க்கான தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு 9.488 அதாவது, $\chi^2_{4,0.05} = 9.488$

படி 7 : முடிவு

கணக்கிடப்பட்ட $\chi_0^2 (=0.575)$ ஆனது தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு $\chi^2_{4,0.05} = 9.488$, ஐ விட குறைவாக இருப்பதால் நாம் இன்மை கருதுகோளை நிராகரிக்க முடியாது. எனவே ஈருறுப்பு பரவலை பொருத்துதல் சரியானதாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.12

பந்து முனைப் பேனாக்கள் உள்ள 100 பெட்டிகள் உள்ளன. ஒவ்வொரு பெட்டியிலும் உள்ள பழுதடைந்த பேனாக்களின் எண்ணிக்கையின் பரவல் கீழ்க்கண்டவாறு தரப்பட்டுள்ளது:

x	0	1	2	3	4	5
f	61	14	10	7	5	3

கொடுக்கப்பட்ட தரவிற்கு, பாய்ஸான் பரவல் பொருத்துதல் உகந்ததா என்பதை 5% மிகைகாண் நிலையில் சோதிக்க.

02_12th_Statistics_TM_Unit_2.indd 70 1/28/2020 7:12:19 PM

தீர்வு:

படி 1 : இன்மை கருதுகோள் H_0: கொடுக்கப்பட்ட தரவு தொகுப்புக்குப் பாய்ஸான் பரவல் பொருத்துதல் உகந்தது.

மாற்று கருதுகோள் H_1: கொடுக்கப்பட்ட தரவு தொகுப்புக்கு பொருத்தப்பட்ட பாய்சான் பரவல் பொருத்துதல் உகந்தது அல்ல.

படி 2 : தரவு

எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழ்வெண் மற்றும் சராசரி கணக்கிடல்

x	f	fx
0	61	0
1	14	14
2	10	20
3	7	21
4	5	20
5	3	15
மொத்தம்	100	90

சராசரி

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{90}{100} = 0.9$$

எனவே $m = \bar{x} = 0.9$

பாய்சான் பரவலின் நிகழ்தகவுத்திண்மை சார்பு:

$$p(x) = \frac{e^{-m} m^x}{x!};\ x = 0, 1, \ldots \qquad (2.2)$$

$x = 0$ எனும் போது (2.2) லிருந்து

$$p(0) = \frac{e^{-m}\ m^0}{0!} = e^m = e^{0.9} = 0.4066 \cdot$$

எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழ்வெண்: $E(x) = N\,P(x)$

$x = 0$ எனும்போது

$$N \times P(0)$$
$$= 100 \times 0.4066$$
$$= 40.66$$

மறுதரவு தொடர்பின்படி $x+1$ எதிர்பாக்கப்படும் நிகழ்வெண் $E(x+1) = \frac{m}{x+1} \times E(x)$

02_12th_Statistics_TM_Unit_2.indd 71 1/28/2020 7:12:22 PM

x	$\frac{m}{x+1}$	எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழ்வெண் $E(x) = N\,P(x)$
0	0.9	40.66
1	$\frac{0.9}{2}$	36.594
2	$\frac{0.9}{3}$	16.4673
3	$\frac{0.9}{4}$	4.94019
4	$\frac{0.9}{5}$	1.1115
5	$\frac{0.9}{6}$	0.20007

எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழ்வெண் பரவல் அட்டவணை(அருகிலுள்ள முழு எண்களுக்கு மாற்றிய பின்)

x	0	1	2	3	4	5
எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழ்வெண்	41	37	16	5	1	0

படி 3 : மிகைகாண் நிலை

$\alpha = 5\%$

படி 4 : மாதிரிப்பண்பளவைச் சோதனை

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

படி 5 : χ^2 மதிப்பை கணக்கிடல்

கண்டெடுக்கப்பட்ட நிகழ்வெண் (O_i)	எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழ்வெண் (E_i)	$O_i - E_i$	$(O_i - E_i)^2$	$\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$
61	41	20	400	9.756
14	37	-23	529	14.297
10	16	-6	36	2.250
7, 5, 3 } 15	5, 1, 0 } 6	9	81	13.5
			மொத்தம்	39.803

02_12th_Statistics_TM_Unit_2.indd 72 1/28/2020 7:12:22 PM

H_0 இன் கீழ் மாதிரிப்பண்பளவைச் சோதனை:

$$\chi_0^{\ 2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(O_i - E_i\right)^2}{E_i}$$

குறிப்பு: மேற்கண்ட அட்டவணையில் எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழ்வெண்களில் கட்ட நிகழ்வெண்கள் 0, 1 என்பவை 5 ஐ விடக் குறைவானது எனக் காண்கிறோம் எனவே அவற்றிற்கு முந்திய அல்லது பிந்தைய நிகழ்வெண்களோடு இணைத்து 5 ஐ விட அதிகமாக்குகிறோம். இங்கு முந்தைய கட்ட நிகழ்வெண் 5 ஐ இவைகளுடன் இணைத்து 5 ஐ விட அதிகமாக்குகிறோம். இதேபோல இவற்றிற்கு தொடர்புடைய கண்டறியப்பட்ட நிகழ்வெண்களையும் இணைக்கிறோம்.

$$\chi_0^{\ 2} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(O_i - E_i\right)^2}{E_i}$$
$$= 39.803$$

படி 6 : தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு

கட்டின்மை கூறுகள் = $(k - 1 - s) = 4 - 1 - 1 = 2$

5% மிகைகாண் நிலையில், கட்டின்மை கூறு 2 க்கான தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு 5.991 அதாவது, $\chi^2_{2,0.05} = 5.991$

படி 7 : முடிவு

கணக்கிடப்பட்ட கைவர்க்க மதிப்பு $\chi_0^{\ 2}(=39.803)$ என்பது 5% மிகைகாண் நிலையில் கட்டின்மை கூறு 2க்கான தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு (5.991) ஐ விட அதிகமாக இருப்பதால் இன்மை கருதுகோளை மறுக்கிறோம். கொடுக்கப்பட்ட தரவுகளுக்கு பாய்சான் பரவல் பொருத்துதல் என்பது உகந்தது அல்ல.

எடுத்துக்காட்டு 2.13

ஒரு போட்டித்தேர்வில் 800 மாணவர்கள் கொண்ட ஒரு குழுவினர் பங்கு கொண்டனர். அவர்களில் 320 மாணவர்கள் தேர்ச்சி பெறவில்லை, 270 மாணவர்கள் 3ஆம் தர நிலையைப் பெற்றனர் 190 மாணவர்கள் 2ஆம் தர நிலையையும் மற்றும் மீதமுள்ளவர்கள் முதல் தர நிலையையும் பெற்றனர். தர நிலைகளின் விகிதம் முறையே 4:3:2:1 என உள்ளதாக பொதுவான ஒரு கருத்து உள்ளது. தரங்களின் விகிதத்தைப் பற்றிய பொதுவான கருத்து சரியாக உள்ளதா?

தீர்வு:

படி 1 : இன்மை கருதுகோள் H_0: இந்நான்கு தரநிலைகளில் உள்ள முடிவுகள் 4:3:2:1 என்ற விகிதத்தில் உள்ளது.

மாற்று கருதுகோள் H_1: இந்நான்கு தரநிலைகளில் உள்ள முடிவுகள் 4:3:2:1 என்ற விகிதத்தில் இல்லை.

படி 2 : தரவு

எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழ்வெண் கணக்கிடல்

இன்மை கருதுகோள் H_0-இன்படி இந்நான்கு தரநிலைகளின் எதிர்பபாக்கப்படும் நிகழ்வெண்கள்.

$$\frac{4}{10}\times 800 = 320\ ; \frac{3}{10}\times 800 = 240; \frac{2}{10}\times 800 = 160; \frac{1}{10}\times 800 = 80$$

02_12th_Statistics_TM_Unit_2.indd 73 1/28/2020 7:12:23 PM

படி 3 : மிகைகாண் நிலை $\alpha = 5\%$

படி 4 : மாதிரிப்பண்பளவைச் சோதனை

H_0இன் கீழ் மாதிரிப்பண்பளவைச் சோதனை

$$\chi_0^{\ 2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(O_i - E_i\right)^2}{E_i}$$

படி 5 : H_0 இன் கீழ் மாதிரிப்பண்பளவைச்சோதனைக்கு ஏற்ப கணக்கிடல்

கண்டெடுக்கப்பட்ட நிகழ்வெண் (O_i)	எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழ்வெண் (E_i)	$O_i - E_i$	$(O_i - E_i)^2$	$\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$
320	320	0	0	0
270	240	30	900	3.75
190	160	30	900	5.625
20	80	-60	3600	45
			மொத்தம்	54.375

இங்கு கைவர்க சோதனை

$$\chi_0^{\ 2} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(O_i - E_i\right)^2}{E_i}$$

$$= 54.375$$

படி 6 : தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு

5% மிகைகாண் நிலையில், கட்டின்மை கூறு 3க்கான தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு 7.81 அதாவது, $\chi^2_{3,0.05} = 7.81$.

படி 7 : முடிவு

கணக்கிடப்பட்ட χ^2–இன் மதிப்பு $\chi_0^{\ 2}(=54.375)$ என்பது தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு $\chi^2_{3,0.05} = 7.81$ ஐ விட அதிகமாக இருப்பதால் H_0 ஐ மறுக்கிறோம்.

எனவே, முடிவுகளின் தரநிலைகள் 4:3:2:1 என்ற விகிதத்தில் இல்லை.

எடுத்துக்காட்டு 2.14

தொலைபேசி கையேட்டில் இருந்து வாய்ப்புமுறையில் பெறப்பட்ட எண்களில் உள்ள இலக்கங்களின் பரவல் அட்டவணை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

இலக்கங்கள்	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
நிகழ்வெண்கள்	1026	1107	997	966	1075	933	1107	972	964	853

தொலைபேசி கையேட்டில் இருந்து எண்களைப் பெறும்போது இலக்கங்கள் சமமான எண்ணிக்கையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டுள்ளனவா எனச் சோதிக்க.

02_12th_Statistics_TM_Unit_2.indd 74 1/28/2020 7:12:24 PM

தீர்வு:

படி 1 : இன்மை கருதுகோள் H_0: இலக்கங்கள் தொலைபேசி கையேட்டில் சமமான எண்ணிக்கையில் நிகழ்கின்றன.

மாற்று கருதுகோள் H_1: இலக்கங்கள் தொலைபேசி கையேட்டில் சமமான எண்ணிக்கையில் நிகழவில்லை.

படி 2 : தரவு

எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழ்வெண் கணக்கிடல் $= \dfrac{10000}{10} = 1000$

ஒவ்வொரு இலக்கத்திற்கும் எதிர்பாக்கப்படும் நிகழ்வெண்.

படி 3 : மிகைகாண் நிலை $\alpha = 5\%$

படி 4 : H_0 இன் கீழ் மாதிரிப் பண்பளவைச் சோதனை

$$\chi_0^{\ 2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

படி 5 : H_0 இன் கீழ் மாதிரிப் பண்பளவைச் சோதனைக்கு ஏற்ப கணக்கிடல்

கண்டெடுக்கப்பட்ட நிகழ்வெண் (O_i)	எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழ்வெண் (E_i)	$O_i - E_i$	$(O_i - E_i)^2$	$\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$
1026	1000	26	676	0.676
1107	1000	107	11449	11.449
997	1000	3	9	0.009
966	1000	34	1156	1.156
1075	1000	75	5625	5.625
933	1000	67	4489	4.489
1107	1000	107	11449	11.449
972	1000	28	784	0.784
964	1000	36	1296	1.296
853	1000	147	21609	21.609
			மொத்தம்	58.542

இங்கு கைவர்க சோதனை

$$\chi_0^{\ 2} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

$$= 58.542$$

படி 6 : தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு

5% மிகைகாண் நிலையில், கட்டின்மை கூறு 9க்கான தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு 16.919 அதாவது, $\chi^2_{9,0.05} = 16.919$.

படி 7 : முடிவு

கணக்கிடப்பட்ட $\chi_0^{\ 2}$ (58.542) என்பது தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு $\chi^2_{9,0.05} = 16.919$ ஐ விட அதிகமாக இருப்பதால் H_0 ஐ மறுக்கிறோம்.

எனவே, தொலைபேசி கையேட்டில் இலக்கங்கள் சீராக நிகழவில்லை.

02_12th_Statistics_TM_Unit_2.indd 75 1/28/2020 7:12:25 PM

நினைவில் கொள்க

❖ கூறுகளின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை 30 ஐ விடக் குறைவாக இருப்பின், அக்கூறு சிறு கூறு என அழைக்கப்படும்.

❖ t-சோதனை நடத்துவதற்கு முழுமைத் தொகுதி(கள்) இயல்நிலை தொகுதியாக இருக்க வேண்டும். மேலும் கூறு(கள்) சிறு கூறாக இருக்க வேண்டும்.

❖ இரு கூறுகளுக்கான t-பரவல் சார்ந்த கணக்குகளுக்கு இரு கூறுகளின் மொத்த அளவுகள் 30 ஐ விடக் குறைவாக இருக்கவேண்டும்.

❖ t-பரவல் சராசரி (பூஜ்ஜியம்) ஐப் பொறுத்து சமச்சீரானது.

❖ கட்டின்மை கூறுகளின் எண்ணிக்கை அதிகமாகும்போது t-பரவல் $N(0, 1)$ இயல் நிலைப் பரவலை நெருங்குகிறது.

❖ கட்டின்மை கூறு என்பது கூறில் உள்ள சார்பற்ற உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையை குறிக்கிறது.

❖ இயல்நிலை தொகுதியின் சராசரியைப் பொறுத்த கருதுகோளை சோதிப்பதற்கான மாதிரிப்பண்பளவைச் சோதனையின் மாதிரிப் பரவல் t_{n-1}. இங்கு n சிறியது மற்றும் σ தெரியாது.

❖ இரு இயல்நிலை தொகுதியின் சராசரிகளின் சமனித் தன்மையைச் சோதிப்பதற்கான மாதிரிப்பண்பளவையின் மாதிரிப் பரவல் t_{m+n-2}. இங்கு $m, n < 30$. மேலும் இரு முழுமைத்தொகுதிகளுக்குமான மாறுபாட்டளவை σ^2 தெரியாது.

❖ $Z \sim N(0,1)$ எனில் $Z^2 \sim \chi^2$ ஆகும்.

❖ கைவர்க்கப்பரவலின் பயன்பாடுகள் (i) பொருத்துதலின் செம்மைத் தன்மையை சோதித்தல் (ii) பண்புகளின் சார்பற்ற தன்மையை சோதித்தல் (iii) நேர்வுப்பட்டியலில்

❖ எந்த ஒரு கட்டத்திலும் எதிர்பாக்கப்படும் நிகழ்வெண் 5 ஐ விடக் குறைவாக இருக்கும் எனில் அந்நிகழ்வெண் அருகில் உள்ள கட்ட நிகழ்வெண்களுடன் சேர்த்து, பெறப்படும் கட்டத்தின் எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழ்வெண் 5ஐ விட அதிகமாக்கப்படுகிறது.

❖ பண்புகளின் சார்பற்ற தன்மையைச் சோதிக்கும் கைவர்க்க மாதிரிப்பண்பளவையின் கட்டின்மை கூறு $(m-1) \times (n-1)$

❖ பண்புகளின் சார்பற்ற தன்மையை அறியும் சோதனைகளில் கட்டங்களின் எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழ்வெண்கள் கீழ்க்கண்டவாறு கணக்கிடப்படுகிறது.

$$\frac{\text{நிரையின் மொத்தம்} \times \text{நிரலின் மொத்தம்}}{\text{மாதிரி அளவு}}$$

❖ பொருத்துதலின் செம்மைத்தன்மை அறியும் சோதனைகளில் எதிர்பார்க்கப்படும் கட்ட நிகழ்வெண் கீழ்க்கண்டவாறு கணக்கிடப்படுகிறது.
மாதிரி அளவு × கட்டம் நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவு.

02_12th_Statistics_TM_Unit_2.indd 76 1/28/2020 7:12:26 PM

பயிற்சிகள் 2

I. மிகச்சரியான விடையைத் தெரிவு செய்க:

X8FK5A

1. ஸ்டூடன்ட் 't' பரவலை உருவாக்கியவர்

அ) கார்ல் பியர்சான் ஆ) லாப்லாஸ்

இ) ஆர். ஏ. பிஷர் ஈ) வில்லியம். எஸ். காஸட்

2. t-பரவலின் வீச்சகம்

அ) $-\infty < t \le 0$ ஆ) $0 \le t < \infty$ இ $-\infty < t < \infty$ ஈ) $0 \le t \le 1$

3. t-பரவலின் இணை சோதனை பயன்படுத்தப்பட வேண்டுமெனில், இரு மாதிரிகளின் உறுப்புகள்

அ) சோடியானவை ஆ) ஒட்டுறவானவை

இ) எண்ணிக்கையில் சமமாக ஈ) இவை அனைத்துமாக

4 $t = \dfrac{(\bar{x} - \mu)}{s/\sqrt{n}}$ என்ற மாதிரிப்பண்பளவை சோதனை (Test Statistic)யின் கட்டின்மை கூறுகளின் எண்ணிக்கை

அ) $n - 1$ ஆ) n இ) $n - 2$ ஈ) $n + 1$

5. சிறு கூறுகளைப் பொறுத்தவரையில், இரு மாதிரி சராசரிகளுக்கிடையேயான வித்தியாசத்தை காண்பதற்கான திட்டப்பிழை

அ) $\sigma^2 \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}$ ஆ) $\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}$ இ) $s_p \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}$ ஈ) $\sqrt{\frac{\sigma_1}{m} + \frac{\sigma_2}{n}}$

6. மாதிரி அளவானது 30 ஐ விட அதிகமாகும்போது, t-பரவல் நெருங்குவது

அ) இயல் நிலை பரவல் ஆ) F-பரவல்

இ) கை வர்க்கப் பரவல் ஈ) பாய்ஸான் பரவல்

7. மாதிரி அளவு 10 உடைய ஒரு மாதிரியின் மாறுபாட்டளவை 324 எனில் மாதிரி சராசரிக்கான திட்ட பிழை

அ) $18/\sqrt{10}$ ஆ) $18/10$ இ) $10/18$ ஈ) $2/\sqrt{5}$

8. ஒரு இயல்நிலைதொகுதியின் சராசரியை ஒப்பிடுவதற்கான கருதுகோள் சோதனைக்காக 16 கூறுகள் கொண்ட ஒரு மாதிரி எடுக்கப்படுகிறது.அதற்கான மாதிரிப் பண்பளவைச் சோதனையின் கட்டின்மை கூறுகள்

அ) 14 ஆ) 15 இ) 16 ஈ) 8

9. இரு மாதிரி சராசரிகளுக்கிடையேயான வித்தியாசத்திற்கான திட்டபிழை

அ) $\sqrt{\dfrac{ms_1^2 + ns_2^2}{m+n}}$ ஆ) $\sqrt{\dfrac{(m-1)s_1^2 + (n-1)s_2^2}{m+n}}$

இ) $\sqrt{\dfrac{ms_1^2 + ns_1^2}{m+n+2}}$ ஈ) $\sqrt{\dfrac{(m-1)s_1^2 + (n-1)s_2^2}{m+n-2}}$

02_12th_Statistics_TM_Unit_2.indd 77 1/28/2020 7:12:27 PM

10. விற்பனையை உயர்ந்துவதற்காக ஒரு நிர்வாகம், அதன் விற்பனை பிரதிநிதிகளுக்கு ஒரு பயிற்சி அளித்தது. 6 விற்பனை பிரதி நிதிகள் கொண்ட ஒரு வாய்ப்பு மாதிரி தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டு, அவர்கள் பயிற்சிக்கு முன்னும் பின்னும் செய்த விற்பனை அளவுகள் பதிவிடப்பட்டது. அவர்களின் சராசரி விற்பனை அளவு உயர்ந்துள்ளதா என்பதை சோதிப்பதற்கு உகந்த சோதனை

அ) இயல்நிலை சோதனை ஆ) இணைந்த t-சோதனை

இ) χ^2-சோதனை ஈ) F-சோதனை

11. 5×4 வரிசையுடைய நேர்வு பட்டியலுக்கான கைவர்க்க சோதனையின் கட்டின்மை கூறுகள்

அ) 18 ஆ) 17 இ) 12 ஈ) 25

12. ஒரு இயல்நிலை முழுமைதொகுதியின் மாறுபாட்டளவை சார்ந்த கருதுகோளை சோதிப்பதற்கு __________ பயன்படுத்தப்படுகிறது.

அ) t-சோதனை ஆ) F-சோதனை

இ) Z-சோதனை ஈ) கைவர்க்க சோதனை

13. σ^2 என்பது ஒரு இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாடு எனில், $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ என்ற கருதுகோளை சோதிப்பதற்கான மாதிரிப் பண்பளவைச் சோதனையின் கட்டின்மை கூறுகள்.

அ) $n-1$ ஆ) $n+1$ இ) n ஈ) $n-2$

14. கட்டின்மை கூறுகள் n உடைய கை வர்க்க சோதனையின் மாறுபாடு மதிப்புகளின்

அ) n ஆ) n-1 இ) $2n$ ஈ) $n+1$

15. χ^2 புள்ளியியல் k பிரிவுகள் கொண்ட s எண்ணிக்கையில் பண்பளவைகளை மதிப்பிடக்கூடிய ஒரு தரவின் செம்மை தன்மையை அறிய x^2 சோதனை நடத்தப்படுகிறது எனில் அதன் கட்டினமை கூறுகள்.

அ) $k-s$ ஆ) $(k-1)(s-1)$ இ) $k-1-s$ ஈ) $k-1$

16. $m \times n$வரிசை உடைய நேர்வு பட்டியலுக்கான, χ^2-மாதிரிப் பண்பளவையானது

அ) $\chi_0{}^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{(O_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}}$ ஆ) $\chi_0{}^2 = \sum_{i=1}^{k}\left[\frac{(O_i - E_i)}{E_i}\right]^2$

இ) $\chi_0{}^2 = \sum_{i=1}^{k}\frac{(O_i - E_i)}{E_i}$ ஈ) $\chi_c{}^2 = \sum_{i=1}^{k}\frac{O_i}{E_i}$

II. கீழ்க்கண்ட வினாக்களுக்கு (சில சொற்களில்) குறுகிய விடைதருக:

17. t-மாதிரிப் பண்பளவையை வரையறு.
18. கட்டின்மை கூறுகள் – வரையறு.
19. இணைந்த t-மாதிரிப் பண்பளவையை வரையறு.
20. இணைந்த t-மாதிரிப் பண்பளவைச் சோதனையை எப்போது பயன்படுத்தலாம்?
21. மாதிரி சராசரிகளின் வேறுபாட்டின் முக்கியத்துவத்தை அறியும் மாதிரிப் பண்பளவைச் சோதனையை எழுதுக.
22. மாதிரி சராசரிகளின் வித்தியாசத்திற்கான சோதனையின் திட்டபிழையை எழுதுக.

02_12th_Statistics_TM_Unit_2.indd 78 1/28/2020 7:12:29 PM

23. கை வர்க்க மாதிரிப்பண்பளவையை வரையறு.

24. கை வர்க்க பரவலின் பயன்பாடுகளை எழுதுக.

25. கை வர்க்க சோதனைக்கு மிக குறைந்த அளவிலான தேவைகள் யாவை?

26. பண்பை (Attribute) வரையறு.

27. ஈருறுப்பு பரவலை அமைப்பதற்கான, மறுதரவு தொடர்பு சூத்திரத்தை தருக.

III. கீழ்க்கண்ட வினாக்களுக்கு (சில சொற்றொடர்களில்) சுருக்கமான விடைதருக:

28. t–பரவலின் பண்புகளைப் பட்டியலிடுக.

29. t–பரவலின் பயன்பாடுகளைக் கூறுக.

30. முழுமைத் தொகுதியின் சராசரியை சோதிப்பதற்கான, சோதனையின் செய்முறையை விவரி.

31. இரு இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதிகளின் சராசரிகளுக்கு இடையேயான வித்தியாசத்தின் முக்கியத்துவத்தை காணும் சோதனையின், செய்முறையை விவரி.

32. 10 மாணவர்கள் கொண்ட ஒரு மாதிரி எடுக்கப்பட்டு, ஒரு குறிப்பிட்ட பாடத்தில் அவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள் பெறப்படுகிறது. அவற்றின் சராசரி மற்றும் திட்ட விலக்கம் முறையே 60 மற்றும் 6.5. அப்பாடத்தில் மாணவர்களின் சராசரி மதிப்பெண் 55 என்ற கருதுகோளை சோதிக்க.

33. χ^2–பரவலின் பண்புகளை கூறுக.

34. நேர்வுப்பட்டியல் என்றால் என்ன?

35. முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாட்டளவையை எவ்வாறு சோதிப்பாய்?

36. பண்புகளின் சார்பற்ற தன்மையை சோதிப்பதற்கான செய்முறைகளைத் தருக.

37. பொருத்துதலின் செம்மை தன்மையை அறியும் சோதனை பற்றி சிறு குறிப்பு வரைக.

38. 2×2 வரிசையுடைய நேர்வு அட்டவணைக்கான மாதிரிப் பண்பளவைச் சோதனையைத் தருக.

IV. கீழ்க்கண்ட வினாக்களுக்கு விரிவான விடை தருக:

39. 100 கிராம் என எடை குறிப்பிடப்பட்ட முந்திரி பருப்புகள் கொண்ட பத்து உறைகள் உள்ள மாதிரியில், உறைகளின் எடை 70, 120, 110, 101, 88, 83, 95, 98, 107 மற்றும் 100 என கண்டறியப்படின், முழுமை தொகுதியின் சராசரி 100 கிராம் என்ற கருது கோளை சோதிக்கவும்.

40. முந்தைய பதிவுகளின்படி ஒரு மட்டைப்பந்து விளையாட்டு வீரரின் சராசரி ஓட்டம் 80 எனத்தெரிகிறது. அண்மையில் அவர் விளையாடிய 6 சோதனை போட்டிகளில் பெற்ற ஓட்டங்களின் எண்ணிக்கை 84, 82, 83, 79, 83 மற்றும் 85 எனில், அவரின் சராசரி ஓட்டம் 80 ஐ விட அதிகமா என சோதிக்க.

41. ஒரு நகரம் Aஇல் உள்ள 6 மழை மரங்களின் உயரங்கள் (அடிகளில்) 30, 28, 29, 32, 31, 36 மற்றும் மற்றொரு நகரம் Bஇல் உள்ள 8 மழை மரங்களின் விவரங்கள் 35, 36, 37, 30, 32, 29, 35, 30 மழை மரங்களின் உயரங்களுக்கு இடையேயான வித்தியாசம் சிறப்பு வாய்ந்ததா என அறிக.

42. இருவகையான மின் விளக்குகளின் ஆயுட் காலத்தை (மணிகளில்) சோதிப்பதற்காகப் பெறப்பட்ட இரண்டு மாதிரிகளிலிருந்து கீழ்க்கண்ட தரவுகள் பெறப்பட்டன.

	வகை-I	வகை-II
மின் விளக்குகளின் எண்ணிக்கை	8	7
மாதிரிகளின் சராசரி (மணிகளில்)	1134	1024
மாதிரிகளின் திட்டவிலக்கம் (மணிகளில்)	35	40

5% மிகைகாண் நிலையில் மாதிரிகளின் சராசரிகளுக்கு இடையேயான வித்தியாசம் குறிப்பிடத்தக்கதா என்பதை ஆய்வு செய்க.

43. 5 தட்டச்சர்கள் முற்பகலில் 1 மணி நேரத்தில் தட்டச்சு செய்த பக்கங்களின் எண்ணிக்கை 10, 12, 13, 8, 9. மற்றும் அவர்கள் பிற்பகலில் 1 மணி நேரத்தில் தட்டச்சு செய்த பக்கங்களின் எண்ணிக்கை 11, 15, 12, 10, 8 தட்டச்சு செய்யப்பட்ட பக்கங்களின் எண்ணிக்கையில் உள்ள வித்தியாசம் குறிப்பிடத்தக்கதா என்பதை ஆய்வு செய்க.

44. 5 நபர்களின் நுண்ணறிவு திறனை அறிவதற்காக, சோதனைகள் ஒரு பயிற்சிக்கு முன்னும் பின்னும் நடத்தப்பட்டது. அவற்றின் முடிவுகள் கீழ்க்கண்டவாறு பெறப்படுகிறது.

நபர்கள்	I	II	III	IV	V
பயிற்சிக்கு முன் நுண்ணறிவு திறன்	110	120	123	132	125
பயிற்சிக்கு பின் நுண்ணறிவு திறன்	120	118	125	136	121

நுண்ணறிவு திறனில் ஏதேனும் முன்னேற்றம் உள்ளதா என 1% மிகைகாண் நிலையில் சோதிக்க.

45. புள்ளியியல் பாடத்தில் 9 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்களும், வணிக கணித பாடத்தில் 12 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்களும், கீழ்க்கண்டவாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

புள்ளியியல் பாடத்தில் பெற்ற மதிப்பெண்கள்	65	74	64	58	60	67	71	69	75			
வணிக கணித பாடத்தில் பெற்ற மதிப்பெண்கள்	52	45	59	47	53	64	58	62	54	61	57	48

இம்மாணவர்கள் பாடங்களில் சராசரியாக பெற்ற மதிப்பெண்களுக்கு இடையேயான வித்தியாசம் குறிப்பிடத்தக்கதா என 1% மிகைகாண் நிலையில் சோதிக்க.

46. 6 மாணவர்க்கு ஒரு பயிற்சிக்கு முன்னும், பின்னும் நடத்தப்பட்ட தேர்வில் அவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள் பதிவிடபட்டு கீழ்க் கண்டவாறு அட்டவனைப் படுத்தப்பட்டுள்ளது. இப்பயிற்சி ஆனது அவர்களின் மதிப்பெண்களை உயர்த்துவதற்கு உதவிகரமாக இருந்ததா என சோதிக்க.

பயிற்சிக்கு முன்	100	160	113	122	120	105
பயிற்சிக்கு பின்	120	155	120	128	115	100

02_12th_Statistics_TM_Unit_2.indd 80 1/28/2020 7:12:29 PM

47. ஒரே நேரத்தில் 4 நாணயங்கள் 144 முறை சுண்டப்பட்ட சோதனையில் ஒவ்வொரு முறையும் பெறப்பட்ட தலைகளின் எண்ணிக்கை கீழ்க்கண்டவாறு பெறப்பட்டன.

தலைகளின் எண்ணிக்கை	0	1	2	3	4
நிகழ்வெண்	10	34	56	36	8

நாணயங்கள் பிழையற்றவை என்ற அனுமானத்தின்படி ஓர் ஈருறுப்புப் பரவலைப் பொருத்த முடியுமா என சோதிக்க.

48. ஒரு வேலை நேரப்பிரிவில் தயாரிக்கப்பட்ட குறைபாடுள்ள கூர் கத்திகளின் எண்ணிக்கை, 100 வேலை நேர பிரிவுகளில் காணப்பட்டு கீழ்க்கண்டவாறு அட்டவணைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது.

குறைபாடுள்ள கூர் கத்திகளின் எண்ணிக்கை	0	1	2	3	4
வேலை நேரப் பிரிவுகளின் எண்ணிக்கை	12	14	23	18	33

இத்தரவு, சராசரி 0.44 உடைய ஒரு பாய்சான் பரவலாக உள்ளதா என சோதிக்க மேலும் $\alpha = 0.05$ என எடுத்துக்கொள்க.

49. இரு தொழிற்சாலைகளில் தயாரிக்கப்பட்ட மின்சாதன பொருட்கள் கொண்ட ஒரு வாய்ப்பு மாறி பெறப்படுகிறது. அவற்றின் தரப்பிரிவுகள் கீழ்க்கண்டவாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

தொழிற்சாலை	தரப்பிரிவுகள்				மொத்தம்
	குறை	நடுத்தரம்	நன்று	மிக நன்று	
A	136	165	151	148	600
B	31	58	55	36	180
மொத்தம்	167	223	206	184	780

தொழிற்சாலைகளுக்கும் தரப்பிரிவுகளுக்கும் ஏதேனும் தொடர்பு உள்ளதா என்பதை சோதிக்க.

50. ஒரு நகரத்தில் வாய்ப்புமுறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட 2000 நபர்களுக்கு நடத்தப்பட்ட கண் பார்வை சோதனையில் கீழ்க்கண்ட தரவுகள் பெறப்பட்டன.

பாலினம்	கண்பார்வை		மொத்தம்
	குறை	நன்று	
ஆண்	620	380	1000
பெண்	550	450	1000
மொத்தம்	1170	830	2000

கண்பார்வைக்கும், பாலினத்திற்கு இடையே தொடர்பு உண்டு என்று நாம் முடிவு எடுக்க, முடியுமா என்பதை 5% மிகைகாண் நிலையின் கீழ்காண்க.

51. 10 மாணவர்களின் எடைகள் (கி.கி) கீழ்க்கண்டவாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது 38, 40, 45, 53, 47, 43, 55, 48, 52, 49 இப்பத்து மாணவர்கள் கொண்ட மாதிரி பெறப்பட்ட அனைத்து மாணவர்களின் நிறைகளைக் கொண்ட பரவலின் மாறுபாடு 20 கி.கி என நாம் முடிவெடுக்க முடியுமா.

52. 200 வீடுகள் கொண்டு ஒரு குடியிருப்பில் 90 பெண்கள் A மற்றும் B என்ற இரு வகையான தலைமுடித் தைலங்களைப் பயன்படுத்துகின்றனர். மேலும் 60 பெண்கள் மற்றும் 70 ஆண்கள் A வகை தலைமுடித் தைலத்தைப் பயன்படுத்துகின்றனர். பாலினத்திற்கும் தலை முடித்தைலத்தின் வகைக்கும் ஏதேனும் தொடர்பு உள்ளதா என்பதைச் சோதிக்க.

02_12th_Statistics_TM_Unit_2.indd 81 1/28/2020 7:12:29 PM

விடைகள்

I. 1. (ஈ) 2. (இ) 3. (ஈ) 4. (அ) 5. (இ)
6. (அ) 7. (அ) 8. (இ) 9. (ஈ) 10. (ஆ)
11. (இ) 12. (ஈ) 13. (அ) 14. (இ) 15. (இ)
16 (அ)

III. 32. $t = 2.43$, H_0 மறுக்கப்படுகிறது

IV. 39. $t = -0.6202$, H_0 நாம் மறுப்பது இல்லை

40. $t = 3.16$, H_0 மறுக்கப்படுகிறது

41. $|t| = -1.23443$, H_0 நாம் மறுப்பது இல்லை

42. $t = 5.683$, H_0 மறுக்கப்படுகிறது

43. $|t| = 1$, H_0 நாம் மறுப்பது இல்லை

44. $t = 0.8164$, H_0 நாம் மறுப்பது இல்லை

45. $t = 4.4898$, H_0 மறுக்கப்படுகிறது

46. $|t| = 0.7304$, H_0 நாம் மறுப்பது இல்லை

47. $\chi_0^2 = 0.407407$, H_0 ஐ 5% மிகைகாண் நிலையில், வரையற்ற பாகை 4 அளவில் நாம் மறுப்பதற்கில்லை.

48. $\chi_0^2 = 35.10855$, H_0 ஐ 5% மிகைகாண் நிலையில், வரையற்ற பாகை 4 அளவில், மறுக்கப்படுகிறது.

49. $\chi_0^2 = 5.798$, H_0 ஐ 5% மிகைகாண் நிலையில் வரையற்றபாகை 3 அளவில் நாம் மறுப்பது இல்லை₹.

50. $\chi_0^2 = 10.09165$, H_0 ஐ 5% மிகைகாண் நிலையில் வரையற்ற பாகை 2 அளவில் மறுக்கப்படுகிறது.

51. $\chi_0^2 = 14$, H_0 ஐ 5% மிகைகாண் நிலையில் வரையற்ற பாகை 9 அளவில் மறுக்கப்படுவதில்லை.

52.

பாலினம்	தலைமுடித் தைலம் வகை		மொத்தம்
	A	B	
ஆண்	70	40	110
பெண்	60	30	90
மொத்தம்	130	70	200

$\chi_0^2 = 0.1998$, H_0 ஐ 5% மிகைகாண் நிலையில் வரையற்ற பாகை 2 அளவில் மறுக்கப்படுகிறது.

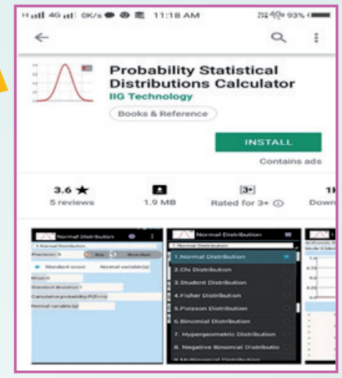
02_12th_Statistics_TM_Unit_2.indd 82 1/28/2020 7:12:29 PM

ICT CORNER

TESTS BASED ON SAMPLING DISTRIBUTIONS I

STATS IN YOUR PALM

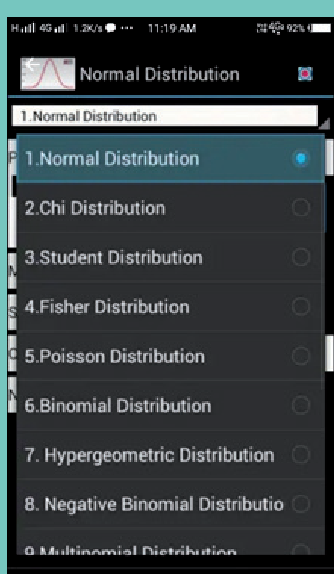
Th is activity is to calculate Chi distribution, Binomial Distribution, Students Distribution



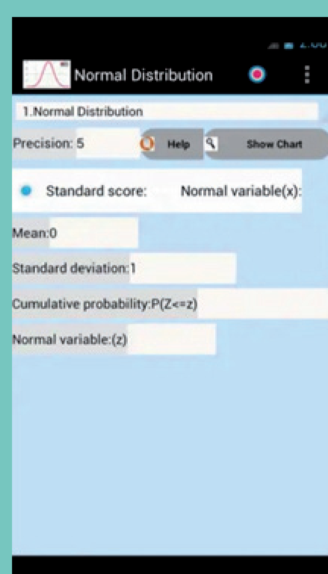
Steps:

- This is an android app activity. Open the browser and type the URL given (or) scan the QR code. (Or) search for Probability Statistical Distributions Calculator in google play store.
- (i) Install the app and open the app, (ii) click "**Menu**", (iii) In the menu page click "**Students Distribution**" menu.
- Input freedom degree and t-store, cumulative probability to get the output.

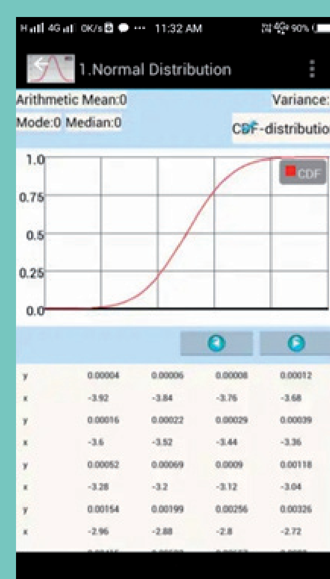
Step-1



Step-2



Step-3



Pictures are indicatives only*

URL:

URL:http://play.google.com/store/apps/details?id=net.eaglepeak.distributions_calculator

https://www.geogebra.org/m/wfencemf

B236_12_STATISTICS_TM

02_12th_Statistics_TM_Unit_2.indd 83 1/28/2020 7:12:29 PM