इकाई – 2

अध्याय – 2

दृढ़ पिण्ड गतिकी

(Dynamics of Rigid Body)

यांत्रिकी में सामान्यतः पिण्डों को बिन्दुवत् कण मानकर गणितीय व्याख्या प्रस्तुत की जाती है। वस्तुतः भौतिकीय निकाय बिन्दुवत् कण रूप में न होकर कणों का समूह होता है। इस अध्याय में दृढ़ पिण्डों की गतिकी का अध्ययन करेंगे। जिस पिण्ड के दो कणों के मध्य दूरी बाह्य बल की उपस्थिति में भी अपरिवर्तित रहती है उसे दृढ़ पिण्ड कहते हैं। एक दृढ़ पिण्ड स्थानान्तरित एवं घूर्णन गति करता है। पिण्ड के प्रत्येक कण की गति से पिण्ड की समग्र गति को समझना कठिन होता है। यदि हमें पिण्ड की गति का अध्ययन करना हो तो द्रव्यमान केन्द्र की अवधारणा सहायक सिद्ध होती है।

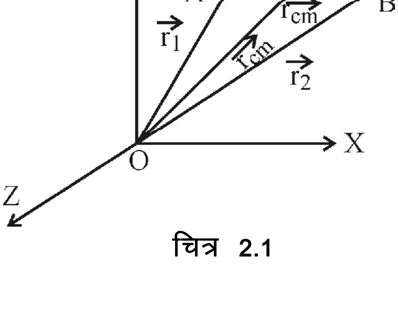
द्रव्यमान केन्द्र (Centre of Mass)

किसी पिण्ड या निकाय का द्रव्यमान केन्द्र वह बिन्दु होता है जहां पिण्ड का सम्पूर्ण द्रव्यमान केन्द्रित माना जा सकता है। द्रव्यमान केन्द्र की गति, पिण्ड की गति के तुल्य होती है। समांगी वस्तु, जिसका द्रव्यमान एक समान रूप से वितरित है, का द्रव्यमान केन्द्र, उनका ज्यामितीय केन्द्र ही होता है इसे C से व्यक्त करते हैं एवं मूल बिन्दु से इसकी स्थिति सदिश को r_{cm} से व्यक्त करते हैं।

द्विकण तंत्र का द्रव्यमान केन्द्र

(Centre of Mass of a Two Paticle System)

चित्र 2.1 के अनुसार दो कण A व B के द्रव्यमान M_1 व M_2 है, मूल बिन्दु O से इनके स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{r_1}$ व $\vec{r_2}$ है। द्रव्यमान केन्द्र का स्थिति सदिश $\vec{r}_{cm}$ है।



चित्र 2.1

माना कण A व B पर बाह्य बल क्रमशः $\vec{F}_1$ व $\vec{F}_2$ कार्यरत है तथा द्रव्यमान M_1, M_2 के कारण एक दूसरे पर कार्यरत आन्तरिक बल क्रमशः $\vec{F}_{12}$ व $\vec{F}_{21}$ है यहां F_{12}, कण B के कारण कण A पर लगने वाला बल है तथा F_{21} कण A के कारण B पर लगने वाला बल है इस प्रकार कुल कार्यरत बल –

$$F = F_1 + F_2 + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} \quad (2.1)$$

परन्तु न्यूटन की गति के तृतीय नियम के अनुसार दो कणों के मध्य लगने वाले बल एक दूसरे के बराबर एवं विपरीत दिशा में कार्य करते है फलतः निकाय की गति में योगदान शून्य होगा।

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \Rightarrow \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$$

$$\text{अतः } F = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \quad (2.2)$$

परिभाषानुसार संवेग परिवर्तन को बल कहते हैं। यदि क्षणिक समयान्तराल dt में संवेग में परिवर्तन $\overrightarrow{dp}$ है तो $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

$$\text{एवं } \vec{F}_1 = \frac{\overrightarrow{dp_1}}{dt}, \vec{F}_2 = \frac{\overrightarrow{dp_2}}{dt}$$

$$\text{परन्तु } p_1 = M_1\vec{V}_2, p_2 = M_1\vec{V}_2$$

$$\text{तथा } p_1 = M_1\frac{\overrightarrow{dr_1}}{dt}, p_2 = M_2\frac{\overrightarrow{dr_2}}{dt}$$

हम जानते हैं कि विस्थापन में परिवर्तन की दर को वेग कहते हैं

$$\text{तो } \vec{F}_1 = \frac{d}{dt}\left(M_1\frac{d\vec{r_1}}{dt}\right), \vec{F}_2 = \frac{d}{dt}\left(M_2\frac{d\vec{r_2}}{dt}\right)$$

या $F_1 = M_1 \frac{d^2}{dt^2}\vec{r}_1,\ F_2 = M_2\frac{d^2}{dt^2}\vec{r}_2$

परिभाषानुसार एक पिण्ड का सम्पूर्ण द्रव्यमान, यदि द्रव्यमान केन्द्र पर केन्द्रित है तो $\vec{F} = (M_1 + M_2)\frac{d^2}{dt^2}\vec{r}_{cm}$

मान सभी (2.2) में रखने पर

$$(M_1+M_2)\frac{d^2\vec{r}cm}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\left(M_1\vec{r}_1 + M_2\vec{r}_2\right)$$

दोनों ओर से $\frac{d^2}{dt^2}$ हटाने पर

$$\vec{r}_{cm} = \frac{M_1\vec{r}_1 + M_2\vec{r}_2}{(M_1+M_2)} \qquad (2.3)$$

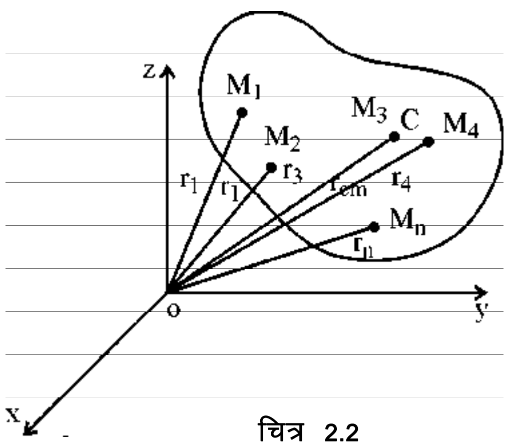
यह सूत्र द्रव्यमान केन्द्र की मूल बिन्दु से स्थिति को दर्शाता है। यदि निर्देशाकाश का चयन इस प्रकार किया जाय कि द्रव्यमान केन्द्र मूल बिन्दु को संपातित करे तो

$$r_{cm} = 0 = M_1\vec{r}_1 + M_2\vec{r}_2$$

अर्थात् $\Sigma M_1\vec{r}_1 = 0$ (2.4)

अतः द्रव्यमान केन्द्र के परितः दृढ़ पिण्ड के समस्त कणों के द्रव्यमान आघूर्णों का योग शून्य होता है।

चित्र 2.2 में एक n कण वाला दृढ़ पिण्ड दर्शाया गया है। विभिन्न कणों की मूल बिन्दु के सापेक्ष, निर्देशांक एवं द्रव्यमान भी कुछ कणों के दर्शाये गये हैं।



चित्र 2.2

इस दृढ़ पिण्ड के लिए

$$\vec{r}_{cm} = \frac{M_1\vec{r}_1 + M_2\vec{r}_2 + \ldots\ldots + M_n\vec{r}_n}{(M_1+M_2+\ldots.. + M_n)} \text{ होगा।} \qquad (2.5)$$

X – अक्ष की दिशा में घटक

$$X_{cm} = \frac{M_1X_1 + M_2X_2 + \ldots\ldots + M_nX_n}{(M_1+M_2+\ldots\ldots.+M_n)} \qquad (2.6)$$

Y – अक्ष की दिशा में घटक

$$Y_{cm} = \frac{M_1Y_1 + M_2Y_2 + \ldots\ldots + M_nY_n}{(M_1+M_2+\ldots\ldots.+M_n)} \qquad (2.7)$$

इसी प्रकार Z अक्ष की दिशा में घटक

$$Z_{cm} = \frac{M_1Z_1 + M_2Z_2 + \ldots.. + M_nZ_n}{(M_1+M_2+\ldots\ldots+M_n)} \qquad (2.8)$$

द्रव्यमान केन्द्र का वेग (Velocity of Centre of Mass)

समीकरण (2.5) के दोनों पक्षों का अवलोकन करने से द्रव्यमान केन्द्र का वेग प्राप्त होता है।

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_{cm}) = \frac{d}{dt}\left[\frac{M_1\vec{r}_1 + M_c\vec{r}_2 + \ldots.. + M_n\vec{r}_n}{M_1 + M_2 + \ldots..M_n}\right]$$

(नोट :– अध्यापक अवकलन व समाकलन का साधारण ज्ञान विद्यार्थियों को देवें।)

$$\vec{V}_{cm} = \frac{M_1\frac{d\vec{r}_1}{dt} + M_2\frac{d\vec{r}_2}{dt} + \ldots..M_n\frac{d\vec{r}_n}{dt}}{(M_1 + M_c + \ldots. + M_n)} \qquad (2.9)$$

$$\vec{V}_{cm} = \frac{M_1\vec{V}_1 + M_c\vec{V}_2 + \ldots.. + M_n\vec{V}_n}{(M_1 + M_c + \ldots.. + M_n)} \qquad (2.10)$$

इसी प्रकार त्वरण

$$\vec{a}_{cm} = \frac{M_1\vec{a}_1 + M_c\vec{a}_2 + \ldots.. + M_n\vec{a}_n}{M_1 + M_c + \ldots\ldots + M_n} \qquad (2.11)$$

समीकरण (2.10) व (2.11) द्रव्यमान केन्द्र की गति की व्याख्या में अति महत्वपूर्ण भूमिका अदा करते हैं।

उदाहरण 2.1 – 5 व 3 द्रव्यमान इकाई के दो द्रव्यमानों की स्थितियां क्रमशः $\left(2\hat{i} - 5\hat{j} + \hat{k}\right)$ तथा $\left(3\hat{i} + 7j\right)$ है, द्रव्यमान केन्द्र की स्थिति ज्ञात करो।

हल – $\vec{r}_1 = \left(2\hat{i} - 5\hat{j} + \hat{k}\right)$

$\vec{r}_2 = \left(3\hat{i} + 7j\right)$

द्रव्यमान केन्द्र का स्थिति सदिश दो कणों के लिए

$$\vec{r}_{cm} = \frac{M_1\vec{r}_1 + M_2\vec{r}_2}{(M_1+M_2)}$$

$$= \frac{5\left(2\hat{i} - 5\hat{j} + \hat{k}\right) + 3\left(3\hat{i} + 7\hat{j}\right)}{(5+3)}$$

$$= \frac{10\hat{i} - 25\hat{j} + 5\hat{k} + 9\hat{i} + 21\hat{j}}{8}$$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{19\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}}{8}$$

द्रव्यमान–केन्द्र के संदर्भ में मुख्य तथ्य (Main Features of Centre of Mass)

1. द्रव्यमान–केन्द्र पर भौतिक रूप से कोई द्रव्यमान उपस्थित होना आवश्यक नहीं है।
2. द्रव्यमान–केन्द्र की स्थिति वस्तु की आकृति, आकार तथा द्रव्यमान वितरण पर निर्भर करती है अतः द्रव्यमान–केन्द्र वस्तु के अंदर अथवा बाहर हो सकता है।
3. नियमित आकार की वस्तुएं जिनका द्रव्यमान वितरण एक समान हो, का द्रव्यमान–केन्द्र वस्तु के ज्यामितीय केन्द्र या सममिति केन्द्र पर होता है।
4. द्रव्यमान–केन्द्र की गति हमेशा स्थानान्तरीय होती है।
5. दी गई आकृति की वस्तु के लिये द्रव्यमान–केन्द्र की स्थिति द्रव्यमान वितरण पर निर्भर करती है तथा अधिक द्रव्यमान वाले भाग की ओर होती है।
6. द्रव्यमान–केन्द्र की स्थिति निर्देश तंत्र की स्थिति पर निर्भर नहीं करती। उदाहरण के लिये वलय का द्रव्यमान–केन्द्र उसके ज्यामितिय केन्द्र पर ही होगा चाहे निर्देश तंत्र कहीं भी स्थित हो।
7. द्रव्यमान–केन्द्र की स्थिति अथवा वेग आंतरिक बलों के कारण परिवर्तित नहीं होता है। यह सिर्फ बाह्य बलों द्वारा ही संभव है। उदाहरण के लिये m तथा 2m द्रव्यमान के दो कण जो कि r दूरी पर स्थित है के लिये द्रव्यमान–केन्द्र 2m द्रव्यमान वाले कण से r/3 दूरी पर स्थित होगा। यदि दोनों कण पारस्परिक अन्योन्य क्रिया के कारण एक दूसरे की ओर चलें तो भी द्रव्यमान–केन्द्र की स्थिति में कोई परिवर्तन नहीं होगा।
8. द्रव्यमान–केन्द्र बिन्दु के सापेक्ष कण तंत्र के समस्त कणों का कुल द्रव्यमान आघूर्ण हमेशा शून्य होता है–

   $\sum m_i \vec{r}_1 = 0$

   जहां $\vec{r}_1$ i वे कण का द्रव्यमान–केन्द्र के सापेक्ष स्थिति सदिश है।
9. द्रव्यमान–केन्द्र बिन्दु के सापेक्ष कण तंत्र के समस्त कणों का कुल रेखीय संवेग हमेशा शून्य होता है।

   अर्थात् $\sum m_i v_1 = 0$

   जहां v_i, i वे कण का द्रव्यमान–केन्द्र के सापेक्ष वेग सदिश है। इसी कारण से द्रव्यमान केन्द्र को शून्य संवेग निर्देश तंत्र भी कहा जाता है।

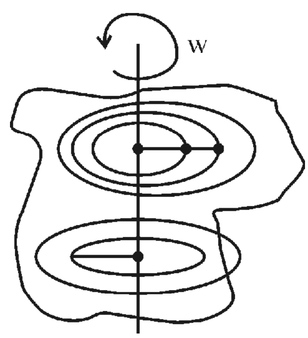
दृढ़ पिण्ड गतिकी (Rigid Body Dynamics)

यदि किसी पिण्ड पर बाह्य बल लगाये तो उसके कण एक दूसरे के सापेक्ष समान विस्थापित हो, तो ऐसे पिण्ड को दृढ़ पिण्ड कहते हैं। प्रकृति में कोई भी दृढ़ पिण्ड नहीं है। साधारण ठोस पिण्ड को ही दृढ़ पिण्ड या पिण्ड माने जा सकते हैं।

सामान्य रूप से दृढ़ पिण्ड तीन प्रकार से गति कर सकता है – (i) स्थानान्तरीय गति (ii) घूर्णन गति (iii) लौटनी गति।

(i) **स्थानान्तरीय गति** (Translational motion) – यदि पिण्ड का प्रत्येक कण समान चाल से, समान्तर सीधी रेखा में विस्थापित होते हो, पिण्ड की गति स्थानान्तरीय या रेखीय कहलाती है।

(ii) **घूर्णन गति** (Rotational motion) – घूर्णन गति में पिण्ड अपने किसी स्थिर अक्ष के चारों ओर इस प्रकार गति करता है कि इसके समस्त कण अलग–अलग त्रिज्या के वृत्तीय मार्गों पर चलते हैं, जैसा कि चित्र 2.3 में दर्शाया गया है। इस प्रकार इस गति में कण संकेन्द्रीय वृत्तों में घूमते हैं, वे कण जो घूर्णन अक्ष पर स्थित होते हैं वे स्थिर होते हैं जैसे



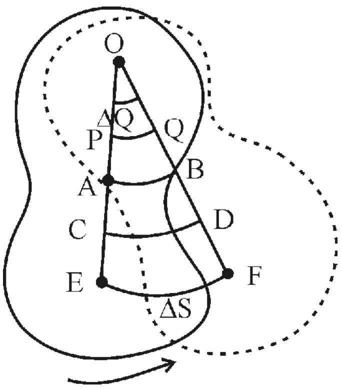
चित्र 2.3

लट्टू का घूमना, रेलगाड़ी के पहिये का घूमना इत्यादि। चित्र में उर्ध्वाधर सरल रेखा घूर्णन अक्ष दर्शाती है।

(iii) **लौटनी गति** (Rolling motion) – घूर्णन के साथ–साथ स्थानान्तरीय गति भी हो तो लौटनी गति कहलाती है जैसे किसी पिण्ड का नत तल पर लुढ़कना।

कोणीय विस्थापन एवं कोणीय वेग

चित्र 2.4 के अनुसार एक पिण्ड अपने अक्ष के परित घूर्णन गति कर रहा है, प्रत्येक कण वृत्ताकार पथ पर गति कर रहा है



चित्र 2.4

अर्थात् प्रत्येक कण की कोणीय स्थिति में समान रूप से परिवर्तन हो रहा है, इस परिवर्तन को कोणीय विस्थापन कहते हैं, सभी कणों का रेखीय वेग भिन्न–भिन्न है।

यहां $\Delta\theta = \frac{\Delta S}{r}$ रेडियन, $\because$ कोण = चाप / त्रिज्या

कोणीय विस्थापन में परिवर्तन की दर कोणीय वेग कहलाती है, इसे ω(आमेगा) से व्यक्त करते हैं। यदि कोणीय विस्थापन में परिवर्तन $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ तथा समय में परिवर्तन $= \Delta t = t_2 - t_1$ तो कोणीय वेग

$$\omega = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

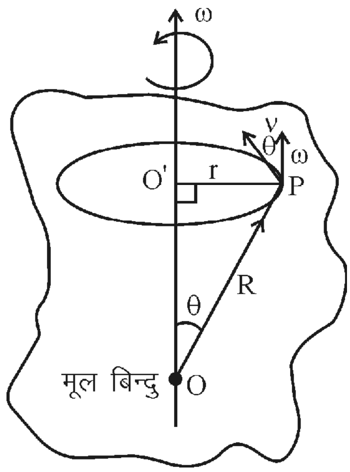
पिण्ड का तात्क्षणिक कोणीय वेग ω, $\Delta t \to 0$ पर कोणीय वेग के सीमान्त मान के बराबर होता है

$$\omega = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \qquad (2.12)$$

किसी पिण्ड का आवर्तकाल T है तथा कोणीय विस्थापन 2π है तो नियत कोणीय वेग $\omega = \frac{2\pi}{T}$ होता है।

कोणीय वेग ω तथा रेखीय वेग v में संबंध

चित्र 2.5 के अनुसार माना एक पिण्ड ω कोणीय वेग व v रेखीय वेग से OO' अक्ष के परितः गतिशील है। P पर स्थित कण का स्थिति सदिश $\vec{R}$ है, यदि $\angle O'OP = \theta$ है तो P पर स्थित कण का वेग $v = \frac{2\pi r}{T} = r\omega$ परन्तु $r = R\sin\theta$



चित्र 2.5

$\therefore v = (R \sin\theta)\,\omega$

$v = \omega R \sin\theta$

$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}$

यह सदिश गुणनफल है अतः $\vec{v}$ की दिशा $\vec{\omega}$ व $\vec{R}$ के तल के लम्बवत होगी। जो दक्षिणावर्ती पेच नियम से ज्ञात होती है।

कोणीय त्वरण

कोणीय वेग में परिवर्तन की दर को कोणीय त्वरण कहते gSl sα से व्यक्त करते हैं

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

इसी प्रकार तात्क्षणिक त्वरण $\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$

$$\therefore \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt} \qquad (2.13)$$

$$\alpha = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right) \qquad \because \omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad (2.14)$$

कोणीय एवं रेखीय त्वरण में संबंध

हम जानते हैं कि

$$v = \frac{2\pi r}{T} = r\omega$$

दोनों ओर का अवकलन करने पर दृढ़ पिण्ड के लिए

$$\frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} \;; \qquad \because \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

$$\therefore \;\; a = r\alpha \qquad \because \;\; a = \frac{dv}{dt}$$

सदिश रूप में

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{R} \qquad (2.15)$$

दृढ़ पिण्ड की घूर्णन गति के समीकरण

माना किसी दृढ़ पिण्ड का प्रारम्भिक कोणीय वेग ω_O है। यदि अन्तिम कोणीय वेग ω, नियत कोणीय त्वरण α तथा समय t पश्चात् कोणीय विस्थापन θ है तो कोणीय गति के नियमानुसार

$$\omega = \omega_O + \alpha t \qquad (2.16)$$

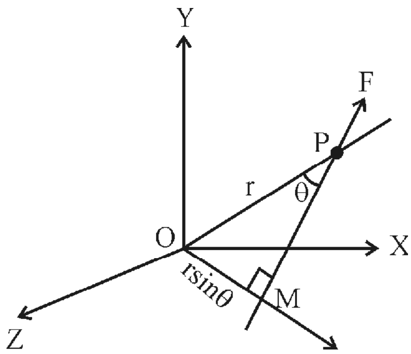
$$\theta = \omega_O t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \qquad (2.17)$$

$$\text{तथा} \;\; \omega^2 = \omega_O^2 + 2\alpha\theta \qquad (2.18)$$

बल का आघूर्ण या बल आघूर्ण (Torque)

घूर्णन गति में घूर्णन अक्ष के सापेक्ष किसी कण पर कार्यरत बल का आघूर्ण ही बल आघूर्ण कहलाता है। इसे τ (Tau) से व्यक्त करते हैं। जिस प्रकार रेखीय त्वरण उत्पन्न करने के लिए बल की आवश्यकता होती है इसी प्रकार घूर्णन गति में कोणीय त्वरण उत्पन्न करने के लिए बल आघूर्ण की आवश्यकता पड़ती है।

चित्र 2.6 के अनुसार एक पिण्ड O से गुजरने वाले घूर्णन अक्ष (कागज के लम्बवत) के सापेक्ष घूर्णन गति कर रहा है। एक कण P पर बल $\vec{F}$ कार्य कर रहा है।



चित्र 2.6

बल आघूर्ण (τ) = बल का परिमाण × आघूर्ण भुजा

$$= F\,(OM) \qquad \because \; \sin\theta = \frac{OM}{OP}$$

$$= F\,(r \sin\theta)$$

$$\tau = r F \sin\theta$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad (2.19)$$

$$\vec{\tau} = rF \sin\theta\, \hat{n}$$

यहां OM – आघूर्ण भुजा, घूर्णन अक्ष से बल की क्रिया रेखा के बीच की लम्बवत दूरी है। $\vec{\tau}$ की दिशा दक्षिणावर्ती पेच नियम से ज्ञात की जाती है इसका मात्रक न्यूटन–मीटर तथा विमा ML^2T^{-2}

विशेष परिस्थितियां यदि $\theta = 0°$ तो

$\tau = rF \sin 0° = 0$ (न्यूनतम मान) $\sin 0° = 0$

यदि (ii) $\theta = 90°$

$\tau = rF \sin 90 = rF$ (अधिकतम मान) $\because \sin 90 = 1$

कण निकायों पर आरोपित बल आघूर्ण

(Torque on a System of Particles)

यदि किसी दृढ़ वस्तु पर कई बल कार्यरत है तो परिणामी बल आघूर्ण, सभी बल आघूर्णों के सरिश योग के बराबर होता है

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \ldots + \vec{\tau}_n$$

किसी दृढ़ पिण्ड की घूर्णन गति में यदि आघूर्ण भुजा की लम्बाई अधिक हो तो बल कम लगाना पड़ेगा। दैनिक जीवन में ऐसे कई उदाहरण हैं जो इस अभिधारणा पर आधारित है जैसे –

(i) पेच को घुमाने के लिए पेचकस का हत्था चौड़ा बनाया जाता है।

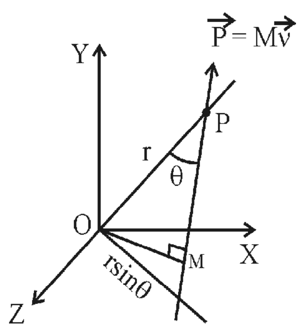
(ii) खिड़की व दरवाजों में हेण्डिल (हत्था) कब्जों से दूर लगाये जाते हैं।

(iii) पानी निकालने के लिए हेडपम्प का हत्था अधिक लम्बा लिया जाता है।

कोणीय संवेग (Angular Momentum)

किसी पिण्ड के रेखीय संवेग के घूर्णन अक्ष के सापेक्ष आघूर्ण को कोणीय संवेग कहते हैं। इसे (L) या (J) से व्यक्त करते हैं।

रेखीय गति में संवेग का जितना महत्व होता है उतना घूर्णन गति में कोणीय संवेग का होता है। चित्र 2.7 में M द्रव्यमान का एक कण P बिन्दु पर स्थित है उसका स्थिति सरिश $\vec{r}$ है तो



चित्र 2.7

कोणीय संवेग (L) = रेखीय संवेग × आघूर्ण भुजा

$= p\ (OM)$

$= p\ (r\ Sin\ \theta)$

$= rp\ Sin\ \theta$

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ (2.20)

$\vec{L} = rp\ Sin\,\theta\ \hat{n}$

यहां $\hat{n}, \hat{r}$ एवं $\hat{p}$ के तल के लम्बवत् एकांक सदिश हैं। संवेग का मात्रक – किग्रा मी²/सैकण्ड एवं विमा – $\left[M^1L^2T^{-1}\right]$ होती है।

अब हम कतिपय विशेष परिस्थितियों की कल्पना करते हैं–

(i) यदि $\theta = 0$ या $180°$

तो $\because Sin 0 = Sin 180° = 0$

$\therefore L = rp\ Sin\ 0 = 0$ (मान)

(ii) यदि $\theta = 90$

$L = rp\ Sin\ 90° = rp$ (अधिकतम मान)

कण निकाय का कोणीय संवेग

(Angular Momentuj of System of Particles)

यदि वस्तु के विभिन्न कणों का कोणीय संवेग $\vec{L}_1\ \vec{L}_2, ...\vec{L}_n$ है तो वस्तु का कुल कोणीय संवेग, विभिन्न कणों के कोणीय संवेग का सदिश योग होता है।

अर्थात् $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + ... + \vec{L}_n$ (2.21)

हम जानते हैं कि –

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$

समय के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p})$$

$$= \vec{r} \times \frac{\vec{dp}}{dt} + \frac{\vec{dr}}{dt} \times \vec{P}$$

(दो चरों के गुणनफल का अवलकन

= प्रथम चर × दूसरे का अवकलन + द्वितीय चर × प्रथम का अवकलन)

$$= \vec{r} \times \vec{F} + \vec{v} \times M\vec{v} \qquad \because \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \text{ एवं } \because \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$$

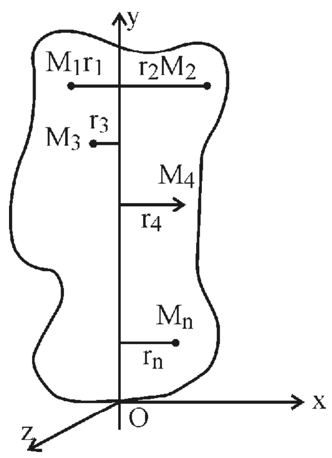
$$\therefore \frac{dL}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

या $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$ यहां, $\vec{V} \times \vec{V} = 0$ d $\vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}$

अतः कोणीय संवेग में परिवर्तन की दर उस पर आरोपित बल आघूर्ण के बराबर होती है। यह न्यूटन के द्वितीय नियम के तुल्य है।

जड़त्व आघूर्ण (Moment of Inertia)

घूर्णन गति में वस्तु का वह गुण जिसके कारण वह किसी अक्ष के परितः अपनी घूर्णन अवस्था का विरोध करता है तो उस अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण कहलाता है। इसे I से व्यक्त करते हैं। घूर्णन गति में जड़त्व आघूर्ण का उतना ही महत्व है जितना रेखीय गति में द्रव्यमान का।



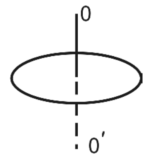
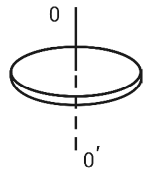
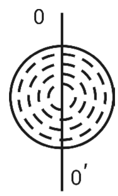
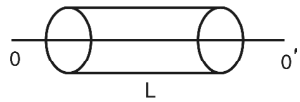
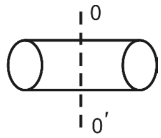
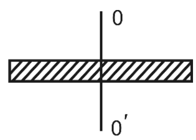
चित्र 2.8

यदि पिण्ड के किसी कण का द्रव्यमान M है, तथा घूर्णन अक्ष से लम्बवत दूरी r है तो उस कण का घूर्णन अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण द्रव्यमान M तथा दूसरी r के वर्ग के गुणनफल के बराबर होता है $I = Mr^2$।

किसी भी पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण पिण्ड के अन्दर द्रव्य के वितरण की व्यवस्था पर निर्भर करता है। सामान्यतः पिण्डों में द्रव्य का वितरण सतत् एवं समांगी होता है। अगर असतत् एवं विषमांगी है तो इसका प्रभाव जड़त्व आघूर्ण पर पड़ता है। इसके अतिरिक्त जड़त्व आघूर्ण पिण्ड के आकार एवं घूर्णभ अक्ष पर भी निर्भर करता है एक ही वस्तु का जड़त्व आघूर्ण अलग–अलग अक्षों के सापेक्ष घूर्णन करने पर असमान रहता है।

सारणी 2.1 में विभिन्न आकार के कतिपय पिण्डों के जड़त्व आघूर्ण का मान दिया गया है। यह स्पष्ट है कि घूर्णों अक्षों के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण का मान अलग–अलग है।

सारणी 2.1 : कुछ दृढ़ पिण्ड निकायों के जड़त्व आघूर्ण

	आकृति का नाम	अक्ष एवं जड़त्व आघूर्ण	ज्यामितिय आकृति
1.	वृत्ताकार वलय (Circular Ring)	$I = MR^2$, ज्यामितिय अक्ष	
2.	समरूप वृत्ताकार चकती (Uniform Circular Disc)	$I = \frac{MR^2}{2}$,ज्यामितिय अक्ष	
3.	ठोस गोला (Solid Sphere)	$I = \frac{2}{5}MR^2$,व्यास के सापेक्ष	
4.	ठोस बेलन (Solid Cylinder)	$I = \frac{MR^2}{2}$,ज्यामितिय अक्ष	
5.	ठोस बेलन (Solid Cylinder)	$I = M\left(\frac{L^2}{12} + \frac{R^2}{4}\right)$, लम्बाई के लम्बवत् एवं द्रव्यमान के केन्द्र के सापेक्ष	
6.	समरूप पतली छड़ (Thin Uniform Rod)	$I = \frac{ML^2}{12}$ लम्बाई के लम्बवत् एवं द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष	

जड़त्व आघूर्ण के मुख्य तथ्य

(Main Features of Moment of Inertia)

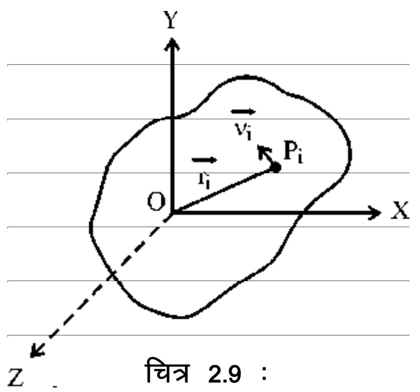
1. जड़त्व आघूर्ण, घूर्णन गति में वस्तु के घूर्णन जड़त्व की माप है।
2. घूर्णन गति में जड़त्व आघूर्ण, रेखीय गति में द्रव्यमान के तुल्य होता है। अर्थात् जिस प्रकार वस्तु का द्रव्यमान रेखीय गति में अपनी अवस्था परिवर्तन का विरोध करता है उसी प्रकार जड़त्व–आघूर्ण घूर्णन गति में अवस्था परिवर्तन का विरोध करता है।
3. जड़त्व आघूर्ण का विमीय सूत्र $[M^1L^2T^0]$ है।
4. जड़ आघूर्ण का S.I. मात्रक किग्रा–मीटर^2 है।
5. जड़त्व आघूर्ण प्रदिश राशि (Tensor) है लेकिन किसी निश्चित घूर्णन अक्ष के लिये यह एक सदिश राशि के रूप में प्रदर्शित होती है।
6. दी गई वस्तु या पिण्ड के लिये जड़त्व आघूर्ण का मान घूर्णन अक्ष पर निर्भर करता है अर्थात् घूर्णन अक्ष परिवर्तित होने पर जड़त्व आघूर्ण परिवर्तित हो जाता है।
7. किसी निश्चित अक्ष के लिये पिण्ड के जड़त्व आघूर्ण का मान उसके द्रव्यमान, आकृति एवं आकार पर निर्भर करता है।
8. दी गई आकृति, आकार, द्रव्यमान तथा घूर्णन अक्ष के लिये जड़त्व आघूर्ण का मान पिण्ड के द्रव्यमान वितरण पर निर्भर

करता है। पिण्ड का घूर्णन अक्ष से जितना अधिक द्रव्यमान का वितरण होगा, उतना ही अधिक जड़त्व आघूर्ण का मान होगा। उदाहरणार्थ एक व्यक्ति जिसके हाथों में भारी डम्बल है एवं भुजायें तथा टांगे फैली हुई है। यदि व्यक्ति अपनी भुजाओं तथा टांगो को सिकोड़ लेता है तो डम्बल तथा टांगो की घूर्णन अक्ष से दूरी कम हो जाने पर निकाय का जड़त्व आघूर्ण कम हो जाता है।

9. समान द्रव्यमान, त्रिज्या तथा आकृति की खोखली तथा ठोस वस्तुओं में से खोखली वस्तु का जड़त्व आघूर्ण ठोस वस्तु से अधिक होगा।
10. जड़त्व आघूर्ण का मान कोणीय वेग (ω), कोणीय त्वरण (α), बल आघूर्ण (τ) तथा कोणीय संवेग (J) पर निर्भर नहीं करता है।

कोणीय संवेग, जड़त्व आघूर्ण एवं कोणीय वेग में सम्बन्ध (Relation between Angular Momentum, Moment of Inertia and Angular Velocity)

चित्र 2.9 में माना X-Y तल में कोई पिण्ड अपने तल के लम्बवत् तथा मूल बिन्दु O से गुजरने वाले स्थिर z-अक्ष के सापेक्ष एक समान कोणीय चाल ω से घूर्णन गति कर रहा है। पिण्ड के बिन्दु P पर स्थित i वे



चित्र 2.9 :

d.kdkæ◌eku m_1, रेखीय वेग ν_1 तथा घूर्णन अक्ष से लम्बवत् दूरी r_i है। कण का रेखीय संवेग $\vec{P} = m_i \vec{v}_1$ है। तब i वे कण का घूर्णन अक्ष के सापेक्ष कोणीय संवेग –

$$J_i = m_i v_i r_i \qquad \text{या} \qquad J_i = m_i\,(r_i\omega) r_i$$

या $\quad J_i = m_i r_i^2.\omega$

घूर्णन अक्ष के परितः पिण्ड का कुल कोणीयसंवेग पिण्ड के समस्त कणों का घूर्णन अक्ष के परितः कोणीय संवेगों के सदिश योग के तुल्य होता है। अतः –

$$J = \sum_{i=1}^{i=n} m_i r_i^2.\omega$$

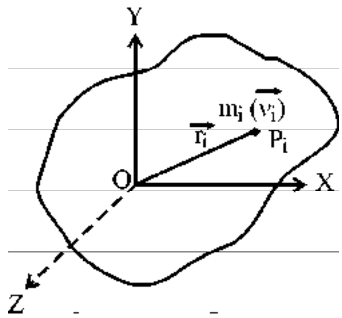
या $\quad J = \omega.\sum_{i=1}^{i=n} m_i r_i^2 \quad$ यहां $\sum_{i=1}^{i=n} m_i r_i^2 = I$

या $\quad \vec{J} = I\vec{\omega} \qquad (2.22)$

अर्थात् किसी पिण्ड का किसी घूर्णन अक्ष के सापेक्ष कोणीय संवेग उसके उसी अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण एवं उसके कोणीय वेग के गुणनफल के बराबर होती है।

घूर्णन गतिज ऊर्जा (Rotational Kinetic Energy)

चित्र 2.10 के अनुसार माना X-Y तब में स्थित कोई दृढ़ पिण्ड अपने तल के लम्बवत् तथा मूल 'O' बिन्दु से गुजरने वाले स्थिर अक्ष Z के परितः एक समान कोणीय वेग ω से घूर्णन गति कर रहा है। पिण्ड के किसी i वे कण का द्रव्यमान m_i वेग ν_1 तथा बिन्दु O के सापेक्ष स्थिति सदिश $\vec{r}_i$ है। प्रत्येक दृढ़ पिण्ड छोटे कणों से मिलकर बना होता है तथा प्रत्येक कण अपने द्रव्यमान



चित्र 2.10

तथा रेखीय चाल के कारण रेखीय गतिज ऊर्जा रखता है। पिण्ड की कुल घूर्णन गतिज ऊर्जा इन सभी कणों की गतिज ऊजाओं के योग के तुल्य होती है।

अतः $\quad K_R = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2} m_i v_i^2$

जहां $\frac{1}{2} m_i v_i^2$ किसी i वे कण की रेखीय गतिज ऊर्जा है।

या $\quad K_R = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{I}{2} m_i r_i^2 \omega^2$

यहां $\quad (v_i = r_i\omega)$

या $\quad K_R = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_{i=1}^{i=n} m_i r_i^2 \quad$ यहां $\sum_{i=1}^{i=n} m_i r_i^2 = I$

या $\quad K_R = \frac{1}{2} I\omega^2 \qquad (2.23)$

अतः कोणीय वेग ω से घूर्णन कर रहे पिण्ड का अभीष्ठ घूर्णन अक्ष के सापेक्ष घूर्णन गतिज ऊर्जा (K_R)

$$K_R = \frac{1}{2} I\omega^2$$

घूर्णन त्रिज्या (Radius of Gyration)

किसी घूर्णन अक्ष के परितः किसी पिण्ड की घूर्णन त्रिज्या (K) घूर्णन अक्ष से वह लम्बवत् दूरी जिसके वर्ग (K^2) को पिण्ड

के द्रव्य मान से गुणा करने पर जड़त्व आघूर्ण का वही मान होता है जो कि पिण्ड के द्रव्यमान के वास्तविक वितरण के लिये उस घूर्णन अक्ष के परितः है अर्थात् –

$$\left(\sum m_i\right)K^2 = \sum_{i=1}^{i=n} m_i r_i^2 \qquad (2.24)$$

घूर्णन त्रिज्या की संकल्पना का महत्व इस कारण से है कि किसी पिण्ड का किसी अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण निकालने के लिये हमें पिण्ड के समस्त बिन्दु कणों का जड़त्व आघूर्ण निकालकर उनका योग करना पड़ता है जो कि व्यावहारिक नहीं होता।

समी. 2.24 से –

$$K = \sqrt{\frac{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + ... + m_n r_n^2}{m_1 + m_2 + ... + m_n}}$$

यदि वस्तु संमागी (Homogeneous) है तथा समान द्रव्यमान के n कणों से मिलकर बनी है, तो वस्तु का कुल द्रव्यमान $\sum m_i = M = m.n$, अतः

$$K = \sqrt{\left(r_1^2 + ... + r_n^2\right)/n}$$

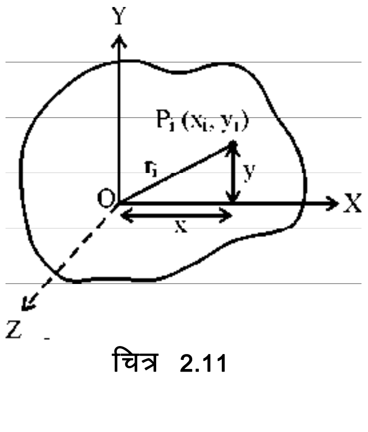
या $$K = \sqrt{\left(r_1^2 + r_2^2 .... + r_n^2\right)/n} \qquad (2.25)$$

अर्थात् संमागी वस्तु जिसके कण समान द्रव्यमान के हो, की घूर्णन त्रिज्या समस्त कणों की घूर्णन अक्ष से वर्ग माध्य मूल दूरी के तुल्य होती है।

घूर्णन त्रिज्या (K) घूर्णन अक्ष की स्थिति एवं इसके सापेक्ष द्रव्यमान वितरण पर निर्भर करती है, लेकिन वस्तु के द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करती। यह सभी कोणीय भौतिक राशियों पर भी निर्भर नहीं करती है।

लम्बवत् अक्षों की प्रमेय
(Theorem of Perpendicular Axes)

कथन – ''लम्बवत् अक्षों की प्रमेय के अनुसार किसी समतल पटल का उसके तल के लम्बवत् अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण का मान तल में ही उपस्थित अन्य दो परस्पर लम्बवत् अक्षों के सापेक्ष जड़त्व आघूर्णों के योग के तुल्य होता है जबकि अभीष्ट लम्बवत् अक्ष तल में स्थित दोनों परस्पर लम्बवत् अक्षों के कटान बिन्दु से गुजरती है।'' चित्र 2.11 के अनुसार



चित्र 2.11

यदि समतल पटल X-Y तल में है तथा I_x, I_y एवं I_z क्रमशः X, Y एवं Z के सापेक्ष पटल के जड़त्व आघूर्ण हैं तो लम्बवत् अक्षों की प्रमेय के अनुसार

$$I_z = I_x + I_y$$

उपपत्ति (Proof)

माना समतल पटल में n कण है जिनके द्रव्यमान क्रमशः $m_1, m_2, ...m_i, ...m_n$ हैं। कणों की Z से लम्बवत् दूरियां क्रमशः $r_1, r_2, ...r_i, ...r_n$ हैं तथा X व Y अक्षों से लम्बवत् दूरियां क्रमशः $y_1, y_2 .....y_i, ...y_n$ था $x_1, x_2, ...x_i, ...x_n$ है।

X अक्ष के सापेक्ष समतल पटल का कुल जड़त्व आघूर्ण (I_x) अलग–अलग कणों के X अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्णों के योग के तुल्य होगा अर्थात् –

$$I_X = \sum_{i=1}^{i=n} m_i y_i^2 \qquad (2.26)$$

इसी प्रकार Y अक्ष के सापेक्ष समतल पटल का जड़त्व आघूर्ण (I_y) –

$$I_y = \sum_{i=1}^{i=n} m_i x_i^2 \qquad . (2.27)$$

तथा Z अक्ष के सापेक्ष समतल पटल का जड़त्व आघूर्ण (I_z) –

$$I_z = \sum_{i=1}^{i=n} m_i r_i^2 \qquad (2.28)$$

समी. 2.26 व समी. 2.27 को जोड़ने पर –

$$I_x + I_y = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \left(x_i^2 + y_i^2\right)$$

चित्र 2.11 की ज्यामिति से $x_i^2 + y_i^2 = r_i^2$

या $$I_X + I_y = \sum_{i=1}^{i=n} m_i r_i^2 \qquad (2.29)$$

अतः $I_x + I_y = I_z$

यही लम्बवत् अक्षों की प्रमेय है।

(ध्यान रखें कि लम्बवत् अक्षों की प्रमेय का उपरोक्त व्यंजक सिर्फ द्विविमीय वस्तुओं के लिये ही सत्य है।)

समान्तर अक्षों की प्रमेय
(Theorem of Parallel Axes)

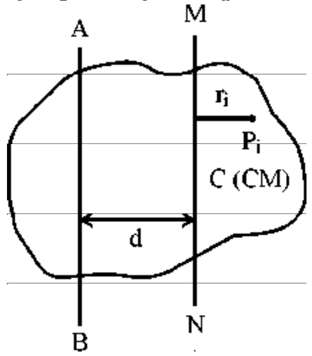
कथन – ''समान्तर अक्षों की प्रमेय के अनुसार किसी पिण्ड का दी हुई घूर्णन अक्ष (AB) के परितः जड़त्व आघूर्ण का मान,

उस पिण्ड के द्रव्यमान–केन्द्र से गुजरने वाली तथा AB के समान्तर अक्ष के परितः पिण्ड के जड़त्व आघूर्ण के मान तथा पिण्ड के द्रव्यमान और दोनों समान्तर अक्षों के बीच लम्बवत् दूरी के वर्ग के गुणनफल के योग के तुल्य होता है।'' अर्थात् –

$$I_{AB} = I_{CM} + Md^2$$

उपपत्ति (Proof)

चित्र 2.12 के अनुसार अभीष्ट पिण्ड n कणों से मिलकर बना है जिनके द्रव्यमान क्रमशः $m_1, m_2, \ldots m_1, \ldots m_n$ हैं तथा जिनकी द्रव्यमान–केन्द्र से गुजरने वाली अक्ष MN से लम्बवत् दूरियां क्रमशः $r_1, r_2, \ldots r_n$ हैं। पिण्ड के बिन्दु P पर स्थित i वें कण का द्रव्यमान m_1 तथा इसकी MN से लम्बवत् दूरी r_i हो तो इस कण का अक्ष MN के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण $m_1 r_i^2$ होगा।



चित्र 2.12

अतः सम्पूर्ण पिण्ड का MN अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण –

$$I_{CM} = \sum_{i=1}^{i=n} m_1 r_i^2$$

i वे कण की AB अक्ष से लम्बवत् दूरी = $r_i + d$

आघूर्ण पिण्ड का अक्ष AB के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण

$$I_{AB} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i (r_i + d)^2$$

या $$I_{AB} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i (r_i^2 + d^2 + 2r_i d)$$

यहां d नियत है। अतः

$$I_{AB} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i r_i^2 + d^2 \sum_{i=1}^{i=n} m_i + 2d \sum_{i=1}^{i=n} m_i r_i \qquad (2.30)$$

चूंकि पिण्ड द्रव्यमान–केन्द्र के सापेक्ष संतुलित रहता है, द्रव्यमान–केन्द्र से गुजरने वाली अक्ष के सापेक्ष पिण्ड के समस्त कणों के आघूर्णों का बीजगणितीय योग (Algebric Sum) हमेशा शून्य होता है।

अतः

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i r_i = 0$$

अतः समी. 2.30 से $$I_{AB} = I_{CM} + d^2 \sum_{i=1}^{i=n} m_i$$

या $$I_{AB} = I_{CM} + Md^2, \qquad \sum_{i=1}^{i=n} m_i = M$$

या $$I_{AB} = I_{CM} + Md^2 \qquad (2.31)$$

यही समान्तर अक्षों की प्रमेय है।

ध्यान रहे कि समान्तर अक्षों की प्रमेय द्विविमीय तथा त्रिविमीय सभी प्रकार के पिण्डों के लिये सत्य होती है।

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. द्रव्यमान केन्द्र किसी भौतिक निकाय से सम्बद्ध ऐसा बिन्दु जिस पर कण तंत्र का सम्पूर्ण द्रव्यमान केन्द्रित होता है। पिण्ड की स्थानान्तरीय गति के लिए प्रभावी रूप से सम्पूर्ण द्रव्यमान को इस बिन्दु पर केन्द्रित माना जा सकता है।
2. द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष कण निकाय के सभी कणों का कुल द्रव्यमान आघूर्ण तथा कुल रेखीय संवेग शून्य होता है।
3. द्रव्यमान केन्द्र की स्थिति निकाय के कणों के सापेक्ष स्थितियों, द्रव्यमानों एवं द्रव्यमान वितरण पर निर्भर करती है।
4. द्रव्यमान केन्द्र की गति हमेशा स्थानान्तरीय होती है।
5. घूर्णन अक्ष के सापेक्ष कण पर कार्यरत बल के आघूर्ण को बल–आघूर्ण कहते हैं अर्थात् $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$
6. घूर्णन गति के जड़त्व को जड़त्व आघूर्ण कहते हैं।
7. घूर्णन त्रिज्या (k) – घूर्णन अक्ष से वह लम्बवत् दूरी जिसके वर्ग को वस्तु के द्रव्यमान से गुणा करने पर वस्तु का वही जड़त्व आघूर्ण प्राप्त होता है जो कि उसे वितरित द्रव्यमान को मानने पर प्राप्त होता है।

अभ्यासार्थ प्रश्न

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

1. द्रव्यमान केन्द्र का वेग बाह्य बल की अनुपस्थिति में –
   (अ) नियत है। (ब) शून्य है।
   (स) बढ़ता है। (द) घटता है।
2. द्रव्यमान केन्द्र की गति का मुख्य कारण है –
   (अ) पारस्परिक बल (ब) बाह्य बल
   (स) नाभिकीय बल (द) उपरोक्त सभी
3. किसी गोले का व्यास के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण I है तो उसकी स्पर्श रेखा के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण होगा –

(अ) $I+\frac{1}{2}MR^2$ (ब) I

(स) $I+MR^2$ (द) $I+2\ MR^2$

4. घूर्णी गति में न्यूटन का समरूप नियम है –

(अ) $L=I\omega$ (ब) $\vec{v}=\vec{w}\times\vec{r}$

(स) $\vec{\tau}=\vec{r}\times\vec{F}$ (द) $\vec{\tau}=I\vec{\alpha}$

5. मूल बिन्दु से $\left(3\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k}\right)$ मी. की दूरी पर बल $F=5i+6\hat{j}-8k$ न्यूटन कार्यरत है। बल आघूर्ण का मान है–

(अ) 9 न्यूटन मी. (ब) 3 न्यूटन मी.

(स) 4 न्यूटन मी. (द) 5 न्यूटन मी.

अतिलघुत्तरात्मक प्रश्न

1. क्या द्रव्यमान केन्द्र की गति स्थानान्तरीय होती है?
2. घड़ी के मिनट की सुई का कोणीय वेग क्या होता है?
3. क्या एक ही पिण्ड का दो अलग अक्षों के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण अलग हो सकता है?
4. एक पहिये के व्यास में 2% वृद्धि की जाती है तो पहिये के अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण में प्रतिशत वृद्धि कितनी होगी?
5. क्या पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण उसके कोणीय वेग पर निर्भर करता है?

लघुत्तरात्मक प्रश्न

1. सिद्ध करो कि द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष कण तंत्र के कणों का कुल द्रव्यमान आघूर्ण शून्य होता है।
2. कोणीय संवेग एवं जड़त्व आघूर्ण में सम्बन्ध स्थापित कीजिये।
3. सिद्ध करो कि भिन्न–भिन्न घनत्व लेकिन समान द्रव्यमान M व मोटाई t की दो चकतियों के जड़त्व आघूर्ण एवं घनत्व में सम्बन्ध $\frac{I_1}{I_2}=\frac{d_2}{d_1}$ होगा।

निबन्धात्मक प्रश्न

1. जड़त्व आघूर्ण की परिभाषा दीजिये। इसका भौतिक महत्व समझाइये।
2. बल आघूर्ण एवं कोणीय स्वरण में सम्बन्ध स्थापित कीजिये।
3. लम्बवत् अक्षों के प्रमेय लिखिये एवं परिणामी जड़त्व आघूर्ण का सूत्र स्थापित कीजिये।
4. यदि पृथ्वी की त्रिज्या को आधा कर दिया जाय एवं द्रव्यमान अपरिवर्तित रहे तो दिन की लम्बाई कितनी हो जाएगी?

उत्तरमालाः 1 (अ) 2 (ब) 3 (स) 4 (द) 5 (ब)