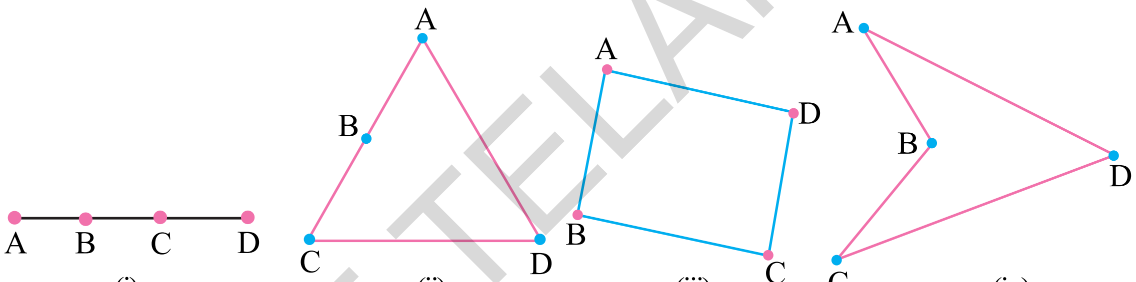
08

चतुर्भुज
(QUADRILATERALS)

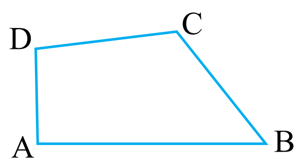
8.1 प्रस्तावना

तुमने पूर्व अध्याय में प्रमाणों के साथ त्रिभुज के बहुत से गुणों के बारे में पढ़ा था। तुम जानते हो कि तीन असंरेखिय बिन्दुओं को युग्मों में जोड़ने से त्रिभुज प्राप्त होता है। क्या तुम जानते हो कि समतल में चार बिन्दुओं से कौनसी आकृति प्राप्त होती है? ध्यान दीजिए कि यदि सभी बिन्दु संरेखीय हो तो हम एक रेखाखण्ड प्राप्त करते हैं, यदि चार बिन्दुओं में से तीन संरेखीय हो तो हम एक त्रिभुज प्राप्त करते हैं, और यदि कोई भी तीन बिन्दु संरेखीय न हो तब हमें एक चार भुजाओं की बंद आकृति प्राप्त होती है। एसी आकृति को हम चतुर्भुज कहते हैं।



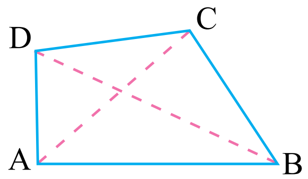
(i) (ii) (iii) (iv)

तुम आसानी से अनेक चतुर्भुजों को खींच सकते हैं । तुम्हारे चारों ओर पाये जाने वाले चतुर्भुजों को पहचानिए आकृति (iii) और (iv) में बने चतुर्भुज एक महत्वपूर्ण पहलू में भिन्नता दर्शाते है। वे किस तरह भिन्न है?



इस अध्याय में हम केवल आकृति (Fig (iii)) प्रकार के चतुर्भुज का अभ्यास करेंगे। ये उत्तल चतुर्भुज है।

चतुर्भुज एक समतल में चार रेखाओं द्वारा परिबद्ध सरल बंद आकृति है।



चतुर्भुज ABCD को चार भुजाएँ AB, BC, CD और DA है, चार शीर्ष A, B, C और D है। शीर्षों पर बने चार कोण $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ और $\angle D$ होते हैं।

जब हम सम्मुख शीर्ष (A, C) और (B, D) जोड़ते हैं (आकृति (vi)), तब चतुर्भुज के कर्ण AC और BD प्राप्त होते हैं।

8.2 चतुर्भुज के गुण (Properties of Quadrilater)

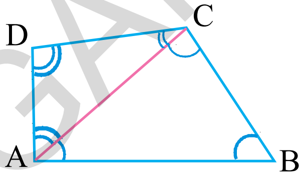
चतुर्भुज के भीतर चार कोण होते हैं। क्या हम ये चार कोणों का योग ज्ञात कर सकते हैं? त्रिभुज के कोणों के योग के बारे में याद कीजिए। हम इस गुण का उपयोग चतुर्भुज के चारों अंतः कोणों का योग ज्ञात करेने के लिए करते हैं।

ABCD एक चुतुर्भुज है और AC कर्ण है (आकृति देखिए)

हम जानते हैं कि ΔABC के तीन कोणों का योग है,

$\angle CAB + \angle ABC + \angle BCA = 180^o$ ...(1) (त्रिभुज का कोणों का योग गुण)

इसी प्रकार, ΔADC में.



$$\angle CAD + \angle ADC + \angle DCA = 180^o \quad ...(2)$$

(1) और (2) को जोड़ने पर, हमें प्राप्त होता है,

$$\angle CAB + \angle ABC + \angle BCA \quad + \angle CAD + \angle ADC + \angle DCA = 180^o + 180^o$$

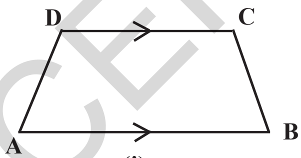
यूँकि $\angle CAB + \angle CAD = \angle A$ and $\angle BCA + \angle DCA = \angle C$

इसलिए, $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^o$

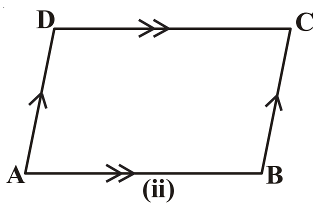
अर्थात् चतुर्भुज के चार कोणों का योग 360^o अथवा चार समकोण रहता है।

8.3 चतुर्भुज के विभिन्न प्रकार (Different Types of Quadrilaters)

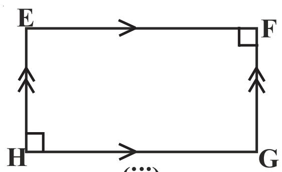
नीचे दिए गए चतुर्भुजों की ओर देखिए? इनमें से बहुत से हम इसके पूर्व देखे हैं। हम इन्हें ऊपरी तौर पर देखेंगे हैं और इनके गुणों पर आधारित उनके विशिष्ट नामों को याद करेंगे।



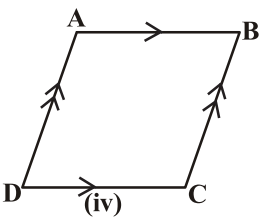
(i)



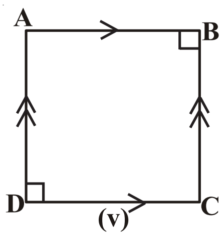
(ii)



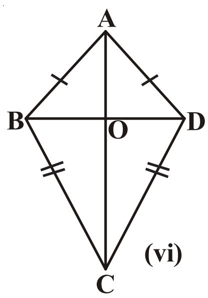
(iii)



(iv)



(v)



(vi)

हमने अवलोकन क्रिया कि

- आकृति (i) में, चतुर्भुज ABCD की सम्मुख भुजाएँ AB और DC एक दुसरे को समानान्तर है। ऐसा चतुर्भुज, **समलंब चतुर्भुज** कहलाता है।

  यदि समलंब चतुर्भुज में असमानान्तर भुजाएँ समान हो तब यह **समद्विबाहु समलंब चतुर्भुज** कहलाता है।

- आकृति (ii) में, चतुर्भुज के सम्मुख भुजाओं के दोनों युग्म समानान्तर है। ऐसा चतुर्भुज, समानांतर चतुर्भुज कहलाता है। आकृति (iii), (iv) और (v) भी **समानांतर चतुर्भुज है।**
- आकृति (iii) में समानांतर चतुर्भुज EFGH के सभी कोण समकोण है। अतः इसे आयत कहते है।
- आकृति (iv) में, समानांतर चतुर्भुज की संलग्न भुजाएँ समान है और यह **समचतुर्भुज** कहलाता है।
- आकृति (v) में. समानांतर चतुर्भुज की संलग्न भुजाएँ समान और प्रत्येक कोण $90°$ है। यह **वर्ग** कहलाता है।
- आकृति (vi) में चतुर्भुज ABCD के दो संलग्न भुजाओं के युग्म समान है, अर्थात् $AB = AD$ और $BC = CD$. यह **पतंग आकृति** कहलाती है।

निशा क्या कहती है, ध्यान दीजिए :

एक समचतुर्भुज, वर्ग हो सकता है परंतु सभी वर्ग, समचतुर्भुज नहीं हो सकते हैं।

ललीता आगे कहती है :

सभी आयत, समानांतर चतुर्भुज रहते हैं परन्तु सभी समानांतर चतुर्भुज आयत नहीं होते।
इनमें से कौनसे कथन के साथ तुम सहमत हो?

तुम्हारे उत्तर के लिए कारण बताइए। चतुर्भुज के विभिन्न प्रकारों के लिए ऐसे और कथन लिखिए।

व्याख्यात्मक उदाहरण :

उदाहरण-1. ABCD समानांतर चतुर्भुज है और $\angle A = 60^o$ तो शेष कोणों को ज्ञात कीजिए।

हल : समानांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण समान रहते हैं।

अतः समानांतर चतुर्भुज ABCD में,

$\angle C = \angle A = 60^o$ और $\angle B = \angle D$

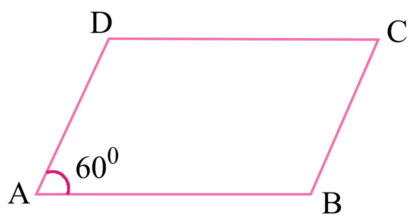
समानांतर चतुर्भुज के क्रमित कोणों का योग 180^o रहता है।

यूँकि $\angle A$ और $\angle B$ क्रमित कोण है

$\angle D = \angle B = 180^o - \angle A$

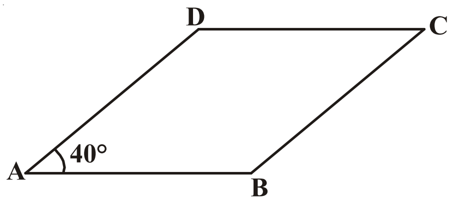
$= 180^o - 60^o = 120^o$.

इस तरह, शेष कोण $120^o, 60^o, 120^o$.



उदाहरण-2. समानांतर चतुर्भुज ABCD में $\angle DAB = 40^o$, इसके शेष कोण ज्ञात कीजिए।

हल :



ABCD समानांतर चतुर्भुज है।

$\angle DAB = \angle BCD = 40°$ और AD || BC

यूँकि क्रमिक कोणों का योग

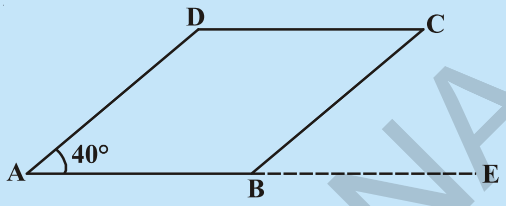
$\angle CBA + \angle DAB = 180°$

$\therefore \angle CBA = 180 - 40°$

$= 140°$

इससे हम ज्ञात कर सकते हैं, $\angle ADC = 140°$ और $\angle BCD = 40°$

यह प्रयत्न कीजिए :



AB को E तक बढाईए। $\angle CBE$ ज्ञात कीजिए। तुम क्या देखते हो? कौनसे प्रकार के कोण $\angle ABC$ और $\angle CBE$ है?

उदाहरण-3. समानांतर चतुर्भुज की दो संलग्न (आसन्न) भुजाएँ 4.5 सें.मी. और 3 सें.मी. है। इसका परिमाप ज्ञात कीजिए।

हल : चूँकि समानांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ समान रहती है, शेष दो भुजाएँ 4.5 सें.मी. और 3 सें.मी. है।

अतः परिमाप = 4.5 + 3 + 4.5 + 3 = 15 सें.मी.

उदाहरण-4. समानांतर चतुर्भुज ABCD में, क्रमित कोण $\angle A$ और $\angle B$ के समद्विभाजक P पर प्रतिच्छेद करते हैं। बताईए कि $\angle APB = 90^o$.

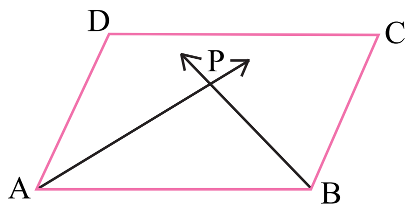
हल : ABCD समांतर चतुर्भुज है। क्रमित कोण $\angle A$ और $\angle B$ के समद्विभाजक $\overrightarrow{AP}$ और $\overrightarrow{BP}$ है।

यूँकि समांतर चतुर्भुज के क्रमित कोणों का योग संपूरक रहता है,

$\angle A + \angle B = 180^o$

$\frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B = \frac{180}{2}$

$\Rightarrow \angle PAB + \angle PBA = 90^o$



ΔAPB में,

$\angle PAB + \angle APB + \angle PBA = 180^o$ (त्रिभुज के कोणों का योग गुण)

$\angle APB = 180^0 - (\angle PAB + \angle PBA)$

$= 180^0 - 90^0$

$= 90^0$

अतः यह सिद्ध होता है।

अभ्यास - 8.1

1. निम्न कथन सही या गलत है, स्पष्ट कीजिए :
   (i) प्रत्येक समानान्तर चतुर्भुज, समलंब चतुर्भुज होता है। ( )
   (ii) सभी समानान्तर चतुर्भुज, चतुर्भुज होते हैं। ( )
   (iii) सभी समलंब चतुर्भुज, समांतर चतुर्भुज होते हैं। ( )
   (iv) एक वर्ग, समचतुर्भुज होता है। ( )
   (v) प्रत्येक समचतुर्भुज, वर्ग रहता है। ( )
   (vi) सभी समानान्तर चतुर्भुज, आयत रहते हैं। ( )

2. निम्न सारणी (हाँ) लिखकर पूर्ण कीजिए यदि किसी विशिष्ट चतुर्भुज के लिए गुण सही है और यदि गुण सही नही हो तो (नहीं) लिखिए।

गुण	समलंब चतुर्भुज	समांतर चतुर्भुज	समचतुर्भुज	आयत	वर्ग
a. सम्मुख भुजाओं का एकही युग्म समांतर रहता है।	हाँ				
b. सम्मुख भुजाओं के दो दो युग्म समांतर रहते हैं।					
c. सम्मुख भुजाएँ समान रहती हैं।					
d. सम्मुख कोण समान रहते हैं।					
e. क्रमिक कोण संपूरक रहते हैं।					
f. कर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।					
g. कर्ण समान रहते हैं।					
h. सभी भुजाएँ समान रहते हैं।					
i. प्रत्येक कोण समकोण रहता है।					
j. कर्ण एक दूसरे पर लंब रहते हैं।					

3. समलंब चतुर्भुज ABCD में $AB \parallel CD$, यदि AD=BC तो बताईए कि $\angle A = \angle B$ और $\angle C = \angle D$.

4. चतुर्भुज के चार कोणों में अनुपात 1: 2:3:4 है। चतुर्भुज के प्रत्येक कोण का माप बताईए।

5. आयत ABCD का कर्ण AC है। ΔACD के कोणों को ज्ञात कीजिए। कारण दीजिए।

8.4 समानान्तर चतुर्भुज और इसके गुणधर्म (Parallelogram and their properties)

हमने देखा है समानान्तर चतुर्भुज, चतुर्भुज होते हैं। नीचे हम समानान्तर चतुर्भुज के गुणों के बारे में जानेंगे।

इसे कीजिए :

एक कागज़ के टुकडे से समानान्तर चतुर्भुज काटिए और पुनः असके एक कर्ण के साथ काटिए। तुम्हें किस प्रकार के आकार प्राप्त हुए? इन त्रिभुजों के बारे में तुम क्या कहते हो?

एक त्रिभुज के ऊपर दूसरा त्रिभुज रखिए। क्या तुम प्रत्येक भुजा के ऊपर दूसरी भुजा ठीक तरह से रख सकते हैं? भुजाएँ समान करने के लिए तुम्हे त्रिभुज को घुमाना आवश्यक है। क्योंकि दो त्रिभुज यथार्थ रूप से समान है त्रिभुज एक दुसरे के सर्वसमान है।

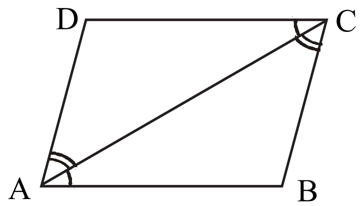
कुछ और समानान्तर चतुर्भुज के साथ यह कीजिए। काटने के लिए तुम किसी भी कर्ण का चयन कर सकते हैं।

हम देखते हैं कि समांतर चतुर्भुज का प्रसेक कर्ण इसे दो सर्वसमान त्रिभुज में विभाजित करता है।

अब हम यह परिणाम सिद्ध करेंगे।

प्रमेय-8.1 : समांतर चतुर्भुज का कर्ण इसे दो सर्वसमान त्रिभुजों में विभाजित करता है।

उपपत्ति : मान लीजिए ABCD समांतर चतुर्भुज है।



A और C मिलाईए। समांतर चतुर्भुज का कर्ण AC है।

चूँकि $AB \parallel DC$ और AC तिर्यक रेखा है,

$\angle DCA = \angle CAB$. (एकांतर अंतःकोण)

इसी तरह, $DA \parallel CB$ और AC तिर्यक रेखा है। इसलिए $\angle DAC = \angle BCA$.

ΔACD और ΔCAB में,

$\angle DCA = \angle CAB$ और $\angle DAC = \angle BCA$

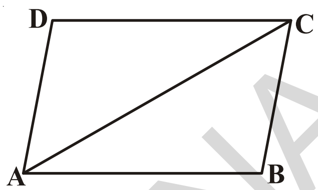
और $AC = CA$. (उभयनिष्ठ भुजा)

इसलिए $\Delta ABC \cong \Delta CDA$.

इसका अर्थ दो त्रिभुज कोण भुजा कोण ASA नियम द्वारा सर्वसमान होते हैं। अर्थात् कर्ण AC, समांतर चतुर्भुज को दो सर्वसमान त्रिभुज में विभाजित करता है।

प्रमेय-8.2 : समांतर चतुर्भुज में, सम्मुख भुजाएँ तथा सम्मुख कोण बराबर होती है।

उपपत्ति : पहले ही हमने सिद्ध किया है कि समांतर चतुर्भुज के कर्ण उसे दो सर्वसमान त्रिभुज में विभाजित करते हैं।



इस तरह आकृति में $\Delta ACD \cong \Delta CAB$

इसलिए $AB = DC$ और $\angle CBA = \angle ADC$

तथा $AD = BC$ और $\angle DAC = \angle ACB$

$\angle CAB = \angle DCA$

$\therefore \angle ACB + \angle DCA = \angle DAC + \angle CAB$

अर्थात् $\angle DCB = \angle DAB$

इस तरह समान्तर चतुर्भुज में,

i. सम्मुख भुजाएँ बराबर होती है।

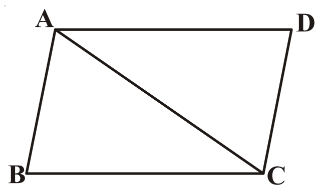
ii. सम्मुख कोण भी बराबर होते हैं।

हमने सिध्द किया है कि उत्तल चतुर्भुज जिसकी सम्मुख भुजाएँ समांतर है, हम बता सकते हैं कि सम्मुख भुजाएँ और सम्मुख कोण बराबर होते हैं।

अब हम यह बताने का प्रयत्न करेंगे कि हम इसका विलोम सिद्ध कर सकते हैं। अर्थात् यदि किसी चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ बराबर हो तो वह समान्तर चतुर्भुज होगा।

प्रमेय-8.3 : यदि किसी चतुर्भुज के सम्मुख भुजाओं का प्रत्येक युग्म समान हो तो वह समांतर चतुर्भुज होगा।

उपपत्ति : ज्ञात है कि चतुर्भुज ABCD में $AB = DC$ और $BC = AD$.



कर्ण AC खींचिए।

ΔABC और ΔCDA में

$BC = AD$, $AB = DC$ और $AC = CA$ (उभयनिष्ठ भुजा)

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta CDA$

इसलिए $\angle BCA = \angle DAC$ और AC तिर्यक रेखा है।

अथवा $AB \parallel DC$ ...(1)

चूँकि $\angle ACD = \angle CAB$ और CA तिर्यक रेखा है।

$\therefore BC \parallel AD$ (ज्ञात है) ...(2)

इसलिए, ABCD समांतर चतुर्भुज है,.... (1) और (2) द्वारा

अभी तुमने देखा कि समांतर चतुर्भुज में सम्मुख भुजाओं के दोनों युग्म बराबर होते हैं और विलोमतः यदि किसी चतुर्भुज के सम्मुख भुजाओं के दोनों युग्म बराबर हो तो वह समांतर चतुर्भुज होता है।

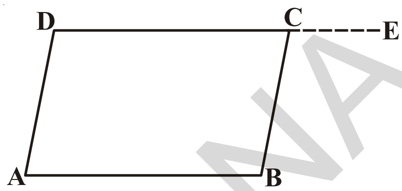
क्या हम इसी तथ्य को उन चतुर्भुजों के लिए बता सकते हैं जिनके सम्मुख कोणों के युग्म बराबर होते हैं?

प्रमेय-8.4 : किसी चतुर्भुज में, यदि सम्मुख कोणों का प्रत्येक युग्म बराबर हो तो वह समान्तर चतुर्भुज होगा।

उपपत्ति : चतुर्भुज ABCD में $\angle A = \angle C$ और $\angle B = \angle D$ तो सिद्ध करना है कि ABCD समान्तर चतुर्भुज है।

ज्ञात है कि $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$

$$\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = \frac{360°}{2}$$



$\therefore\ \angle A + \angle B = 180°$

DC को E तक बढाईए

$\angle BCD + \angle BCE = 180°$ अतः $\angle BCE = \angle ADC$

यदि $\angle BCE = \angle ADC$ तब $AD \parallel BC$ (क्यों?)

DC छेदी रेखा है।

इसी तरह हम बता सकते हैं कि $AB \parallel DC$ अर्थात् ABCD समान्तर चतुर्भुज है।

अभ्यास - 8.2

1. संलग्न आकृति में ABCD समान्तर चतुर्भुज है। ABEF एक आयत है। वो बताईए कि $\Delta AFD \cong \Delta BEC$.

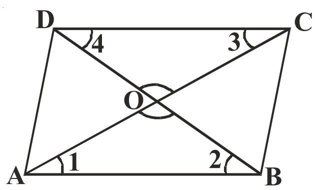
2. बताईए कि समचतुर्भुज के कर्ण, इसे चार सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करते हैं।
3. चतुर्भुज ABCD में, $\angle C$ का समद्विभाजक और $\angle D$ का समद्विभाजक O पर प्रतिच्छेदित होते है तो सिद्ध कीजिए कि $\angle COD = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$

8.5 समान्तर चतुर्भुज के कर्ण (Diagonals of a Parallelogram)

प्रमेय-8.5 : समान्तर चतुर्भुज के कर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

उपपत्ति : समान्तर चतुर्भुज ABCD बनाईए।

इसके दोनों कर्ण AC और BD खींचिए जो बिन्दु 'O' पर मिलते हैं। एक दुसरे को प्रतिच्छेदित करते है।



ΔOAB और ΔOCD में

बने हुए कोणों को $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4$ से चिन्हित कीजिए।

$\angle 1 = \angle 3$ ($AB \parallel CD$ और AC तिर्यक छेदी रेखा है।)

$\angle 2 = \angle 4$ (क्यों?) (एकान्तर अंतःकोण)

और $AB = CD$ (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजायें)

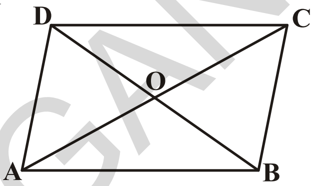
$\therefore$ कोण भुजा कोण ASA नियम द्वारा

$\Delta OCD \cong \Delta OAB$

$\therefore$ CO= OA, DO = OB अथवा कर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

अतः हमें जाँच करना चाहिए कि क्या इसका विलोम भी सही होगाव इसका विलोम है : यदि किसी चतुर्भुज के कर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं तो वह समान्तर चतुर्भुज होगा।

प्रमेय-8.6 : यदि किसी चतुर्भुज के कर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं तो वह समान्तर चतुर्भुज होता है।



उपपत्ति : ABCD चतुर्भुज है।

AC और BD कर्ण है जो 'O' पर प्रतिच्छेदित होते है

इसलिए OA = OC और OB = OD.

सिद्ध कीजिए कि ABCD समानान्तर चतुर्भुज है।

(**संकेत** : ΔAOB और ΔCOD को ध्यानपूर्वक देखिए। क्या ये सर्वांगसम त्रिभुज है? यदि है तब ABCD समानता चर्तुभुज कैसे हो सकते है।)

8.5.1 कुछ और ज्यामितीय कथन

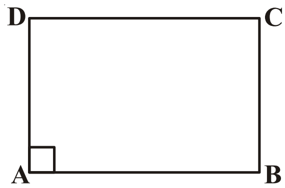
पूर्व उदाहरणों में हमने बताया है कि कुछ सामान्य परिसरों द्वारा आरंभ करते हुए हम हमने कई कथनों को ज्ञात किया जिससे हम विशेष आकृति (समांतर चतुर्भुज) के बारे में बता सकते हैं। हम नये कथन व्यूत्पन्न करने के लिए पूर्व परिणामों का उपयोग करते हैं। ध्यान दीजिए कि इन कथनों को नापों द्वारा जाँच करना आवश्यक नहीं है क्यों कि यह कथन, सभी स्थितियों में सही सिध्द किए गए है।

ऐसे कथन जो पूर्व सिद्ध किए हुए प्रमेयो द्वारा व्युत्पन्न किया जाते हैं, उन्हें उपप्रमेय कहा जाता है। उपप्रमेय वह कथन है जिसकी सत्यता किसी स्थापित प्रमेय द्वारा आसानी से सिद्ध होती है।

उपप्रमेय-1 : बताईए कि आयत का प्रत्येक कोण समकोण होता है।

हल : आयत, एक समांतर चतुर्भुज है जिसमें एक कोण समकोण है।

दिया गया है : ABCD आयत है। माना कि एक कोण $\angle A = 90^o$



हमें बताना है कि $\angle B = \angle C = \angle D = 90^o$

उपपत्ति : यूँकि ABCD समांतर चतुर्भुज है,

$AD \parallel BC$ और AB तिर्यक रेखा है।

इसलिए $\angle A + \angle B = 180^o$ (तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंतःकोण)

$\angle A = 90^o$ (दिया है)

$\therefore \angle B = 180^o - \angle A$

$= 180^o - 90^o = 90^o$

अब $\angle C = \angle A$ और $\angle D = \angle B$ (समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण)

इसलिए $\angle C = 90^o$ और $\angle D = 90^o$.

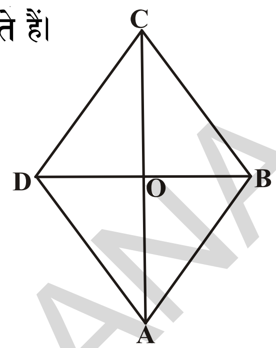
इसलिए आयत का प्रत्येक कोण समकोण होता है।

उपप्रमेय-2 : बताईए कि समचतुर्भुज के कर्ण एक दूसरे पर लम्ब रहते हैं।

उपपत्ति : समचतुर्भुज एक समान्तर चतुर्भुज रहता है जिसकी सभी भुजाएँ बराबर होती है।

ABCD समचतुर्भुज है। कर्ण AC और BD आपस में O पर प्रतिच्छेद करते हैं।

हम बताना चाहते हैं कि AC रेखा BD पर लम्ब है।



ΔAOB और ΔBOC में,

$OA = OC$ (समांतर चतुर्भुज के कर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।)

$OB = OB$ (ΔAOB और ΔBOC की उभयनिष्ठ भुजा)

$AB = BC$ (समचतुर्भुज की भुजाएँ)

इसलिए $\Delta AOB \cong \Delta BOC$ (भुजा भुजा भुजा (S.S.S.) नियम)

अतः $\angle AOB = \angle BOC$

परन्तु $\angle AOB + \angle BOC = 180^\circ$ (रैखिक युग्म कोण)

इसलिए $2\angle AOB = 180^\circ$

अथवा $\angle AOB = \dfrac{180^\circ}{2} = 90^\circ$

इसी प्रकार से $\angle BOC = \angle COD = \angle AOD = 90^\circ$ (वही कोण)

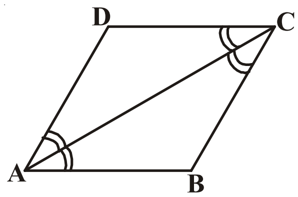
अतः रेखा AC, रेखा BD पर लंब रहती है।

इसलिए, समचतुर्भुज के कर्ण एक दूसरे पर लम्ब रहते हैं।

उपप्रमेय-3 : समान्तर चतुर्भुज ABCD में, यदि कर्ण AC, कोण A को समद्विभाजित करता हो तो वह समचतुर्भुज होगा।

उपपत्ति : ABCD समान्तर चतुर्भुज है।

इसलिए AB || DC. तिर्यक रेखा AC कोण $\angle A$ और कोण $\angle C$ को प्रतिच्छेदित करती है।



$\therefore \angle BAC = \angle DCA$ (अंतः एकान्तर कोण) ...(1)

और $\angle BCA = \angle DAC$ ...(2)

परन्तु दिया है कि AC, कोण $\angle A$ को समद्विभाजित करती है।

इसलिए $\angle BAC = \angle DAC$

$\therefore \angle DCA = \angle DAC$ ...(3)

इस तरह AC, कोण $\angle C$ को भी समद्विभाजित करती है।

(1), (2), (3) से हमें ज्ञात होगा,

$\angle BAC = \angle BCA$

ΔABC में, $\angle BAC = \angle BCA$ का अर्थ है कि $BC = AB$ (समद्विबाहु त्रिभुज)

परन्तु $AB = DC$ और $BC = AD$ (समांतर चतुर्भुज ABCD की सम्मुख भुजाएँ)

$\therefore \; AB = BC = CD = DA$

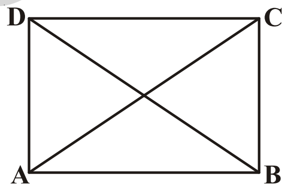
अतः, ABCD समचतुर्भुज है।

उपप्रमेय-4 : बताईए कि आयत के कर्ण समान लम्बाई के होते हैं।

उपपत्ति : ABCD आयत है और AC और BD इसके कर्ण है।

हमें सिद्ध करना है, $AC = BD$

ABCD आयत है, इसका अर्थ है कि ABCD समांतर चतुर्भुज है जिसका प्रत्येक कोण समकोण के बराबर है।



ΔABC और ΔBAD में,

$AB = BA$ (उभयनिष्ठ)

$\angle B = \angle A = 90^o$ (आयत का प्रत्येक कोण)

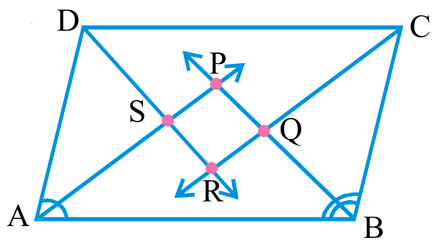
$BC = AD$ (आयत की सम्मुख भुजाएँ)

इसलिए, $\Delta ABC \cong \Delta BAD$ (भुजा कोण भुजा नियम)

इसका तात्पर्य है कि $AC = BD$

अर्थात् आयत के कर्ण बराबर होते हैं।

उपप्रमेय-5 : बताईए कि समांतर चतुर्भुज के कोण समद्विभाजक, एक आयत बनाते हैं।



उपपत्ति : ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है। $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ और $\angle D$ के कोण समद्विभाजक P, Q, R, S पर प्रतिच्छेद करते हैं जिससे एक चतुर्भुज बनता है। (संलग्न आकृति देखिए)

यूँकि ABCD समांतर चतुर्भुज है, $AD \parallel BC$ और AB तिर्यक छेदी रेखा है तब $\angle DAB + \angle ABC = 180^o$ (समांतर चतुर्भुज के क्रमिक कोण)

हम जानते हैं $\angle BAP = \frac{1}{2}\angle BAD$ और $\angle ABP = \frac{1}{2}\angle ABC$ [क्यों कि $\angle A$ और $\angle B$ के समद्विभाजक क्रमशः AP और BP है।]

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\angle BAD + \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{1}{2}\times 180^o$$

अथवा $\angle BAP + \angle ABP = 90^o \quad ...(1)$

परन्तु ΔAPB में,

$$\angle BAP + \angle APB + \angle ABP = 180^\circ \text{ (त्रिभुज का कोण-योग गुण)}$$

इसलिए $\angle APB = 180^\circ - (\angle BAP + \angle ABP)$

$\Rightarrow \angle APB = 180^\circ - 90^\circ$ ((1) से)

$= 90^\circ$

हम देख सकते हैं कि $\angle SPQ = \angle APB = 90^\circ$

इसी प्रकार, हम बता सकते हैं कि $\angle CRD = \angle QRS = 90^\circ$ (उपरोक्त

परन्तु $\angle BQC = \angle PQR$ और $\angle DSA = \angle PSR$ (क्यों?)

$\therefore \angle PQR = \angle QRS = \angle PSR = \angle SPQ = 90^\circ$

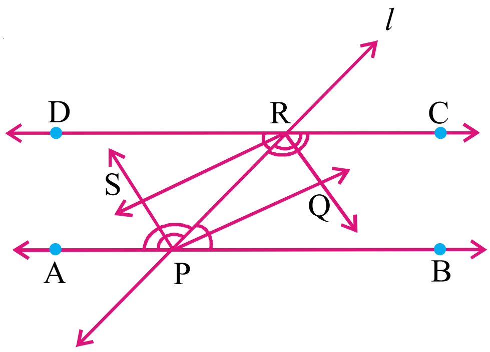
अतः PQRS के सभी चार कोण 90° के बराबर हैं।

इसलिए हम कह सकते हैं कि PQRS आयत है।

विचार विमर्श कीजिए और लिखिए :

1. बताईए कि वर्ग के कर्ण समान और एक दूसरे को **समकोण पर** समद्विभाजित करते हैं।
2. बताईए कि समचतुर्भुज के कर्ण, उसे चार सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करते हैं।

कुछ व्याख्यात्मक उदाहरण :



उदाहरण-5. $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{DC}$ दो समानांतर रेखाएँ और तिर्यक रेखा l, $\overleftrightarrow{AB}$ को P पर और $\overleftrightarrow{DC}$ को R पर प्रतिच्छेदित करती है। सिद्ध कीजिए कि अंतःकोणों के समद्विभाजक एक आयत बनाते हैं।

उपपत्ति : $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$, तिर्यक रेखा l, $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{DC}$ को क्रमशः P और R पर प्रतिच्छेदित करती है।

माना कि $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{RQ}$, $\overrightarrow{RS}$ और $\overrightarrow{PS}$ क्रमशः $\angle RPB$, $\angle CRP$, $\angle DRP$ और $\angle APR$ के समद्विभाजक है।

$\angle BPR = \angle DRP$ (एकांतर अंतः कोण) ...(1)

परन्तु $\angle RPQ = \frac{1}{2}\angle BPR$ ($\angle BPR$ का समद्विभाजक $\overrightarrow{PQ}$ है।)

इसी तरह $\angle PRS = \frac{1}{2}\angle DRP$ ($\angle DPR$ का समद्विभाजक $\overrightarrow{RS}$ है।) ...(2)

(1) और (2) से

$\angle RPQ = \angle PRS$

रेखाएँ $\overrightarrow{PQ}$ और $\overrightarrow{RS}$ के साथ $\overline{PR}$ द्वारा बने हुए ये एकांतर अन्तःकोण है।

$\therefore \quad \overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{RS}$

इसी तरह

$\angle PRQ = \angle RPS$, अतः $\overrightarrow{PS} \parallel \overrightarrow{RQ}$

इसलिए PQRS समांतर चतुर्भुज है। ... (3)

हमें ज्ञात है $\angle BPR + \angle CRP = 180^o$ ($\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$ और तिर्यक छेदी रेखा l के एक ही और के अतःकोण)

$\frac{1}{2}\angle BPR + \frac{1}{2}\angle CRP = 90^o$

$\Rightarrow \angle RPQ + \angle PRQ = 90^o$

परन्तु Δ PQR में,

$\angle RPQ + \angle PQR + \angle PRQ = 180^o$ (त्रिभुज के तीन कोण)

$\angle PQR = 180^o - (\angle RPQ + \angle PRQ)$

$= 180^o - 90^o = 90^o$ ... (4)

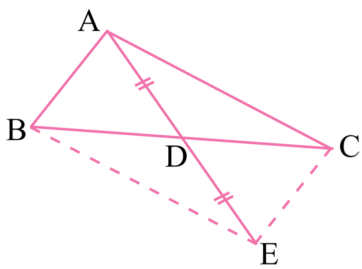
(3) और (4) से

PQRS समांतर चतुर्भुज है जिसका एक कोण समकोण है।

अतः PQRS आयत है।

उदाहरण-6. त्रिभुज ABC में, भुजा BC पर खींची गई माध्यिका AD है जो E तक इस प्रकार बढाई गई है कि AD = ED. सिद्ध कीजिए कि ABEC समांतर चतुर्भुज रहता है।

उपपत्ति : Δ ABC की माध्यिका AD है।



AB को E तक इस प्रकार बढाए कि AD = ED

BE और CE मिलाए।

अब Δ^s ABD और ECD में,

BD = DC (BC का मध्य बिन्दु D है)

$\angle ADB = \angle EDC$ (शीर्षाभिमुख कोण)

AD = ED (दिया है।)

इसलिए $\Delta ABD \cong \Delta ECD$ (भुजा कोण भुजा नियम)

इसलिए, AB = CE (सर्वसमान त्रिभुजों के मेल खाने वाले भाग (CPCT))

इसी तरह $\angle ABD = \angle ECD$

रेखाएँ $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{CE}$ रेखाओं के साथ तिर्यक रेखा $\overleftrightarrow{BC}$ द्वारा बने हुए ये एकांतर अन्तःकोण है।

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CE}$

इस प्रकार, चतुर्भुज ABEC में,

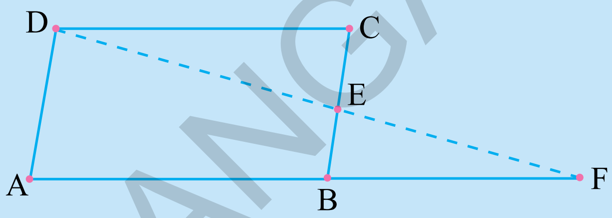
AB || CE और AB = CE

अतः ABEC समांतर चतुर्भुज है।

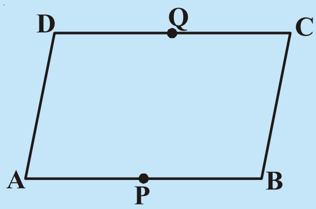
अभ्यास - 8.3

1. समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण $(3x - 2)^o$ और $(x + 48)^o$ है। समांतर चतुर्भुज के प्रत्येक कोण का माप ज्ञात कीजिए।

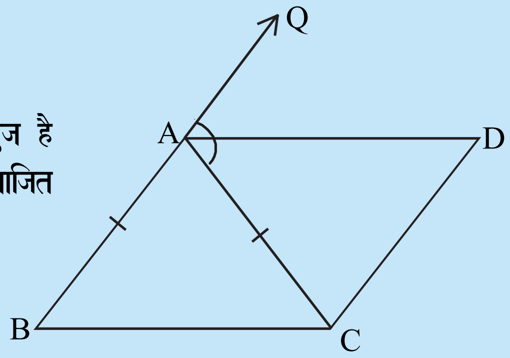
2. समांतर चतुर्भुज के सभी कोणों के माप ज्ञात कीजिए यदि इसका एक कोण, न्यूनतम कोण के दुगुने से 24^o कम है।



3. संलग्न आकृति में ABCD, एक समांतर चतुर्भुज है और भुजा BC का मध्यबिन्दु E है। यदि DE और AB, बिन्दु F पर मिलने तक बढाए तो बताईए कि AF = 2AB.



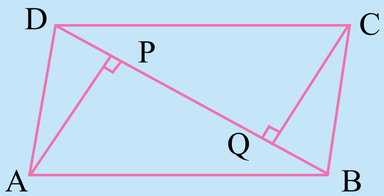
4. संलग्न आकृति में ABCD समांतर चतुर्भुज है। भुजाएँ AB और DC के मध्यबिन्दु क्रमशः P और Q है। बताईए कि PBCQ भी समांतर चतुर्भुज होगा।



5. आकृति के अनुसार ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें AB = AC, बाह्यकोण QAC को AD समद्विभाजित करता है और CD || BA तो बताईए कि

   (i) $\angle DAC = \angle BCA$

   (ii) ABCD समान्तर चतुर्भुज है।



6. ABCD समान्तर चतुर्भुज है। कर्ण BD पर शीर्ष A और C से AP और CQ लंब खींचे। (आकृति देखिए) बताईए कि

   (i) $\Delta APB \cong \Delta CQD$

   (ii) AP = CQ

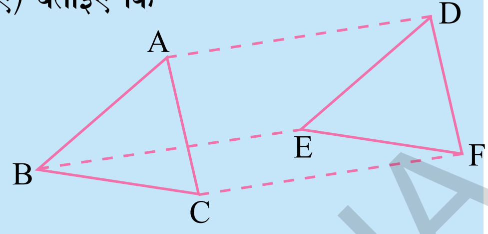
7. Δ^s ABC और DEF में AB = DE; BC = EF और BC || EF; शीर्ष A, B और C क्रमशः D, E और F शीर्षों के साथ मिलाया गया है तो । (आकृति देखिए) बताईए कि

   (i) ABED समांतर चतुर्भुज है।

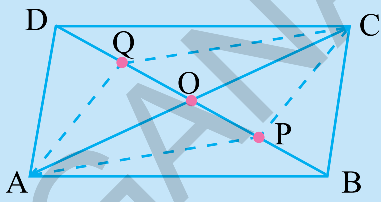
   (ii) BCFE समांतर चतुर्भुज है।

   (iii) AC = DF

   (iv) $\Delta ABC \cong \Delta DEF$



8. ABCD समांतर चतुर्भुज है। कर्ण AC और BD आपस में O पर प्रतिच्छेद करते हैं। कर्ण BD को समत्रिभाग में विभाजित करनेवाले बिन्दु P और Q है। सिद्ध कीजिए कि CQ || AP और AC, रेखा PQ को समद्विभाजित करती है। (आकृति देखिए)



9. ABCD वर्ग है। AB, BC, CD और DA के मध्यबिन्दु क्रमशः E, F, G और H है। AE = BF = CG = DH तो सिद्ध कीजिए EFGH वर्ग है।

8.6 त्रिभुज का मध्यबिन्दु प्रमेय

हमने त्रिभुज और चतुर्भुज के गुणधर्मों को सिखा है। त्रिभुज के भुजाओं के मध्यबिन्दुओं को ध्यानपूर्वक देखिए और इनसे हम क्या व्युत्पन्न कर सकते हैं, प्रयत्न कीजिए।

यह क्रिया कलाप कीजिए :

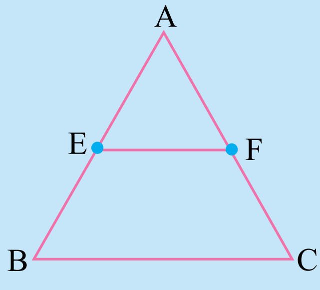
एक त्रिभुज ABC बनाईए और इसकी दो भुजाएँ $\overline{AB}$ और $\overline{AC}$ के मध्यबिन्दुओं को क्रमशः E और F से चिन्हित कीजिए। आकृति में दिखाए जैसे बिन्दु E और F मिलाइए।

त्रिभुज की तिसरी भुजा और EF मापिए। इसी तरह $\angle AEF$ और $\angle ABC$ मापिए।

हम जानते हैं कि $\angle AEF = \angle ABC$ और $\overline{EF} = \frac{1}{2}\overline{BC}$

चूँकि रेखाएँ EF और BC के साथ तिर्यक रेखा AB द्वारा बने हुए ये संगत कोण है, हम कहते हैं कि EF || BC.

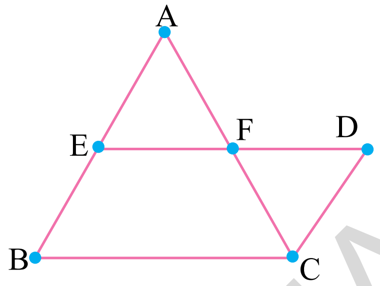
यह क्रियाकलाप कुछ और त्रिभुजों के लिए कीजिए।



इस प्रकार हम निम्न प्रमेय के निष्कर्ष पर आते हैं।

प्रमेय-8.7 : किसी त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्यबिन्दुओं को मिलानेवाली रेखा तीसरी भुजा के समान्तर और उसका आधी होती है।

दिया है : ΔABC में AB और AC के मध्यबिन्दु क्रमशः E और F है।



हमें सिद्ध करना है : (i) $EF \parallel BC$ (ii) $EF = \frac{1}{2}BC$

रचना :- EF मिलाए और D तक इस प्रकार बढ़ाइए कि C से BA को खींची गई समानांतर रेखा इसे स्पर्श करें

Δ^s AEF और ΔCDF में

$AF = CF$ (AC का मध्यबिन्दु F है।)

$\angle AFE = \angle CFD$ (शीर्षाभिमुख कोण)

तथा $\angle AEF = \angle CDF$ ($CD \parallel BA$ और तिर्यक रेखा ED से बने एकांतर अंतःकोण)

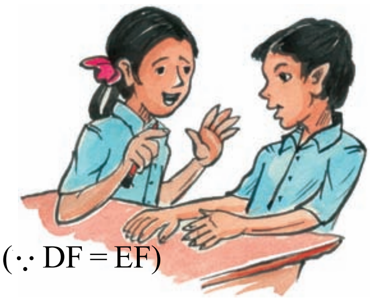
कोण भुजा कोण (A.S.A) सर्वांगसमता नियम द्वारा

$\therefore \Delta AEF \cong \Delta CDF$

इस तरह $AE = CD$ और $EF = DF$ (सर्वांगसम त्रिभुजों के मेल खानेवाले भाग (CPCT))

हम जानते हैं $AE = BE$

इसलिए $BE = CD$



चूँकि $BE \parallel CD$ और $BE = CD$, BCDE समानान्तर चतुर्भुज है।

इसलिए $ED \parallel BC$

$\Rightarrow EF \parallel BC$

इस तरह BCDE समांतर चतुर्भुज है, $ED = BC$ (क्यों?) ($\because DF = EF$)

परन्तू हमने बताया है, $FD = EF$

$\therefore 2EF = BC$

अतः $EF = \frac{1}{2}BC$

हम देख सकते हैं कि इस प्रमेय का विलोम भी सत्य है। प्रथम इसकी व्याख्या करते हैं तत्पश्चात इसे कैसे सिद्ध करते हैं, देखेंगे।

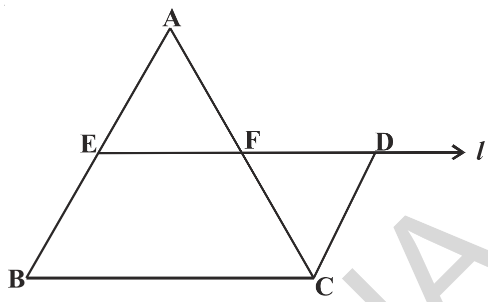
प्रमेय-8.8 : किसी त्रिभुज की एक भुजा के मध्यबिन्दु से होकर दूसरी भुजा के समानांतर खींची गई रेखा तीसरी भुजा के मध्यबिन्दु पर प्रतिच्छेदित करती है।

उपपत्ति : ΔABC बनाईए। भुजा AB के मध्यबिन्दु को 'E' से चिन्हित कीजिए। E से गुजरनेवाली और BC के समानान्तर रेखा l खींचिए। रेखा AC को F पर प्रतिच्छेदित करती है।

$CD \parallel BA$ की रचना कीजिए।

हमें बताना है कि $AF = CF$

ΔAEF और ΔCFD को ध्यानपूर्वक देखिए :



$\angle EAF = \angle DCF$ (BA || CD और AC तिर्यक छेदी रेखा है।) (कैसे?)

$\angle AEF = \angle D$ (BA || CD और ED तिर्यक छेदी रेखा है।) (कैसे?)

हम त्रिभुजों की सर्वांगसमता सिद्ध नही कर सकते क्यों कि दोनों त्रिभुजों में भुजाओं का कोई भी युग्म बराबर नही बताया गया?

यह बताने के लिए मान लीजिए EB || DC

और ED || BC

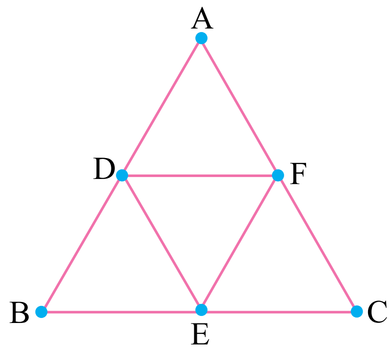
इस तरह EDCB समांतर चतुर्भुज हुआ और हमें पता है, BE = DC.

यूँकि BE = AE इसलिए AE = DC.

अतः $\Delta AEF \cong \Delta CFD$

$\therefore$ AF = CF

कुछ और उदाहरण :



उदाहरण-7. ΔABC की भुजाओं AB, BC और CA के मध्यबिन्दु क्रमशः D, E और F हैं। बताईए कि ΔABC चार सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित होता है, जब तीनों मध्यबिन्दु एक दूसरे के साथ जोड़ा जाता है। (ΔDEF मध्यवर्ती त्रिभुज कहलाता है।)

उपपत्ति : ΔABC की भुजाएँ $\overline{AB}$ और $\overline{BC}$ के मध्यबिन्दु क्रमशः D और E है।

इसलिए मध्यबिन्दु प्रमेय से,

DE || AC

इसी प्रकार DF || BC और EF || AB.

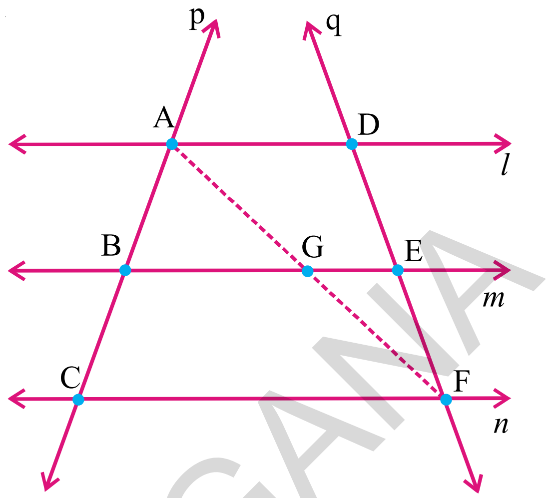
इसलिए ADEF, BEFD, CFDE सभी समांतर चतुर्भुज है।

समांतर चतुर्भुज ADEF में DF कर्ण है।

$\therefore \Delta ADF \cong \Delta DEF$ (कर्ण, समांतर चतुर्भुज को दो सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करता है।)

इसी प्रकार $\Delta BDE \cong \Delta DEF$

और $\Delta CEF \cong \Delta DEF$



इसलिए, सभी चारों त्रिभुज सर्वांगसम हैं।

हमने सिद्ध किया कि त्रिभुज ABC के भुजाओं के मध्यबिन्दुओं को जोड़ने से, वह चार सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित होता है।

उदाहरण-8. l, m, n तीन समानान्तर रेखाएँ जिन्हें तिर्यक छेदी रेखाएँ p और q क्रमशः A, B, C और D,E, F पर इस प्रकार काटती है कि उनके द्वारा तिर्यक छेदी रेखा p पर काटे गये अन्तःखण्ड AB और BC बराबर है। बताईए कि q पर काटे गये अन्तःखण्ड DE और EF भी बराबर होंगे।

उपपत्ति : हमें AB और BC की समता को दर्शाना हैं जो DE और EF की तुलना के लिए आवश्यक है। हम A से F तक जोड़ते हैं और 'm' पर स्थित प्रतिच्छेद बिन्दु को 'G' से चिन्हित करते है।

ΔACF में, AB = BC (दिया है।)

इसलिए AC का मध्यबिन्दु B है।

और BG || CF (कैसे?)

इसलिए AF का मध्यबिन्दु G है। (त्रिभुज के मध्यबिन्धु प्रमेय से)

अब Δ AFD में, भी इसी तथ्य का उपयोग करते हैं क्यों कि AF का मध्यबिन्दु G है और GE || AD, DF का मध्यबिन्दु E है।

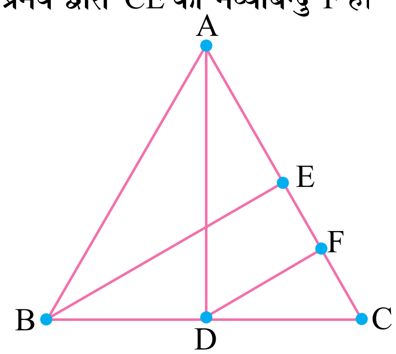
इस तरह DE = EF.

अतः q पर भी l, m, n द्वारा काटे गए अन्तः खण्ड बराबर होते हैं।

उदाहरण-9. आकृति में, ΔABC की माध्यिकाएँ AD और BE है और BE || DF तो सिद्ध कीजिए कि

$$CF = \frac{1}{4} AC.$$

उपपत्ति : यदि Δ ABC में BC का मध्यबिन्दु D है और BE || DF; प्रमेय द्वारा CE का मध्यबिन्दु F है।



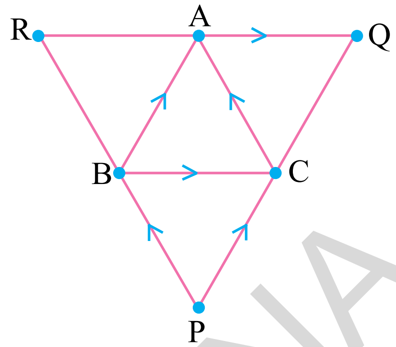
$$\therefore CF = \frac{1}{2} CE$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} AC\right) \text{ (कैसे?)}$$

अतः $CF = \frac{1}{4} AC$.

उदाहरण-10. ABC एक त्रिभुज है और बिन्दु A, B, C से क्रमशः BC, CA और AB को समानान्तर रेखाएँ खींची जो P, Q और R पर प्रतिच्छेद करती हैं। सिद्ध कीजिए कि ΔPQR का परिमाप ΔABC के परिमाप से दुगुना होगा।

उपपत्ति : AB || QP और BC || RQ इसलिए ABCQ समांतर चतुर्भुज है।



इसी प्रकार BCAR, ABPC समांतर चतुर्भुज हैं।

$\therefore$ BC = AQ और BC = RA

$\Rightarrow$ QR का मध्यबिन्दु A है।

इसी प्रकार PR और PQ के मध्यबिन्धु क्रमशः B और C है।

$\therefore AB = \frac{1}{2}PQ; \quad BC = \frac{1}{2}QR$ और $CA = \frac{1}{2}PR$ (कैसे?)

(संबंधित प्रमेय का कथन कीजिए)

अब ΔPQR का परिमाप $= PQ + QR + PR$

$= 2AB + 2BC + 2CA$

$= 2(AB + BC + CA)$

$= 2$ (ΔABC का परिमाप).

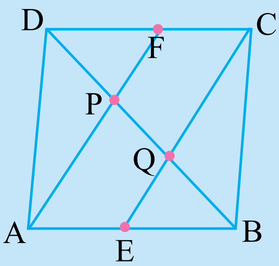
अभ्यास - 8.4

1. ABC त्रिभुज है। AB पर D बिन्दु इस प्रकार है कि $AD = \frac{1}{4}AB$ और AC पर E बिन्दु इस प्रकार है कि

   $AE = \frac{1}{4}AC$. यदि DE = 2 से.मी. तो BC ज्ञात कीजिए।

2. ABCD चतुर्भुज है। AB, BC, CD और DA के मध्यबिन्दु क्रमशः E, F, G और H हैं। सिद्ध कीजिए कि EFGH एक समांतर चतुर्भुज है।

3. बताईए कि समचतुर्भुज के भुजाओं के मध्यबिन्दुओं को जोड़ने पर बनाने वाली आकृति एक आयत होती है।



4. समांतर चतुर्भुज ABCD में, भुजाएँ AB और DC के मध्यबिन्दु क्रमशः E और F है। बताईए कि रेखाखण्ड AF और EC, कर्ण BD को समत्रि भागों में विभाजित करती है।

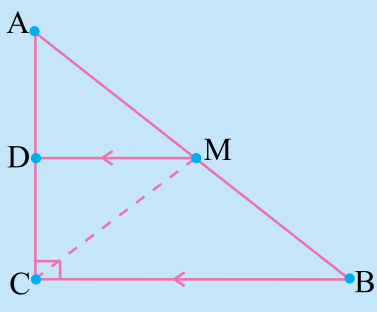
5. बताईए कि चतुर्भुज के सम्मुख भुजाओं के मध्यबिन्दुओं को जोड़ने वाले रेखाखण्ड एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

6. त्रिभुज ABC में C पर समकोण है। कर्ण AB का मध्यबिन्दु M से गुजरनेवाली रेखा जो BC को समानांतर है, AC को D पर प्रतिच्छेदित करती है। बताईए कि

   (i) AC का मध्यबिन्दु D है।

   (ii) $MD \perp AC$

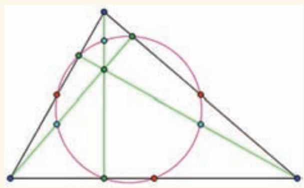
   (iii) $CM = MA = \frac{1}{2}AB$.



हमने क्या सीखा?

1. एक चतुर्भुज, किसी समतल में चार रेखाओं द्वारा बनी हुई सरल बंद आकृति है।
2. चतुर्भुज में चारों कोणों का योग 360^0 अथवा 4 समकोण होता है।
3. समलंब चतुर्भुज, समांतर चतुर्भुज, समचतुर्भुज, आयत, वर्ग, तथा पतंगाकृति में चतुर्भुज के विशिष्ट प्रकार हैं।
4. समांतर चतुर्भुज यह चतुर्भुज का विशेष प्रकार है जिसके कई गुणधर्म है। हमने निम्न प्रमेयों को सिद्ध किया है।
    a) समांतर चतुर्भुज का कर्ण उसे दो सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करता है।
    b) समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ और कोण बराबर होते हैं।
    c) यदि किसी चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ और कोण बराबर होते हैं।
    d) यदि किसी चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं का प्रत्येक युग्म बराबर हो तो वह समांतर चतुर्भुज होता है।
    e) समांतर चतुर्भुज के कर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।
    f) यदि किसी चतुर्भुज के कर्ण आपस में समद्विभाजित करते हैं तब वह समांतर चतुर्भुज होता है।
5. त्रिभुज का मध्यबिन्दु प्रमेय तथा उसका विलोमः
    a) किसी त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्यबिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा तीसरी भुजा के समानान्तर उसकी आधी होती है।
    b) किसी त्रिभुज की एक भुजा के मध्यबिन्दु से होकर दूसरी भुजा के समानान्तर खींची गई रेखा तीसरी भुजा के समद्विभाजित करती है।

नौ बिन्दु वृत्त



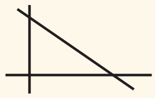
किसी त्रिभुज में, भुजाओं के मध्यबिन्दु, उँचाईयों के आधार और लम्ब केन्द्र से शीर्षों तक रेखाखण्डों के मध्यबिन्दु वृत्त पर स्थित होते हैं। कुल कितने बिन्दु, वृत्त पर स्थित हैं? इसे नौ बिन्दु वृत्त कहते हैं।

यह नौ बिन्दु वृत्त परिणाम, 1765 में लिओहार्ड आयलर (Leonhard Euler) को ज्ञात हुआ था। परन्तु 1822 में जर्मन गणितज्ञ कार्ल फिअरबॅच (Karl Feuerbach) द्वारा पुनःशोध किया गया।

बुद्धि का खेल

त्रिभुजों की पहेली का निर्माण :

1. दिये गये चित्र में दो सरल रेखाओं को जोड़कर दस त्रिभुजों का निर्माण कीजिए ।



2. 16 से.मी. लम्बाई और 9 से.मी. चौडाई वाले एक कागमज के टुकडे को लेकर उसको दो समान भागों में काटकार, उन्हें वर्गाकार रूप में जोडिए ।