(v) এক ব্যক্তি একটি ব্যাংকে 100 টাকা জমা রেখে, 2 বছর পর সমূল চক্রবৃদ্ধি পেলেন 121 টাকা। বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি সুদের হার

(a) 10% (b) 20% (c) 5% (d) $10\frac{1}{2}$%

(B) নীচের বিবৃতিগুলি সত্য না মিথ্যা লিখি :

(i) নির্দিষ্ট পরিমাণ টাকার বার্ষিক নির্দিষ্ট শতকরা হার সুদে নির্দিষ্ট সময়ের জন্য চক্রবৃদ্ধি সুদ সরল সুদের থেকে কম হবে।

(ii) চক্রবৃদ্ধি সুদের ক্ষেত্রের নির্দিষ্ট সময় অন্তর সুদ আসলের সঙ্গে যোগ হয়। সেই কারণে আসলের পরিমাণ ক্রমাগত বাড়তে থাকে।

(C) শূন্যস্থান পূরণ করি :

(i) নির্দিষ্ট পরিমাণ টাকার বার্ষিক নির্দিষ্ট শতকরা হার সুদে 1 বছরে চক্রবৃদ্ধি সুদের পরিমাণ এবং সরল সুদের পরিমাণ ________।

(ii) সময়ের সঙ্গে কোনো কিছুর নির্দিষ্ট হারে বৃদ্ধি হলে সেটি ________ বৃদ্ধি।

(iii) সময়ের সঙ্গে কোনো কিছুর নির্দিষ্ট হারে হ্রাস হলে সেটি সমহার ________।

17. **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S.A.)**

(i) 400 টাকার 2 বছরে সমূল চক্রবৃদ্ধি 441 টাকা হলে, বার্ষিক শতকরা চক্রবৃদ্ধি সুদের হার কত তা লিখি।

(ii) বার্ষিক নির্দিষ্ট শতকরা চক্রবৃদ্ধি হার সুদে কিছু টাকা n বছরে দ্বিগুণ হলে, কত বছরে 4 গুণ হবে তা লিখি।

(iii) বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে কিছু টাকার 2 বছরে চক্রবৃদ্ধি সুদ 615 টাকা হলে, আসল নির্ণয় করি।

(iv) প্রতি বছর r% হ্রাসপ্রাপ্ত হলে, n বছর পর একটি মেশিনের মূল্য হয় v টাকা। n বছর পূর্বে মেশিনটির মূল্য কত ছিল তা নির্ণয় করি।

(v) প্রতি বছর জনসংখ্যা r% বৃদ্ধি হলে n বছর পর জনসংখ্যা হয় p; n বছর পূর্বে জনসংখ্যা কত ছিল তা নির্ণয় করি।

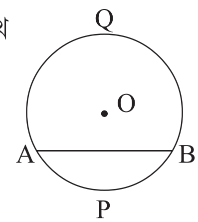
7 বৃত্তস্থ কোণ সম্পর্কিত উপপাদ্য

THEOREMS RELATED TO ANGLES IN A CIRCLE

প্রতি বছরের মতো এ বছরেও আমাদের বিদ্যালয়ের মাঠে ফেব্রুয়ারি মাসে একটি প্রদর্শনীর আয়োজন করা হয়েছে। আমরা দশম শ্রেণির ছাত্রছাত্রীরা গণিতের উপর কিছু মডেল তৈরি করব। এখনও প্রায় দুই সপ্তাহ সময় আছে।

আমরা ছোটো-বড়ো নানান আকারের কিছু বৃত্তাকার রিং ও ছোটো-বড়ো নানান দৈর্ঘ্যের কাঠি জোগাড় করেছি।

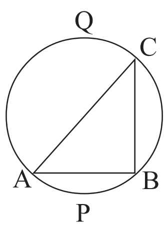
আমরা ঠিক করেছি এই বৃত্তাকার রিং-এর মধ্যে নানাভাবে কাঠি রেখে কী কী পাই দেখে নানান তথ্য জানব ও সেই অনুযায়ী মডেল তৈরির চেষ্টা করব।



সাথি প্রথমে একটি বৃত্তাকার রিং-এ একটি কাঠি পাশের ছবির মতো রাখল।

দেখছি, AB কাঠিটি বৃত্তকার রিং-এর একটি জ্যা।

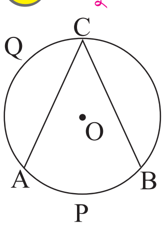
বৃত্তাকার রিং-এর উপচাপ $\overset{\frown}{APB}$ ও অধিচাপ $\overset{\frown}{AQB}$ ।



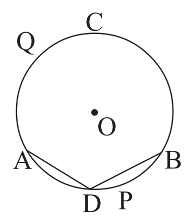
আমি আরও দুটি কাঠি AC ও BC পাশের ছবির মতো রাখলাম।

AC ও BC বৃত্তের অপর দুটি জ্যা।

1 কিন্তু AB জ্যা বৃত্তের C বিন্দুতে একটি সম্মুখ কোণ $\angle ACB$ তৈরি করেছে। এই কোণকে কী বলা হয়?

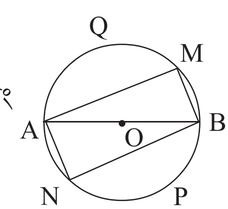


C বিন্দুটি $\overset{\frown}{APB}$ বৃত্তচাপ বাদে বাকি বৃত্তচাপটিতে অবস্থিত। তাই $\angle ACB$ -কে বলা হয় বৃত্তচাপ $\overset{\frown}{APB}$ -এর দ্বারা গঠিত সম্মুখ বৃত্তস্থ কোণ।



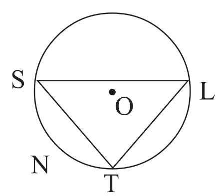
আবার যদি D বিন্দুটি $\overset{\frown}{AQB}$ বৃত্তচাপ বাদে বাকি বৃত্তচাপটিতে অবস্থিত হয়, তবে $\angle ADB$ -কে বলা হবে বৃত্তচাপ $\overset{\frown}{AQB}$ দ্বারা গঠিত সম্মুখ বৃত্তস্থ কোণ।

নিজে করি 7.1



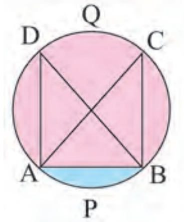
1) পাশের ছবিতে $\angle AMB$, বৃত্তচাপ $\overset{\frown}{APB}$ দ্বারা গঠিত সম্মুখ ☐ কোণ এবং $\angle ANB$, বৃত্তচাপ ☐ দ্বারা গঠিত সম্মুখ বৃত্তস্থ কোণ।

2) পাশের ছবিতে $\angle SLT$, ☐ জ্যা-এর দ্বারা L বিন্দুতে গঠিত সম্মুখ কোণ।



আবার যেহেতু L বিন্দুটি বৃত্তে অবস্থিত, অতএব কোণ ☐ ST জ্যা-এর দ্বারা গঠিত সম্মুখ বৃত্তস্থ কোণ।

আবার $\angle SLT$, বৃত্তচাপ ☐ দ্বারা গঠিত সম্মুখ বৃত্তস্থ কোণ।

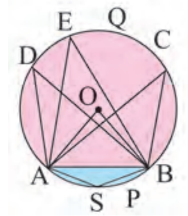


সোহম আরও দুটি কাঠি বৃত্তাকার রিং-এর মধ্যে পাশের ছবির মতো রাখল।

দেখছি, APB চাপের দ্বারা গঠিত অপর একটি সম্মুখ বৃত্তস্থ কোণ ∠ADB তৈরি হয়েছে।

কিন্তু ∠ACB ও ∠ADB বৃত্তস্থ কোণ দুটি ADQCB বৃত্তাংশে অবস্থিত।

সুতরাং, ∠ACB ও ∠ADB বৃত্তস্থ কোণদুটি একই বৃত্তাংশস্থ।



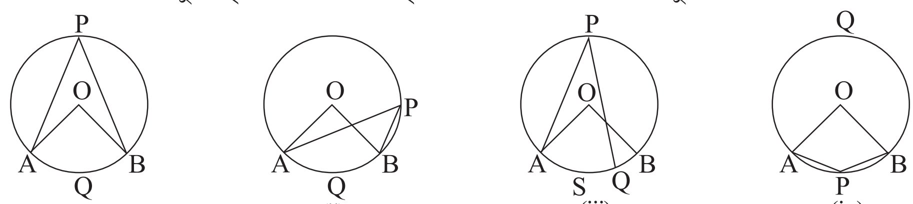
আমি আমার খাতায় O কেন্দ্রীয় বৃত্ত আঁকি এবং একই বৃত্তাংশস্থ বৃত্তস্থ কোণ আঁকি।

পাশের ছবির O কেন্দ্রীয় বৃত্তের চারটি বৃত্তস্থ কোণ হলো $\boxed{}$, $\boxed{}$, $\boxed{}$ ও $\boxed{}$।

এদের মধ্যে ADEQCB অধিবৃত্তাংশস্থ বৃত্তস্থ কোণগুলি এবং ASPB উপবৃত্তাংশস্থ বৃত্তস্থ কোণটি নিজে লিখি।

2 O কেন্দ্রীয় বৃত্তের AB জ্যা কেন্দ্রে একটি সম্মুখ কোণ ∠AOB উৎপন্ন করেছে।এই ∠AOB -কে কী বলা হয়?

∠AOB -কে বৃত্তচাপ $\overset{\frown}{ASB}$ -এর দ্বারা গঠিত সম্মুখ কেন্দ্রস্থ কোণ বলে।
মারিয়া ও শাকিল অনেকগুলি বৃত্তে কেন্দ্রস্থ ও বৃত্তস্থ কোণ এঁকেছে। সেগুলি হলো,



(i) (ii) (iii) (iv)

দেখছি, (i) নং, (ii) নং বৃত্তে AQB বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত কেন্দ্রস্থ কোণ $\boxed{}$ ও বৃত্তস্থ কোণ $\boxed{}$ । কিন্তু (iii) নং বৃত্তে ASB বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত কেন্দ্রস্থ কোণ $\boxed{}$ এবং ASQ বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত বৃত্তস্থ কোণ $\boxed{}$।

∴ (iii) নং বৃত্তে কেন্দ্রস্থ কোণ ∠AOB এবং বৃত্তস্থ কোণ ∠APQ একই বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত নয়।

আবার (iv) নং বৃত্তে AQB বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত কেন্দ্রস্থ কোণ প্রবৃদ্ধ ∠AOB এবং বৃত্তস্থ কোণ ∠APB

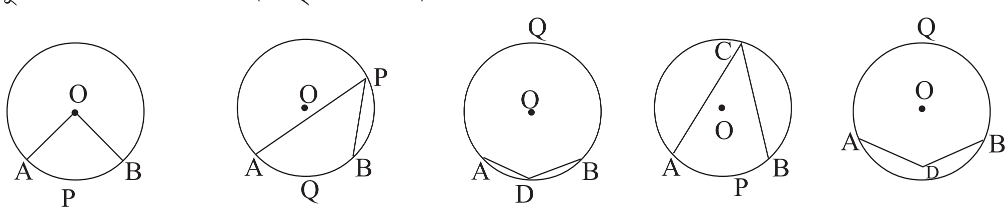
নিজে করি 7.2

1) আমি একটি বৃত্ত আঁকি এবং ওই বৃত্তে দুটি বৃত্তস্থ কোণ আঁকি যারা (a) একই বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত (b) একই বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত নয়।

2) আমি O কেন্দ্রীয় বৃত্তে একটি বৃত্তস্থ কোণ ও একটি কেন্দ্রস্থ কোণ আঁকি যারা (a) একই বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত (b) একই বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত নয়।

3) ছবিগুলি দেখে উত্তর দিই : (O বৃত্তের কেন্দ্র)

(a)



(i) (ii) (iii) (iv) (v)

(i) নং চিত্রে $\angle AOB$ কোণটি APB বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত □ কোণ।

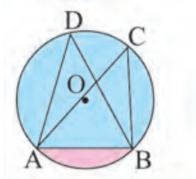
(ii) নং চিত্রে □ কোণটি AQB বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত বৃত্তস্থ কোণ।

(iii) নং চিত্রে $\angle ADB$ কোণটি □ বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত □ কোণ।

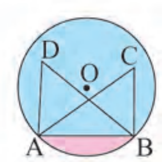
(iv) নং চিত্রে $\angle ACB$ কোণটি □ বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত বৃত্তস্থ কোণ □।

(v) নং চিত্রে □ কোণটি □ বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত বৃত্তস্থ কোণ নয়।

(b)



(i)



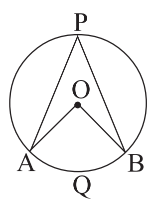
(ii)

(i) নং চিত্রের কোণদুটি □ এবং □ একই বৃত্তাংশস্থ কোণ। এরা ADCB বৃত্তাংশে অবস্থিত।

(ii) নং চিত্রের □ ও □ কোণদুটি বৃত্তাংশস্থ কোণ □।

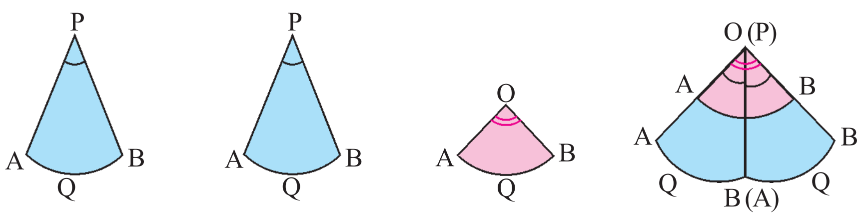
বীণা একটি বৃত্ত এঁকেছে। আমি ওই বৃত্তে একই বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত কেন্দ্রস্থ ও বৃত্তস্থ কোণ আঁকি ও তাদের মধ্যে সম্পর্ক বের করি।

হাতেকলমে



1) O কেন্দ্রীয় বৃত্তের AQB বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত কেন্দ্রস্থ কোণ $\angle AOB$ এবং বৃত্তস্থ কোণ $\angle APB$ আঁকলাম।

2) ট্রেসিং পেপারের সাহায্যে দুটো $\angle APB$ এবং একটি $\angle AOB$ কেটে নিলাম।



3) ট্রেসিং পেপারের এই দুটি $\angle APB$, বৃত্তের $\angle AOB$-এর উপর পাশাপাশি বসিয়ে দিলাম।

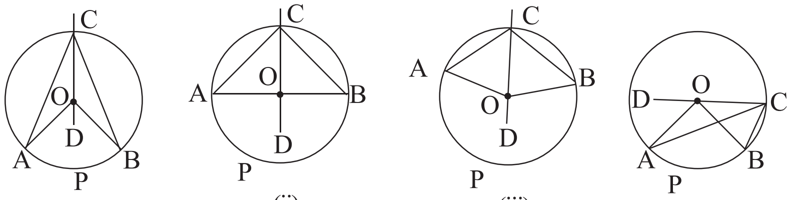
হাতেকলমে দেখছি, $2\angle APB = \angle AOB$

অর্থাৎ হাতেকলমে পেলাম, একই বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ।

আমি অন্য একটি যে-কোনো বৃত্ত এঁকে তার একই বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত কেন্দ্রস্থ কোণ ও বৃত্তস্থ কোণ এঁকে একইভাবে হাতেকলমে করে দেখছি কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ। [নিজে করি]

যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

উপপাদ্য : 34. কোনো বৃত্তের একটি বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত সম্মুখ কেন্দ্রস্থ কোণ ওই চাপের দ্বারা গঠিত যে-কোনো বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ।



(i) (ii) (iii) (iv)

প্রদত্ত : O কেন্দ্রীয় বৃত্তের বৃত্তচাপ APB-এর দ্বারা গঠিত কেন্দ্রস্থ কোণ $\angle AOB$ এবং একটি বৃত্তস্থ কোণ $\angle ACB$।

প্রমাণ করতে হবে: $\angle AOB = 2\angle ACB$

বৃত্তচাপ AB-এর দৈর্ঘ্য অনুযায়ী বিষয়টি তিনরকম হতে পারে। (i) ও (iv) নং চিত্রে APB উপচাপ (ii) নং চিত্রে APB অর্ধবৃত্তচাপ (iii) নং চিত্রে APB অধিচাপ।

অঙ্কন : C, O যুক্ত করে D বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করলাম।

প্রমাণ : প্রতিক্ষেত্রেই Δ AOC-এর OA = OC [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

$\therefore \angle OCA = \angle OAC$

আবার, প্রতিক্ষেত্রেই, Δ AOC-এর CO বাহুকে D বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করায়

বহিঃস্থ $\angle AOD = \angle OAC + \angle OCA$

$= 2\angle OCA$..... (I) $[\because \angle OAC = \angle OCA]$

প্রতিক্ষেত্রেই Δ BOC-এর, OB = OC [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

সুতরাং $\angle OBC = \angle OCB$

আবার প্রতিক্ষেত্রেই Δ BOC-এর বাহুকে CO বাহুকে D বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করায়

বহিঃস্থ $\angle BOD = \angle OCB + \angle OBC$

$= 2\angle OCB$ ...... (II) $[\because \angle OBC = \angle OCB]$

(i) ও (ii) নং চিত্রের ক্ষেত্রে, $\angle AOD + \angle BOD = 2\angle OCA + 2\angle OCB$ [I ও II থেকে পেলাম]

$\therefore \angle AOB = 2(\angle OCA + \angle OCB) = 2\angle ACB$ .... (III)

কিন্তু (iii) নং চিত্রের ক্ষেত্রে অর্থাৎ যখন APB অধিচাপ, III-কে লিখব,

প্রবৃদ্ধ $\angle AOB = 2\angle ACB$

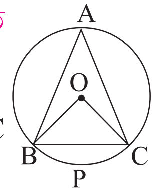
(iv) নং চিত্রের ক্ষেত্রে, $\angle BOD - \angle AOD = 2\angle OCB - 2\angle OCA$

বা, $\angle AOB = 2(\angle OCB - \angle OCA)$

$\therefore \angle AOB = 2\angle ACB$ (প্রমাণিত)

প্রয়োগ : 1. আমি P কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত অঙ্কন করি এবং ওই বৃত্তে ACB বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত কেন্দ্রস্থ কোণ $\angle APB$ ও বৃত্তস্থ কোণ $\angle AQB$ অঙ্কন করে, প্রমাণ করি যে $\angle APB = 2\angle AQB$ [নিজে করি]

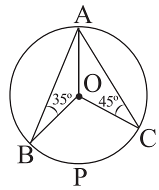
প্রয়োগ : 2. ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের কেন্দ্র O; বিন্দু A এবং BC জ্যা কেন্দ্রের বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত। $\angle BOC = 120^\circ$ হলে $\angle BAC$-এর মান হিসাব করে লিখি।



ছবি এঁকে দেখছি, O কেন্দ্রীয় বৃত্তের একই বৃত্তচাপ BPC-এর দ্বারা গঠিত কেন্দ্রস্থ কোণ $\angle BOC$ ও বৃত্তস্থ কোণ $\angle BAC$

$\therefore \angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC = \frac{1}{2} \times 120^\circ = 60^\circ$

প্রয়োগ : 3. পাশের ছবির O কেন্দ্রীয় বৃত্তটি A, B ও C বিন্দুগামী। $\angle ABO = 35^\circ$ এবং $\angle ACO = 45^\circ$ হলে, $\angle BOC$-এর মান হিসাব করে লিখি।



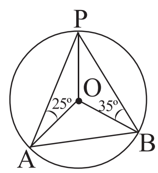
Δ OAB-তে, OA = OB (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ) $\therefore \angle OAB = \angle OBA = 35^\circ$

Δ OAC-তে, OA = OC (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ) $\therefore \angle OAC = \angle OCA = 45^\circ$

$\therefore \angle BAC = \boxed{\quad} + \boxed{\quad} = \boxed{\quad}$ **[নিজে লিখি]**

যেহেতু, O কেন্দ্রীয় বৃত্তে BPC বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত কেন্দ্রস্থ কোণ $\angle BOC$ এবং বৃত্তস্থ কোণ $\angle BAC$, সুতরাং $\angle BOC = 2\angle BAC = 160^\circ$

প্রয়োগ : 4. পাশের O কেন্দ্রীয় বৃত্তের ছবিটি দেখি এবং $\angle OAB$-এর মান হিসাব করে লিখি যখন $\angle OAP = 25^\circ$ এবং $\angle OBP = 35^\circ$।



অঙ্কন : OP যোগ করি।

প্রমাণ : OA = OP (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ) $\therefore \angle OAP = \angle OPA$

$\because \angle OAP = 25^\circ$, সুতরাং, $\angle OPA = 25^\circ$

OB = OP (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ) $\therefore \angle OBP = \angle OPB$

$\because \angle OBP = 35^\circ$, সুতরাং, $\angle OPB = 35^\circ$

$\angle APB = \angle OPA + \angle OPB = 25^\circ + 35^\circ = 60^\circ$

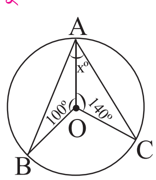
$\angle AOB = 2\angle APB = 2 \times 60^\circ = 120^\circ$

ΔAOB-তে, $\angle OAB + \angle OBA = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ [ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি 180°]

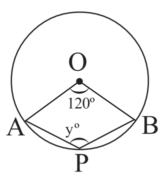
$\because$ AO = BO [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

$\therefore \angle OAB = \angle OBA = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ$

প্রয়োগ : 5. নীচের চিত্রদুটি দেখে x ও y-এর মান হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**



(i)



(ii)

প্রয়োগ : 6. দুটি সমান দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্ত যারা পরস্পরকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করেছে। A বিন্দুগামী একটি সরলরেখা AB-এর বিপরীত পার্শ্বে একটি বৃত্তকে P বিন্দুতে এবং অপর বৃত্তকে Q বিন্দুতে ছেদ করে। যেখানে, P ও Q বিন্দুদ্বয় AB-এর বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত। প্রমাণ করি যে, BP = BQ

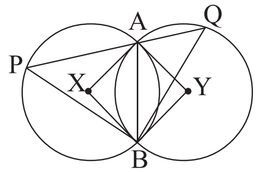
প্রদত্ত : দুটি সমান বৃত্ত পরস্পরকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করেছে। A বিন্দুগামী সরলরেখা একটি বৃত্তকে P বিন্দুতে এবং অপর বৃত্তকে Q বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে: BP = BQ

অঙ্কন : ধরি, X ও Y যথাক্রমে প্রথম বৃত্ত ও দ্বিতীয় বৃত্তের কেন্দ্র। A, B; A, X; B, X; A, Y; B, Y যুক্ত করলাম।

প্রমাণ : Δ AXB ও Δ AYB-এর AX = AY [$\because$ সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

BX = BY [$\because$ $\boxed{}$]



AB সাধারণ বাহু।

$\therefore \Delta AXB \cong \Delta AYB$ (S-S-S সর্বসমতার শর্তানুসারে)

$\therefore \angle AXB = \angle AYB$ [সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ অংশ]

$\therefore \frac{1}{2}\angle AXB = \frac{1}{2}\angle AYB$

আবার, $\angle APB = \frac{1}{2}\angle AXB$ [$\because$ প্রথম বৃত্তের AB উপচাপের দ্বারা গঠিত $\angle AXB$ কেন্দ্রস্থ কোণ ও $\angle APB$ বৃত্তস্থ কোণ]

অনুরূপভাবে, $\angle AQB = \frac{1}{2}\angle AYB$ [$\because$ দ্বিতীয় বৃত্তের AB উপচাপের দ্বারা গঠিত $\angle AYB$ কেন্দ্রস্থ কোণ ও $\angle AQB$ বৃত্তস্থ কোণ]

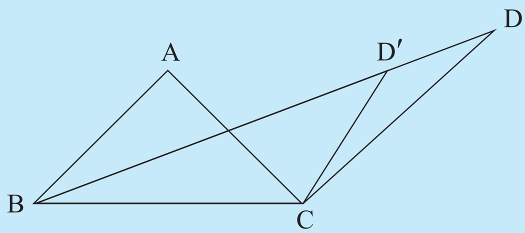
$\therefore \angle APB = \angle AQB$ অর্থাৎ $\angle QPB = \angle PQB$

$\therefore \Delta$ PQB-এর $\angle QPB = \angle PQB$ $\therefore$ BP = BQ [প্রমাণিত]

[যদি AB-এর একই পার্শ্বে সরলরেখাটি P ও Q বিন্দুতে বৃত্তকে ছেদ করে তাহলে নিজে ছবি এঁকে প্রমাণ করি BP = BQ]

প্রয়োগ : 7. ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ যার AB = AC; BC-এর যে পার্শ্বে Δ ABC অবস্থিত, সেই পার্শ্বেই Δ DBC এমনভাবে অঙ্কন করা হলো যাতে $\angle BAC = 2\angle BDC$ হয়। প্রমাণ করি যে, A-কে কেন্দ্র করে AB ব্যাসার্ধ নিয়ে যে বৃত্ত অঙ্কন করা হবে তা D বিন্দুগামী হবে অর্থাৎ D বিন্দু ওই বৃত্তের উপর অবস্থিত হবে। [নিজে করি]

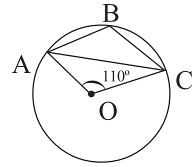
[**উত্তর সংকেত :** ধরি D বিন্দু ওই বৃত্তের উপর অবস্থিত নয়। $\therefore$ বৃত্তটি BD বা বর্ধিত BD -কে ধরি D′ বিন্দুতে ছেদ করেছে। D′ ও C বিন্দু দুটি যুক্ত করি।



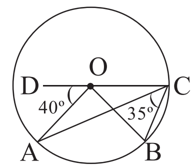
$\therefore \angle BAC = 2\angle BD'C$;
কিন্তু $\angle BAC = 2\angle BDC$
$\therefore \angle BD'C = \angle BDC$, কিন্তু এটা অসম্ভব যদি না D ও D′ বিন্দু সমাপতিত হয়। কারণ ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণ অন্তঃস্থ বিপরীত একটি কোণের সমান হতে পারে না।]

কষে দেখি 7.1

1. ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের AB = AC. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজটির পরিকেন্দ্র O এবং BC বাহুর যেদিকে A বিন্দু অবস্থিত তার বিপরীত পার্শ্বে কেন্দ্র O অবস্থিত। $\angle BOC = 100^{\circ}$ হলে $\angle ABC$ ও $\angle ABO$-এর মান হিসাব করে লিখি।

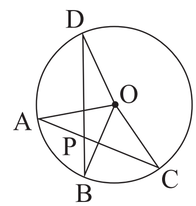


2. পাশের চিত্রে ΔABC-এর পরিবৃত্তের কেন্দ্র O এবং $\angle AOC = 110^{\circ}$; $\angle ABC$-এর মান হিসাব করে লিখি।

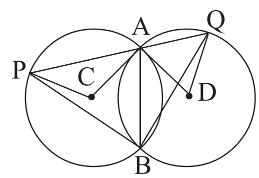


3. O কেন্দ্রীয় বৃত্তের ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। DC বাহুকে P বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করা হলো। $\angle BCP = 108^{\circ}$ হলে, $\angle BOD$-এর মান হিসাব করে লিখি।

4. পাশের চিত্রে O কেন্দ্রীয় বৃত্তের $\angle AOD = 40^{\circ}$ এবং $\angle ACB = 35^{\circ}$; $\angle BCO$ ও $\angle BOD$-এর মান হিসাব করে লিখি ও উত্তরের সপক্ষে যুক্তি দিই।



5. পাশের চিত্রের O কেন্দ্রীয় বৃত্তের $\angle APB = 80^{\circ}$ হলে, $\angle AOB$ ও $\angle COD$-এর মানের সমষ্টি নির্ণয় করি ও উত্তরের সপক্ষে যুক্তি দিই।



6. পাশের ছবির মতো C ও D কেন্দ্রবিশিষ্ট দুটি বৃত্ত অঙ্কন করেছি যারা পরস্পরকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করেছে। A বিন্দুগামী একটি সরলরেখা অঙ্কন করেছি যা C কেন্দ্রীয় বৃত্তকে P বিন্দুতে এবং D কেন্দ্রীয় বৃত্তকে Q বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করি যে,
(i) $\angle PBQ = \angle CAD$ (ii) $\angle BPC = \angle BQD$

7. ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O; প্রমাণ করি যে, $\angle OBC + \angle BAC = 90^{\circ}$

8. দুটি সমান বৃত্ত একটি অপরটির কেন্দ্রগামী এবং বৃত্তদুটি পরস্পরকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করেছে। A বিন্দুগামী সরলরেখা বৃত্ত দুটিকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করলে, প্রমাণ করি যে, ΔBCD সমবাহু ত্রিভুজ।

9. ΔABC-এর পরিবৃত্তের কেন্দ্র S এবং $AD \perp BC$ হলে, প্রমাণ করি যে $\angle BAD = \angle SAC$

10. O কেন্দ্রীয় একটি বৃত্তের দুটি জ্যা AB ও CD পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করি যে, $\angle AOD + \angle BOC = 2\angle BPC$

    যদি $\angle AOD$ ও $\angle BOC$ পরস্পর সম্পূরক হয়, তাহলে প্রমাণ করি যে, জ্যা দুটি পরস্পর লম্ব।

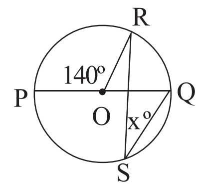
11. O কেন্দ্রীয় একটি বৃত্তের AB ও CD দুটি জ্যা-কে বর্ধিত করলে তারা পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করলে, প্রমাণ করি যে, $\angle AOC - \angle BOD = 2\angle BPC$

12. ABCD চতুর্ভুজের A বিন্দুকে কেন্দ্র করে একটি বৃত্ত অঙ্কন করা হলো যেটি B, C ও D বিন্দু দিয়ে যায়। প্রমাণ করি যে, $\angle CBD + \angle CDB = \frac{1}{2} \angle BAD$

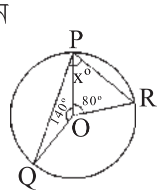
13. ΔABC-এর পরিকেন্দ্র O এবং OD, BC বাহুর উপর লম্ব। প্রমাণ করি যে $\angle BOD = \angle BAC$

14. **অতি সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)**

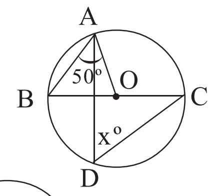
(A) বহু বিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.) :



(i) পাশের চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র এবং PQ ব্যাস হলে, x-এর মান
(a) 140 (b) 40 (c) 80 (d) 20

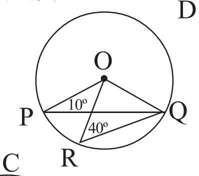


(ii) পাশের চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র হলে, x-এর মান
(a) 70 (b) 60 (c) 40 (d) 200



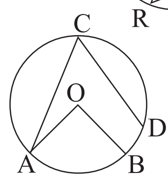
(iii) পাশের চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র এবং BC ব্যাস হলে, x-এর মান
(a) 60 (b) 50 (c) 100 (d) 80

(iv) ABC ত্রিভুজের O পরিকেন্দ্র। $\angle OAB = 50^\circ$ হলে, $\angle ACB$-এর মান
(a) 50° (b) 100° (c) 40° (d) 80°



(v) পাশের চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র হলে, $\angle POR$-এর মান
(a) 20° (b) 40° (c) 60° (d) 80°

(B) সত্য বা মিথ্যা লিখি :



(i) পাশের চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র হলে, $\angle AOB = 2\angle ACD$

(ii) ABC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ভিতর O বিন্দু এমনভাবে অবস্থিত যে $OA = OB$ এবং $\angle AOB = 2\angle ACB$. O বিন্দুকে কেন্দ্র করে OA দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত অঙ্কন করলে C বিন্দু বৃত্তের উপর অবস্থিত হবে।

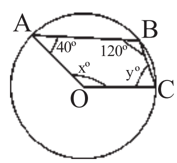
(C) শূন্যস্থান পূরণ করি :

(i) একই চাপের উপর অবস্থিত বৃত্তস্থ কোণ কেন্দ্রস্থ কোণের ________।

(ii) O কেন্দ্রীয় বৃত্তে AB ও AC জ্যা দুটির দৈর্ঘ্য সমান। $\angle APB$ ও $\angle DQC$ বৃত্তস্থ কোণ হলে, কোণ দুটির মান ________।

(iii) একটি সমবাহু ত্রিভুজের পরিবৃত্তের কেন্দ্র O হলে, যে-কোনো একটি বাহু দ্বারা উৎপন্ন সম্মুখ কেন্দ্রস্থ কোণের মান ________।

15. **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S.A.)**

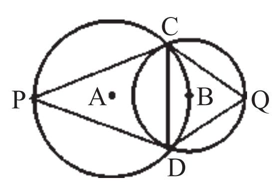


(i) পাশের চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র। $\angle OAB = 40^\circ$, $\angle ABC = 120^\circ$, $\angle BCO = y^\circ$ এবং $\angle COA = x^\circ$ হলে, x ও y-এর মান নির্ণয় করি।

(ii) ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O এবং D বিন্দু BC বাহুর মধ্যবিন্দু। $\angle BAC = 40^\circ$ হলে, $\angle BOD$-এর মান নির্ণয় করি।

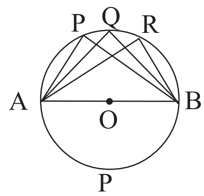
(iii) O কেন্দ্রীয় বৃত্তের উপর A, B, C তিনটি বিন্দু এমনভাবে অবস্থিত যে AOCB একটি সামান্তরিক। $\angle AOC$-এর মান নির্ণয় করি।

(iv) ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের পরিবৃত্তের কেন্দ্র O এবং $\angle ABC = 120^\circ$; বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 5 সেমি. হলে, AB বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।



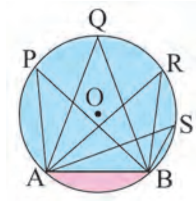
(v) A ও B কেন্দ্রীয় বৃত্তদ্বয় C এবং D বিন্দুতে ছেদ করে। A কেন্দ্রীয় বৃত্তের উপর অপর বৃত্তের কেন্দ্র B অবস্থিত। $\angle CQD = 70^\circ$ হলে, $\angle CPD$-এর মান নির্ণয় করি।

রাবেয়ার মতো শাকিলও স্কুলের ব্ল্যাকবোর্ডে একটি O কেন্দ্রীয় বৃত্ত এবং ওই বৃত্তের একটি ব্যাস AB এঁকেছে। তৃষা ওই বৃত্তে তিনটি অর্ধবৃত্তস্থ কোণ $\angle APB$, $\angle AQB$ ও $\angle ARB$ অঙ্কন করেছে।



প্রতিটি অর্ধবৃত্তস্থ কোণ ☐ সমকোণ [কোণগুলি মেপে লিখি]

∴ অর্থাৎ অর্ধবৃত্তস্থ সকল কোণই ☐ [সমান / অসমান]



আমি একই বৃত্তাংশস্থ অনেকগুলি বৃত্তস্থ কোণ আঁকি এবং চাঁদার সাহায্যে মেপে কোণগুলির মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয়ের চেষ্টা করি।

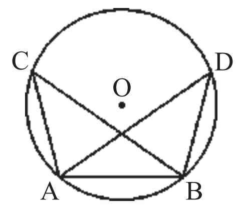
O কেন্দ্রীয় বৃত্তের $\angle APB$, $\angle AQB$, $\angle ARB$ ও $\angle ASB$ হলো ABSRQP বৃত্তাংশস্থ বৃত্তস্থ কোণ।

চাঁদার সাহায্যে মেপে দেখছি,

$\angle APB$ ☐ $\angle AQB$ ☐ $\angle ARB = \angle ASB$ [= / ≠ লিখি]

আমি খাতায় একই বৃত্তাংশস্থ বৃত্তস্থ একাধিক কোণ এঁকে ও চাঁদার সাহায্যে মেপে দেখছি একই বৃত্তাংশস্থ সকল বৃত্তস্থ কোণ ☐ [সমান / অসমান] **[নিজে এঁকে ও মেপে লিখি]**

হাতেকলমে



(1) সাদা আর্টপেপারে একটি O কেন্দ্রীয় বৃত্ত আঁকলাম।

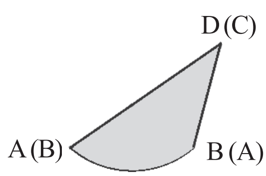
(2) এবার পাশের ছবির মতো O কেন্দ্রীয় বৃত্তে A ও B দুটি বিন্দু যোগ করে AB জ্যা পেলাম।

(3) এবার AB জ্যা-এর একই দিকে বৃত্তের C ও D বিন্দুতে দুটি কোণ $\angle ACB$ ও $\angle ADB$ আঁকলাম। অর্থাৎ $\angle ACB$ ও $\angle ADB$ হলো O কেন্দ্রীয় বৃত্তের ACDB বৃত্তাংশস্থ দুটি বৃত্তস্থ কোণ।

(4) ট্রেসিং পেপারের সাহায্যে $\angle ACB$ ও $\angle ADB$ কোণদুটি এঁকে কেটে নিলাম।

(5) এবার ট্রেসিং পেপারের কোণদুটি একটির উপর অপরটি এমনভাবে বসালাম যাতে শীর্ষবিন্দু C ও D মিশে যায়।

দেখছি, $\angle ACB$ ও $\angle ADB$ কোণদুটি পরস্পর মিশে গেছে।



∴ হাতেকলমে পেলাম, $\angle ACB = \angle ADB$

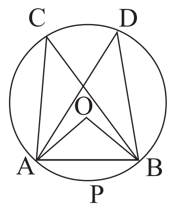
∴ হাতেকলমে পেলাম, একই বৃত্তাংশস্থ সকল বৃত্তস্থ কোণ সমান।

যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

উপপাদ্য : 35. একই বৃত্তাংশস্থ সকল বৃত্তস্থ কোণের মান সমান।

প্রদত্ত : মনে করি O কেন্দ্রীয় বৃত্তের $\angle ACB$ ও $\angle ADB$ যে-কোনো দুটি কোণ ABDC বৃত্তাংশে অবস্থিত।

প্রমাণ করতে হবে : ACDB বৃত্তাংশস্থ সকল বৃত্তস্থ কোণই সমান।



যেহেতু $\angle ACB$ ও $\angle ADB$ ওই বৃত্তাংশস্থ যে-কোনো দুটি বৃত্তস্থ কোণ, সুতরাং $\angle ACB$ ও $\angle ADB$ পরস্পর সমান প্রমাণ করলেই উপপাদ্যটি প্রমাণিত হবে।

অঙ্কন : O, A বিন্দুদ্বয় ও O, B বিন্দুদ্বয় সরলরেখাংশ দ্বারা যুক্ত করলাম।

প্রমাণ : APB বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত $\angle AOB$ কেন্দ্রস্থ কোণ এবং $\angle ACB$ ও $\angle ADB$ বৃত্তস্থ কোণ।

$\therefore \angle AOB = 2\angle ACB$

এবং $\angle AOB = 2\angle ADB$

সুতরাং, $2\angle ACB = 2\angle ADB$

$\therefore \angle ACB = \angle ADB$

নিজে করি 7.3

(1) প্রমাণ করি যে, একই বৃত্তের সমান সমান চাপের দ্বারা গঠিত বৃত্তস্থ সকল কোণই সমান।

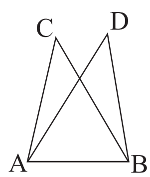
(2) প্রমাণ করি যে, বৃত্তের একাধিক বৃত্তস্থ কোণ সমান হলে সেই কোণগুলি যে যে চাপের দ্বারা গঠিত সেই, চাপগুলির দৈর্ঘ্য পরস্পর সমান।

আমরা হাতেকলমে যাচাই করে ও যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করলাম যে একই বৃত্তাংশস্থ সকল বৃত্তস্থ কোণের মান সমান।

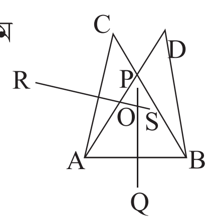
এই উপপাদ্যের বিপরীত কি সম্ভব? অর্থাৎ যে-কোনো দুটি বিন্দুর সংযোজক রেখাংশ তার একই পার্শ্বে অপর দুটি বিন্দুতে দুটি সমান কোণ উৎপন্ন করলে, ওই বিন্দু চারটি কি সমবৃত্তস্থ হবে?

হাতেকলমে যাচাই করি।

হাতেকলমে



(i) সাদা কাগজে A ও B যে-কোনো দুটি বিন্দু যোগ করে AB সরলরেখাংশ পেলাম। AB সরলরেখাংশ তার একই দিকে C ও D বিন্দুতে দুটি সমান কোণ $\angle ACB$ ও $\angle ADB$ উৎপন্ন করেছে।



(ii) কাগজ ভাঁজ করে হাতেকলমে AB ও AC সরলরেখাংশ দুটির লম্বসমদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে PQ এবং RS পেলাম যারা পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে।

(iii) স্কেলের সাহায্যে মেপে দেখছি, AO ☐ OB ☐ OC ☐ OD

[নিজে হাতেকলমে করে = / ≠ বসাই]

(iv) O-কে কেন্দ্র করে OA দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্ত A, B, C ও D বিন্দুগামী হবে।

সুতরাং পেলাম, A, B ও C তিনটি অসমরেখ বিন্দুগামী নির্দিষ্ট বৃত্ত D বিন্দুগামী হবে।

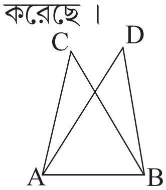
$\therefore$ হাতেকলমে পেলাম, A, B, D ও C বিন্দু চারটি সমবৃত্তস্থ।

যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

উপপাদ্য : 36. *দুটি বিন্দুর সংযোজক সরলরেখাংশ তার একই পার্শ্বে অপর দুটি বিন্দুতে দুটি সমান কোণ উৎপন্ন করলে ওই চারটি বিন্দু সমবৃত্তস্থ হবে।* ***[প্রমাণ মূল্যায়নের অন্তর্ভুক্ত নয়]***

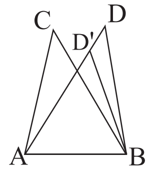
প্রদত্ত দুটি বিন্দু A ও B-এর সংযোজক সরলরেখাংশ C ও D বিন্দুতে সমান কোণ উৎপন্ন করেছে ।

$\therefore \angle ACB = \angle ADB$



প্রমাণ করতে হবে : A, B, D ও C বিন্দুগুলি সমবৃত্তস্থ।

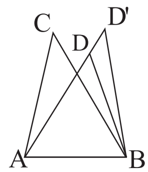
প্রমাণ : A, B ও C তিনটি অসমরেখ বিন্দু দিয়ে নির্দিষ্ট বৃত্ত অঙ্কন করি।



যদি নির্দিষ্ট বৃত্তটি D বিন্দুগামী না হয় তবে বৃত্তটি AD-কে বা বর্ধিত AD-কে একটি বিন্দুতে ছেদ করবে।

ধরি, বৃত্তটি AD-কে বা বর্ধিত AD-কে D′ বিন্দুতে ছেদ করেছে।

$\therefore$ A, B, D′ ও C বিন্দুচারটি সমবৃত্তস্থ। D′ ও B বিন্দু দুটি সরলরেখাংশ দ্বারা যুক্ত করি।



$\therefore \angle ACB = \angle AD'B$ (একই বৃত্তাংশস্থ বৃত্তস্ত কোণ)

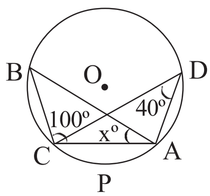
কিন্তু $\angle ACB = \angle ADB$

$\therefore \angle AD'B = \angle ADB$

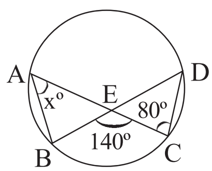
কিন্তু ইহা সম্ভব নয়, যদি না D ও D′ বিন্দুদ্বয় সমাপতিত হয়। [কারণ একটি ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণ বিপরীত অন্তঃস্থকোণের সমান হতে পারে না]

$\therefore$ A, B, D ও C বিন্দু চারটি সমবৃত্তস্থ।

প্রয়োগ : 8. নীচের বৃত্তের ছবি দেখি ও x-এর মান নির্ণয় করি। O বৃত্তের কেন্দ্র।



(i)



(ii)

(i) O বৃত্তের কেন্দ্র।

দুটি বৃত্তস্থ কোণ $\angle ABC$ ও $\angle ADC$ উপচাপ CPA-এর দ্বারা গঠিত সম্মুখ কোণ।

$\therefore \angle ABC = \angle ADC = 40^\circ$ ($\because$ দেওয়া আছে $\angle ADC = 40^\circ$)

এবং ΔABC-এর $\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = 180^\circ$

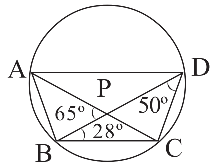
$\therefore 40^\circ + 100^\circ + x = 180^\circ$

বা, $x^\circ = 180^\circ - 140^\circ = \boxed{}$

$\therefore x = 40$

একইভাবে (ii) নং ছবির x-এর মান হিসাব করে লিখি।

প্রয়োগ : 9. পাশের ছবির $\angle BDC = 50^{\circ}$, $\angle APB = 65^{\circ}$, $\angle CBD = 28^{\circ}$; $\angle ADB$, $\angle ABD$, $\angle BAC$, $\angle ACB$, $\angle CAD$ এবং $\angle ACD$-এর মান নির্ণয় করি।



$\angle BAC = \angle BDC = \boxed{}$ [যেহেতু, একই বৃত্তাংশস্থ বৃত্তস্থ কোণ]

আবার, $\angle CAD = \boxed{} = 28^{\circ}$ [যেহেতু, একই বৃত্তাংশস্থ বৃত্তস্থ কোণ]

ΔBPC-এর, বহিঃস্থ $\angle APB = \angle PBC + \angle PCB$.

$\therefore 65^{\circ} = 28^{\circ} + \angle ACB$; $\therefore \angle ACB = \boxed{}$

$\therefore \angle ADB = \angle ACB = \boxed{}$ [একই বৃত্তাংশস্থ বৃত্তস্থ কোণ]

ΔABP-এর, $\angle ABP + \angle BPA + \angle PAB = 180^{\circ}$

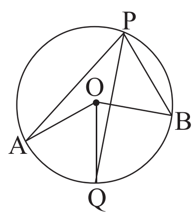
$\therefore \angle ABP = \boxed{}$

$\therefore \angle ABD = \boxed{}$ [নিজে করি]

$\angle ACD = \angle ABD = \boxed{}$ **[$\because$ একই বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত সম্মুখ বৃত্তস্থ বৃত্তস্থ কোণ]**

প্রয়োগ : 10. প্রমাণ করি যে-কোনো বৃত্তে একই বৃত্তাংশস্থ সমস্ত কোণের সমদ্বিখণ্ডকগুলি একটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী।

প্রদত্ত : O কেন্দ্রীয় একটি বৃত্তের APB বৃত্তাংশে অবস্থিত একটি কোণ $\angle APB$. $\angle APB$-এর সমদ্বিখণ্ডক বৃত্তটিকে Q বিন্দুতে ছেদ করেছে।



প্রমাণ করতে হবে: PQ একটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী।

প্রমাণ : $\angle APQ = \angle BPQ$ [$\because$ PQ, $\angle APB$-এর সমদ্বিখণ্ডক]

$\angle AOQ = 2\angle APQ$; আবার $\angle BOQ = 2\angle BPQ$

যেহেতু, $\angle APQ = \angle BPQ$, সুতরাং $\angle AOQ = \angle BOQ$

$\therefore$ বৃত্তচাপ AQ = বৃত্তচাপ BQ (যেহেতু চাপ AQ ও চাপ BQ কেন্দ্রে সমান সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করে)

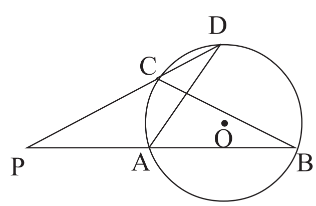
$\therefore$ AQB বৃত্তচাপের মধ্যবিন্দু Q.

AQB নির্দিষ্ট হলে, Q একটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

$\therefore$ APB বৃত্তচাপের উপর P বিন্দুর যে-কোনো অবস্থানের জন্য $\angle APB$-এর সমদ্বিখণ্ডক উহার বিপরীত চাপের মধ্যবিন্দুগামী অর্থাৎ নির্দিষ্ট বিন্দুগামী হবে।

প্রয়োগ : 11. পাশের চিত্রের একটি বৃত্তের AB ও CD দুটি জ্যা। BA ও DC-কে বর্ধিত করলে পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করি যে $\angle PCB = \angle PAD$

প্রদত্ত : একটি বৃত্তের AB ও CD দুটি জ্যা। BA ও DC-কে বর্ধিত করলে পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করে।



প্রমাণ করতে হবে : $\angle PCB = \angle PAD$

প্রমাণ : $\angle BCD = \angle BAD$ (একই বৃত্তাংশস্থ বৃত্তস্থ কোণ)

আবার $\angle PCB = 180^{\circ} - \angle BCD$

এবং $\angle PAD = 180^{\circ} - \angle BAD$

$\because \angle BCD = \angle BAD$, সুতরাং $180^{\circ} - \angle BCD = 180^{\circ} - \angle BAD$

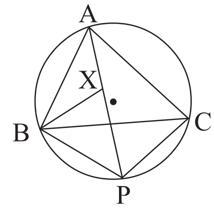
$\therefore \angle PCB = \angle PAD$ **[প্রমাণিত]**

প্রয়োগ : 12. ABC সমবাহু ত্রিভুজটি একটি বৃত্তে অন্তর্লিখিত। BC উপচাপের উপর P যে-কোনো একটি বিন্দু। প্রমাণ করি যে PA = PB + PC

প্রদত্ত : ABC সমবাহু ত্রিভুজটি একটি বৃত্তে অন্তর্লিখিত। BC উপচাপের উপর P যে-কোনো একটি বিন্দু।

প্রমাণ করতে হবে : PA = PB + PC

অঙ্কন : PA-এর থেকে PB-এর সমান করে PX অংশ কেটে নিলাম। B, X বিন্দুদ্বয় যোগ করলাম।



প্রমাণ : PB = PX [অঙ্কনানুসারে]

$\therefore \angle PBX = \angle PXB$ ________ (I)

আবার, $\angle ACB = \angle APB$ [একই বৃত্তাংশস্থ বৃত্তস্থ কোণ]

$= 60^\circ$ [যেহেতু, ABC সমবাহু ত্রিভুজ, সুতরাং $\angle ACB = 60^\circ$]

$\therefore \angle PBX + \angle PXB = 180^\circ - 60^\circ = \boxed{}$

$\therefore \angle PBX = \angle PXB = 60^\circ$ [(I) থেকে পেলাম]

$\therefore$ PBX সমবাহু ত্রিভুজ।

$\therefore \angle PBC = \angle PBX - \angle CBX = \angle CBA - \angle CBX = \angle XBA$ ________ (II)

ΔPBC ও ΔABX-এর মধ্যে AB = BC [$\because \Delta$ ABC সমবাহু]

$\angle ABX = \angle PBC$ [(II) থেকে পেলাম]

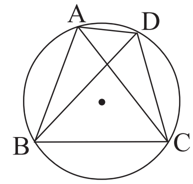
BX = PB ($\because \Delta BPX$ সমবাহু)

$\therefore \Delta BPC \cong \Delta ABX$ [সর্বসমতার S-A-S শর্তনুসারে]

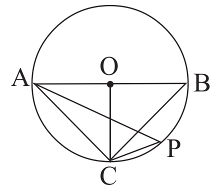
সুতরাং, AX = PC

$\therefore$ PA = PX + XA = PB + PC [প্রমাণিত]

কষে দেখি 7.2



1. পাশের ছবিতে $\angle DBA = 40^\circ$, $\angle BAC = 60^\circ$ এবং $\angle CAD = 20^\circ$; $\angle DCA$ ও $\angle BCA$-এর মান নির্ণয় করি। $\angle BAD$ ও $\angle DCB$-এর মানের সমষ্টি কত হবে হিসাব করে দেখি।



2. পাশের চিত্রে AOB বৃত্তের ব্যাস এবং O বৃত্তের কেন্দ্র। OC ব্যাসার্ধ AB-এর উপর লম্ব। যদি উপচাপ CB-এর উপর কোনো বিন্দু P হয়, তবে $\angle BAC$ ও $\angle APC$-এর মান হিসাব করে লিখি।

3. ABC ত্রিভুজের O লম্ববিন্দু এবং BC-এর উপর অঙ্কিত লম্ব AD-কে বর্ধিত করলে ΔABC-এর পরিবৃত্তকে G বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করি যে, OD = DG

4. ΔABC-এর অন্তর্বৃত্তের কেন্দ্র I; বর্ধিত AI ত্রিভুজের পরিবৃত্তকে P বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করি যে, $PB = PC = PI$

5. তিমির দুটি বৃত্ত এঁকেছে যারা পরস্পরকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করেছে। P বিন্দু দিয়ে দুটি সরলরেখা টানলাম যারা একটি বৃত্তকে A, B বিন্দুতে এবং অপর বৃত্তকে যথাক্রমে C, D বিন্দুতে ছেদ করল। প্রমাণ করি যে $\angle AQC = \angle BQD$

6. একটি বৃত্তের AB ও CD জ্যা দুটি পরস্পর লম্ব। AB ও CD জ্যা দুটির ছেদবিন্দু P থেকে AD-এর উপর অঙ্কিত লম্বকে বর্ধিত করলে সেটি BC-কে E বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রমাণ করি যে, E, BC-এর মধ্যবিন্দু।

7. যদি ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের $AB = DC$ হয়, তবে প্রমাণ করি যে $AC = BD$ হবে।

8. O কেন্দ্রীয় বৃত্তে OA ব্যাসার্ধ এবং AQ একটি জ্যা। বৃত্তের উপর C একটি বিন্দু। O, A, C বিন্দুগামী বৃত্ত AQ জ্যা-কে P বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করি যে, $CP = PQ$

9. একটি বৃত্তে ABC ত্রিভুজটি অন্তর্লিখিত। AX, BY এবং CZ যথাক্রমে $\angle BAC$, $\angle ABC$ ও $\angle ACB$-এর সমদ্বিখণ্ডক এবং বৃত্তে যথাক্রমে X, Y ও Z বিন্দুতে মিলিত হয়। প্রমাণ করি যে, AX, YZ-এর উপর লম্ব।

10. একটি বৃত্তে ABC ত্রিভুজটি অন্তর্লিখিত। $\angle BAC$, $\angle ABC$ ও $\angle ACB$-এর সমদ্বিখণ্ডক বৃত্তে যথাক্রমে X, Y ও Z বিন্দুতে মিলিত হয়। প্রমাণ করি ΔXYZ -এর, $\angle YXZ = 90^\circ - \frac{\angle BAC}{2}$

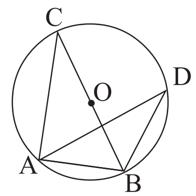
11. ΔABC-এর A বিন্দু থেকে BC বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব BC বাহুকে D বিন্দুতে এবং B বিন্দু থেকে CA বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব CA বাহুকে E বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করি যে, A, B, D, E বিন্দু চারটি সমবৃত্তস্থ।

12. **অতি সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)**

(A) বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.) :

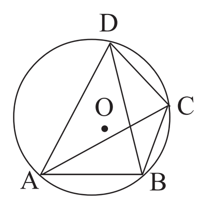
(i) পাশের চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র ; $\angle ACB = 30^\circ$, $\angle ABC = 60^\circ$, $\angle DAB = 35^\circ$ এবং $\angle DBC = x^\circ$ হলে, x-এর মান

(a) 35 (b) 70 (c) 65 (d) 55



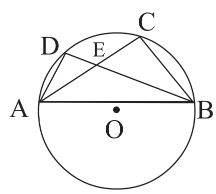
(ii) পাশের চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র। $\angle BAD = 65^\circ$, $\angle BDC = 45^\circ$ হলে, $\angle CBD$-এর মান

(a) 65° (b) 45° (c) 40° (d) 20°



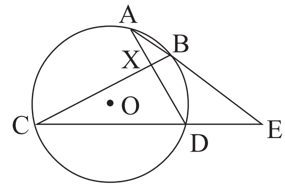
(iii) পাশের চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র। $\angle AEB = 110^\circ$ এবং $\angle CBE = 30^\circ$ হলে, $\angle ADB$ -এর মান

(a) 70° (b) 60° (c) 80° (d) 90°



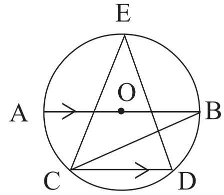
(iv) পাশের চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র। $\angle BCD = 28^\circ$, $\angle AEC = 38^\circ$ হলে, $\angle AXB$-এর মান

(a) 56° (b) 86° (c) 38° (d) 28°



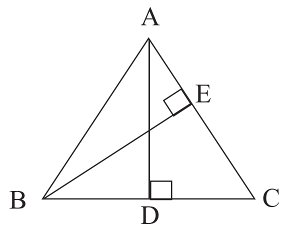
(v) পাশের চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র এবং AB ব্যাস। $AB \parallel CD$. $\angle ABC = 25^\circ$ হলে, $\angle CED$ -এর মান

(a) 80° (b) 50° (c) 25° (d) 40°



(B) সত্য বা মিথ্যা লিখি :

(i) পাশের চিত্রে AD ও BE যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের BC ও AC বাহুর উপর লম্ব। A, B, D, E বিন্দু চারটি সমবৃত্তস্থ।



(ii) ABC ত্রিভুজের AB = AC; BE ও CF যথাক্রমে $\angle ABC$ ও $\angle ACB$-এর সমদ্বিখণ্ডক এবং AC ও AB বাহুকে যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করে। B, C, E, F বিন্দু চারটি সমবৃত্তস্থ নয়।

(C) শূন্যস্থান পূরণ করি :

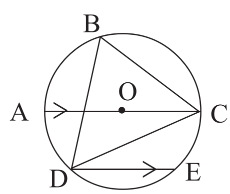
(i) একই বৃত্তাংশস্থ বৃত্তস্ত কোণ ________।

(ii) দুটি বিন্দুর সংযোজক সরলরেখাংশ তার একই পার্শ্বে অপর দুটি বিন্দুতে সমান সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করলে বিন্দু চারটি ________ হবে।

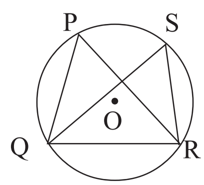
(iii) একই বৃত্তে দুটি চাপ দ্বারা উৎপন্ন বৃত্তস্থ কোণ দুটি সমান হলে চাপ দুটির দৈর্ঘ্য ________।

13. সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S.A.)

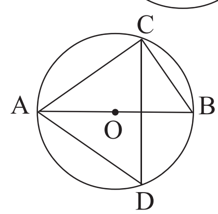
(i) পাশের চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র, AC ব্যাস এবং জ্যা DE ও ব্যাস AC সমান্তরাল। $\angle CBD = 60^\circ$ হলে, $\angle CDE$-এর মান নির্ণয় করি।



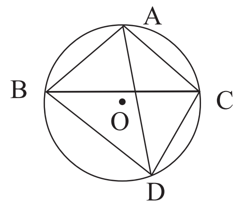
(ii) পাশের চিত্রে $\angle PQR$-এর সমদ্বিখণ্ডক QS; $\angle SQR = 35^\circ$ এবং $\angle PRQ = 32^\circ$ হলে , $\angle QSR$-এর মান নির্ণয় করি।



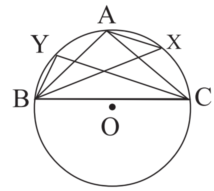
(iii) পাশের চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র এবং AB ব্যাস। AB ও CD পরস্পর লম্ব এবং $\angle ADC = 50^\circ$; $\angle CAD$-এর মান নির্ণয় করি।



(iv) পাশের চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র এবং AB = AC ; $\angle ABC = 32^{o}$ হলে, $\angle BDC$-এর মান নির্ণয় করি।



(v) পাশের চিত্রে BX ও CY যথাক্রমে $\angle ABC$ ও $\angle ACB$-এর সমদ্বিখণ্ডক। AB = AC এবং BY = 4সেমি. হলে, AX-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

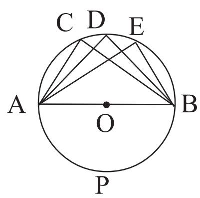


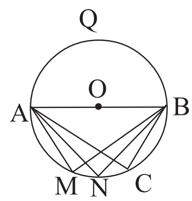
রাবেয়া একটি O কেন্দ্রীয় বৃত্ত এঁকেছে। শাকিল রাবেয়ার আঁকা বৃত্তে একটি ব্যাস AB আঁকল।

এই O কেন্দ্রীয় বৃত্তের AB ব্যাস বা APB বৃত্তচাপ কীরূপ বিভিন্ন বৃত্তস্থ কোণ উৎপন্ন করবে এঁকে ও মেপে লিখি।

মেপে দেখছি, AB ব্যাস বা APB বৃত্তচাপ বৃত্তের উপর C, D ও E প্রতিটি বিন্দুতে ☐ ডিগ্রি মাপের বৃত্তস্থ কোণ উৎপন্ন করেছে। [নিজে এঁকে ও মেপে লিখি]

আবার AB ব্যাস বা AQP বৃত্তচাপ বৃত্তের উপর M, N ও S প্রতিটি বিন্দুতে ☐ ডিগ্রি মাপের বৃত্তস্থ কোণ উৎপন্ন করেছে।





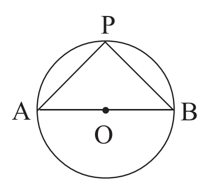
3 এই $\angle ACB$, $\angle ADB$, $\angle AEB$, $\angle AMB$, $\angle ANB$ ও $\angle ASB$ কোণগুলি অর্থাৎ একটি বৃত্তের ব্যাস যে-কোনো অর্ধবৃত্তে যে সম্মুখ বৃত্তস্থ কোণ উৎপন্ন করে তাদের কী বলা হয়?

একটি বৃত্তের ব্যাস অর্ধবৃত্তে যে সম্মুখ বৃত্তস্থ কোণ উৎপন্ন করে তাকে **অর্ধবৃত্তস্থ কোণ** বলা হয়। এখানে $\angle ACB$, $\angle ADB$, $\angle AEB$ এবং $\angle AMB$, $\angle ANB$ ও $\angle ASB$ প্রত্যেকে অর্ধবৃত্তস্থ কোণ।

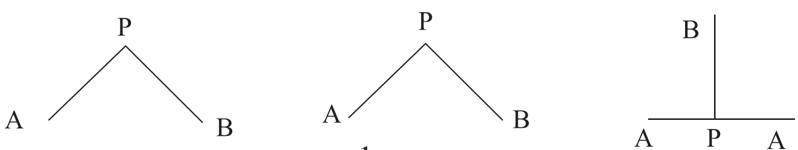
হাতেকলমে যাচাই করে দেখি যে অর্ধবৃত্তস্থ কোণ সমকোণ।

হাতেকলমে

(1) O কেন্দ্রীয় বৃত্তে যে-কোনো একটি অর্ধবৃত্তস্থ কোণ $\angle APB$ আঁকলাম।



(2) ট্রেসিং পেপারের সাহায্যে দুটি $\angle APB$ এঁকে কেটে নিলাম এবং O কেন্দ্রীয় বৃত্তে AB ব্যাসের উপর O বিন্দুতে কোণদুটি নীচের ছবির মতো পাশাপাশি বসিয়ে দেখছি $\angle APB$, কোণদুটি পরস্পর সম্পূরক এবং সমান। (যেহেতু একই মাপের কোণ)
$\therefore$ প্রত্যেকে এক সমকোণ।

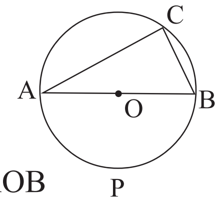


$\therefore$ হাতেকলমে পেলাম, $\angle APB = \frac{1}{2} \times 180^{o} = 90^{o}$

$\therefore$ হাতেকলমে পেলাম, অর্ধবৃত্তস্থ কোণ সমকোণ।

যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

উপপাদ্য : 37. অর্ধবৃত্তস্থ কোণ সমকোণ।



প্রদত্ত : O কেন্দ্রীয় বৃত্তের $\angle ACB$ যে-কোনো একটি অর্ধবৃত্তস্থ কোণ।

প্রমাণ করতে হবে যে : $\angle ACB = 1$ সমকোণ।

প্রমাণ : O কেন্দ্রীয় বৃত্তের $\overparen{APB}$ বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত সম্মুখ কেন্দ্রস্থ কোণটি $\angle AOB$ এবং $\angle ACB$ ওই $\overparen{APB}$ বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত সম্মুখ বৃত্তস্থ কোণ।

$\therefore \angle AOB = 2\angle ACB$ .... (I)

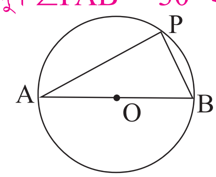
যেহেতু AB একটি সরলরেখাংশ, সুতরাং $\angle AOB$ একটি সরলকোণ । $\therefore \angle AOB = 2$ সমকোণ

সুতরাং, $2\angle ACB = 2$ সমকোণ [I থেকে পেলাম]

$\therefore \angle ACB = 1$ সমকোণ [প্রমাণিত]

অন্য একটি যে-কোনো O কেন্দ্রীয় বৃত্তে $\angle PQR$ একটি অর্ধবৃত্তস্থ কোণ। যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে $\angle PQR = 90^\circ$। [নিজে করি]

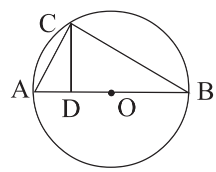
প্রয়োগ : 13. একটি বৃত্তের ব্যাস AB এবং P বৃত্তের উপর যে-কোনো একটি বিন্দু। $\angle PAB = 30^\circ$ হলে, $\angle PBA$-এর মান নির্ণয় করি।



উত্তর : $\angle APB$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ। $\therefore \angle APB = 90^\circ$; $\angle PAB = 30^\circ$

$\therefore \angle PBA = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

প্রয়োগ : 14. পাশের চিত্রে O কেন্দ্রীয় বৃত্তে AB ব্যাস। C বৃত্তের উপর যে-কোনো একটি বিন্দু। $\angle BAC = 50^\circ$ এবং CD, AB-এর উপর লম্ব হলে, $\angle BCD$-এর মান নির্ণয় করি।



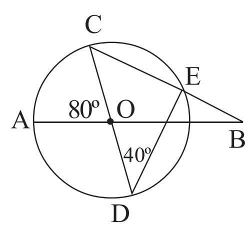
উত্তর : $\angle ACB$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ। সুতরাং $\angle ACB = 90^\circ$

সমকোণী ΔACD-তে, $\angle ADC = 90^\circ$, $\angle DAC = 50^\circ$, সুতরাং

$\angle ACD = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$

আবার, $\angle ACB = 90^\circ$; সুতরাং $\angle BCD = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$

প্রয়োগ : 15. পাশের চিত্রে AB ও CD সরলরেখাংশ দুটি বৃত্তের কেন্দ্র O-তে ছেদ করেছে। যদি $\angle AOC = 80^\circ$ $\angle CDE = 40^\circ$ হয়, তাহলে (i) $\angle DCE$ ও (ii) $\angle ABC$-এর মান নির্ণয় করি।



$\angle CED$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ। $\therefore \angle CED = 90^\circ$

সমকোণী ΔCED-তে, $\angle CED = 90^\circ$, $\angle CDE = 40^\circ$,

$\therefore \angle DCE = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$ ....(i)

ΔBOC-তে, বহিঃস্থ $\angle AOC = \angle OBC + \angle OCB$

$80^\circ = \angle OBC + 50^\circ$ ($\because \angle DCE = 50^\circ$)

$\therefore \angle OBC = 30^\circ$

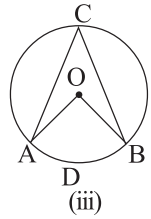
সুতরাং, $\angle ABC = 30^\circ$ .... (ii)

প্রয়োগ : 16. যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে অর্ধবৃত্তাংশস্থ অপেক্ষা বৃহত্তর বৃত্তাংশস্থ কোণ সূক্ষ্মকোণ।

প্রদত্ত : O কেন্দ্রীয় বৃত্তের ACB বৃত্তাংশ অর্ধবৃত্তাংশস্থ অপেক্ষা বৃহত্তর।

প্রমাণ করতে হবে যে : $\angle ACB$ একটি সূক্ষ্মকোণ।

প্রমাণ : যেহেতু, ACB বৃত্তাংশ অর্ধবৃত্তাংশস্থ অপেক্ষা বৃহত্তর বৃত্তাংশস্থ,



(iii)

$\therefore \overset{\frown}{ADB}$ একটি উপচাপ।

$\therefore$ ADB উপচাপের দ্বারা গঠিত কেন্দ্রস্থ কোণ $\angle AOB$, 2 সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

আবার, ADB উপচাপের দ্বারা গঠিত পরিধিস্থ কোণ $\angle ACB$; $\angle AOB < 180^\circ$

অর্থাৎ , $2\angle ACB < 180^\circ$ $\therefore \angle ACB < 90^\circ$

$\therefore \angle ACB$, 1 সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর অর্থাৎ $\angle ACB$ সূক্ষ্মকোণ। **[প্রমাণিত]**

প্রয়োগ : 17. প্রমাণ করি যে অর্ধবৃত্তাংশস্থ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর বৃত্তাংশস্থ কোণ স্থূলকোণ। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 18. যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, যে-কোনো সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের মধ্যবিন্দু ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু থেকে সমদূরবর্তী।

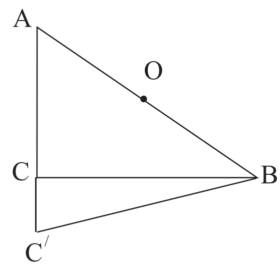
প্রদত্ত : ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle ACB = 90^\circ$ এবং O অতিভুজ AB-এর মধ্যবিন্দু।

প্রমাণ করতে হবে যে : OA = OB = OC

অঙ্কন : O বিন্দুকে কেন্দ্র করে OB দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন করলাম।

প্রমাণ : O বিন্দুকে কেন্দ্র করে OB দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তটি A ও B বিন্দুগামী। যদি বৃত্তটি C বিন্দুগামী না হয়, ধরি বৃত্তটি AC-কে বা বর্ধিত AC-কে C′ বিন্দুতে ছেদ করে। B , C′ যুক্ত করি

$\therefore \angle AC'B = 90^\circ$ [$\because$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ সমকোণ]



আবার $\angle ACB = 90^\circ$

$\therefore \angle ACB = \angle AC'B$

এটা অসম্ভব, কারণ কোনো ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণ একটি অন্তঃস্থ বিপরীত কোণের সমান হতে পারে না।

এটা সম্ভব হবে যদি C ও C′ একই বিন্দু হয়।

$\therefore$ বৃত্তটি C বিন্দুগামী

$\therefore$ OA = OB = OC [প্রমাণিত]

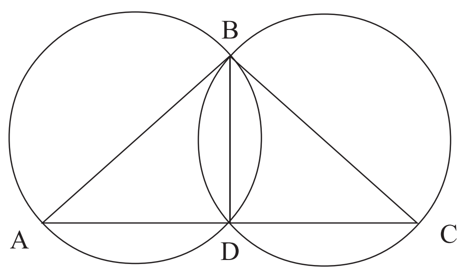
প্রয়োগ : 19. যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজকে ব্যাস করে বৃত্ত অঙ্কন করলে বৃত্তটি সমকৌণিক বিন্দু দিয়ে যাবে। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 20. যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে একটি বিষমবাহু ত্রিভুজের বৃহত্তম বাহু অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর দুটি বাহুকে ব্যাস করে অঙ্কিত বৃত্ত দুটির ছেদবিন্দু তৃতীয় বাহুর উপর অবস্থিত হবে।

প্রদত্ত : Δ ABC-এর AC বৃহত্তম বাহু।

AB বাহুকে ব্যাস করে একটি বৃত্ত অঙ্কন করলাম যা AC-কে D বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে : BC-কে ব্যাস করে অঙ্কিত বৃত্ত D বিন্দু দিয়ে যাবে।



অঙ্কন : B, D বিন্দুদ্বয় সরলরেখাংশ দ্বারা যুক্ত করলাম।

প্রমাণ : $\angle ADB$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ ।

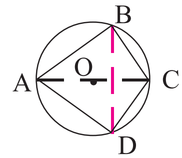
$\therefore \angle ADB = 1$ সমকোণ

$\therefore \angle CDB = 1$ সমকোণ

যেহেতু, CDB সমকোণী ত্রিভুজে $\angle CDB = 1$ সমকোণ, সুতরাং BC বৃত্তের ব্যাস।

$\therefore$ BC-কে ব্যাস করে অঙ্কিত বৃত্ত অবশ্যই D বিন্দু দিয়ে যাবে।

প্রয়োগ :21. ABC ও ADC সমকোণী ত্রিভুজদুটির সাধারণ অতিভুজ AC; প্রমাণ করি যে $\angle CAD = \angle CBD$;



প্রদত্ত : ABC ও ADC সমকোণী ত্রিভুজের সাধারণ অতিভুজ AC।

প্রমাণ করতে হবে : $\angle CAD = \angle CBD$

প্রমাণ : ΔABC -এর $\angle ABC = 90^\circ$

$\therefore$ AC-কে ব্যাস করে বৃত্ত অঙ্কন করলে B বিন্দুগামী হবে। অনুরূপে, AC-কে ব্যাস করে অঙ্কিত বৃত্তটি D বিন্দুগামী।

$\angle CAD$ ও $\angle CBD$ কোণ দুটি বৃত্তের একই উপচাপ DC-এর দ্বারা গঠিত বৃত্তস্থ কোণ।

$\therefore \angle CAD = \angle CBD$ **(প্রমাণিত)**

কষে দেখি 7.3

1. ABC ত্রিভুজের B কোণটি সমকোণ। যদি AC-কে ব্যাস করে একটি বৃত্ত অঙ্কন করি যা AB-কে D বিন্দুতে ছেদ করে, তবে নীচের তথ্যগুলির মধ্যে কোনটি ঠিক লিখি—
(i) $AB > AD$ (ii) $AB = AD$ (iii) $AB < AD$

2. প্রমাণ করি যে একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান বাহু দুটির যে-কোনোটিকে ব্যাস করে অঙ্কিত বৃত্ত অসমান বাহুটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

3. সাহানা দুটি বৃত্ত এঁকেছে যারা পরস্পরকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করেছে। PA ও PB যথাক্রমে দুটি বৃত্তের ব্যাস হলে, প্রমাণ করি যে A, Q ও B বিন্দুত্রয় সমরেখ।

4. রজত একটি সরলরেখাংশ PQ অঙ্কন করেছে যার মধ্যবিন্দু R এবং সে PR ও PQ-কে ব্যাস করে দুটি বৃত্ত অঙ্কন করেছে। আমি P বিন্দুগামী একটি সরলরেখা অঙ্কন করেছি যা প্রথম বৃত্তকে S বিন্দুতে এবং দ্বিতীয় বৃত্তকে T বিন্দুতে ছেদ করেছে। যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে $PS = ST$

5. একটি বৃত্তের উপর তিনটি বিন্দু P, Q ও R অবস্থিত। PQ ও PR-এর উপর P বিন্দুতে অঙ্কিত লম্ব দুটি বৃত্তকে যথাক্রমে S ও T বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করি যে, $RQ = ST$

6. ABC একটি সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ। ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাস AP; BE ও CF যথাক্রমে AC ও AB বাহুর উপর লম্ব এবং তারা পরস্পরকে Q বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করি যে, BPCQ একটি সামান্তরিক।

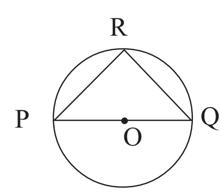
7. একটি ত্রিভুজের শীর্ষকোণের অন্তর্সমদ্বিখণ্ডক ও বহির্সমদ্বিখণ্ডক ত্রিভুজটির পরিবৃত্তকে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করি যে, PQ বৃত্তের একটি ব্যাস।

8. AB এবং CD একটি বৃত্তের দুটি ব্যাস। প্রমাণ করি যে, ACBD একটি আয়তাকার চিত্র।

9. প্রমাণ করি, একটি রম্বসের বাহুগুলিকে ব্যাস করে বৃত্ত অঙ্কন করলে বৃত্তগুলি একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে যায়।

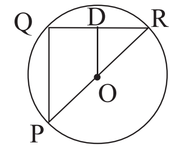
10. **অতি সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V. S. A.)**

(A) বহু বিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.) :

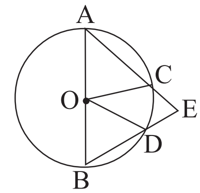


(i) O কেন্দ্রীয় বৃত্তে PQ একটি ব্যাস এবং $PR = RQ$; $\angle RPQ$ -এর মান
(a) 30° (b) 90° (c) 60° (d) 45°

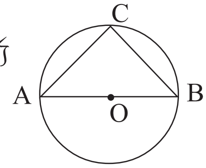
(ii) QR বৃত্তের একটি জ্যা এবং POR বৃত্তের একটি ব্যাস।
OD, QR বাহুর উপর লম্ব। OD = 4 সেমি. হলে, PQ-এর দৈর্ঘ্য
(a) 4সেমি. (b) 2সেমি. (c) 8সেমি. (d) কোনটিই নয়



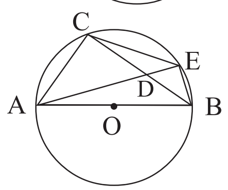
(iii) AOB বৃত্তের ব্যাস। AC এবং BD জ্যা দুটি বর্ধিত করলে E বিন্দুতে মিলিত হয়। $\angle COD = 40^o$ হলে, $\angle CED$-এর মান
(a) 40^o (b) 80^o (c) 20^o (d) 70^o



(iv) AOB বৃত্তের ব্যাস। AC = 3 সেমি. ও BC = 4 সেমি. হলে AB -এর দৈর্ঘ্য
(a) 3 সেমি. (b) 4 সেমি. (c) 5 সেমি. (d) 8 সেমি.



(v) পাশের চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র এবং AB ব্যাস। $\angle BCE = 20^o$, $\angle CAE = 25^o$ হলে , $\angle AEC$-এর মান নির্ণয় করি।
(a) 50^o (b) 90^o (c) 45^o (d) 20^o



(B) সত্য বা মিথ্যা লিখি :

(i) অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা বৃহত্তর বৃত্তাংশস্থ কোণ স্থূলকোণ।

(ii) ABC ত্রিভুজের AB বাহুর মধ্যবিন্দু O এবং OA = OB = OC; AB বাহুকে ব্যাস করে বৃত্ত অঙ্কন করলে বৃত্তটি C বিন্দু দিয়ে যাবে।

(C) শূন্যস্থান পূরণ করি :

(i) অর্ধবৃত্তস্থ কোণ ________।

(ii) অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর বৃত্তাংশস্থ কোণ ________।

(iii) সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজকে ব্যাস করে বৃত্ত অঙ্কন করলে বৃত্তটি ________ বিন্দু দিয়ে যাবে।

11. **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S. A.)**

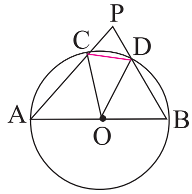
(i) ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের AB = AC; AB বাহুকে ব্যাস করে বৃত্ত অঙ্কন করলে বৃত্তটি BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করে, BD = 4 সেমি. হলে CD-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

(ii) একটি বৃত্তে দুটি জ্যা AB এবং AC পরস্পর লম্ব। AB = 4 সেমি. ও AC = 3 সেমি. হলে , বৃত্তটির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

(iii) একটি বৃত্তে দুটি জ্যা PQ এবং PR পরস্পর লম্ব। বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r সেমি. হলে, জ্যা QR-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

(iv) AOB বৃত্তের একটি ব্যাস। C বৃত্তের উপর একটি বিন্দু। $\angle OBC = 60^o$ হলে $\angle OCA$-এর মান নির্ণয় করি।

(v) পাশের চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র এবং AB ব্যাস। জ্যা CD-এর দৈর্ঘ্য বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের সমান। AC ও BD-কে বর্ধিত করায় P বিন্দুতে ছেদ করে। $\angle APB$-এর মান নির্ণয় করি।



8 লম্ব বৃত্তাকার চোঙ
RIGHT CIRCULAR CYLINDER

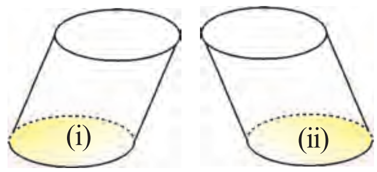
আমাদের বাড়ির পড়ার ঘরের টেবিলে একটি সুন্দর কাঠের পেনস্ট্যান্ড রাখা আছে। এটি অনেকদিনের পুরোনো। এটির কিছুটা অংশ ভেঙে গেছে। তাই আরও একটি পেনস্ট্যান্ডের প্রয়োজন।

আমি ও দিদি দুজনে মিলে ঠিক করেছি যে ওইরকম একটি পেনস্ট্যান্ড তৈরি করব।

1 কিন্তু এই পেনস্ট্যান্ড কীরূপ আকারের?

এই পেনস্ট্যান্ডটির আকার চোঙ বা বেলনের মতো। পাশের চিত্রের পেনস্ট্যান্ডটি **লম্ব বৃত্তাকার চোঙ** (Right Circular Cylinder)-এর মতো।

কিন্তু পাশের (i) ও (ii) নং চিত্রের চোঙ (Cylinder) দুটি লম্ব বৃত্তাকার নয়।



2 কিন্তু শুধু চোঙ বলা থাকলে কোন চোঙ বুঝব?

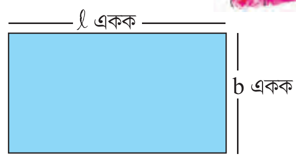
শুধু চোঙ বলা থাকলে এখানে **লম্ব বৃত্তাকার চোঙ** বুঝব।

একটি আয়তক্ষেত্রাকার রঙিন কাগজ আছে।

3 এই পেনস্ট্যান্ডটির বাইরের চারপাশ মুড়তে (উপর ও নীচে বাদ দিয়ে) ন্যূনতম কতটা রঙিন কাগজ লাগবে কীভাবে পাব?

লম্ব বৃত্তাকার চোঙের পার্শ্বতল নির্ণয়ের মাধ্যমে জানব।

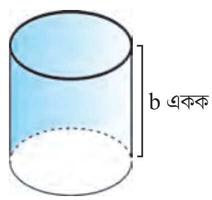
আমরা হাতেকলমে লম্ব বৃত্তাকার চোঙের পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করি।



(1) একটি আয়তক্ষেত্রাকার রঙিন কাগজ নিলাম।

ধরি, আয়তক্ষেত্রাকার ওই কাগজের দৈর্ঘ্য ℓ একক এবং প্রস্থ b একক।

(2) ওই আয়তক্ষেত্রাকার কাগজটি পাশের ছবির মতো পেনস্ট্যান্ডের বাইরের চারপাশের গা দিয়ে প্রস্থ বরাবর মুড়ে সেলোটেপ দিয়ে প্রান্তদুটি জুড়ে দিলাম।



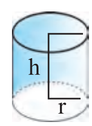
দেখছি, আয়তক্ষেত্রাকার কাগজের দৈর্ঘ্য $= \ell$ একক $=$ লম্ব বৃত্তকার চোঙের ভূমির পরিধি $= 2\pi r$ একক [যেখানে r একক = লম্ব বৃত্তাকার চোঙের ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য]

আবার, আয়তক্ষেত্রাকার কাগজের প্রস্থ $=$ b একক $=$ চোঙের উচ্চতা (ধরি h একক)

$\therefore$ ওই আয়তক্ষেত্রাকার কাগজের ক্ষেত্রফল $=$ দৈর্ঘ্য $\times$ প্রস্থ $= \ell \times b$ বর্গ একক

$= 2\pi r \times h$ বর্গ একক $= 2\pi rh$ বর্গ একক

লম্ব বৃত্তাকার চোঙের ব্যাসার্ধ মানে ভূমির ব্যাসার্ধ।



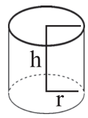
$\therefore$ হাতেকলমে পেলাম, লম্ব বৃত্তাকার চোঙের পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল $2\pi rh$ [যেখানে r = লম্ব বৃত্তকার চোঙের ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য, h = লম্ব বৃত্তাকার চোঙের উচ্চতা]

বুঝেছি, চাকতির (পেনস্ট্যান্ডের তলা) ব্যাসার্ধ r একক হলে এবং h একক উচ্চতার পেনস্ট্যান্ডটির বাইরের চারপাশ রঙিন কাগজ দিয়ে মুড়তে ন্যূনতম $2\pi rh$ বর্গ একক কাগজ লাগবে।

4 কিন্তু লম্ব বৃত্তাকার চোঙের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল কী হবে?

লম্ব বৃত্তাকার চোঙের একটি বক্রতল বা পার্শ্বতল এবং দুটি একই ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার সমতল থাকে।

লম্ব বৃত্তাকার চোঙের পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল$=2\pi rh$ [যেখানে $r =$ চোঙের বৃত্তাকার তলের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য এবং $h =$ চোঙের উচ্চতা]



$= 2\pi r \times h$

= চোঙের বৃত্তাকার তলের পরিধি × উচ্চতা

∴ লম্ব বৃত্তাকার চোঙের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল

= পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল + দুটি বৃত্তাকার তলের ক্ষেত্রফল

$= 2\pi rh + 2\pi r^2$ [যেখানে $r =$ চোঙের বৃত্তাকার তলের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য এবং $h =$ চোঙের উচ্চতা]

$= 2\pi r\,(h+r)$

কিন্তু আমরা লম্ব বৃত্তাকার চোঙের আকৃতির যে পেনস্ট্যান্ডটি কাগজ দিয়ে মুড়লাম সেটি একমুখ খোলা।

∴ ওই পেনস্ট্যান্ডের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= 2\pi rh + \pi r^2$ [$r =$ চোঙের বৃত্তাকার তলের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য এবং $h =$ চোঙের উচ্চতা]

প্রয়োগ : 1. একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের ভূমির ব্যাসের দৈর্ঘ্য 12 সেমি. এবং উচ্চতা 21 সেমি. হলে , চোঙের পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল কী হবে, হিসাব করে লিখি।

লম্ব বৃত্তাকার চোঙের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য $\frac{12}{2}$ সেমি. = 6 সেমি.

∴ লম্ব বৃত্তাকার চোঙের পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল$= 2 \times \pi \times 6 \times 21$ বর্গ সেমি.

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 6 \times 21$ বর্গ সেমি. $= \boxed{}$ বর্গ সেমি.

প্রয়োগ : 2. যে চোঙের ভূমির পরিধি 44 মিটার এবং উচ্চতা 14 মিটার, তার পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল কী হবে, হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 3. একটি ঢাকনাসমেত চোঙাকৃতি জলের ট্যাঙ্কের ভূমির ক্ষেত্রফল 616 বর্গ মিটার এবং উচ্চতা 21 মিটার। হিসাব করে ওই ট্যাঙ্কের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল লিখি।

ধরি, জলের ট্যাঙ্কের বৃত্তাকার ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য $= r$ মিটার

∴ ভূমির ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$ বর্গ মিটার

শর্তানুসারে, $\pi r^2 = 616$

বা, $\frac{22}{7} \times r^2 = 616$

বা, $r^2 = 616 \times \frac{7}{22}$ ∴ $r = \boxed{}$

∴ জলের ট্যাঙ্কের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= (2\pi r^2 + 2\pi rh)$ বর্গ মিটার [যেখানে, চোঙের উচ্চতা $= h$ মিটার]

$= 2\times \frac{22}{7} \times r\,(r + h)$ বর্গ মিটার

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 14\,(14 + 21)$ বর্গ মিটার

$= \boxed{}$ বর্গ মিটার

প্রয়োগ : 4. যদি কোনো ঢাকনাসমেত চোঙাকৃতি পাত্রের ভূমির পরিধি 22 ডেকামিটার এবং উচ্চতা 5 ডেকামিটার হয়, তবে ওই পাত্রের বাইরের সমগ্রতল রং করতে কতটা পরিমাণ জায়গা রং করতে হবে, হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 5. (i) একটি একমুখ খোলা লম্ব বৃত্তাকার পাত্রের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল 1474 বর্গ সেমি.। পাত্রটির ভূমির ব্যাসের দৈর্ঘ্য 14 সেমি. হলে, উচ্চতা কত হবে, হিসাব করে লিখি।

(ii) আবার পাত্রটি যদি দুই মুখ বন্ধ হতো, তবে সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল কত হতো হিসাব করে লিখি।

(i) লম্ব বৃত্তাকার পাত্রের ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য $= \frac{14}{2}$ সেমি. $= 7$ সেমি.

ধরি,পাত্রটির উচ্চতা h সেমি.

$\therefore$ পাত্রটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = ভূমির ক্ষেত্রফল + বক্রতলের ক্ষেত্রফল

$= (\frac{22}{7}\times 7^2 + 2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times h)$ বর্গ সেমি.

$= (154 + 44h)$ বর্গ সেমি.

শর্তানুসারে, $154 + 44h = 1474$

$\therefore h = \boxed{}$ **[নিজে হিসাব করে লিখি]**

$\therefore$ পাত্রটির উচ্চতা 30 সেমি.।

যদি পাত্রটির দুই মুখ বন্ধ হতো তখন ওই পাত্রের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল

= পাত্রের উপরিতলের ক্ষেত্রফল + 1474 বর্গ সেমি.

$= (\frac{22}{7} \times 7^2 + 1474)$ বর্গ সেমি. $= \boxed{}$ বর্গ সেমি.

প্রয়োগ : 6. স্টিলের পাতলা চাদর দিয়ে তৈরি ঢাকনাসমেত একটি ড্রামের ভূমির ব্যাসের দৈর্ঘ্য 4.2 ডেসিমি.। যদি ড্রামটি তৈরি করতে 112.20 বর্গ ডেসিমি. চাদর লাগে, তবে ড্রামটির উচ্চতা কত হবে তা হিসাব করে লিখি। আবার 1 বর্গ মি. স্টিলের দাম 25 টাকা হলে, ড্রামটি তৈরি করতে কত খরচ হবে হিসাব করি। **[নিজে করি]**

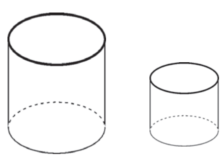
আমার ভাই ও বোন তাদের ব্যবহার করা লম্ব চোঙাকৃতি ঘনবস্তুগুলি ঘরের এক কোণে জড়ো করে রাখছে। তারা তাদের জল খাওয়ার লম্ব চোঙাকার গ্লাসগুলোও এনে রেখেছে।

দেখছি, দুটি গ্লাসের ভূমির ব্যাস ও উচ্চতা আলাদা।

(5) কিন্তু কোন গ্লাসে বেশি জল ধরে কীভাবে বুঝব?

চোঙাকার গ্লাসগুলির আয়তন নির্ণয় করে বুঝব

কিন্তু লম্ব বৃত্তাকার চোঙের আয়তন কীভাবে পাব?



লম্ব বৃত্তাকার চোঙের আয়তন = ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা
$= \pi r^2 \times h$
$= \pi r^2 h$

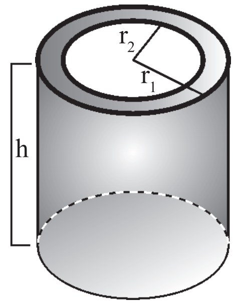
প্রয়োগ : 7. যদি গ্লাসের ভূমির ব্যাসের দৈর্ঘ্য 11.2 সেমি. এবং উচ্চতা 15 সেমি. হয়, তবে ওই গ্লাসে কত জল ধরবে, হিসাব করি।

বুঝেছি, যদি গ্লাসের ভূমির ব্যাসের দৈর্ঘ্য 11.2 সেমি. এবং উচ্চতা 15 সেমি. হয়, তবে ওই গ্লাসে জল ধরবে

$= \pi \times \left(\frac{11.2}{2}\right)^2 \times 15$ ঘন সেমি.

$= \frac{22}{7} \times \frac{56}{10} \times \frac{56}{10} \times 15$ ঘন সেমি.

$= \boxed{}$ ঘন সেমি.



(6) কিন্তু ফাঁপা চোঙাকার ধাতব নলে কতটা পরিমাণ ধাতু আছে কীভাবে পাব?

কোনো ফাঁপা চোঙের বাইরের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r_1 একক,

ভিতরের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r_2 এবং উচ্চতা h একক হলে,

ফাঁপা চোঙটির আয়তন $= (\pi r_1^2 h - \pi r_2^2 h)$ ঘন একক

$= \pi (r_1^2 - r_2^2)\, h$ ঘন একক

প্রয়োগ : 8. দুই মুখ খোলা লোহার তৈরি একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের উচ্চতা 42 সেমি.। চোঙটি 1 সেমি. পুরু এবং তার বহির্ব্যাসের দৈর্ঘ্য 10 সেমি. হলে, চোঙটি কত পরিমাণ লোহা দিয়ে তৈরি তা হিসাব করি।

চোঙটির বাহিরের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য $= \frac{10}{2}$ সেমি. = 5 সেমি.

চোঙটি 1 সেমি. পুরু। $\therefore$ চোঙটির ভিতরের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য = (5 – 1) সেমি. = 4 সেমি.

চোঙটিতে লোহা আছে,

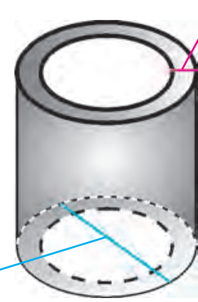
$= \frac{22}{7}(5^2 - 4^2) \times 42$ ঘন সেমি.

$= \frac{22}{7} \times (5+4)(5-4) \times 42$ ঘন সেমি. $[\because a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)]$

$= \frac{22}{7} \times 9 \times 1 \times 42$ ঘন সেমি.

$= 22 \times 9 \times 6$ ঘন সেমি.

$= \boxed{}$ ঘন সেমি.



প্রয়োগ : 9. কিন্তু এই (**প্রয়োগ : 8** এর) দুই মুখ খোলা ফাঁপা লম্ব বৃত্তাকার চোঙের ভিতর ও বাহিরে রং করলে কতটা পরিমাণ জায়গায় রং করতে হবে, হিসাব করে লিখি।

এই দুই মুখ খোলা লম্ব বৃত্তাকার চোঙের ভিতর ও বাহিরের বক্রতলের মোট ক্ষেত্রফল

$= (2\times\pi\times5\times21 + 2\times\pi\times4\times21)$ বর্গ সেমি.

$= 2\times\pi\times21\,(5+4)$ বর্গ সেমি.

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 9$ বর্গ সেমি.

$= \boxed{}$ বর্গ সেমি.

ফাঁপা চোঙের বাইরের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r_1 একক এবং ভিতরের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r_2 একক এবং উচ্চতা h একক হলে, ওই চোঙটির ভিতর ও বাহিরের বক্রতলের মোট ক্ষেত্রফল $= 2\pi(r_1 + r_2)h$ বর্গ একক।

7 কিন্তু এই দুই মুখ খোলা ফাঁপা লম্ববৃত্তাকার চোঙের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল কী হবে?

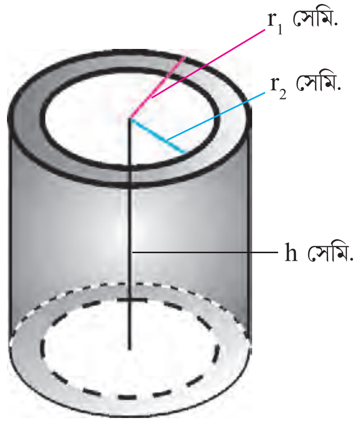
দুই মুখ খোলা ফাঁপা লম্ব বৃত্তাকার চোঙের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= 2\pi\,(r_1 + r_2)h + 2\pi\,(r_1^2 - r_2^2)$বর্গ একক [যেখানে বাহিরের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r_1 একক , ভিতরের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r_2 একক এবং উচ্চতা h একক]

প্রয়োগ : 10. একটি ফাঁপা লম্ব বৃত্তাকার চোঙাকৃতি লোহার নলের বহির্ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 5 সেমি. এবং অন্তর্ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 4 সেমি.। নলটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল 1188 বর্গ সেমি. হলে, নলটির দৈর্ঘ্য কত হিসাব করি।

ফাঁপা চোঙের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= [2\pi(r_1 + r_2)h + 2\pi(r_1^2 - r_2^2)]$ বর্গসেমি.
যেখানে, বহির্ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য $= r_1$ সেমি., অন্তর্ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য $= r_2$ সেমি. এবং উচ্চতা $= h$ সেমি.

শর্তানুসারে,

$$2\pi\,(r_1 + r_2)h + 2\pi\,(r_1^2 - r_2^2) = 1188$$



বা, $\pi\,[\,(5 + 4)h + (5^2 - 4^2)] = 594$

বা, $\frac{22}{7}\,[9h + 9] = 594$

বা, $9h + 9 = 594 \times \frac{7}{22}$

বা, $9h + 9 = 189$

বা, $9h = 189 - 9$

বা, $9h = 180$

বা, $h = \frac{180}{9}$

$\therefore$ $h = 20$

$\therefore$ চোঙটির দৈর্ঘ্য 20 সেমি.।

প্রয়োগ : 11. 6 মিটার লম্বা একটি লম্ববৃত্তাকার চোঙাকৃতি লোহার ফাঁপা পাইপের ভিতরের ও বাইরের ব্যাসের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 3.5 সেমি. এবং 4.2 সেমি. হলে, পাইপটিতে কত লোহা আছে তা হিসাব করে লিখি। এক ঘন ডেসিমি. লোহার ওজন 5 কিগ্রা. হলে, পাইপটির ওজন হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 12. একটি চোঙের ভূমির ক্ষেত্রফল 13.86 বর্গ মিটার এবং উচ্চতা 8 মিটার হলে, চোঙের আয়তন হিসাব করি।

ধরি, চোঙের ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r মিটার।

শর্তানুসারে, $\pi r^2 = 13.86$

বা, $\frac{22}{7}\,r^2 = \frac{1386}{100}$

বা, $r^2 = \frac{1386}{100} \times \frac{7}{22} = \boxed{}$

$\therefore r = \boxed{}$

$\therefore$ চোঙের আয়তন $\frac{22}{7} \times \frac{21}{10} \times \frac{21}{10} \times 8$ ঘন মিটার $= \boxed{}$ ঘন মিটার।

প্রয়োগ : 13. যে চোঙের ভূমির পরিধি 15.4 সেমি. এবং উচ্চতা 10 সেমি. তার আয়তন হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 14. 11 সেমি. বহিঃপরিধিবিশিষ্ট 105 সেমি. লম্বা টিউবলাইটের কাচ যদি 0.2 সেমি. পুরু হয়, তবে 5 টি টিউবলাইট তৈরি করতে কত ঘন সেমি. কাচ লাগবে, হিসাব করে লিখি।

ধরি, টিউবলাইটের বহিঃব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য = r_1 সেমি., অন্তঃব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য = r_2 সেমি. এবং উচ্চতা h সেমি.

শর্তানুসারে,

বহিঃপরিধি = $2\pi r_1 = 11$ বা, $r_1 = \frac{11\times 7}{2\times 22} = \frac{7}{4}$

$\therefore$ বহিঃব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য = $\frac{7}{4}$ সেমি. = 1.75 সেমি.

টিউবলাইটের কাচ 0.2 সেমি. পরু।

$\therefore$ টিউবলাইটটির অন্তঃব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য = r_2= (1.75 – 0.2) সেমি. = 1.55 সেমি.

প্রতিটি টিউবলাইটে কাচের আয়তন = $\pi\,(r_1^2 - r_2^2)\,h$

$= \frac{22}{7}\{(1.75)^2 - (1.55)^2\} \times 105$ ঘন সেমি.

$= \frac{22}{7} \times (1.75 + 1.55)(1.75 - 1.55) \times 105$ ঘন সেমি.

$= \frac{22}{7} \times 3.30 \times 0.2 \times 105$ ঘন সেমি.

$= \boxed{\quad}$ ঘন সেমি.

$\therefore$ 5 টি টিউবলাইট তৈরি করতে কাচ লাগবে 5 × 217.8 ঘন সেমি. = $\boxed{\quad}$ ঘন সেমি.

প্রয়োগ : 15. একটি ছিদ্র দিয়ে জাহাজের খোলে 110 কিলোলিটার জল ঢুকেছে। ছিদ্রটি বন্ধ করার পর জল নিকাশের জন্য একটি পাম্প লাগানো হয়েছে। পাম্পটির পাইপের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 10 সেমি. এবং চালু অবস্থায় জলের গতিবেগ মিনিটে 350 মিটার হলে, সমস্ত জল নিকাশ করতে পাম্পটি কতক্ষণ চালু রাখতে হবে, হিসাব করে লিখি।

এক মিনিটে পাম্পটি জল নিকাশ করতে পারে

$= \frac{22}{7} \times \frac{10}{2} \times \frac{10}{2} \times \frac{1}{100} \times 3500$ ঘন ডেসিমি.

= 2750 ঘন ডেসিমি. = 2750 লিটার [1 ঘন ডেসিমি. = 1 লিটার]

$\therefore$ 110 কিলোলিটার জল নিকাশ করতে সময় লাগবে = $\frac{110000}{2750}$ মিনিট = $\boxed{\quad}$ মিনিট

সুতরাং, $\boxed{\quad}$ মিনিটে পাম্পটি সমস্ত জল নিকাশ করতে পারবে।

প্রয়োগ : 16. 5 মিটার উচ্চতাবিশিষ্ট একটি লম্ববৃত্তাকার চোঙাকৃতি ট্যাঙ্ক জলপূর্ণ আছে। 8 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসের একটি পাইপ দিয়ে যদি মিনিটে 225 মিটার বেগে জল বের করা হয়, তাহলে 45 মিনিটে ট্যাঙ্কটির সমস্ত জল বেরিয়ে যায়। ট্যাঙ্কটির ব্যাসের দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 17. তামার তৈরি একটি আয়তঘনের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 11 সেমি., 9 সেমি. এবং 6 সেমি.। আয়তঘনটিকে গলিয়ে 3 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসের এবং $\frac{1}{4}$ সেমি. পুরু কতগুলি মুদ্রা তৈরি করা যাবে হিসাব করি।

আয়তঘনের আয়তন = $11 \times 9 \times 6$ ঘন সেমি.

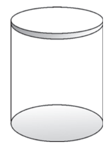
যেহেতু মুদ্রাগুলি লম্ব চোঙাকৃতি, সুতরাং চোঙের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য $\frac{3}{2}$ সেমি. এবং উচ্চতা $\frac{1}{4}$ সেমি.।

প্রতিটি মুদ্রার আয়তন = $\frac{22}{7} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{4}$ ঘন সেমি.

সুতরাং মুদ্রার সংখ্যা = $\dfrac{11 \times 9 \times 6}{\frac{22}{7} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{4}}$ টি $= \dfrac{11 \times 9 \times 6 \times 7 \times 2 \times 2 \times 4}{22 \times 3 \times 3}$ টি $= 336$ টি

কষে দেখি 8

1. পাশের চিত্রের ঘনবস্তুটি দেখি ও নীচের প্রশ্নের উত্তর লিখি।
   (i) ছবির ঘনবস্তুটির ☐ টি তল।
   (ii) ছবির ঘনবস্তুটির ☐ টি বক্রতল ও ☐ টি সমতল।



2. আমার বাড়ির 5টি ঘনবস্তুর নাম লিখি যাদের আকার লম্ব বৃত্তাকার চোঙ।
3. স্টিলের পাতলা চাদর দিয়ে তৈরি ঢাকনাসমেত একটি ড্রামের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 28 সেমি.। ড্রামটি তৈরি করতে যদি 2816 বর্গ সেমি. চাদর লাগে, তবে ড্রামটির উচ্চতা হিসাব করে লিখি।
4. একটি ঘরের বারান্দায় 5.6 ডেসিমি. ব্যাসের এবং 2.5 মিটার লম্বা দুটি লম্ব বৃত্তাকার পিলার ঢালাই করতে কত ঘন ডেসিমি. মশলা লাগবে হিসাব করে লিখি।
   প্রতি বর্গ মিটার 125 টাকা হিসাবে পিলার দুটি প্লাস্টার করতে কত খরচ হবে হিসাব করি।
5. 2.8 ডেসিমি. দৈর্ঘ্যের অন্তর্ব্যাসবিশিষ্ট এবং 7.5 ডেসিমি. লম্বা একটি জ্বালানি গ্যাস সিলিন্ডারে 15.015 কিগ্রা. গ্যাস থাকলে, প্রতি ঘন ডেসিমি. গ্যাসের ওজন হিসাব করে লিখি।
6. সমান ব্যাস ও সমান উচ্চতাবিশিষ্ট তিনটি জারের প্রথমটির $\frac{2}{3}$ অংশ, দ্বিতীয়টির $\frac{5}{6}$ অংশ এবং তৃতীয়টির $\frac{7}{9}$ অংশ লঘু সালফিউরিক অ্যাসিডে পূর্ণ ছিল। ওই তিনটি জারের অ্যাসিড যদি 2.1 ডেসিমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসের একটি জারে রাখা হয়, তবে জারে অ্যাসিডের উচ্চতা 4.1 ডেসিমি. হয়। প্রথম তিনটি জারের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 1.4 ডেসিমি. হলে, তাদের উচ্চতা হিসাব করে লিখি।
7. একমুখ খোলা একটি লম্ব বৃত্তাকার পাত্রের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল 2002 বর্গ সেমি.। পাত্রটির ভূমির ব্যাসের দৈর্ঘ্য 14 সেমি. হলে, পাত্রটিতে কত লিটার জল ধরবে হিসাব করে লিখি।
8. যদি 14 সেমি. ব্যাসের পাইপযুক্ত একটি পাম্পসেট মিনিটে 2500 মিটার জল সেচ করতে পারে, তাহলে ওই পাম্পটি 1 ঘণ্টায় কত কিলো লিটার জলসেচ করবে, হিসাব করে লিখি। [1লিটার = 1ঘন ডেসিমি.]
9. 7 সেমি. ব্যাসের একটি লম্বা গ্যাসজারে কিছু জল আছে। ওই জলে যদি 5.6 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসের 5 সেমি. লম্বা একটি নিরেট লোহার লম্ব বৃত্তাকার চোঙাকৃতি টুকরো সম্পূর্ণ ডোবানো হয়, তবে জলতল কতটুকু উপরে উঠবে হিসাব করে লিখি।

10. একটি লম্ব চোঙাকৃতি স্তম্ভের বক্রতলের ক্ষেত্রফল 264 বর্গ মিটার এবং আয়তন 924 ঘন মিটার হলে, এই স্তম্ভের ব্যাসের দৈর্ঘ্য ও উচ্চতা হিসাব করে লিখি।

11. 9 মিটার উচ্চতাবিশিষ্ট একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙাকৃতি ট্যাঙ্ক জলপূর্ণ আছে। 6 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসের একটি পাইপ দিয়ে মিনিটে 225 মিটার বেগে জল বের হয়, তাহলে 36 মিনিটে ট্যাঙ্কটির সমস্ত জল বেরিয়ে যায়। ট্যাঙ্কটির ব্যাসের দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।

12. সমান ঘনত্বের একটি লম্ব বৃত্তাকার কাঠের গুঁড়ির বক্রতলের ক্ষেত্রফল 440 বর্গ ডেসিমি.। এক ঘন ডেসিমি. কাঠের ওজন 1.5 কিগ্রা. এবং গুঁড়িটির ওজন 9.24 কুইন্টাল হলে, গুঁড়িটির ব্যাসের দৈর্ঘ্য ও উচ্চতা হিসাব করে লিখি।

13. দুই মুখ খোলা একটি লম্ব বৃত্তাকার লোহার পাইপের মুখের বহির্ব্যাসের দৈর্ঘ্য 30 সেমি., অন্তর্ব্যাসের দৈর্ঘ্য 26 সেমি. এবং পাইপটির দৈর্ঘ্য 14.7 মিটার। প্রতি বর্গ ডেসিমি. 2.25 টাকা হিসাবে ওই পাইপটির সমগ্রতলে আলকাতরার প্রলেপ দিতে কত খরচ হবে, হিসাব করে লিখি।

14. একটি দুই মুখ খোলা লোহার লম্ব বৃত্তাকার ফাঁপা চোঙের উচ্চতা 2.8 মিটার। চোঙটির অন্তর্ব্যাসের দৈর্ঘ্য 4.6 ডেসিমি. এবং চোঙটি 84.48 ঘন ডেসিমি. লোহা দিয়ে তৈরি হলে, চোঙটির বহির্ব্যাসের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

15. একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের উচ্চতা উহার ব্যাসার্ধের দ্বিগুণ। যদি উচ্চতা 6 গুণ হতো তবে চোঙটির আয়তন 539 ঘন ডেসিমি বেশি হতো। চোঙটির উচ্চতা হিসাব করে লিখি।

16. ফায়ার ব্রিগেডের কোনো একটি দল একটি জলভরতি লম্ব বৃত্তাকার ট্যাঙ্কারের জল 2 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসের তিনটি হোস পাইপ দিয়ে মিনিটে 420 মিটার বেগে ঢেলে 40 মিনিটে আগুন নেভাল। যদি ট্যাঙ্কারটির ব্যাসের দৈর্ঘ্য 2.8 মিটার এবং দৈর্ঘ্য 6 মিটার হয়, তবে (i) আগুন নেভাতে কত জল খরচ হয়েছে এবং (ii) ট্যাঙ্কারে আর কত জল রয়েছে নির্ণয় করি।

17. 17.5 সেমি. ব্যাসের 4টি লম্ব বৃত্তাকার ঢালাই পিলারের চারিপাশে 3.5 সেমি. পুরু বালি-সিমেন্টের প্লাস্টার করতে হবে।

(i) প্রতিটি পিলার যদি 3 মিটার লম্বা হয়, তবে কত ঘন ডেসিমি মশলা লাগবে হিসাব করে লিখি।

(ii) প্লাস্টারের মশলা তেরি করতে যদি 4 : 1 অনুপাতে বালি ও সিমেন্ট মেশাতে হয়, তবে কত ঘন ডেসিমি. সিমেন্টের প্রয়োজন, হিসাব করে লিখি।

18. একটি লম্ব বৃত্তাকার ফাঁপা চোঙের বহির্ব্যাসের দৈর্ঘ্য 16 সেমি. এবং অন্তর্ব্যাসের দৈর্ঘ্য 12 সেমি.। চোঙটির উচ্চতা 36 সেমি.। চোঙটিকে গলিয়ে 2 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসবিশিষ্ট এবং 6 সেমি. দৈর্ঘ্যের কতগুলি নিরেট চোঙ তৈরি করা যাবে হিসাব করি।

19. **অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)**

(A) বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.) :

(i) দুটি লম্ব বৃত্তাকার নিরেট চোঙের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের অনুপাত 2 : 3 এবং উচ্চতার অনুপাত 5 : 3 হলে, তাদের বক্রতলের ক্ষেত্রফলের অনুপাত

(a) 2 : 5 (b) 8 : 7 (c) 10 : 9 (d) 16 : 9

(ii) দুটি লম্ব বৃত্তাকার নিরেট চোঙের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের অনুপাত 2 : 3 এবং উচ্চতার অনুপাত 5 : 3 হলে, তাদের আয়তনের অনুপাত

(a) 27 : 20 (b) 20 : 27 (c) 4 : 9 (d) 9 : 4

(iii) দুটি লম্ব বৃত্তাকার নিরেট চোঙের আয়তন সমান এবং তাদের উচ্চতার অনুপাত 1 : 2 হলে, তাদের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের অনুপাত

(a) $1:\sqrt{2}$ (b) $\sqrt{2}:1$ (c) 1 : 2 (d) 2 : 1

(iv) একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য অর্ধেক এবং উচ্চতা দ্বিগুণ হলে, চোঙটির আয়তন হবে পূর্বের চোঙের আয়তনের

(a) সমান (b) দ্বিগুণ (c) অর্ধেক (d) 4 গুণ

(v) একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য দ্বিগুণ এবং উচ্চতা অর্ধেক করা হলে, বক্রতলের ক্ষেত্রফল পূর্বের চোঙের বক্রতলের ক্ষেত্রফলের

(a) সমান (b) দ্বিগুণ (c) অর্ধেক (d) 4 গুণ

(B) নীচের বিবৃতিগুলি সত্য না মিথ্যা লিখি :

(i) একটি লম্ব চোঙাকৃতি ড্রামের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r সেমি. এবং উচ্চতা h সেমি.। ড্রামের অর্ধেক জলপূর্ণ থাকলে, জলের আয়তন হবে $\pi r^2 h$ ঘন সেমি.।

(ii) একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 2 একক হলে, চোঙটির যে-কোনো উচ্চতার জন্য চোঙটির আয়তন এবং বক্রতলের ক্ষেত্রফলের সাংখ্যমান সমান হবে।

(C) শূন্যস্থান পূরণ করি :

(i) একটি আয়তক্ষেত্রাকার কাগজের দৈর্ঘ্য ℓ একক এবং প্রস্থ b একক। আয়তক্ষেত্রাকার কাগজটিকে মুড়ে একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙ তৈরি করা হলো যার পরিধি কাগজটির দৈর্ঘ্যের সমান। চোঙটির বক্রতলের ক্ষেত্রফল ________ বর্গ একক।

(ii) একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 3 সেমি. এবং উচ্চতা 4 সেমি. হলে, চোঙটির ভিতর সর্বাপেক্ষা লম্বা যে দণ্ড রাখা যাবে তার দৈর্ঘ্য ________ সেমি.।

(iii) একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের আয়তন এবং বক্রতলের ক্ষেত্রফলের সাংখ্যমান সমান হলে, চোঙটির ব্যাসের দৈর্ঘ্য ________ একক।

20. **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S.A.)**

(i) একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙাকৃতি স্তম্ভের বক্রতলের ক্ষেত্রফল 264 বর্গ মিটার এবং আয়তন 924 ঘন মিটার হলে, স্তম্ভের ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য কত লিখি।

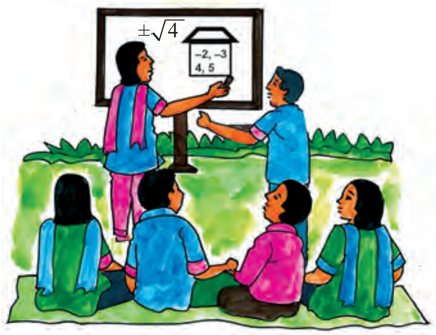
(ii) একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের বক্রতলের ক্ষেত্রফল c বর্গ একক, ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r একক এবং আয়তন v ঘন একক হলে, $\frac{cr}{v}$-এর মান কত তা লিখি।

(iii) একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের উচ্চতা 14 সেমি. এবং বক্রতলের ক্ষেত্রফল 264 বর্গ সেমি. হলে, চোঙটির আয়তন কত তা লিখি।

(iv) দুটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের উচ্চতার অনুপাত 1 : 2 এবং ভূমির পরিধির অনুপাত 3 : 4 হলে, তাদের আয়তনের অনুপাত কত তা লিখি।

(v) একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 50% হ্রাস করা হলো এবং উচ্চতা 50% বৃদ্ধি করা হলো। চোঙটির আয়তনের শতকরা কত পরিবর্তন হবে তা লিখি।

9 দ্বিঘাত করণী
QUADRATIC SURD



রেবার দাদু রেবাকে একটি সাদা বোর্ড কিনে দিয়েছেন। আমরা সেই বোর্ডে ছবি আঁকি ও নানান মজার খেলায় বোর্ড ব্যবহার করি। আজ আমরা মতিউরদের বাগানে ওই বোর্ডটি নিয়ে জড়ো হয়েছি, একটি মজার খেলা খেলার জন্য।

আমাদের বন্ধু তপেন ওই বোর্ডে একটি ঘর আঁকল এবং ওই ঘরের মধ্যে কিছু ধনাত্মক ও ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা লিখল।

আমরা ঠিক করেছি প্রত্যেকে ওই পূর্ণসংখ্যার ঘর থেকে যে-কোনো দুটি সংখ্যা লিখব ও বিভিন্ন আকারে সাজাব ও তাদের প্রকৃতি জানব।

সীমা লিখল 5 ও 4

$5+4$, $5-4$, 5×4 প্রত্যেকেই **পূর্ণ সংখ্যা**।

আবার, $\frac{5}{4}$ ও $\frac{4}{5}$ প্রত্যেকেই $\square$ [পূর্ণসংখ্যা/মূলদ সংখ্যা]

1 আমি 5 ও 4-এর বর্গ করে কী পাই দেখি।

$5^2 = \square$ এবং $4^2 = \square$

$\therefore$ দেখছি 5 ও 4-এর বর্গও $\square$ সংখ্যা।

আমরা জানি, কোনো একটি অঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যা a-এর বর্গমূল $\pm\sqrt{a}$ বা, $\pm a^{\frac{1}{2}}$

কেননা $(+\sqrt{a})^2 = (a^{\frac{1}{2}})^2 = a^1 = a$ এবং $(-\sqrt{a})^2 = a$

2 কিন্তু $\sqrt{0}$ -এর মান কী হবে?

সংজ্ঞা অনুযায়ী, $\sqrt{0} = 0$

3 আমি 4 ও 5-এর বর্গমূল নিয়ে কী পাই দেখি।

4-এর বর্গমূল $\pm\sqrt{4}$ অর্থাৎ $+2$ এবং -2 [$\because (+2)^2=4$ এবং $(-2)^2=4$]

4-এর ধনাত্মক বর্গমূলটিকে $\sqrt{4}$ লেখা হয়

অর্থাৎ অঙ্কের ভাষায় $\sqrt{4} = 2$, $\therefore$ 4-এর বর্গমূল $\square$ (মূলদ/অমূলদ) সংখ্যা **[নিজে লিখি]**

4 কিন্তু $\sqrt{4} = \sqrt{(-2)^2} = -2$ হবে কি?

$\sqrt{a^2} = |a|$ [সংজ্ঞা অনুযায়ী]

$\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = |2| = 2$ এবং $\sqrt{4} = \sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2$

5-এর বর্গমূল $\pm\sqrt{5}$ [$\because$ কোনো পূর্ণসংখ্যা পাব না যার বর্গ 5 হবে]

বুঝেছি, 5 পূর্ণবর্গ সংখ্যা নয়, কিন্তু 4 পূর্ণবর্গ সংখ্যা।

5 $\pm\sqrt{5}$ আকারের সংখ্যাকে কী বলা হয়?

যদি a এমন একটি ধনাত্মক মূলদ সংখ্যা হয়, যা কোনো মূলদ সংখ্যার বর্গ নয়, তাহলে $\pm\sqrt{a}$ আকারের সংখ্যাকে **শুদ্ধ দ্বিঘাত করণী** বলা হয়। আবার $a \pm\sqrt{b}$ আকারের সংখ্যা হলো **মিশ্র দ্বিঘাত করণী**, যেখানে a মূলদ সংখ্যা, $\sqrt{b}$ শুদ্ধ দ্বিঘাত করণী ।

আমরা জানি, $5^2 = 25$ বলে $\sqrt{25} = 25^{\frac{1}{2}} = (5^2)^{\frac{1}{2}} = 5^{2\times\frac{1}{2}} = 5^1 = 5$ [5 সংখ্যাটি 25-এর একটি বর্গমূল]

$5^3 = 125$ বলে $\sqrt[3]{125} = 125^{\frac{1}{3}} = (5^3)^{\frac{1}{3}} = 5^{3\times\frac{1}{3}} = 5^1 = 5$ [5 সংখ্যাটি 125-এর একটি ঘনমূল]

$5^4 = 625$ বলে $\sqrt[4]{625} = 625^{\frac{1}{4}} = (5^4)^{\frac{1}{4}} = 5^{4\times\frac{1}{4}} = 5^1 = 5$ [5 সংখ্যাটি 625-এর একটি চতুর্থমূল] .

বর্গমূল চিহ্নটির ক্ষেত্রে সাধারণত $\sqrt{}$ ব্যবহার করা হয়, $\sqrt[2]{}$ ব্যবহার করা হয় না। যে মূলগুলি উপরে উল্লেখ করলাম তারা প্রত্যেকে মূলদ সংখ্যা। কিন্তু সবসময় তা হয় না।

যেমন, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[4]{20}$, $\sqrt[5]{25}$, ইত্যাদিরা মূলদ সংখ্যা নয়। এদের সুনির্দিষ্ট দশমিক মান সম্পূর্ণরূপে নির্ণয় করা যায় না। অর্থাৎ এরা অমূলদ সংখ্যা।

$\therefore \pm\sqrt{5}$ একটি শুদ্ধ দ্বিঘাত করণী।

6 আমি 4 টি শুদ্ধ দ্বিঘাত করণী ও 4 টি মিশ্র দ্বিঘাত করণী বুঝে লিখি।

4 টি শুদ্ধ দ্বিঘাত করণী $\sqrt{3}$, $-\sqrt{5}$, $\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\boxed{\quad}$ [নিজে লিখি]

4 টি মিশ্র দ্বিঘাত করণী $2-\sqrt{3}$, $2+\sqrt{6}$, $\frac{3}{5}-\sqrt{10}$, $\boxed{\quad}$ [নিজে লিখি]

কিন্তু সকল দ্বিঘাত করণীই কি অমূলদ সংখ্যা?

দ্বিঘাত করণীর দশমিক মান সম্পূর্ণ রূপে নির্ণয় করা যায় না। তাই এগুলি অমূলদ সংখ্যা। কিন্তু সকল অমূলদ সংখ্যাই করণী নয়। যেমন, $\sqrt{\pi}$ অমূলদ সংখ্যা, কিন্তু এটি দ্বিঘাত করণী নয়।

7 $\sqrt{4}$, $\sqrt{25}$ কি দ্বিঘাত করণী?

$\sqrt{4}$, $\sqrt{25}$ আপাতদৃষ্টিতে করণীর আকারে থাকলেও এগুলি করণী নয়।

মূলদ সংখ্যা, $\sqrt{4} = 2$ এবং $\sqrt{25} = 5$

আমি শ্রীধর আচার্যের সূত্রের সাহায্যে $x^2-2ax+(a^2-b^2)=0$ দ্বিঘাত সমীকরণ সমাধান করে দেখছি বীজদ্বয় $\boxed{a+\sqrt{b}}$ ও $\boxed{\quad}$ যারা উভয়েই মিশ্র দ্বিঘাত করণী, যেখানে b একটি ধনাত্মক মূলদ সংখ্যা যা কোনো মূলদ সংখ্যার বর্গ নয়। **[নিজে করি]**

এই স্তরে আমাদের আলোচনা দ্বিঘাত করণীতেই সীমাবদ্ধ থাকবে এবং সাধারণভাবে করণী বললে আমরা দ্বিঘাত করণীই বুঝব।

মণিদীপা বোর্ডে লিখল 8 ও 12

8 8 ও 12 সংখ্যাদুটির যোগফল, বিয়োগফল, গুণফল, ভাগফল, বর্গ নিয়ে যা পেলাম তা কেমন ধরনের সংখ্যা নিজে বুঝে লিখি। **[নিজে করি]**

যেহেতু $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ সুতরাং সূচকের নিয়ম অনুসারে পাই,

$\sqrt{ab} = (ab)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}\times b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}\times\sqrt{b}$, যেখানে a, b অঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যা।

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, যেখানে a অঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যা এবং b ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা।

9 আমি 8 ও 32-এর বর্গমূল নিই ও কী পাই বুঝে লিখি।

$\sqrt{8}$ একটি শুদ্ধ দ্বিঘাত করণী কারণ 8 একটি পূর্ণবর্গ মূলদসংখ্যা নয়, আবার $\sqrt{32}$ -ও একটি শুদ্ধ দ্বিঘাত করণী কারণ 32 একটি পূর্ণবর্গ মূলদ সংখ্যা নয়।

$\sqrt{8}$ -কে লিখতে পারি, $\sqrt{8} = \sqrt{4\times2} = \sqrt{4}.\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

এবং $\sqrt{32}$ -কে লিখতে পারি, $\sqrt{32} = \sqrt{16\times2} = \sqrt{16}.\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

10 দেখছি, দুটি শুদ্ধ দ্বিঘাত করণী $\sqrt{8}$ ও $\sqrt{32}$ একই করণী $\sqrt{2}$ -এর মূলদ গুণিতক। এইরকম শুদ্ধ করণীকে কী বলা হয়?

দুই বা ততোধিক শুদ্ধ দ্বিঘাত করণী যদি একই করণীর মূলদ গুণিতক হয় তবে ওই সকল শুদ্ধ করণীকে **সদৃশ করণী** বলা হয়।

বুঝেছি, $\sqrt{8}$ ও $\sqrt{32}$ শুদ্ধ করণী দুটি সদৃশ করণী।

প্রয়োগ : 1. $\sqrt{8}$ ও $\sqrt{\frac{25}{2}}$ কি সদৃশ করণী? হিসাব করে দেখি?

$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ এবং $\sqrt{\frac{25}{2}} = \sqrt{\frac{25\times2}{4}} = \frac{\sqrt{25\times2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{25}\times\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{5}{2}\sqrt{2}$ $\therefore \sqrt{8}$ ও $\sqrt{\frac{25}{2}}$ সদৃশ করণী।

প্রয়োগ : 2. $\sqrt{12}$ ও $\sqrt{28}$ সদৃশ করণী কিনা হিসাব করি।

$\sqrt{12} = \sqrt{4\times3} = 2\sqrt{3}$ এবং $\sqrt{28} = \sqrt{4\times7} = 2\sqrt{7}$

$\sqrt{12}$ ও $\sqrt{28}$ শুদ্ধ করণীদ্বয় একই করণীর মূলদ গুণিতক নয়।

এই রকম শুদ্ধ দ্বিঘাত করণীকে কী বলা হয়?

যে সকল শুদ্ধ দ্বিঘাত করণী সদৃশ করণী নয় তারা **অসদৃশ করণী**।

বুঝেছি, $\sqrt{12}$ ও $\sqrt{28}$ **অসদৃশ করণী**।

অর্থাৎ যদি m এবং n দুটি এমন পরস্পর মৌলিক সংখ্যা [অর্থাৎ m ও n-এর গ.সা.গু 1] হয় যারা পূর্ণবর্গ নয়, তাহলে $\sqrt{m}$ এবং $\sqrt{n}$ অসদৃশ করণী হবে।

যেমন, 15 এবং 22 দুটি পরস্পর মৌলিক সংখ্যা, কারণ 15 এবং 22-এর গ.সা.গু. 1 এবং 15 এবং 22 কেউই পূর্ণবর্গ সংখ্যা নয়। সুতরাং $\sqrt{15}$ ও $\sqrt{22}$ অসদৃশ করণী।

11 দুটি অসদৃশ করণী $\sqrt{5}$ ও $\sqrt{7}$ -এর মধ্যে কোনটি বড়ো কীভাবে পাব দেখি।

যেহেতু, $7 > 5$ $\therefore \sqrt{7} > \sqrt{5}$ ($\because$ a, b ধনাত্মক সংখ্যা এবং $a^2 > b^2$ হলে $a > b$ হয়)

প্রয়োগ : 3. নীচের দ্বিঘাত করণীগুলির মধ্যে সদৃশ করণীগুলি একটি ঘরে লিখি

$\sqrt{45}, \sqrt{80}, \sqrt{147}, \sqrt{180}$ ও $\sqrt{500}$

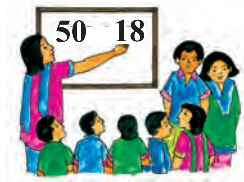
$\sqrt{45} = \sqrt{9\times5} = 3\sqrt{5}$ $\qquad$ $\sqrt{147} = \sqrt{7\times7\times3} = 7\sqrt{3}$

$\sqrt{80} = \sqrt{16\times5} = 4\sqrt{5}$ $\qquad$ $\sqrt{180} = \sqrt{6\times6\times5} = 6\sqrt{5}$

$\sqrt{500} = \boxed{}$ [নিজে করি]

$\therefore$ সদৃশ করণীগুলি $\sqrt{45}, \sqrt{80}, \sqrt{180}$ ও $\sqrt{500}$

প্রয়োগ : 4. $\sqrt{48}, \sqrt{27}, \sqrt{20}$ ও $\sqrt{75}$ দ্বিঘাত করণীগুলির মধ্যে সদৃশ করণীগুলি লিখি। [নিজে করি]



রেবা বোর্ডে লিখেছে 50 ও 18
$\sqrt{50}$ ও $\sqrt{18}$ দুটি শুদ্ধ দ্বিঘাত করণী।

প্রয়োগ : 5. $(\sqrt{50}+\sqrt{18})$ ও $(\sqrt{50}-\sqrt{18})$ এদের শুদ্ধ দ্বিঘাত করণীতে পরিণত করা যাবে কিনা দেখি।

$\sqrt{50}=5\sqrt{2}$ এবং $\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

$\therefore$ দেখছি $\sqrt{50}$ ও $\sqrt{18}$ সদৃশ করণী।

যেহেতু, 5x+3x = 8x এবং 5x–3x = $\boxed{}$

$\therefore \quad \sqrt{50}+\sqrt{18}=5\sqrt{2}+3\sqrt{2}=8\sqrt{2}$

$\sqrt{50}-\sqrt{18}=5\sqrt{2}-3\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

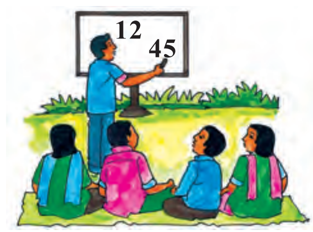
$\therefore$ দেখছি, $(\sqrt{50}+\sqrt{18})$ এবং $(\sqrt{50}-\sqrt{18})$-এদের শুদ্ধ করণীতে পরিণত করা যাচ্ছে।

প্রয়োগ : 6. আমি $(\sqrt{2}+\sqrt{8})$ এবং $(\sqrt{2}-\sqrt{8})$ -এর মান হিসাব করে লিখি এবং দেখি তাদের শুদ্ধ করণীতে পরিণত করা যায় কিনা। **[নিজে করি]**

মৃণাল বোর্ডে লিখল 12 ও 45

প্রয়োগ : 7. আমি $(\sqrt{12}+\sqrt{45})$ এবং $(\sqrt{12}-\sqrt{45})$ এদের মান হিসাব করে লিখি।

$\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ এবং $\sqrt{45}=3\sqrt{5}$



$\therefore \sqrt{12}$ ও $\sqrt{45}$ অসদৃশ করণী।

যেহেতু, 2x ও 3y -এর যোগফল = 2x+3y

$\therefore \sqrt{12}+\sqrt{45}=2\sqrt{3}+3\sqrt{5}$

একইভাবে, $\sqrt{12}-\sqrt{45}=2\sqrt{3}-3\sqrt{5}$

$\therefore$ আবার দেখছি, $(\sqrt{12}+\sqrt{45})$ এবং $(\sqrt{12}-\sqrt{45})$ অমূলদ সংখ্যা, কিন্তু তাদের শুদ্ধ করণীর আকারে লেখা যাচ্ছে না।

বুঝেছি, যেহেতু a ও b-এর যোগফল = a+b, $\therefore \sqrt{5}+\sqrt{7}=\boxed{}$ **[নিজে লিখি]**

প্রয়োগ : 8. আমি $2\sqrt{3}$, $3\sqrt{2}$ ও $4\sqrt{3}$ -এর যোগফল নির্ণয় করি।

$2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+4\sqrt{3}=6\sqrt{3}+3\sqrt{2}$

প্রয়োগ : 9. $\sqrt{12}$, $-4\sqrt{3}$ ও $6\sqrt{3}$ -এর সমষ্টি হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 10. আমি দুটি মিশ্র দ্বিঘাত করণী $(2+\sqrt{3})$ ও $(2-2\sqrt{3})$-এর সমষ্টি নির্ণয় করি।

30 ও 2x-এর যোগফল = 30+2x এবং (30+2x)+(30–4x) = $\boxed{}$ হয়।

$\therefore (2+\sqrt{3})+(2-2\sqrt{3})=2+2+\sqrt{3}-2\sqrt{3}=4-\sqrt{3}$

$\therefore (2+\sqrt{3})$ ও $(2-2\sqrt{3})$-এর সমষ্টি মিশ্র দ্বিঘাত করণী পেলাম।

প্রয়োগ : 11. $(9-2\sqrt{5})+(12+7\sqrt{5})=\boxed{}$ **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 12. আমি $(2+\sqrt{3})$ ও $(2-\sqrt{3})$ -এর সমষ্টি নির্ণয় করি।

$$(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3}) = 2+2+\sqrt{3}-\sqrt{3} = 4$$

$\therefore$ দেখছি, দুটি দ্বিঘাত করণীর সমষ্টি মূলদ সংখ্যা পেলাম।

প্রয়োগ : 13. আমি অন্য যে-কোনো দুটি দ্বিঘাত করণী লিখি যাদের সমষ্টি মূলদ সংখ্যা। [নিজে করি]

কষে দেখি 9.1

1. মূলদ ও অমূলদ সংখ্যার গুণফল আকারে লিখি—
   (i) $\sqrt{175}$ (ii) $2\sqrt{112}$ (iii) $\sqrt{108}$ (iv) $\sqrt{125}$ (v) $5\sqrt{119}$
2. প্রমাণ করি যে, $\sqrt{108}-\sqrt{75}=\sqrt{3}$
3. দেখাই যে, $\sqrt{98}+\sqrt{8}-2\sqrt{32}=\sqrt{2}$
4. দেখাই যে, $3\sqrt{48}-4\sqrt{75}+\sqrt{192}=0$
5. সরলতম মান নির্ণয় করি :
   $\sqrt{12}+\sqrt{18}+\sqrt{27}-\sqrt{32}$
6. (a) $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ -এর সঙ্গে কত যোগ করলে যোগফল $2\sqrt{5}$ হবে, হিসাব করে লিখি।
   (b) $7-\sqrt{3}$ -এর থেকে কত বিয়োগ করলে বিয়োগফল $3+\sqrt{3}$ হবে, নির্ণয় করি।
   (c) $2+\sqrt{3}$, $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ এবং $2+\sqrt{7}$ -এর যোগফল লিখি।
   (d) $(10-\sqrt{11})$ থেকে $(-5+3\sqrt{11})$ বিয়োগ করি ও বিয়োগফল লিখি।
   (e) $(-5+\sqrt{7})$ এবং $(\sqrt{7}+\sqrt{2})$-এর যোগফল থেকে $(5+\sqrt{2}+\sqrt{7})$ বিয়োগ করে বিয়োগফল নির্ণয় করি।
   (f) দুটি দ্বিঘাত করণী লিখি যাদের সমষ্টি মূলদ সংখ্যা।

12 এবার আমাদের বন্ধু অমিয় বোর্ডে লিখল 7 ও 11

দেখছি, বোর্ডে লেখা সংখ্যাদুটি মৌলিক সংখ্যা।

$\sqrt{7}$ ও $\sqrt{11}$ দুটি শুদ্ধ দ্বিঘাত করণীর যোগফল ও বিয়োগফল নিজে লিখি।

13 কিন্তু $\sqrt{7}$ ও $\sqrt{11}$ -এর গুণফল ও ভাগফল হিসাব করে লিখি।

যেহেতু $a^m \times b^m = (ab)^m$ [$a\neq0$, $b\neq0$, m একটি মূলদ সংখ্যা]

$$\therefore \sqrt{7}\times\sqrt{11} = 7^{\frac{1}{2}}\times 11^{\frac{1}{2}}$$
$$= (7\times11)^{\frac{1}{2}}$$
$$= 77^{\frac{1}{2}}$$
$$= \sqrt{77}$$

এখানে $\sqrt{77}$ একটি শুদ্ধ দ্বিঘাত করণী।

প্রয়োগ : 14. আমি নীচের দ্বিঘাত করণীগুলির গুণফল নির্ণয় করি :

(i) $2\sqrt{5}\times3\sqrt{2}$ (ii) $7\sqrt{3}\times2\sqrt{3}$ (iii) $(2+\sqrt{3})(4+\sqrt{3})$ (iv) $(5-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})$

(i) $2\sqrt{5}\times3\sqrt{2}=2\times3\times\sqrt{5\times2}=6\sqrt{10}$

(ii) $7\sqrt{3}\times2\sqrt{3}=7\times2\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}$

$=14\sqrt{3^2}=14(3^2)^{\frac{1}{2}}=14\times3^{(2\times\frac{1}{2})}$

$=14\times3=42$ [$\because (a^m)^n=a^{mn}$, $a\neq0$ এবং m, n মূলদ সংখ্যা]

(iii) $(2+\sqrt{3})(4+\sqrt{3})=8+4\sqrt{3}+2\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2$

$=8+6\sqrt{3}+3=11+6\sqrt{3}$ [$\because (x+y)(a+b)=ax+ay+bx+by$]

(iv) $(5-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=5\times2-2\sqrt{3}-5\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2$

$=10-2\sqrt{3}-5\sqrt{3}+3=13-7\sqrt{3}$

প্রয়োগ : 15. আমি $(2+\sqrt{3}+\sqrt{5})\times(3-\sqrt{5})$-এর গুণফল নির্ণয় করি।

$$(2+\sqrt{3}+\sqrt{5})\times(3-\sqrt{5})=2\times(3-\sqrt{5})+\sqrt{3}\times(3-\sqrt{5})+\sqrt{5}\times(3-\sqrt{5})$$
$$=6-2\sqrt{5}+3\sqrt{3}-\sqrt{15}+3\sqrt{5}-5$$
$$=6-5+\sqrt{5}+3\sqrt{3}-\sqrt{15}$$
$$=1+\sqrt{5}+3\sqrt{3}-\sqrt{15}$$

প্রয়োগ : 16. $(3+\sqrt{7}-\sqrt{5})\times(2\sqrt{2}-1)$-এর গুণফল হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

নাথুরা বোর্ডে লিখল 13 ও 5

$\sqrt{13}$ ও $\sqrt{5}$ দুটি শুদ্ধ দ্বিঘাত করণী।

প্রয়োগ : 17. আমি $\sqrt{13}\div\sqrt{5}$ -এর ভাগফল কী হবে হিসাব করে দেখি।

$\sqrt{13}\div\sqrt{5}=\dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{5}}$

দেখছি হরে করণী আছে। কিন্তু কীভাবে $\dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{5}}$ -এর হরকে করণীমুক্ত করব?

$\dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{5}}$ -এর লব ও হরকে $\sqrt{5}$ দিয়ে গুণ করি ও কী পাই দেখি।

> $\dfrac{a}{b}$ কে বীজগাণিতিক ভগ্নাংশ বললে a কে লব ও b কে হর বলি। সেই অর্থে এর লব $\sqrt{13}$ এবং হর $\sqrt{5}$

$\dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{13}\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{65}}{5}$ অর্থাৎ $\dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{5}}$ -এর হরকে করণী মুক্ত করে $\dfrac{\sqrt{65}}{5}$ পেলাম।

> কিন্তু এইভাবে গুণ করে কোনো করণীকে করণীমুক্ত করার প্রক্রিয়াকে কী বলা হয়?
> কোনো করণীর সঙ্গে অথবা একাধিক করণীর যোগ ও বিয়োগ দ্বারা গঠিত অমূলদ সংখ্যার সঙ্গে কোনো উৎপাদক গুণ করে গুণফলটি করণীমুক্ত করা অর্থাৎ একটি মূলদ সংখ্যা পাওয়ার প্রক্রিয়াকে **করণী নিরসন (Rationalisation)** বলে এবং ওই উৎপাদকটিকে ওই করণীর **অথবা ওই অমূলদ সংখ্যার** **করণী নিরসক উৎপাদক (Rationalising Factor)** বলা হয়।

$\sqrt{5}$ -এর একটি করণী নিরসক উৎপাদক $\sqrt{5}$; এছাড়াও $k\sqrt{5}$ যেখানে k একটি অশূন্য মূলদ সংখ্যা।

$\therefore \sqrt{a}$-এর একটি করণী নিরসক উৎপাদক $\sqrt{a}$; এছাড়াও $k\sqrt{a}$,যেখানে k একটি অশূন্য মূলদ সংখ্যা।

প্রয়োগ : 18. $\sqrt{7}$-এর 2টি করণী নিরসক উৎপাদক লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 19 . আমি $(5+\sqrt{7})$-এর করণী নিরসক উৎপাদক কী পাব দেখি।

$$(5+\sqrt{7})\times(5-\sqrt{7}) = (5)^2-(\sqrt{7})^2 = 25-7 = \boxed{} \quad [(a+b)(a-b) = a^2-b^2]$$

আবার, $(5+\sqrt{7})\times(-5+\sqrt{7}) = (\sqrt{7}+5)\times(\sqrt{7}-5) = (\sqrt{7})^2-(5)^2 = \boxed{}$

$\therefore$ দেখছি, $5+\sqrt{7}$-এর করণী নিরসক উৎপাদক পেলাম $(5-\sqrt{7})$ এবং $(-5+\sqrt{7})$

বুঝেছি, $a+\sqrt{b}$-এর করণী নিরসক উৎপাদক $a-\sqrt{b}$ অথবা $-a+\sqrt{b}$ অথবা এদের কোনো মূলদ গুণিতক।

প্রয়োগ : 20. $7-\sqrt{3}$-এর 2 টি করণী নিরসক উৎপাদক লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 21. $(\sqrt{11}-\sqrt{6})$-অমূলদ সংখ্যাটির করণী নিরসক উৎপাদক কী কী পাব দেখি।

$$(\sqrt{11}-\sqrt{6})(\sqrt{11}+\sqrt{6}) = (\sqrt{11})^2-(\sqrt{6})^2 = 11-6 = 5$$

আবার, $(\sqrt{11}-\sqrt{6})(-\sqrt{11}-\sqrt{6}) = -[(\sqrt{11}-\sqrt{6})(\sqrt{11}+\sqrt{6})]$

$= \boxed{}$ **[নিজে করি]**

$(\sqrt{a}-\sqrt{b})$-অমূলদ সংখ্যাটির করণী নিরসক উৎপাদক $(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ অথবা $(-\sqrt{a}-\sqrt{b})$ অথবা এদের কোনো মূলদ গুণিতক।

প্রয়োগ : 22. $(\sqrt{15}+\sqrt{3})$-এর 2 টি করণী নিরসক উৎপাদক লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 23. আমি $(7+\sqrt{2})$ মিশ্র দ্বিঘাত করণীর একটি করণী নিরসক উৎপাদক লিখি যা $(7+\sqrt{2})$-এর সঙ্গে যোগ করলে মূলদ সংখ্যা পাব।

$$(7+\sqrt{2})\times(7-\sqrt{2}) = 7^2-(\sqrt{2})^2 = \boxed{}$$

আবার, $(7+\sqrt{2})+(7-\sqrt{2}) = 7+7 = 14$

$\therefore$ দেখছি, $7-\sqrt{2}$ উৎপাকটির সঙ্গে $(7+\sqrt{2})$ মিশ্র দ্বিঘাত করণীর যোগফল ও গুণফল মূলদ সংখ্যা।

কিন্তু কোনো মিশ্র দ্বিঘাত করণীর এরকম করণী নিরসক উৎপাদককে ওই মিশ্র দ্বিঘাত করণীর কী বলা হয়?

কোনো মিশ্র দ্বিঘাত করণীর করণী নিরসক উৎপাদকের সঙ্গে ওই করণীর যোগফল ও গুণফল উভয়ই যদি মূলদ সংখ্যা হয় তবে তাকে ওই মিশ্র দ্বিঘাত করণীর **অনুবন্ধী বা পূরক করণী (Conjugate surd)** বলা হয়।

বুঝেছি, $(7+\sqrt{2})$ মিশ্র দ্বিঘাত করণীর অনুবন্ধী করণী $7-\sqrt{2}$, কিন্তু $(-7+\sqrt{2})$ উৎপাদকটি অনুবন্ধী করণী নয়। যদিও এটি প্রদত্ত করণীর একটি করণী নিরসক উৎপাদক।

কারণ, $7+\sqrt{2}+7-\sqrt{2} = 14$ (মূলদ সংখ্যা)

আবার, $(7+\sqrt{2})(7-\sqrt{2}) = (7)^2-(\sqrt{2})^2 = 49-2=47$ (মূলদ সংখ্যা)।

কিন্তু $(7+\sqrt{2})+(-7+\sqrt{2}) = 7+\sqrt{2}-7+\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ (অমূলদ সংখ্যা)

প্রয়োগ : 24. আমি $(\sqrt{5}-1)$, $\sqrt{3}$, $(\sqrt{3}-2)$-এদের অনুবন্ধী করণীগুলি লিখি।

$(\sqrt{5}-1)$-এর অনুবন্ধী করণী $-\sqrt{5}-1$

$\sqrt{3}$ -এর অনুবন্ধী করণী $-\sqrt{3}$

$(\sqrt{3}-2)$-এর অনুবন্ধী করণী $(-\sqrt{3}-2)$

$\therefore$ পেলাম, $a+\sqrt{b}$ আকারের করণীর অনুবন্ধী করণীটি $a-\sqrt{b}$

$a-\sqrt{b}$ আকারের করণীর অনুবন্ধী করণীটি $a+\sqrt{b}$

প্রয়োগ : 25. নীচের মিশ্র এবং শুদ্ধ দ্বিঘাত করণীগুলির অনুবন্ধী করণী লিখি—

(i) $2+\sqrt{3}$ (ii) $5-\sqrt{2}$ (iii) $\sqrt{5}-7$ (iv) $\sqrt{11}+6$ (v) $\sqrt{5}$ **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 26. আমি $(2\sqrt{2}\div\sqrt{5})$-এর হরের করণী নিরসন করি।

$$2\sqrt{2}\div\sqrt{5}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \text{ ———— (i)}$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{2}\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{10}}{\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$$

$\therefore$ পেলাম, $2\sqrt{2}\div\sqrt{5}=2\sqrt{10}\div 5$

প্রয়োগ : 27. আমি হরের করণী নিরসন করি : (i) $6\div\sqrt{7}$ (ii) $5\sqrt{2}\div 6\sqrt{3}$

$$\text{(i) } 6\div\sqrt{7}=\frac{6}{\sqrt{7}}=\frac{6\times\sqrt{7}}{\sqrt{7}\times\sqrt{7}}=\frac{6\sqrt{7}}{\left(\sqrt{7}\right)^2}=\frac{6\sqrt{7}}{7}=6\sqrt{7}\div 7$$

$$\text{(ii) } 5\sqrt{2}\div 6\sqrt{3}=\frac{5\sqrt{2}}{6\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{6\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{6}}{6\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{5\sqrt{6}}{6\times 3}=\frac{5\sqrt{6}}{18}=5\sqrt{6}\div 18$$

প্রয়োগ : 28. হরের করণী নিরসন করি : (i) $\frac{4\sqrt{5}}{5\sqrt{3}}$ (ii) $\frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{6}}$ **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 29. আমি হরের করণী নিরসন করি ।

(i) $4\div(3-\sqrt{2})$ (ii) $(\sqrt{5}+2)\div(\sqrt{3}-1)$ (iii) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})\div(\sqrt{2}-\sqrt{3})$

$$\text{(i) } 4\div\left(3-\sqrt{2}\right)=\frac{4}{3-\sqrt{2}}=\frac{4\left(3+\sqrt{2}\right)}{\left(3-\sqrt{2}\right)\left(3+\sqrt{2}\right)}=\frac{4\left(3+\sqrt{2}\right)}{(3)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{4\left(3+\sqrt{2}\right)}{9-2}=\frac{\left(12+4\sqrt{2}\right)}{7}$$

$$\text{(ii) } \left(\sqrt{5}+2\right)\div\left(\sqrt{3}-1\right)=\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{3}-1}=\frac{\left(\sqrt{5}+2\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}=\frac{\sqrt{15}+2\sqrt{3}+\sqrt{5}+2}{\left(\sqrt{3}\right)^2-(1)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{15}+2\sqrt{3}+\sqrt{5}+2}{2}$$

(iii) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\div\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\dfrac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}=\dfrac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}$

$=\dfrac{2+3+2\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{2-3}$

$=\dfrac{5+2\sqrt{6}}{-1}$

প্রয়োগ : 30. হরের করণী নিরসন করি :

(i) $(4+2\sqrt{3})\div(2-\sqrt{3})$ (ii) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})\div(\sqrt{5}-\sqrt{3})$ [নিজে করি]

কষে দেখি 9.2

1. (a) $3^{\frac{1}{2}}$ ও $\sqrt{3}$ -এর গুণফল নির্ণয় করি।
   (b) $2\sqrt{2}$ -কে কত দিয়ে গুণ করলে 4 পাব লিখি।
   (c) $3\sqrt{5}$ এবং $5\sqrt{3}$ -এর গুণফল নির্ণয় করি।
   (d) $\sqrt{6}\times\sqrt{15}=x\sqrt{10}$ হলে, x-এর মান হিসাব করে লিখি।
   (e) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})=25-x^2$ একটি সমীকরণ হলে, x-এর মান হিসাব করে লিখি।

2. **গুণফল নির্ণয় করি :**
   (a) $\sqrt{7}\times\sqrt{14}$ (b) $\sqrt{12}\times2\sqrt{3}$ (c) $\sqrt{5}\times\sqrt{15}\times\sqrt{3}$ (d) $\sqrt{2}(3+\sqrt{5})$
   (e) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})$ (f) $(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})(4\sqrt{2}+\sqrt{5})$
   (g) $(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)(2-\sqrt{3})(4+2\sqrt{3})$

3. (a) $\sqrt{5}$ -এর করণী নিরসক উৎপাদক $\sqrt{x}$ হলে, x-এর ক্ষুদ্রতম মান কত হবে তা হিসাব করে লিখি। [যেখানে x একটি পূর্ণসংখ্যা]
   (b) $3\sqrt{2}\div3$ -এর মান নির্ণয় করি।
   (c) $7\div\sqrt{48}$ -এর হরের করণী নিরসন করতে হরকে ন্যূনতম কত দিয়ে গুণ করতে হবে তা লিখি।
   (d) $(\sqrt{5}+2)$-এর করণী নিরসক উৎপাদক নির্ণয় করি যা করণীটির অনুবন্ধী করণী।
   (e) $(\sqrt{5}+\sqrt{2})\div\sqrt{7}=\frac{1}{7}(\sqrt{35}+a)$ হলে, a-এর মান নির্ণয় করি।
   (f) $\dfrac{5}{\sqrt{3}-2}$ -এর হরের একটি করণী নিরসক উৎপাদক লিখি যা অনুবন্ধী করণী নয়।

4. $(9-4\sqrt{5})$ ও $(-2-\sqrt{7})$ মিশ্র দ্বিঘাত করণীদ্বয়ের অনুবন্ধী করণীদ্বয় লিখি।

5. নীচের মিশ্র দ্বিঘাত করণীর 2 টি করে করণী নিরসক উৎপাদক লিখি:
   (i) $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ (ii) $13+\sqrt{6}$ (iii) $\sqrt{8}-3$ (iv) $\sqrt{17}-\sqrt{15}$

6. হরের করণী নিরসন করি :

(i) $\dfrac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$ (ii) $\dfrac{\sqrt{2}-1+\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$ (iii) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$

(iv) $\dfrac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ (v) $\dfrac{3\sqrt{2}+1}{2\sqrt{5}-1}$ (vi) $\dfrac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$

7. প্রথমটিকে দ্বিতীয়টি দিয়ে ভাগ করে ভাজককে মূলদ সংখ্যায় পরিণত করি।

(i) $3\sqrt{2}+\sqrt{5}$, $\sqrt{2}+1$ (ii) $2\sqrt{3}-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ (iii) $3+\sqrt{6}$, $\sqrt{3}+\sqrt{2}$

8. মান নির্ণয় করি : (i) $\dfrac{2\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}-\dfrac{4\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1}$ (ii) $\dfrac{8+3\sqrt{2}}{3+\sqrt{5}}-\dfrac{8-3\sqrt{2}}{3-\sqrt{5}}$

প্রয়োগ : 31. সরল করি : $\dfrac{3\sqrt{4.2}-2\sqrt{12}+\sqrt{20}}{3\sqrt{18}-2\sqrt{27}+\sqrt{45}}$

$$\frac{3\sqrt{4.2}-2\sqrt{12}+\sqrt{20}}{3\sqrt{18}-2\sqrt{27}+\sqrt{45}}=\frac{3\sqrt{4.2}-2\sqrt{4.3}+\sqrt{4.5}}{3\sqrt{9.2}-2\sqrt{9.3}+\sqrt{9.5}}=\frac{3.2\sqrt{2}-2.2\sqrt{3}+2\sqrt{5}}{3.3\sqrt{2}-2.3\sqrt{3}+3\sqrt{5}}$$

$$=\frac{6\sqrt{2}-4\sqrt{3}+2\sqrt{5}}{9\sqrt{2}-6\sqrt{3}+3\sqrt{5}}$$

$$=\frac{2\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{3\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}=\frac{2}{3}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সরলফল $=\dfrac{2}{3}$

প্রয়োগ : 32. সরল করি : $\dfrac{3\sqrt{20}+2\sqrt{28}+\sqrt{12}}{5\sqrt{45}+2\sqrt{175}+\sqrt{75}}$ [নিজে করি]

প্রয়োগ : 33. সরল করি : $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}+\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

প্রদত্ত $=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}+\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ ———— (i)

প্রথম অংশ $=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{5}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}=\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{10}}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{10}}{3-2}=\sqrt{15}-\sqrt{10}$

দ্বিতীয় অংশ $=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{3}\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}=\dfrac{3\sqrt{15}-3\sqrt{6}}{5-2}=\dfrac{3\left(\sqrt{15}-\sqrt{6}\right)}{3}$

$=\sqrt{15}-\sqrt{6}$

তৃতীয় অংশ $= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)} = \frac{2\sqrt{10}-2\sqrt{6}}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{2\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)}{5-3}$

$= \frac{2\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)}{2}$

$= \sqrt{10}-\sqrt{6}$

$\therefore$ (i) থেকে পাই,

প্রদত্ত $= \left(\sqrt{15}-\sqrt{10}\right)-\left(\sqrt{15}-\sqrt{6}\right)+\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)$

$= \sqrt{15}-\sqrt{10}-\sqrt{15}+\sqrt{6}+\sqrt{10}-\sqrt{6} = 0$

$\therefore$ নির্ণেয় সরলফল = 0.

প্রয়োগ : 34. সরল করি : $\frac{5}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ [নিজে করি]

প্রয়োগ : 35. $x=\sqrt{3}+\sqrt{2}$ হলে, (i) $x-\frac{1}{x}$ (ii) $x^2+\frac{1}{x^2}$ এবং (iii) $x^3-\frac{1}{x^3}$ -এর সরলতম মানগুলি নির্ণয় করি।

$x=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

$\therefore \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$

(i) $x-\frac{1}{x} = \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) = \sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

(ii) $x^2+\frac{1}{x^2} = \left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2\times x\times\frac{1}{x} = \left(2\sqrt{2}\right)^2+2.1 = 8+2 = 10$

(iii) $x^3-\frac{1}{x^3} = \left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\times x\times\frac{1}{x}\left(x-\frac{1}{x}\right) = \left(2\sqrt{2}\right)^3+3\times1\times2\sqrt{2} = 16\sqrt{2}+6\sqrt{2} = 22\sqrt{2}$

প্রয়োগ : 36. $x=\sqrt{3}+\sqrt{2}$ হলে, $\left(x-\frac{1}{x}\right)$, $\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)$ এবং $\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)$ -এর সরলতম মানগুলি নির্ণয় করি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 37. যদি $x = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ এবং $y = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ হয়, তবে

(a) দেখাই যে, $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} = \frac{7\sqrt{3}}{12}$ (b) $\frac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2}$ -এর সরলতম মান নির্ণয় করি।

(c) $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}$ -এর সরলতম মান নির্ণয় করি। (d) x^3-y^3 -এর সরলতম মান নির্ণয় করি।

প্রথমে, $x+y$, $x-y$ ও xy -এর মান নির্ণয় করি।

$x+y = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}+\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2+\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)} = \frac{3+1+2\sqrt{3}+3+1-2\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2-(1)^2} = \frac{8}{3-1}$

$= \frac{8}{2} = 4$

অথবা, $x+y=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}+\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

$$=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2+\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}=\frac{2\left[\left(\sqrt{3}\right)^2+(1)^2\right]}{\left(\sqrt{3}\right)^2-(1)^2}\quad\left[\because (a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)\right]$$

$$=\frac{2(3+1)}{3-1}=\frac{2\times4}{2}=4$$

$$x-y=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}-\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2-\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}=\frac{\left(3+1+2\sqrt{3}\right)-\left(3+1-2\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2-(1)^2}$$

$$=\frac{3+1+2\sqrt{3}-3-1+2\sqrt{3}}{3-1}=\frac{4\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$$

অথবা, $x-y=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}-\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

$$=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2-\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}=\frac{4\times\sqrt{3}\times1}{\left(\sqrt{3}\right)^2-(1)^2}\quad\left[\because (a+b)^2-(a-b)^2=4ab\right]$$

$$=\frac{4\sqrt{3}}{3-1}=\frac{4\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$$

$$x\times y=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)}\times\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)}=1$$

(a) $\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=\dfrac{(x+y)^2-2xy}{(x+y)(x-y)}=\dfrac{(4)^2-2\times1}{4\times2\sqrt{3}}=\dfrac{14}{4\times2\sqrt{3}}=\dfrac{7\times\sqrt{3}}{4\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{7\sqrt{3}}{12}$

(b) $\dfrac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2}=\dfrac{(x+y)^2-3xy}{(x+y)^2-xy}=\dfrac{4^2-3\times1}{4^2-1}=\dfrac{13}{15}$

অথবা, $\dfrac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2}=\dfrac{(x-y)^2+xy}{(x-y)^2+3xy}=\dfrac{\left(2\sqrt{3}\right)^2+1}{\left(2\sqrt{3}\right)^2+3}=\dfrac{12+1}{12+3}=\dfrac{13}{15}$

বুঝেছি, $(x+y)$ অথবা $(x-y)$-এর যে-কোনো একটির মান জানতে হবে।

(c) $\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=\dfrac{x^3+y^3}{xy}=\dfrac{(x+y)^3-3xy(x+y)}{xy}=\dfrac{4^3-3\times4}{1}=64-12=52$

(d) $x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)=(2\sqrt{3})^3+3\times1\times2\sqrt{3}=24\sqrt{3}+6\sqrt{3}=30\sqrt{3}$

প্রয়োগ : 38. $(\sqrt{5}+\sqrt{3})$ এবং $(\sqrt{6}+\sqrt{2})$-এর মধ্যে কোনটি বড়ো লিখি।

$(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2=(\sqrt{5})^2+2\times\sqrt{5}\times\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2=5+2\sqrt{15}+3=8+2\sqrt{15}$

$(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2=(\sqrt{6})^2+2\times\sqrt{6}\times\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2=6+2\sqrt{12}+2=8+2\sqrt{12}$

যেহেতু, $\sqrt{15}>\sqrt{12}$, সুতরাং $8+2\sqrt{15}>8+2\sqrt{12}$ $\quad\therefore (\sqrt{5}+\sqrt{3})$ সংখ্যাটি বড়ো।

কষে দেখি 9.3

1. (a) $m+\frac{1}{m}=\sqrt{3}$ হলে, (i) $m^2+\frac{1}{m^2}$ এবং (ii) $m^3+\frac{1}{m^3}$ -এদের সরলতম মান নির্ণয় করি।

   (b) দেখাই যে, $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=2\sqrt{15}$

2. সরল করি : (a) $\frac{\sqrt{2}(2+\sqrt{3})}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}-\frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{3})}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}$ (b) $\frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}-\frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$

   (c) $\frac{4\sqrt{3}}{2-\sqrt{2}}-\frac{30}{4\sqrt{3}-\sqrt{18}}-\frac{\sqrt{18}}{3-\sqrt{12}}$ (d) $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}-\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

3. যদি $x=2$, $y=3$ এবং $z=6$ হয় তবে,

   $\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{y}+\sqrt{z}}-\frac{4\sqrt{y}}{\sqrt{z}+\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ -এর মান হিসাব করে লিখি।

4. $x=\sqrt{7}+\sqrt{6}$ হলে (i) $x-\frac{1}{x}$ (ii) $x+\frac{1}{x}$ (iii) $x^2+\frac{1}{x^2}$ এবং (iv) $x^3+\frac{1}{x^3}$ -এদের সরলতম মান নির্ণয় করি।

5. সরল করি : $\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}+\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}$

   সরলফল 14 হলে, x-এর মান কী কী হবে হিসাব করে লিখি।

6. যদি $a=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$ ও $b=\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$ হয়, তবে নীচের মানগুলি নির্ণয় করি।

   (i) $\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2}$ (ii) $\frac{(a-b)^3}{(a+b)^3}$ (iii) $\frac{3a^2+5ab+3b^2}{3a^2-5ab+3b^2}$ (iv) $\frac{a^3+b^3}{a^3-b^3}$

7. যদি $x=2+\sqrt{3}$, $y=2-\sqrt{3}$ হয়, তবে নিম্নলিখিতগুলির সরলতম মান নির্ণয় করি।

   (a) (i) $x-\frac{1}{x}$ (ii) $y^2+\frac{1}{y^2}$ (iii) $x^3-\frac{1}{x^3}$ (iv) $xy+\frac{1}{xy}$

   (b) $3x^2-5xy+3y^2$

8. $x=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ এবং $xy=1$ হলে, দেখাই যে, $\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}=\frac{12}{11}$

9. $(\sqrt{7}+1)$ এবং $(\sqrt{5}+\sqrt{3})$-এর মধ্যে কোনটি বড়ো লিখি।

10. **অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)**

(A) বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q) :

(i) $x=2+\sqrt{3}$ হলে, $x+\frac{1}{x}$-এর মান (a) 2 (b) $2\sqrt{3}$ (c) 4 (d) $2-\sqrt{3}$

(ii) যদি $p+q=\sqrt{13}$ এবং $p-q=\sqrt{5}$ হয়, তাহলে pq-এর মান (a) 2 (b) 18 (c) 9 (d) 8

(iii) যদি $a+b=\sqrt{5}$ এবং $a-b=\sqrt{3}$ হয়, তাহলে (a^2+b^2)-এর মান
(a) 8 (b) 4 (c) 2 (d) 1

(iv) $\sqrt{125}$ থেকে $\sqrt{5}$ বিয়োগ করলে বিয়োগফল হবে
(a) $\sqrt{80}$ (b) $\sqrt{120}$ (c) $\sqrt{100}$ (d) কোনটিই নয়

(v) $(5-\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)(5+\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)$-এর গুণফল (a) 22 (b) 44 (c) 2 (d) 11

(B) নীচের বিবৃতিগুলি সত্য না মিথ্যা লিখি :

(i) $\sqrt{75}$ এবং $\sqrt{147}$ সদৃশ করণী।

(ii) $\sqrt{\pi}$ একটি দ্বিঘাত করণী।

(C) শূন্যস্থান পূরণ করি :

(i) $5\sqrt{11}$ একটি ________ সংখ্যা। (মূলদ/অমূলদ)

(ii) $(\sqrt{3}-5)$ -এর অনুবন্ধী করণী ________।

(iii) দুটি দ্বিঘাত করণীর যোগফল ও গুণফল একটি মূলদ সংখ্যা হলে করণীদ্বয় ________ করণী।

11. **সংক্ষিপ্তধর্মী উত্তরপ্রশ্ন (S.A.)**

(i) $x=3+2\sqrt{2}$ হলে, $x+\frac{1}{x}$ -এর মান লিখি।

(ii) $(\sqrt{15}+\sqrt{3})$ এবং $(\sqrt{10}+\sqrt{8})$ -এর মধ্যে কোনটি বড়ো লিখি।

(iii) দুটি মিশ্র দ্বিঘাত করণী লিখি যাদের গুণফল একটি মূলদ সংখ্যা।

(iv) $\sqrt{72}$ থেকে কত বিয়োগ করলে $\sqrt{32}$ হবে তা লিখি।

(v) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}\right)$ -এর সরলতম মান লিখি।

10 বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ সংক্রান্ত উপপাদ্য

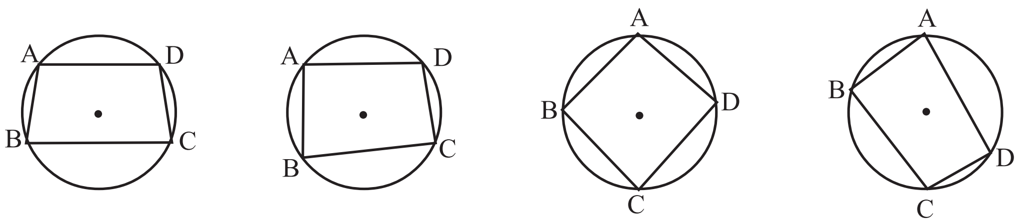
THEOREMS RELATED TO CYCLIC QUADRILATERAL

আমরা নানারকম জ্যামিতিক বিষয়ের মডেল তৈরি করব। তাই অনেকগুলি ছোটো বড়ো কাঠি নিয়ে আমরা বন্ধুরা আজ শনিবার স্কুলের গণিতের ল্যাবরেটরিতে একত্রিত হয়েছি। কাঠিগুলি জুড়ে আমরা অনেকগুলি নানান মাপের ছোটো বড়ো ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজ তৈরি করব ও সেগুলি দিয়ে নতুন কিছু তৈরির চেষ্টা করব।

গণিতের ল্যাবরেটরিতে অনেকগুলি বৃত্তাকার রিং রাখা আছে। সাহানা এক মজার কাজ করল। সে একটি বড়ো বৃত্তাকার রিং-এর মধ্যে কাঠির তৈরি চতুর্ভুজগুলি আটকে নতুন মডেল তৈরির চেষ্টা করছে।

দেখছি, সকল ধরনের ও মাপের চতুর্ভুজ বৃত্তাকার রিং-এর মধ্যে আটকানো যাচ্ছে না।

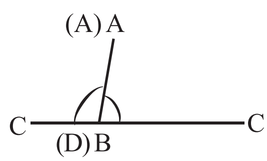
1 যে সকল চতুর্ভুজগুলি বৃত্তাকার রিং-এর মধ্যে আটকানো গেল, তাদের আলাদা করে রাখি ও তাদের মধ্যে মিল খোঁজার চেষ্টা করি।



কাঠির A ও C বিন্দুতে জোড় খুলে পাশের ছবির মতো বসিয়ে

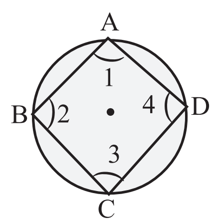
দেখছি, $\angle ABC$ ও $\angle ADC$ দুটি পরস্পর $\boxed{}$ [পূরক / সম্পূরক]

একইভাবে, $\angle BAD$ ও $\angle BCD$ দুটিও পরস্পর $\boxed{}$ [নিজে লিখি]



আমি খাতায় বৃত্ত ও বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ আঁকি ও হাতেকলমে যাচাই করে কী পাই দেখি।

হাতেকলমে



(i) আর্ট পেপারে বৃত্ত এঁকে বৃত্তাকার ক্ষেত্র কেটে নিলাম।

(ii) এবার ওই বৃত্তের উপরে যে-কোনো চারটি বিন্দু A, B, C ও D নিয়ে A, B; B, C; C, D ও D, A যোগ করে ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ পেলাম।

(iii) কোণগুলির 1, 2, 3 ও 4 নাম দিয়ে কেটে নিলাম।

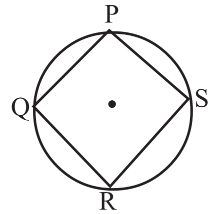
(iv) এবার কোণ 4টির মধ্যে বিপরীত দুটি কোণ পাশাপাশি বসিয়ে দেখছি,

$\angle 1 + \angle 3 = \boxed{}$ এবং $\angle 2 + \angle 4 = \boxed{}$

[নিজে এঁকে ও কেটে হাতেকলমে যাচাই করে লিখি]

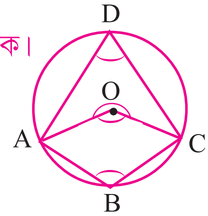
$\therefore$ হাতেকলমে পেলাম, বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সম্পূরক।

রাহুল একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ PQRS এঁকেছে।
আমি চাঁদা দিয়ে মেপে দেখছি,
$\angle P + \angle R = 180^\circ$ এবং $\angle Q + \angle S = 180^\circ$
[নিজে এঁকে মেপে যাচাই করি]



যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

উপপাদ্য : 38. বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সম্পূরক।



প্রদত্ত : O কেন্দ্রীয় বৃত্তে ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

প্রমাণ করতে হবে যে : $\angle ABC + \angle ADC = 2$ সমকোণ
এবং $\angle BAD + \angle BCD = 2$ সমকোণ

অঙ্কন : A, O এবং C, O যোগ করলাম।

প্রমাণ : ADC বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত কেন্দ্রস্থ কোণ প্রবৃদ্ধ $\angle AOC$ এবং বৃত্তস্থ কোণ $\angle ABC$

$\therefore$ প্রবৃদ্ধ$\angle AOC = 2\angle ABC$

$\therefore \angle ABC = \frac{1}{2}$ প্রবৃদ্ধ$\angle AOC$ ....(i)

আবার ABC বৃত্তচাপের দ্বারা গঠিত কেন্দ্রস্থ কোণ $\angle AOC$ এবং বৃত্তস্থ কোণ $\angle ADC$

$\therefore \angle AOC = 2\angle ADC$

$\therefore \angle ADC = \frac{1}{2}\angle AOC$ ....(ii)

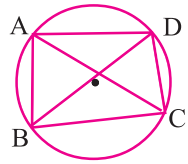
$\therefore$ (i) ও (ii) হইতে পাই, $\angle ABC + \angle ADC = \frac{1}{2}$ প্রবৃদ্ধ$\angle AOC + \frac{1}{2}\angle AOC$

$= \frac{1}{2}$ (প্রবৃদ্ধ$\angle AOC + \angle AOC$)

$= \frac{1}{2} \times 4$ সমকোণ $= 2$ সমকোণ

অনুরূপে B, O এবং D, O যোগ করে প্রমাণ করতে পারি যে, $\angle BAD + \angle BCD = 2$ সমকোণ [প্রমাণিত]

বিকল্প প্রমাণ



প্রদত্ত : ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

প্রমাণ করতে হবে যে : $\angle ABC + \angle ADC = 2$ সমকোণ
এবং $\angle BAD + \angle BCD = 2$ সমকোণ

অঙ্কন : AC ও BD দুটি কর্ণ টানলাম।

প্রমাণ : $\angle ADB = \angle ACB$ [একই বৃত্তাংশস্থ কোণ]

আবার $\angle BAC = \angle BDC$ [একই বৃত্তাংশস্থ কোণ]

আবার $\angle ADC = \angle ADB + \angle BDC$

$= \angle ACB + \angle BAC$

$\therefore \angle ADC + \angle ABC = \angle ACB + \angle BAC + \angle ABC$

$\therefore \angle ADC + \angle ABC = 2$ সমকোণ [$\because$ ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি 2 সমকোণ]

অনুরূপে প্রমাণ করতে পারি যে, $\angle BAD + \angle BCD = 2$ সমকোণ [প্রমাণিত]

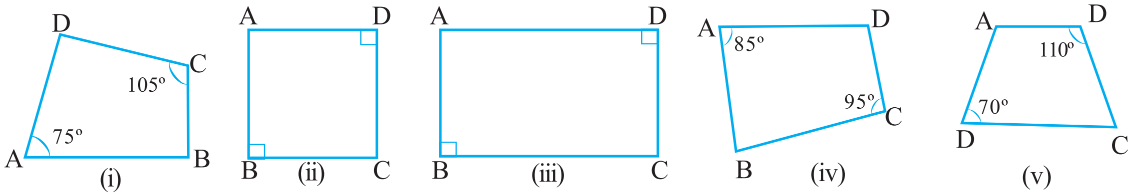
দুটি বিপরীত কোণের সমষ্টি 2 সমকোণ প্রমাণ করার পর 'চতুর্ভুজের চারটি কোণের সমষ্টি 4 সমকোণের সমান'— এই ধর্ম থেকে অপর দুটি বিপরীত কোণের সমষ্টি 2 সমকোণ সহজেই প্রমাণ করা যায়।

আমি যে-কোনো একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ PQRS অঙ্কন করি এবং যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, $\angle PQR + \angle PSR = 2$ সমকোণ এবং $\angle QPS + \angle QRS = 2$ সমকোণ **[নিজে করি]**

এই উপপাদ্যের বিপরীত উপপাদ্য কি সম্ভব?
অর্থাৎ কোনো চতুর্ভুজের বিপরীত কোণ পরস্পর সম্পূরক হলে চতুর্ভুজটির শীর্ষবিন্দুগুলি কি সমবৃত্তস্থ হবে?

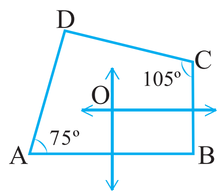
হাতেকলমে

জয়িতা অনেকগুলি চতুর্ভুজ এঁকেছে যাদের বিপরীত কোণগুলির সমষ্টি 2 সমকোণ।



(I) আমি (i) নং চতুর্ভুজটি নিয়ে AB ও BC বাহুর দুটি লম্বসমদ্বিখণ্ডক আঁকলাম যারা পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করল।

(II) O বিন্দুকে কেন্দ্র করে OA দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত এঁকে দেখছি বৃত্তটি A, B, C ও $\boxed{}$ বিন্দুগামী হচ্ছে।



∴ পেলাম A, B ও C তিনটি অসমরেখ বিন্দুগামী নির্দিষ্ট বৃত্ত D বিন্দুগামী হচ্ছে।

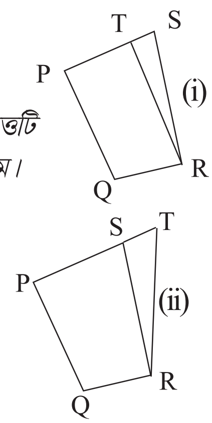
∴ হাতেকলমে পেলাম, চতুর্ভুজের বিপরীত কোণ পরস্পর সম্পূরক হলে চতুর্ভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি সমবৃত্তস্থ হবে।

আমি (ii), (iii), (iv) ও (v) নং চতুর্ভুজের মতো যে-কোনো চতুর্ভুজ আঁকি যাদের বিপরীত কোণগুলির সমষ্টি 180° এবং একইভাবে হাতেকলমে যাচাই করি যে চতুর্ভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি সমবৃত্তস্থ।

উপপাদ্য : 39. *কোনো চতুর্ভুজের বিপরীত কোণ পরস্পর সম্পূরক হলে, চতুর্ভুজটির শীর্ষবিন্দুগুলি সমবৃত্তস্থ হবে।* ***[প্রমাণ মূল্যায়নের অন্তর্ভুক্ত নয়]***

প্রদত্ত : ধরি, PQRS একটি চতুর্ভুজ যার $\angle PQR$ এবং $\angle PSR$ পরস্পর সম্পূরক, অর্থাৎ

$\angle PQR + \angle PSR = 2$ সমকোণ



প্রমাণ করতে হবে যে : চতুর্ভুজটির শীর্ষবিন্দুগুলি অর্থাৎ P, Q, R, S বিন্দু চারটি সমবৃত্তস্থ।

অঙ্কন : P, Q, R তিনটি অসমরেখ বিন্দু দিয়ে একটি মাত্র বৃত্ত অঙ্কন করা যায়। ধরি, অঙ্কিত বৃত্তটি S বিন্দুগামী নয়। বৃত্তটি PS বা PS-এর বর্ধিতাংশকে T বিন্দুতে ছেদ করে। T ও R যুক্ত করলাম।

প্রমাণ : অঙ্কন অনুসারে, PQRT একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ

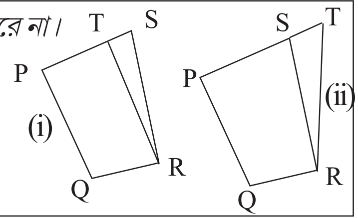
∴ $\angle PQR + \angle PTR = 2$ সমকোণ .... (1)

কিন্তু $\angle PQR + \angle PSR = 2$ সমকোণ [প্রদত্ত] .... (2)

(1) নং ও (2) নং থেকে পাই, $\angle PQR + \angle PTR = \angle PQR + \angle PSR$

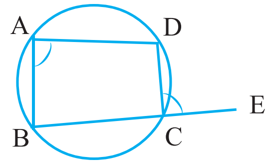
∴ $\angle PTR = \angle PSR$

একটি ত্রিভুজের বহিঃস্থকোণ ত্রিভুজের বিপরীত অন্তঃস্থ কোণের সমান হতে পারে না।
$\therefore \angle PTR = \angle PSR$ হবে যখন S ও T বিন্দুদ্বয় সমাপতিত হবে।
$\therefore$ P, Q, R বিন্দুগামী বৃত্তটি অবশ্যই S বিন্দু দিয়ে যাবে।
$\therefore$ P, Q, R, S বিন্দু চারটি সমবৃত্তস্থ।



অনুসিদ্ধান্ত : ‘একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের কোনো বাহুকে বর্ধিত করলে যে বহিঃস্থ কোণটি উৎপন্ন হয় তা অন্তঃস্থ বিপরীত কোণের সমান হবে’ — যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি।

প্রদত্ত : ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের BC বাহুকে E বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করায় $\angle DCE$ বহিঃস্থ কোণ উৎপন্ন হলো।



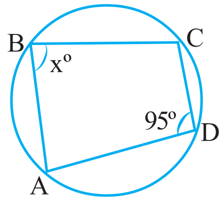
প্রমাণ করতে হবে যে : $\angle DCE =$ বিপরীত অন্তঃস্থ $\angle BAD$

প্রমাণ : $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$ [$\because$ ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ]

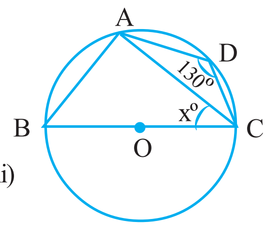
আবার, $\angle BCD + \angle DCE = 180^\circ$ [$\because$ BE সরলরেখাংশের উপর DC দণ্ডায়মান]

সুতরাং, $\angle BAD + \angle BCD = \angle BCD + \angle DCE$ $\quad \therefore \angle DCE = \angle BAD$ **[প্রমাণিত]**

প্রয়োগ : 1. নীচের দুটি O কেন্দ্রীয় বৃত্তের ছবি দেখি এবং প্রতিক্ষেত্রে x-এর মান হিসাব করে লিখি।



(i)



(ii)

(i) ABCD $\boxed{\quad}$ চতুর্ভুজ, $\quad \therefore \angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$

$\therefore x^\circ = \angle ABC = 180^\circ - \boxed{\quad} = \boxed{\quad}$

$x = \boxed{\quad}$ [নিজে লিখি]

(ii) ABCD $\boxed{\quad}$ চতুর্ভুজ, $\quad \therefore \angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$

$\therefore \angle ABC = \boxed{\quad}$

আবার $\angle BAC = \boxed{\quad}$ সমকোণ, $\therefore \angle BAC = 90^\circ$

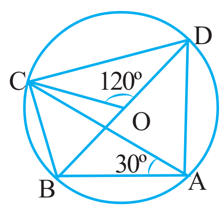
$\therefore x^\circ + \angle ABC + \angle BAC = 180^\circ$

$\therefore x^\circ + 50^\circ + 90^\circ = 180^\circ; \quad \therefore x = \boxed{\quad}$ [নিজে লিখি]

প্রয়োগ : 2. ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ এবং O ওই বৃত্তের কেন্দ্র। যদি $\angle COD = 120^\circ$ এবং $\angle BAC = 30^\circ$ হয়, তবে $\angle BOC$ ও $\angle BCD$-এর মান কত হবে, হিসাব করে লিখি।

BC উপচাপের দ্বারা গঠিত কেন্দ্রস্থ কোণ $\angle BOC$ এবং বৃত্তস্থ কোণ $\angle BAC$।

$\therefore \angle BOC = 2\angle BAC = \boxed{\quad}$ [নিজে লিখি]



(i)

CD উপচাপের উপর কেন্দ্রস্থ কোণ $\angle COD$ এবং বৃত্তস্থ কোণ $\angle CAD$,

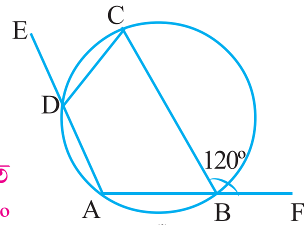
$\therefore \angle CAD = \frac{1}{2} \angle COD = \frac{1}{2} \times 120^\circ = 60^\circ$

$\therefore \angle BAD = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$

$\therefore$ ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজে $\angle BCD + \angle BAD = 180^\circ$

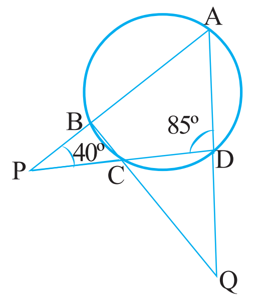
$\therefore \angle BCD = \boxed{\quad}$ [নিজে লিখি]

প্রয়োগ : 3 পাশের বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ ABCD-এর AD ও AB বাহুকে যথাক্রমে E ও F বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করলাম। $\angle CBF = 120^\circ$ হলে, $\angle CDE$ -এর মান হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**



(i)

প্রয়োগ : 4 ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের AB ও DC বাহুকে বর্ধিত করায় P বিন্দুতে এবং AD ও BC বাহুকে বর্ধিত করায় Q বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। $\angle ADC = 85^\circ$ এবং $\angle BPC = 40^\circ$ হলে, $\angle BAD$ ও $\angle CQD$-এর মান হিসাব করে লিখি।



ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বহিঃস্থ $\angle PBC = \angle ADC = 85^\circ$

$\therefore \Delta BPC$-এর $\angle BCP = 180^\circ - (85^\circ + 40^\circ) = \boxed{\quad}$

আবার, $\angle BAD =$ বহিঃস্থ $\angle BCP = 55^\circ$

ΔCQD-এর, $\angle CQD + \angle DCQ = 85^\circ$

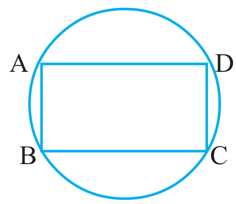
$\therefore \angle CQD = 85^\circ - \angle DCQ = 85^\circ - \angle BCP = \boxed{\quad}$

$\therefore \angle BAD = 55^\circ$ এবং $\angle CQD = 30^\circ$

প্রয়োগ : 5. প্রমাণ করি যে, বৃত্তস্থ সামান্তরিক একটি আয়তাকার চিত্র।

প্রদত্ত : ABCD চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ সামান্তরিক।

প্রমাণ করতে হবে যে : ABCD সামান্তরিক আয়তাকার চিত্র।



প্রমাণ : ABCD একটি সামান্তরিক

$\therefore \angle ABC = \angle ADC$

আবার, ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ

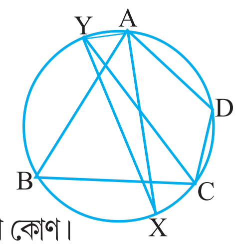
$\therefore \angle ABC + \angle ADC = \boxed{\quad}$

সুতরাং, $2\angle ABC = 180^\circ$ $\therefore \angle ABC = 90^\circ$

যেহেতু, এই সামান্তরিকের একটি কোণ সমকোণ, সুতরাং, ABCD সামান্তরিকটি একটি আয়তাকার চিত্র।

প্রয়োগ : 6. ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। $\angle DAB$ ও $\angle BCD$-এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় বৃত্তকে X ও Y বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করি যে, XY ওই বৃত্তের ব্যাস।

প্রদত্ত : ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের $\angle DAB$ ও $\angle BCD$-এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় বৃত্তকে X ও Y বিন্দুতে ছেদ করে।



প্রমাণ করতে হবে যে : XY বৃত্তের একটি ব্যাস।

অঙ্কন : A, Y বিন্দুদ্বয় যোগ করি।

প্রমাণ : $\angle YAB$ ও $\angle YCB$ বৃত্তের উপচাপ YB-এর দ্বারা গঠিত একই বৃত্তাংশস্থ বৃত্তস্থ কোণ।

$\therefore \angle YAB = \angle YCB = \frac{1}{2}\angle BCD$ ....(I) [$\because$ CY, $\angle BCD$-এর সমদ্বিখণ্ডক]

আবার, $\angle XAY = \angle XAB + \angle YAB$

$= \frac{1}{2}\angle BAD + \frac{1}{2}\angle BCD$ [(I) হইতে পেলাম] [$\because$ AX, $\angle DAB$-এর সমদ্বিখণ্ডক]

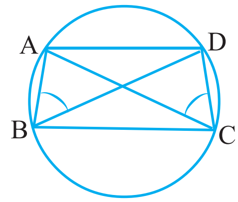
$= \frac{1}{2}(\angle BAD + \angle BCD) = \frac{1}{2} \times 180^\circ$ [$\because$ ABCD বৃত্তঃস্থ চতুর্ভুজ]

$= 90^\circ$

$\therefore \angle XAY$ একটি অর্ধবৃত্তস্থ কোণ। $\therefore$ XY বৃত্তের ব্যাস।

প্রয়োগ : 7. প্রমাণ করি যে, বৃত্তস্থ ট্রাপিজিয়াম সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়াম এবং কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্য সমান।

প্রদত্ত : ABCD একটি বৃত্তস্থ ট্রাপিজিয়াম যার $AD \parallel BC$



প্রমাণ করতে হবে যে : $AB = DC$ এবং $AC = BD$

প্রমাণ : $\angle ADC + \angle DCB = 180^\circ$ [$\because$ $AD \parallel BC$ এবং DC ভেদক]

আবার, $\angle BAD + \angle DCB = 180^\circ$ [$\because$ ABCD বৃত্তঃস্থ চতুর্ভুজ]

$\therefore \angle ADC + \angle DCB = \angle BAD + \angle DCB$ $\quad \therefore \angle ADC = \angle BAD$ .... (I)

ΔBAD ও ΔADC-এর মধ্যে, $\angle BAD = \angle ADC$ [(I) থেকে পেলাম]

$\angle ABD = \angle DCA$ [একই বৃত্তাংশস্থ কোণ]

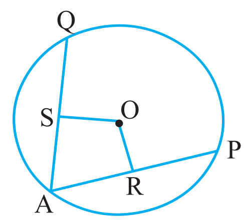
AD সাধারণ বাহু

$\therefore \Delta BAD \cong \Delta ADC$ [সর্বসমতার A–A–S শর্তানুসারে]

$\therefore AB = DC$ এবং $AC = BD$ ($\because$ সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ অংশ) [প্রমাণিত]

প্রয়োগ : 8. O কেন্দ্রীয় বৃত্তের AP, AQ দুটি জ্যা-এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে R ও S; প্রমাণ করি যে, O, R, A, S বিন্দু চারটি সমবৃত্তস্থ।

প্রদত্ত : O কেন্দ্রীয় বৃত্তের AP ও AQ দুটি জ্যা-এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে R ও S



প্রমাণ করতে হবে যে : O, R, A, S বিন্দু চারটি সমবৃত্তস্থ।

অঙ্কন : O, R বিন্দুদ্বয় এবং O, S বিন্দুদ্বয় যুক্ত করি।

প্রমাণ : OR, AP জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। $\therefore OR \perp AP$

অর্থাৎ, $\angle ARO = 90^\circ$

OS, AQ জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। $\therefore OS \perp AQ$

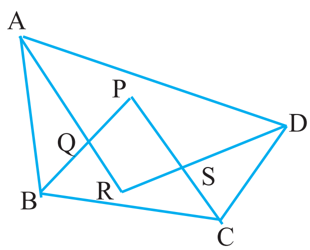
অর্থাৎ, $\angle ASO = 90^\circ$

$\therefore \angle ARO + \angle ASO = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

যেহেতু AROS চতুর্ভুজের এক জোড়া বিপরীত কোণ পরস্পর সম্পূরক, সুতরাং, O, R, A, S বিন্দু চারটি সমবৃত্তস্থ।

প্রয়োগ : 9. প্রমাণ করি যে চতুর্ভুজের চারটি কোণের সমদ্বিখণ্ডকগুলি পরস্পর মিলিত হয়ে যে চতুর্ভুজ গঠন করে সেটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

প্রদত্ত : ABCD একটি চতুর্ভুজের AR, BP, CP ও DR যথাক্রমে $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ ও $\angle D$-এর সমদ্বিখণ্ডক পরস্পর মিলিত হয়ে PQRS চতুর্ভুজ উৎপন্ন করেছে।



প্রমাণ করতে হবে যে : PQRS বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

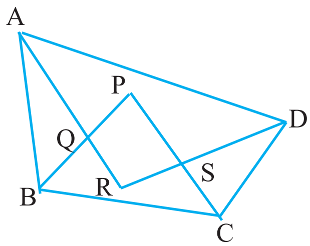
প্রমাণ : ΔARD-এর, $\angle ARD + \angle RDA + \angle DAR = 180^\circ$

$\therefore \angle ARD + \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle D = 180^\circ$ .... (I)

আবার, ΔBPC-এর, $\angle BPC + \angle PCB + \angle CBP = 180^\circ$

$\therefore \angle BPC + \frac{1}{2}\angle C + \frac{1}{2}\angle B = 180^\circ$ .... (II)

(I) ও (II) হইতে পাই, $\angle ARD + \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle D + \angle BPC + \frac{1}{2}\angle C + \frac{1}{2}\angle B = 180^\circ + 180^\circ$



বা, $\angle ARD + \angle BPC + \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C + \angle D) = 360^\circ$

বা, $\angle ARD + \angle BPC + \frac{1}{2} \times 360^\circ = 360^\circ$

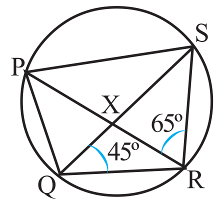
বা, $\angle ARD + \angle BPC = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$

$\therefore \angle QRS + \angle QPS = 180^\circ$

PQRS চতুর্ভুজের একজোড়া বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সম্পূরক।

$\therefore$ PQRS চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

কষে দেখি 10



1. পাশের ছবির PQRS বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে X বিন্দুতে এমনভাবে ছেদ করেছে যে $\angle PRS = 65^\circ$ এবং $\angle RQS = 45^\circ$; $\angle SQP$ ও $\angle RSP$-এর মান হিসাব করে লিখি।

2. ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের AB বাহুকে X বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করলাম এবং মেপে দেখছি $\angle XBC = 82^\circ$ এবং $\angle ADB = 47^\circ$; $\angle BAC$-এর মান হিসাব করে লিখি।

3. PQRS বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের PQ, SR বাহু দুটি বর্ধিত করায় T বিন্দুতে মিলিত হলো। বৃত্তের কেন্দ্র O; $\angle POQ = 110^\circ$, $\angle QOR = 60^\circ$, $\angle ROS = 80^\circ$ হলে $\angle RQS$ ও $\angle QTR$-এর মান হিসাব করে লিখি।

4. দুটি বৃত্ত পরস্পরকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করেছে। P ও Q বিন্দুগামী দুটি সরলরেখা একটি বৃত্তকে যথাক্রমে A ও C এবং অপর বৃত্তকে যথাক্রমে B ও D বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করি যে, $AC \parallel BD$।

5. ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ অঙ্কন করেছি এবং এর BC বাহুকে E বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করলাম। প্রমাণ করি যে, $\angle BAD$ ও $\angle DCE$-এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় বৃত্তের উপর মিলিত হবে।

6. মোহিত একটি বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু X দিয়ে দুটি সরলরেখা অঙ্কন করেছে যারা বৃত্তটিকে যথাক্রমে A, B বিন্দু ও C, D বিন্দুতে ছেদ করেছে। যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, ΔXAC ও ΔXBD-এর দুটি করে কোণ সমান।

7. দুটি বৃত্ত অঙ্কন করেছি যারা পরস্পরকে G ও H বিন্দুতে ছেদ করেছে। এবার G বিন্দুগামী একটি সরলরেখা অঙ্কন করলাম যেটি বৃত্ত দুটিকে P ও Q বিন্দুতে এবং H বিন্দুগামী PQ-এর সমান্তরাল অপর একটি সরলরেখা অঙ্কন করলাম যা বৃত্তদুটিকে R ও S বিন্দুতে ছেদ করল। প্রমাণ করি যে $PQ = RS$।

8. ABC একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করেছি যার $AB = AC$ এবং বর্ধিত BC-এর উপর E যে-কোনো একটি বিন্দু। ΔABC-এর পরিবৃত্ত AE-কে D বিন্দুতে ছেদ করলে প্রমাণ করি যে, $\angle ACD = \angle AEC$।

9. ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। DE জ্যা $\angle BDC$-এর বহির্দ্বিখণ্ডক। প্রমাণ করি যে, AE (বা বর্ধিত AE) $\angle BAC$-এর বহির্দ্বিখণ্ডক।

10. ABC ত্রিভুজের AC ও AB বাহুর উপর BE ও CF যথাক্রমে লম্ব। প্রমাণ করি যে, B, C, E, F বিন্দু চারটি সমবৃত্তস্থ। এর থেকে প্রমাণ করি যে, ΔAEF ও ΔABC এর দুটি করে কোণ সমান।

11. ABCD একটি সামান্তরিক। A ও B বিন্দুগামী একটি বৃত্ত AD ও BC-কে যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করি যে, E, F, C, D বিন্দু চারটি সমবৃত্তস্থ।

12. ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। AB ও DC বাহুদ্বয়কে বর্ধিত করলে P বিন্দুতে এবং AD ও BC বাহুদ্বয়কে বর্ধিত করলে R বিন্দুতে মিলিত হয়। ΔBCP এবং ΔCDR-এর পরিবৃত্তদ্বয় T বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করি যে, P, T, R সমরেখ।

13. ABC ত্রিভুজের লম্ববিন্দু O; প্রমাণ করি যে O বিন্দুটি পাদত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র।

14. ABCD এমন একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ এঁকেছি যে AC, $\angle BAD$-কে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে। এবার AD-কে E বিন্দু পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করলাম যেন $DE = AB$ হয়। প্রমাণ করি যে, $CE = CA$

15. দুটি বৃত্তের একটি অপরটির কেন্দ্র O বিন্দুগামী এবং বৃত্ত দুটি পরস্পরকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করেছে। A বিন্দুগামী একটি সরলরেখা O বিন্দুগামী বৃত্তকে P বিন্দুতে এবং O কেন্দ্রীয় বৃত্তকে R বিন্দুতে ছেদ করেছে। P, B ও R, B যুক্ত করে ,প্রমাণ করি যে $PR = PB$

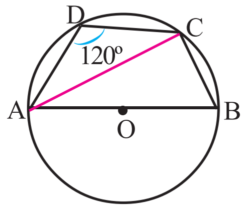
16. প্রমাণ করি যে একটি সুষম পঞ্চভুজের যে-কোনো চারটি শীর্ষবিন্দু সমবৃত্তস্থ।

17. **অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V. S. A.)**

(A) বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M. C. Q.) :

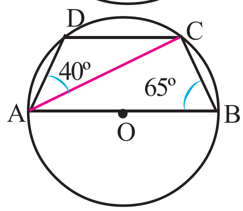
(i) পাশের চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র এবং AB ব্যাস। ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। $\angle ADC = 120^\circ$ হলে, $\angle BAC$-এর মান

(a) 50° (b) 60° (c) 30° (d) 40°



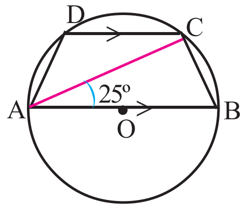
(ii) পাশের চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র এবং AB ব্যাস। ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। $\angle ABC = 65^\circ$, $\angle DAC = 40^\circ$ হলে, $\angle BCD$-এর মান

(a) 75° (b) 105° (c) 115° (d) 80°



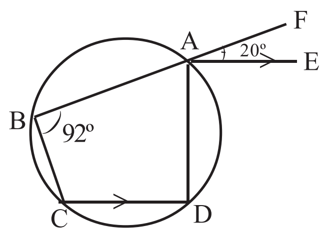
(iii) পাশের চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র এবং AB বৃত্তের ব্যাস। ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ যার $AB \parallel DC$ এবং $\angle BAC = 25^\circ$ হলে $\angle DAC$-এর মান

(a) 50° (b) 25° (c) 130° (d) 40°



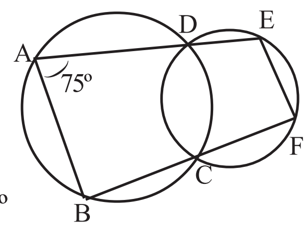
(iv) পাশের চিত্রে ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। BA -কে F বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করা হলো। $AE \parallel CD$, $\angle ABC = 92^\circ$ এবং $\angle FAE = 20^\circ$ হলে, $\angle BCD$-এর মান

(a) 20° (b) 88° (c) 108° (d) 72°



(v) পাশের চিত্রে দুটি বৃত্ত পরস্পরকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করে। D ও C বিন্দুগামী দুটি সরলরেখা একটি বৃত্তকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে এবং অপর বৃত্তকে E ও F বিন্দুতে ছেদ করে। $\angle DAB = 75^\circ$ হলে, $\angle DEF$-এর মান

(a) 75° (b) 70° (c) 60° (d) 105°



(B) সত্য / মিথ্যা লিখি :

(i) একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণ পরস্পর পূরক।

(ii) একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের একটি বাহুকে বর্ধিত করলে উৎপন্ন বহিঃস্থ কোণ বিপরীত অন্তঃস্থ কোণের সমান হয়।

(C) শূন্যস্থান পূরণ করি :

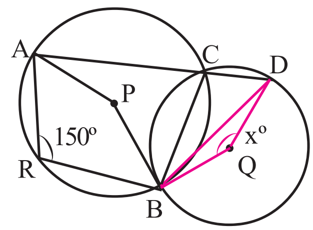
(i) একটি চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সম্পূরক হলে চতুর্ভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি ______________।

(ii) একটি বৃত্তস্থ সামান্তরিক একটি ______________ চিত্র।

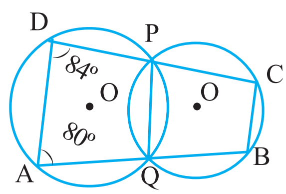
(iii) একটি বর্গাকার চিত্রের শীর্ষবিন্দুগুলি ______________।

18. **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S. A.) :**

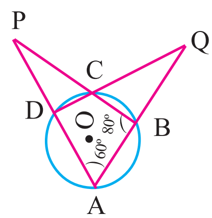
(i) পাশের চিত্রে P ও Q কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তদুটি B ও C বিন্দুতে ছেদ করেছে। ACD একটি সরলরেখাংশ। $\angle ARB = 150^\circ$, $\angle BQD = x^\circ$ হলে, x-এর মান নির্ণয় করি।



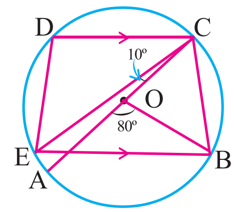
(ii) পাশের চিত্রে দুটি বৃত্ত পরস্পর P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। $\angle QAD = 80^\circ$ এবং $\angle PDA = 84^\circ$ হলে, $\angle QBC$ ও $\angle BCP$-এর মান নির্ণয় করি।



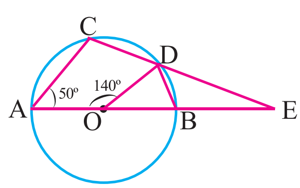
(iii) পাশের চিত্রে $\angle BAD = 60^\circ$, $\angle ABC = 80^\circ$ হলে, $\angle DPC$ এবং $\angle BQC$-এর মান নির্ণয় করি।



(iv) পাশের চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র এবং AC ব্যাস। $\angle AOB = 80^\circ$ এবং $\angle ACE = 10^\circ$ হলে, $\angle BED$-এর মান নির্ণয় করি।



(v) পাশের চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র এবং AB বৃত্তের ব্যাস। $\angle AOD = 140^\circ$ এবং $\angle CAB = 50^\circ$ হলে, $\angle BED$-এর মান নির্ণয় করি।



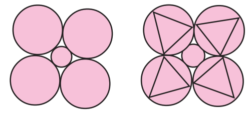
11 সম্পাদ্য : ত্রিভুজের পরিবৃত্ত ও অন্তর্বৃত্ত অঙ্কন

CONSTRUCTION OF CIRCUMCIRCLE AND INCIRCLE OF A TRIANGLE

এবছরে আমাদের স্কুলে ঠিক হয়েছে হাতের কাজের জন্য প্রত্যেকে নিজের পছন্দ অনুযায়ী জিনিস তৈরি করবে। আমি ঠিক করেছি আমাদের টেবিলের একটি নতুন কাপড়ের ঢাকনার উপর সুতোর কাজ করব।

তাই আমি পেনসিল দিয়ে টেবিলের ঢাকনার উপর পাশের চিত্রের মতো একটি নকশা আঁকলাম।

আমার ভাই এক মজার কাজ করল। সে আমার আঁকা নকশায় কতকগুলি বৃত্তের মধ্যে পাশের চিত্রের মতো কতকগুলি জ্যা আঁকল।



দেখছি, নকশায় বৃত্তের জ্যাগুলি বৃত্তের মধ্যে ত্রিভুজ তৈরি করেছে।

(1) এভাবে আঁকা একটি বৃত্ত ও বৃত্তের মধ্যে অবস্থিত ত্রিভুজ (যার শীর্ষবিন্দুগুলি বৃত্তে আছে) কী সম্পর্কে আছে?

বৃত্তটি বৃত্তের মধ্যে অবস্থিত ত্রিভুজকে পরিবৃত্ত করে আছে। তাই বৃত্তটি ত্রিভুজটির **পরিবৃত্ত**।

যে-কোনো বৃত্তের উপর যে-কোনো তিনটি বিন্দু যোগ করে যে ত্রিভুজ পাব, বৃত্তটি ওই ত্রিভুজের **পরিবৃত্ত**।

কিন্তু যদি একটি যে-কোনো ত্রিভুজ দেওয়া থাকে তবে ওই ত্রিভুজের পরিবৃত্ত কীভাবে আঁকব?

একটি যে-কোনো ত্রিভুজ আঁকি ও ওই ত্রিভুজের পরিবৃত্ত অঙ্কনের চেষ্টা করি।

সম্পাদ্য : কোনো ত্রিভুজের পরিবৃত্ত অঙ্কন।

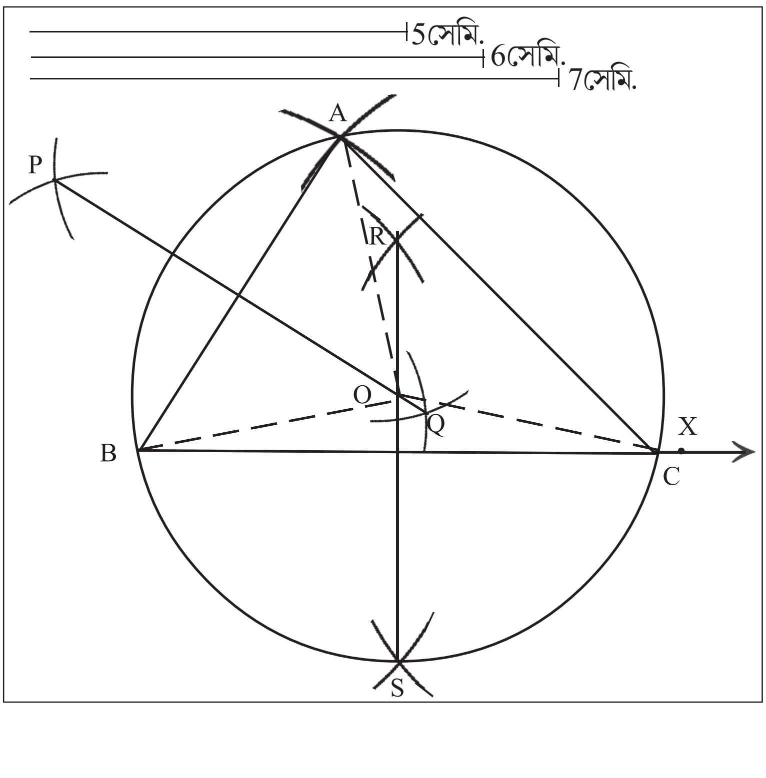
5সেমি., 6সেমি., 7সেমি. বাহুবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করে ত্রিভুজটির পরিবৃত্ত অঙ্কন করি।

অঙ্কন প্রণালী :

(i) প্রথমে 5সেমি., 6সেমি. ও 7সেমি. বাহুবিশিষ্ট ΔABC অঙ্কন করি।

(ii) [ΔABC-এর পরিবৃত্ত অঙ্কনের জন্য প্রথমেই পরিবৃত্তের কেন্দ্র নির্ণয় করব। তাই ΔABC-এর যে-কোনো দুটি বাহুর লম্বসমদ্বিখণ্ডক অঙ্কন করব।]

ΔABC-এর AB ও BC বাহুর দুটি লম্ব সমদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে PQ ও RS অঙ্কন করলাম যারা পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করল।



(iii) O বিন্দুটি AB ও BC-এর লম্বসমদ্বিখণ্ডকের ছেদবিন্দু।

∴ O বিন্দুটি A, B ও C থেকে সমদূরবর্তী।

O বিন্দুকে কেন্দ্র করে OA অথবা OB অথবা OC দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন করলাম যা Δ ABC-এর পরিবৃত্ত।

প্রমাণ : O, A; O, B; O, C যোগ করলাম।

O, AB-এর লম্বসমদ্বিখণ্ডকের উপর একটি বিন্দু।

∴ O থেকে A ও B বিন্দুদ্বয় সমদূরবর্তী অর্থাৎ OA = OB

অনুরূপে প্রমাণ করা যায় যে, OB = OC

∴ OA = OB = OC.

O-কে কেন্দ্র করে OA দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে যে বৃত্ত অঙ্কন করব সেই বৃত্ত B ও C বিন্দুগামী হবে অর্থাৎ বৃত্তটি Δ ABC-এর তিনটি শীর্ষবিন্দু A, B ও C দিয়ে যাবে।

∴ ওই বৃত্তটিই Δ ABC-এর পরিবৃত্ত।

4সেমি. বাহুবিশিষ্ট একটি সমাবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন করে তার পরিবৃত্ত অঙ্কন করি। **[নিজে করি]**

2 ত্রিভুজের পরিবৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধকে কী বলা হয়?

ত্রিভুজের পরিবৃত্তের কেন্দ্রকে **পরিকেন্দ্র** (Circumcentre) এবং ব্যাসার্ধকে **পরিব্যাসার্ধ** (Circumradius) বলা হয়।

নিজে করি 11

1. কোনো ত্রিভুজের পরিবৃত্তের সাপেক্ষে ত্রিভুজের বাহুগুলি বৃত্তের ☐ [ব্যাসার্ধ / জ্যা]
2. কোনো বৃত্তের দুটি জ্যা-এর লম্বসমদ্বিখণ্ডকের ছেদবিন্দুই বৃত্তের ☐
3. ত্রিভুজের বাহুগুলির লম্বসমদ্বিখণ্ডকগুলি যে বিন্দুতে ছেদ করে সেই বিন্দু থেকে শীর্ষবিন্দুগুলির দূরত্ব ☐
4. ত্রিভুজের বাহুগুলির লম্বসমদ্বিখণ্ডকগুলির ছেদবিন্দু থেকে যে-কোনো শীর্ষবিন্দু পর্যন্ত দূরত্বই ওই ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ☐ [ব্যাস / ব্যাসার্ধ]-এর দৈর্ঘ্য।

আমার বন্ধু জাহির ঠিক করেছে আমার মতো একটি রুমালে সুতোর কাজ করবে। তাই সে তার খাতায় নানান ধরনের ত্রিভুজ এঁকে পরিবৃত্ত আঁকার চেষ্টা করছে। জাহির তার খাতায়

(i) ABC ত্রিভুজ এঁকেছে যার BC = 4সেমি. $\angle$ABC = 60º, $\angle$ACB = 70º

(ii) PQR ত্রিভুজ এঁকেছে যার QR = 3.5সেমি., $\angle$PQR = 90º এবং PR = 4.5সেমি.

(iii) XYZ ত্রিভুজ এঁকেছে যার $\angle$XYZ = 120º, $\angle$YZX = 30º এবং YZ = 3সেমি.।

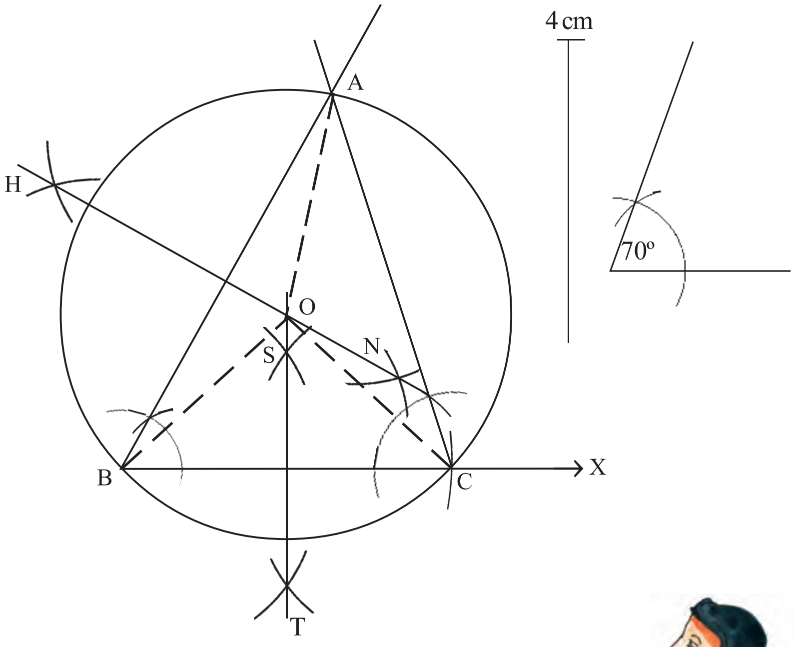
দেখছি (i) নং ত্রিভুজটি সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ।

(i) নং ত্রিভুজ অর্থাৎ সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ ABC-এর পরিবৃত্ত আঁকলাম।

দেখছি, ABC সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রটির ☐ [ভিতরে / বাহিরে] আছে।

অন্য যে-কোনো সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের পরিবৃত্ত এঁকে দেখছি পরিকেন্দ্রটি ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রটির ভিতরে আছে।

[নিজে করি]

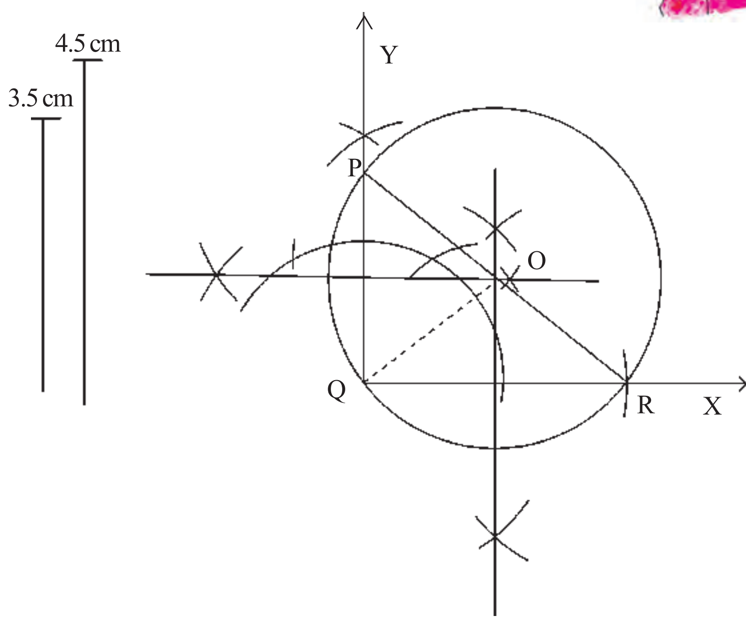


(i) নং

জাহিরের আঁকা (ii) নং ত্রিভুজটি ☐ কোণী ত্রিভুজ।

আমি (ii) নং ত্রিভুজ অর্থাৎ PQR সমকোণী ত্রিভুজের পরিবৃত্ত আঁকলাম।

দেখছি, PQR সমকোণী ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O অতিভুজের উপরে আছে এবং অতিভুজের ☐ বিন্দুতে আছে কারণ PO = OR [যেখানে O, ΔPQR-এর পরিকেন্দ্র]



(ii) নং

তাহলে কি সমকোণী ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র বের করার জন্য দুটো বাহুর লম্বসমদ্বিখণ্ডক আঁকতে হবে।

যেহেতু সমকোণী ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র অতিভুজের মধ্যবিন্দু তাই অতিভুজকে সমদ্বিখণ্ডিত করলেই পরিকেন্দ্র পাব। যেমন PQR সমকোণী ত্রিভুজটির PR বাহুর লম্বসমদ্বিখণ্ডক আঁকলে পরিকেন্দ্র O পাব।

অন্য যে-কোনো সমকোণী ত্রিভুজের পরিবৃত্ত এঁকে দেখছি পরিকেন্দ্রটি ত্রিভুজের অতিভুজের মধ্যবিন্দু। **[নিজে করি]**

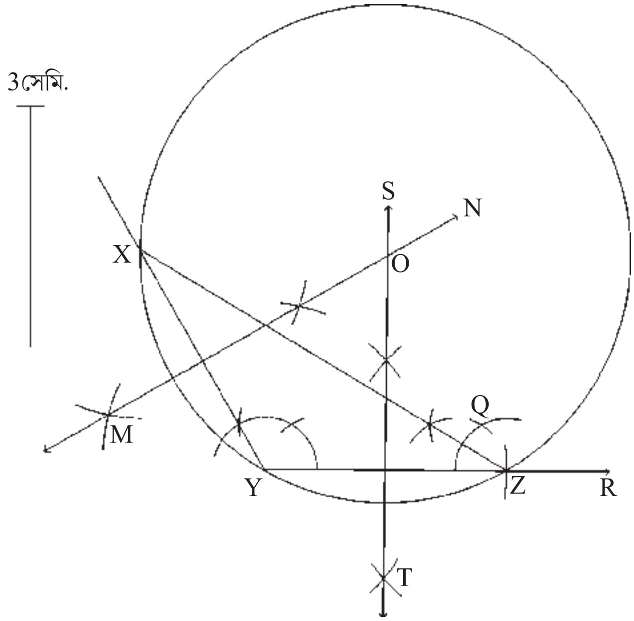
জাহিরের আঁকা (iii) নং ত্রিভুজটি ______ কোণী ত্রিভুজ।

আমি (iii) নং ত্রিভুজ অর্থাৎ XYZ স্থূলকোণী ত্রিভুজের পরিবৃত্ত আঁকলাম।

দেখছি, XYZ স্থূলকোণী ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রটির ______ [ভিতরে / বাহিরে] আছে।

অন্য যে-কোনো স্থূলকোণী ত্রিভুজের পরিবৃত্ত এঁকে দেখছি পরিকেন্দ্রটি ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রটির বাহিরে আছে। **[নিজে করি]**

∴ পেলাম, (i) কোনো ত্রিভুজ সূক্ষ্মকোণী, সমকোণী বা স্থূলকোণী হলে পরিকেন্দ্র যথাক্রমে ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রটির ______, অতিভুজের উপরে বা ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রটির ______ অবস্থিত হবে।

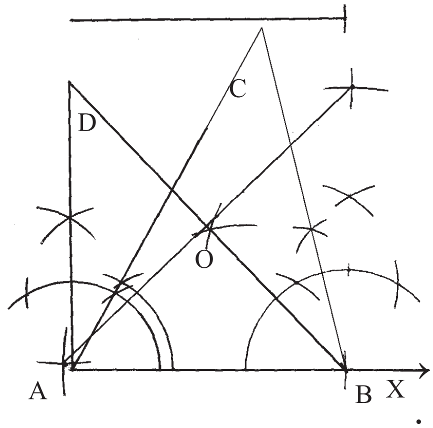


(iii) নং

(ii) সমকোণী ত্রিভুজে অতিভুজের মধ্যবিন্দুই পরিকেন্দ্র।

আমি একটি ত্রিভুজ ABC অঙ্কন করেছি যার AB = 3.5 সেমি., $\angle BAC = 60^\circ$ এবং $\angle ABC = 75^\circ$

আমার বন্ধু সাহানা আমার আঁকা ABC ত্রিভুজে ΔABD অঙ্কন করল যার $\angle BAD = 90^\circ$, $\angle ABD = 45^\circ$ এবং AB বাহুর যে পার্শ্বে C বিন্দু আছে D বিন্দুও সেই পার্শ্বেই আছে।



আমি সমকোণী ত্রিভুজ ABD-এর পরিবৃত্ত অঙ্কন করে দেখি C বিন্দু দিয়ে যায় কিনা। **[নিজে করি]**

উত্তর সংকেত : DB অতিভুজের মধ্যবিন্দু O নির্ণয় করি ও O-কে কেন্দ্র করে DO রেখাংশের দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের বৃত্ত অঙ্কন করে ΔABD-এর পরিবৃত্ত অঙ্কন করি।

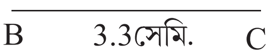
দেখছি, ΔABD-এর পরিবৃত্ত ΔABC-এর C বিন্দুগামী।

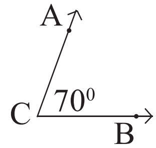
কিন্তু কেন ΔABD ও ΔABC-এর পরিবৃত্ত একই বৃত্ত পেলাম ত্রিভুজের কোণ মেপে যুক্তি দিয়ে লিখি। **[নিজে লিখি]**

প্রয়োগ : 1. ABC একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করি যার BC = 6.5 সেমি., $\angle ABC = 60^\circ$ এবং $\angle ACB = 70^\circ$

ত্রিভুজটি অঙ্কন করার সময় আমরা স্কেলের সাহায্যে 6.5 সেমি. সরলরেখাংশ ও চাঁদার সাহায্যে 70° কোণ আগে এঁকে নিই কেন ? আবার পেনসিল কম্পাসের সাহায্যে ত্রিভুজটির 60° কোণ আঁকি কেন ?

সম্পাদ্য করার সময় আমাদের কাছে চাঁদা বা নির্দিষ্ট দাগ চিহ্নিত স্কেল থাকে না। অর্থাৎ কোণ এবং সরলরেখাংশ আঁকার জন্য আমাদের কাছে কেবলমাত্র পেনসিল কম্পাস ও দাগ ছাড়া স্কেল এবং পেনসিল থাকে।

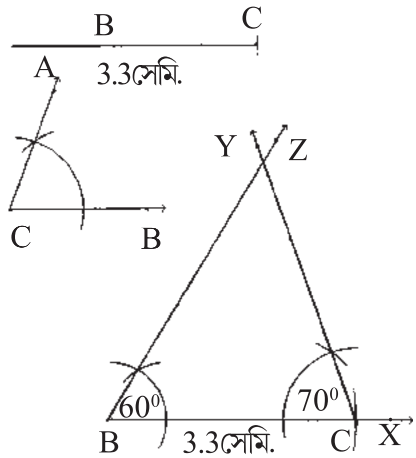
আর প্রশ্নপত্রে 

এবং 

এঁকে দেওয়া থাকে।

যে কোণগুলি পেনসিল কম্পাসের সাহায্যে আঁকা যায় সেগুলি আঁকা থাকে না।

সুতরাং প্রশ্নপত্রে আঁকা BC রেখাংশের দৈর্ঘ্যের সমান করে BX রশ্মি থেকে 3.3সেমি. কেটে নেওয়া হয় এবং প্রশ্নপত্রে আঁকা $\angle ACB$-এর সমান করে BC রেখাংশের C বিন্দুতে $\angle YCB = 70^o$ আঁকা হয়। তারপর পেনসিল কম্পাসের সাহায্যে B বিন্দুতে 60^o কোণ $\angle ZBC$ আঁকা হয়। CY ও BZ পরস্পরকে A বিন্দুতে ছেদ করে। এভাবে নির্দিষ্ট ত্রিভুজ ABC অঙ্কন করা হয়।



যেহেতু প্রশ্নপত্রে 3.3সেমি. দৈর্ঘ্যের সরলরেখাংশ ও 70^o পরিমাপের কোণ প্রশ্নপত্রে আঁকা থাকে না তাই আমাদের ওই দুটি যথাক্রমে স্কেল ও চাঁদার সাহায্যে এঁকে নিতে হলো।

কষে দেখি 11.1

1. নিম্নলিখিত ত্রিভুজগুলি অঙ্কন করি। প্রতিটি ত্রিভুজের পরিবৃত্ত অঙ্কন করে প্রতিক্ষেত্রে পরিকেন্দ্রের অবস্থান লিখি ও পরিব্যাসার্ধের [অর্থাৎ পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য] দৈর্ঘ্য মেপে লিখি।
[প্রতিক্ষেত্রে কেবলমাত্র অঙ্কন চিহ্ন দিই]

   (i) একটি সমবাহু ত্রিভুজ যার প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য 6 সেমি.।

   (ii) একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ যার ভূমির দৈর্ঘ্য 5.2 সেমি. এবং সমান বাহুর প্রত্যেকটির দৈর্ঘ্য 7 সেমি.।

   (iii) একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার সমকোণ সংলগ্ন বাহুদুটির দৈর্ঘ্য 4সেমি. ও 8সেমি.।

   (iv) একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার অতিভুজের দৈর্ঘ্য 12সেমি. এবং অপর একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 5সেমি.।

   (v) একটি ত্রিভুজ আঁকি যার একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 6.7সেমি. এবং বাহুসংলগ্ন কোণ দুটির পরিমাণ 75^o ও 55^o.

   (vi) ABC একটি ত্রিভুজ যার ভূমি BC = 5সেমি., $\angle ABC = 100^o$ এবং AB = 4সেমি.

2. PQ = 7.5 সেমি. $\angle QPR = 45^o$, $\angle PQR = 75^o$;

   PQ = 7.5 সেমি. $\angle QPS = 60^o$, $\angle PQS = 60^o$;

   ΔPQR ও ΔPQS এমনভাবে অঙ্কন করি যে R ও S বিন্দু যেন PQ-এর একই দিকে অবস্থিত হয়। ΔPQR-এর পরিবৃত্ত অঙ্কন করি এবং এই পরিবৃত্তের সাপেক্ষে S বিন্দুর অবস্থান তার ভিতরে, উপরে, না বাহিরে তা লক্ষ করে লিখি ও তারা ব্যাখ্যা খুঁজি।

3. AB = 5 সেমি. $\angle BAC = 30^o$, $\angle ABC = 60^o$;

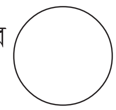
   AB = 5 সেমি. $\angle BAD = 45^o$, $\angle ABD = 45^o$;

ΔABC ও ΔABD এমনভাবে অঙ্কন করি যে, C ও D বিন্দু যেন AB-এর বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত হয়। ΔABC-এর পরিবৃত্ত অঙ্কন করি এবং ওই পরিবৃত্তের সাপেক্ষে D বিন্দুর অবস্থান লিখি। এছাড়াও অন্য কী কী বৈশিষ্ট্য লক্ষ করছি বুঝে লিখি।

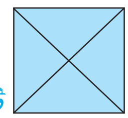
4. ABCD একটি চতুর্ভুজ অঙ্কন করি যার AB = 4সেমি., BC = 7সেমি., CD = 4সেমি., $\angle ABC = 60^\circ$, $\angle BCD = 60^\circ$; ΔABC-এর পরিবৃত্ত অঙ্কন করি এবং এর কী কী বৈশিষ্ট্য লক্ষ করছি বুঝে লিখি।

5. একটি আয়তক্ষেত্র PQRS অঙ্কন করি যার PQ = 4 সেমি. এবং QR = 6 সেমি.। আয়তক্ষেত্রের কর্ণদুটি অঙ্কন করি এবং অঙ্কন না করে ΔPQR-এর পরিকেন্দ্র কোথায় হবে এবং পরিব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য কত হবে হিসাব করে লিখি।
ΔPQR-এর পরিবৃত্ত অঙ্কন করে যাচাই করি।

6. যে-কোনো বৃত্তাকার চিত্র প্রদত্ত হলে তার কেন্দ্র কীরূপে নির্ণয় করব? পাশের বৃত্তাকার চিত্রের কেন্দ্র নির্ণয় করি।

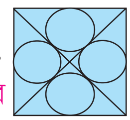


আমি জাহিরের রুমালে পেনসিল দিয়ে পাশের চিত্রটি এঁকে দিলাম।



উমা আমার আঁকা চিত্রের ত্রিভুজের মধ্যে পাশের মতো কতকগুলি বৃত্ত এঁকে একটি নকশা তৈরি করল।

উমা আঁকল,



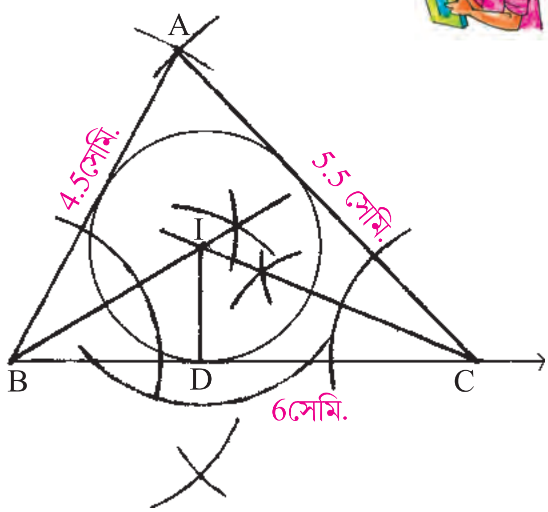
(3) দেখছি, উমার আঁকা নকশায় ত্রিভুজের মধ্যের বৃত্তগুলি ত্রিভুজের তিনটি বাহুকে স্পর্শ করে আছে। এইরকম বৃত্তকে কী বলা হয়?

ত্রিভুজের ভেতরে অবস্থিত বৃত্তটি যা ত্রিভুজের তিনটি বাহুকে স্পর্শ করে আছে, সেটি ওই ত্রিভুজের **অন্তর্বৃত্ত**।

সম্পাদ্য : আমি একটি ত্রিভুজ আঁকি যার তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 4.5সেমি., 5.5সেমি. এবং 6সেমি.। ত্রিভুজটির অন্তর্বৃত্ত আঁকার চেষ্টা করি।

ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত অঙ্কন

ABC একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করি, যার BC = 6সেমি., CA = 5.5সেমি. এবং AB = 4.5সেমি.। ΔABC-এর অন্তর্বৃত্ত অঙ্কন করি।



অঙ্কন প্রণালী :

(i) $\angle ABC$ ও $\angle ACB$-এর অন্তর্সমদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে BI ও CI অঙ্কন করলাম যারা পরস্পরকে I বিন্দুতে ছেদ করল।

(ii) I বিন্দু থেকে BC বাহুর উপর লম্ব অঙ্কন করলাম যা BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করল।

(iii) I বিন্দুকে কেন্দ্র করে ID দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন করলাম। ওই বৃত্তই হলো ΔABC-এর অন্তর্বৃত্ত।

4 ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধকে কী বলে?

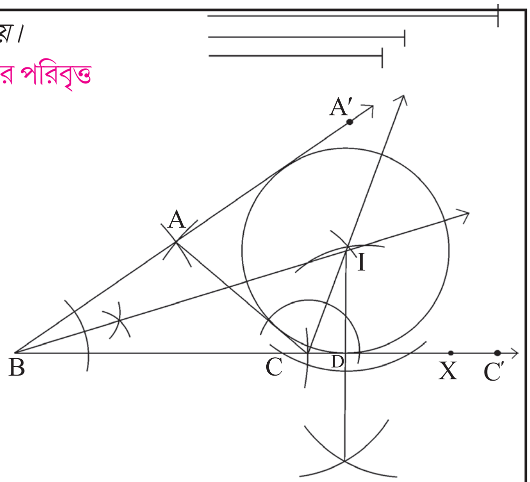
কোনো ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্তের কেন্দ্রকে অন্তঃকেন্দ্র (Incentre) এবং ব্যাসার্ধকে অন্তঃব্যাসার্ধ (Inradius) বলা হয়।

কোনো সমবাহু ত্রিভুজের যে-কোনো কোণের অন্তর্সমদ্বিখণ্ডক তার বিপরীত বাহুর লম্বসমদ্বিখণ্ডক হয়। সুতরাং সমবাহু ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র ও অন্তঃকেন্দ্র কোথায় অবস্থিত হবে অঙ্কন করে যাচাই করি। [নিজে করি]

সমবাহু ত্রিভুজে পরিকেন্দ্র ও অন্তঃকেন্দ্র অঙ্কন করে দেখছি, সমবাহু ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র ও অন্তঃকেন্দ্র ______ [একই / আলাদা] বিন্দু।

এই অংশটি (ত্রিভুজের বহির্বৃত্ত অঙ্কন) মূল্যায়নের অন্তর্ভুক্ত নয়।

আমার বন্ধু সজল তার খাতায় নানান ধরনের ত্রিভুজ এঁকে তাদের পরিবৃত্ত ও অন্তর্বৃত্ত আঁকার চেষ্টা করছে।



সজল এক মজার কাণ্ড করল। সে একটি ত্রিভুজ ABC অঙ্কন করল যার BC = 4.5সেমি., CA = 2.7সেমি., AB = 3সেমি. BA ও BC বাহুকে যথাক্রমে A′ ও C′ পর্যন্ত বাড়িয়ে দিল। $\angle ABC$ ও $\angle ACC'$ এর সমদ্বিখণ্ডক অঙ্কন করল যারা পরস্পরকে I বিন্দুতে ছেদ করে। I বিন্দু থেকে বর্ধিত BC বাহুর উপর ID লম্ব অঙ্কন করল যা BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করে। I বিন্দুকে কেন্দ্র করে ID দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন করল যা বর্ধিত BC, CA ও বর্ধিত BA বাহুকে স্পর্শ করে।

এই ধরনের বৃত্তকে কী বলা হয়?

কোনো ত্রিভুজের বাহিরে অবস্থিত এই ধরনের বৃত্ত যা ত্রিভুজের একটি বাহুকে এবং অপর দুটি বাহুর বর্ধিতাংশকে স্পর্শ করে আছে, তাকে ওই ত্রিভুজের **বহির্বৃত্ত** (excircle) বলা হয়। I বিন্দুকে বহিঃকেন্দ্র (excentre) এবং ব্যাসার্ধকে বহিঃব্যাসার্ধ (exradius) বলে।

আমি যে-কোনো একটি ত্রিভুজ আঁকি ও ওই ত্রিভুজের বহির্বৃত্ত অঙ্কনের চেষ্টা করি।

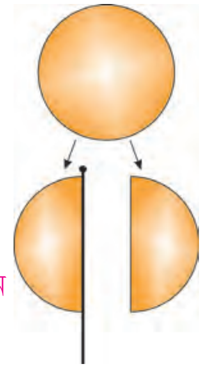
(i) একটি ত্রিভুজের কয়টি বহির্বৃত্ত ও কয়টি অন্তর্বৃত্ত অঙ্কন করা যায় তা নিজে লিখি।
(ii) একটি ত্রিভুজের কয়টি বিন্দু ত্রিভুজের বাহুগুলি থেকে সমদূরবর্তী তা নিজে লিখি।

কষে দেখি 11.2

1. নিম্নলিখিত ত্রিভুজগুলি অঙ্কন করি এবং প্রতিটি ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত অঙ্কন করে অন্তর্বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য মেপে লিখি :
   (i) তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য 7 সেমি., 6 সেমি. ও 5.5 সেমি.।
   (ii) দুটি বাহুর দৈর্ঘ্য 7.6 সেমি., 6 সেমি. ও তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণের পরিমাপ 75°
   (iii) একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 6.2 সেমি. এবং ওই বাহু সংলগ্ন কোণ দুটির পরিমাপ 50° ও 75°
   (iv) একটি সমকোণী ত্রিভুজ, যার সমকোণ সংলগ্ন বাহু দুটির দৈর্ঘ্য 7 সেমি. ও 9 সেমি.
   (v) একটি সমকোণী ত্রিভুজ, যার অতিভুজের দৈর্ঘ্য 9 সেমি. এবং অপর একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 5.5 সেমি.
   (vi) একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ, যার ভূমির দৈর্ঘ্য 7.8 সেমি. এবং সমান বাহু দুটির প্রত্যেকটির দৈর্ঘ্য 6.5 সেমি.
   (vii) একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ, যার ভূমির দৈর্ঘ্য 10 সেমি. এবং সমান কোণের একটির পরিমাপ 45°
   (viii) 7 সেমি বাহুবিশিষ্ট সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন করি। ওই ত্রিভুজের পরিবৃত্ত ও অন্তর্বৃত্ত অঙ্কন করে স্কেলের সাহায্যে পরিব্যাসার্ধের ও অন্তঃব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি এবং তাদের মধ্যে কোনো সম্পর্ক আছে কিনা লিখি।

12 গোলক
SPHERE

প্রতি বছর আমরা মেলা থেকে তালপাতার হাতপাখা কিনে আনি। বাড়িতে ওই হাতপাখাগুলি ব্যবহার করি। কিন্তু স্কুলে যাওয়ার পথে ছোটো হাতপাখা থাকলে সুবিধা হয়। তাই আমরা ঠিক করেছি বাড়ির পড়ে থাকা পিচবোর্ডের সাহায্যে হাতপাখা তৈরি করব।



আমার ভাই-এর বন্ধু সুজিত অনেকগুলি ছোটো বড়ো গোলাকার পিচবোর্ডের চাকতি নিয়ে এসেছে।

আমার ভাই একটি পিচবোর্ডের গোলাকার চাকতি সমান দু-ভাঁজ করে দুটি অর্ধবৃত্তাকার চাকতি কেটে নিয়ে একটি চাকতির ব্যাস বরাবর একটি কাঠি আঠা ও কাগজ দিয়ে আটকে দিল ও পাশের ছবির মতো হাতপাখা তৈরি করল।

(1) কিন্তু ওই কাঠিটিকে কেন্দ্র করে যখন ভাই অর্ধবৃত্তাকার চাকতিটি ঘোরাচ্ছে তখন অনেকটা বলের মতো ঘনবস্তু তৈরি হচ্ছে দেখছি। একে কী বলা হয়?

এইভাবে অর্ধবৃত্তাকার চাকতির ব্যাসকে অক্ষ করে চাকতিটি ঘোরালে বলের মতো দেখতে যে ঘনবস্তু দেখতে পাই সেটি **গোলক (Sphere)**।

বুঝেছি, গোলকের তল বলের তলের মতো।

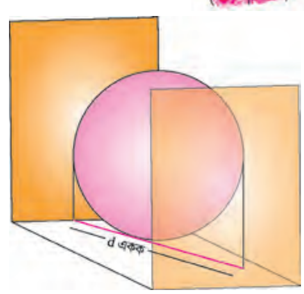
∴ গোলকের $\square$ টি তল এবং এটি একটি $\square$ [বক্রতল/সমতল]

আমরা সুজিতের আনা গোলাকার চাকতির সাহায্যে খুব সহজেই অনেকগুলি হাতপাখা তৈরি করলাম এবং প্রত্যেকে 1টি করে হাতপাখা নিয়ে নিলাম।

এবার আমরা ঠিক করেছি বাড়িতে ব্যবহৃত গোলক আকারের ঘনবস্তুগুলি খুঁজি। আমার বোন একটি বড়ো গোলকাকার চামড়ার বল এনে দিল।

কিন্তু এই গোলকাকার চামড়ার বল তৈরি করতে কতটা পরিমাণ চামড়া লেগেছে কীভাবে পাব? অর্থাৎ একটি গোলকের বক্রতলের বা সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল কীভাবে পাব? হাতেকলমে চেষ্টা করি।

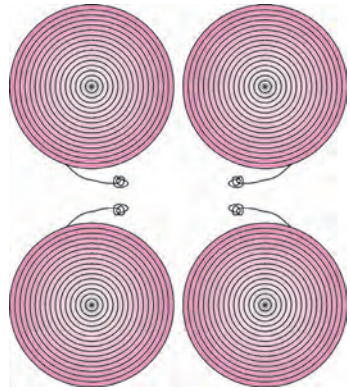
হাতেকলমে গোলকের সমগ্রতলের বা বক্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয়।



(1) একটি গোলকাকার বল নিলাম এবং দুটি উল্লম্ব পিচবোর্ডের মধ্যে পাশের ছবির মতো বলটি রেখে বলটির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য (r একক) [যেখানে ব্যাসের দৈর্ঘ্য (d একক)] নির্ণয় করলাম।

(2) বলটির উপরে একটি পিন আটকে দিলাম।

(3) এবার পিনটিতে দড়ি আটকে পাশের ছবির মতো এমনভাবে জড়িয়ে দিলাম যাতে কোনো অংশ ফাঁকা না থাকে এবং দড়ির কোনো অংশ জড়ানো দড়ির উপর না থাকে।



(4) এবার দড়ির শুরু ও শেষ বিন্দু দুটি চিহ্নিত করলাম এবং দড়িটি খুলে এই বিন্দুদুটির মর্ধ্যবর্তী দূরত্ব (ℓ) মাপলাম।

(5) মোটা সাদা আর্টপেপারে r একক দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের 4টি বৃত্ত অঙ্কন করলাম।

(6) এবার প্রতিটি বৃত্ত ওই একই রকম দড়ি দিয়ে পাশের ছবির মতো ভরাট করলাম।

মেপে দেখছি, প্রতিটি বৃত্ত ভরাট করতে a দৈর্ঘ্যের দড়ি লেগেছে।

আবার দেখছি, $\ell = 4a$

$\therefore$ গোলকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= 4 \times$ (r একক দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের বৃত্তের ক্ষেত্রফল)
$= 4 \times \pi r^2$ বর্গ একক $= 4\pi r^2$ বর্গ একক

$\therefore$ হাতেকলমে পেলাম

গোলকের বক্রতলের বা সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল (Curved Surface or Whole Surface Area) $= 4\pi r^2$

বুঝেছি, r একক দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের চামড়ার বল তৈরি করতে $4\pi r^2$ বর্গ একক চামড়া লাগবে।

প্রয়োগ : 1. যদি বলটির ব্যাস 42 সেমি. হয়, তবে বলটিতে কতটা চামড়া আছে হিসাব করি।

বলটির ব্যাস = 42 সেমি. $\therefore$ বলটির ব্যাসার্ধ $= \frac{42}{2}$ সেমি. = 21 সেমি.

$\therefore$ বলটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= 4\pi \times (21)^2$ বর্গ সেমি.

$= 4 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$ বর্গ সেমি.

$= \boxed{}$ বর্গ সেমি.

$\therefore$ বলটিতে 5544 বর্গ সেমি. চামড়া আছে।

প্রয়োগ : 2. লোহার পাতে তৈরি একটি গোলকের ব্যাস 14 সেমি.। গোলকটিকে রং করতে প্রতি বর্গ সেমি. 2.50 টাকা হিসাবে কত খরচ পড়বে হিসাব করি। **[নিজে করি]**

(2) ওই গোলকাকার বলটি যদি নিরেট পাথরের বল হতো তবে ওই বলে কতটা পরিমাণ পাথর থাকবে কীভাবে পাবো?

গোলকের আয়তন নির্ণয়ের মাধ্যমে পাবো।

গোলকের আয়তন $= \frac{4}{3}\pi r^3$ ঘন একক (যেখানে গোলকের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r একক)

বুঝেছি, r একক দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের নিরেট পাথরের বলে পাথর আছে $= \frac{4}{3}\pi r^3$ ঘন একক।

প্রয়োগ : 3. 14 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসবিশিষ্ট গোলকাকার নিরেট পাথরের বলে কতটা পরিমাণ পাথর আছে হিসাব করে লিখি।

গোলকাকার নিরেট পাথরের বলের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য $= \frac{14}{2}$ সেমি. = 7 সেমি.

$\therefore$ গোলকাকার নিরেট পাথরের বলে পাথর আছে $= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 7^3$ ঘন সেমি.
$= \boxed{}$ ঘন সেমি.

প্রয়োগ : 4. 0.7 ডেসিমি দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের কোনো পাথরের গোলকাকার বল চৌবাচ্চার জলে ডোবালে কতটা পরিমাণ জল অপসারিত হবে হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 5. যদি কোনো গোলকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল 2464 বর্গ মিটার হয়, তবে ওই গোলকের আয়তন কত হবে হিসাব করি।

ধরি, গোলকের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r মিটার।

শর্তানুসারে, $4\pi r^2 = 2464$

বা, $4 \times \frac{22}{7} \times r^2 = 2464$

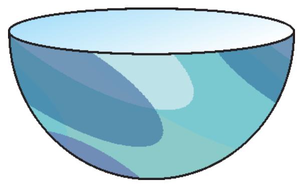
বা, $r^2 = 2464 \times \frac{7}{22 \times 4} = 28 \times 7 = 7^2 \times 2^2$

$\therefore r = 14$

$\therefore$ ওই গোলকের আয়তন $= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14 \times 14$ ঘন মিটার

$= 11498.67$ ঘন মিটার

3 আমার পড়ার ঘরের টেবিলে একটি Paperweight ছিল। আমার বোন Paperweight নিয়ে এসে স্কেল দিয়ে তার ব্যাসার্ধ মাপছে।



দেখছি ওই Paperweight টি একটি নিরেট অর্ধেক গোলকাকার ঘনবস্তু যার $\boxed{}$ টি সমতল ও $\boxed{}$ টি বক্রতল।

এই অর্ধগোলকাকার ঘনবস্তুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ গোলকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2} \times 4\pi r^2$ বর্গ একক

$= 2\pi r^2$ বর্গ একক

[যেখানে অর্ধগোলকাকারের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r একক]

এবং এই নিরেট অর্ধগোলকাকার ঘনবস্তুর সমতলের ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$ বর্গ একক

বুঝেছি, এই নিরেট অর্ধগোলকাকার ঘনবস্তুর ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r একক হলে তার সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল

$= (2\pi r^2 + \pi r^2)$ বর্গ একক

$= 3\pi r^2$ বর্গ একক

$\therefore$ নিরেট অর্ধগোলকের (Solid Hemisphere) সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= 3\pi r^2$ বর্গ একক

প্রয়োগ : 6. যদি একটি অর্ধগোলকাকার নিরেট ঘনবস্তুর ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 14 সেমি. হয়,তবে তার সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।

সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= 3 \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14$ বর্গ সেমি.

$= \boxed{}$ বর্গ সেমি.

প্রয়োগ : 7. অর্ধগোলাকৃতি একটি বাটি তৈরি করতে যদি 173.25 বর্গ সেমি. পাত লাগে, তবে ওই বাটিটির মুখের ব্যাসের দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

[**উত্তর সংকেত :** বাটিটি যেহেতু নিরেট নয় তাই শুধুমাত্র বক্রতলে পাত লাগবে]

4 এবার একটি নিরেট অর্ধগোলকাকার পাথরের Paperweight-এ কতটা পরিমাণ পাথর আছে হিসাব করি।

ধরি, অর্ধগোলকাকার পাথরের Paperweight-এর ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r একক

$\therefore$ নিরেট অর্ধগোলকের আয়তন $= \frac{1}{2} \times$ গোলকের আয়তন

$= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi r^3$ ঘন একক $= \frac{2}{3}\pi r^3$ ঘন একক

$\therefore$ অর্ধগোলকের আয়তন $= \frac{2}{3} \pi r^3$ ঘন একক

প্রয়োগ : 8. যদি একটি পাথরের অর্ধগোলকাকার নিরেট ঘনবস্তুর ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 14 সেমি. হয়, তবে তাতে কতটা পরিমাণ পাথর আছে হিসাব করি।

নিরেট অর্ধগোলকাকার Paperweight-এ পাথর আছে $= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 14\times14\times14$ ঘন সেমি.$= \boxed{}$ ঘনসেমি.

প্রয়োগ : 9. দুটি গোলকাকার ঘনবস্তুর সমগ্রতলের ক্ষেত্রফলের অনুপাত 1:4 হলে, তাদের আয়তনের অনুপাত কী হবে হিসাব করে লিখি।

ধরি, দুটি গোলকাকার ঘনবস্তুর ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে r_1 একক ও r_2 একক

শর্তানুসারে, $\frac{4\pi r_1^2}{4\pi r_2^2} = \frac{1}{4}$ বা, $\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \therefore \frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{2}$

$$\therefore \frac{\text{প্রথম গোলকের আয়তন}}{\text{দ্বিতীয় গোলকের আয়তন}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r_1^3}{\frac{4}{3}\pi r_2^3} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$\therefore$ গোলকাকার ঘনবস্তুদুটির আয়তনের অনুপাত 1:8

প্রয়োগ : 10. যদি দুটি গোলকের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের অনুপাত 1:2 হয়, তবে তাদের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফলের অনুপাত হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 11. যদি একটি গোলকের আয়তন ও পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফলের সাংখ্যমান সমান হয়, তবে গোলকটির ব্যাসার্ধের সাংখ্যমান হিসাব করে লিখি।

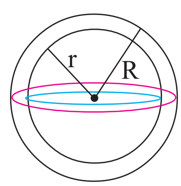
ধরি, গোলকটির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r একক।

$\therefore$ গোলকটির বক্রতলের ক্ষেত্রফল $= 4\pi r^2$ বর্গ একক এবং আয়তন $= \frac{4}{3} \pi r^3$ ঘন একক

প্রশ্নানুসারে, $\frac{4}{3} \pi r^3 = 4\pi r^2$ (যেহেতু সাংখ্যমান সমান) $\therefore r = 3$ $[\because r\neq0]$

$\therefore$ গোলকটির ব্যাসার্ধের সাংখ্যমান 3.

5 কোনো ফাঁপা গোলকের বহিঃব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য R একক এবং অন্তঃব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r একক হলে, ওই ফাঁপা গোলকে কী পরিমাণ পদার্থ আছে অর্থাৎ ওই ফাঁপা গোলক তৈরি করতে কত পরিমাণ পদার্থ লেগেছে তার আয়তন কীভাবে পাব?



ওই ফাঁপা গোলক তৈরি করতে যে পরিমাণ পদার্থ লেগেছে তার আয়তন $= \frac{4}{3} \pi (R^3 - r^3)$ ঘন একক।

প্রয়োগ : 12. 1 সেমি. ও 6 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধবিশিষ্ট দুটি নিরেট গোলককে গলিয়ে 1 সেমি পুরু ফাঁপা গোলকে পরিণত করা হলে, নতুন গোলকটির বাইরের বক্রতলের ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।

ধরি, নতুন গোলকের বহিঃব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r সেমি.

$\therefore$ ওই গোলকের অন্তঃব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য = (r–1) সেমি.

প্রশ্নানুসারে, $\frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi (r-1)^3 = \frac{4}{3}\pi (1)^3 + \frac{4}{3}\pi (6)^3$

বা, $\frac{4}{3}\pi\{r^3 - (r-1)^3\} = \frac{4}{3}\pi (1+216)$

বা, $r^3 - r^3 + 3r^2 - 3r + 1 = 217$

বা, $3r^2 - 3r - 216 = 0$

বা, $r^2 - r - 72 = 0$

বা, $r^2 - 9r + 8r - 72 = 0$

বা, $r(r-9) + 8(r-9) = 0$

বা, $(r-9)(r+8) = 0$

হয়, $r - 9 = 0 \quad \therefore r = 9$

নতুবা, $r + 8 = 0 \quad \therefore r = -8$

যেহেতু ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য ঋণাত্মক হতে পারে না, তাই $r \neq -8$; সুতরাং $r = 9$

$\therefore$ নতুন গোলকটির বহিঃব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য = 9 সেমি.

$\therefore$ বাইরের বক্রতলের ক্ষেত্রফল $= 4 \times \frac{22}{7} \times 9 \times 9$ বর্গ সেমি. = $\boxed{}$ বর্গ সেমি. **[নিজে হিসাব করে লিখি]**

কষে দেখি 12

1. একটি গোলকের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 10.5 সেমি. হলে, তার সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।
2. একটি চামড়ার বল তৈরি করতে প্রতি বর্গ সেমি. 17.50 টাকা হিসাবে 431.20 টাকা লেগেছে। বলটির ব্যাসের দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।
3. স্কুলে সটপাট খেলার জন্য যে বলটি ব্যবহার করা হয় তার ব্যাসের দৈর্ঘ্য 7 সেমি. হলে, বলটিতে কত ঘন সেমি. লোহা আছে হিসাব করে লিখি।
4. 28 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসবিশিষ্ট একটি নিরেট গোলক জলে সম্পূর্ণভাবে নিমজ্জিত করলে যে পরিমাণ জল অপসারিত করবে তা নির্ণয় করি।
5. কোনো গোলকাকার গ্যাস বেলুন ফোলাবার সময়ে তার ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 7সেমি. থেকে 21 সেমি. হলে বেলুনটির পূর্বের ও পরের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফলের অনুপাত নির্ণয় করি।
6. অর্ধগোলাকৃতি একটি বাটি তৈরি করতে $127\frac{2}{7}$ বর্গ সেমি. পাত লেগেছে। বাটিটির মুখের ব্যাসের দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।
7. একটি নিরেট লোহার গোলার ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 2.1 সেমি.। ওই গোলাটিতে কত ঘন সেমি. লোহা আছে তা হিসাব করে লিখি এবং ওই লোহার গোলার বক্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করি।

8. একটি নিরেট সিসার গোলকের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 14 সেমি.। এই গোলকটি গলিয়ে 3.5 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের কতগুলি নিরেট গোলক তৈরি করা যাবে হিসাব করে লিখি।

9. 3 সেমি., 4 সেমি. ও 5 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের তিনটি নিরেট তামার গোলক গলিয়ে একটি নিরেট বড়ো গোলক তৈরি করা হলো। বড়ো গোলকটির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।

10. একটি অর্ধগোলাকৃতি গম্বুজের ভূমিতলের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 42 ডেসিমি.। গম্বুজটির উপরিতল রং করতে প্রতি বর্গ মিটার 35 টাকা হিসাবে কত খরচ পড়বে তা হিসাব করে লিখি।

11. একই ধাতুর পাত থেকে তৈরি দুটি ফাঁপা গোলকের ব্যাসের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 21 সেমি. এবং 17.5 সেমি.। গোলকদুটি তৈরি করতে যে পরিমাণ ধাতুর পাত লেগেছে তার অনুপাত নির্ণয় করি।

12. একটি ধাতব গোলকের উপরিতল এমনভাবে কেটে নেওয়া হলো যে নতুন গোলকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল আগের গোলকের ঠিক অর্ধেক হয়। কেটে নেওয়া অংশের আয়তনের সঙ্গে অবশিষ্ট গোলকের আয়তনের অনুপাত নির্ণয় করি।

13. 14 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি ভূগোলকের অক্ষটির বক্রতলে 0.7 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধবিশিষ্ট দুটি বৃত্তাকার ছিদ্র করা হয়েছে। ভূগোলকটির গোলাকার অংশের ধাতব পাতের ক্ষেত্রফল হিসাব করি।

14. 8 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের একটি নিরেট লোহার গোলককে গলিয়ে 1 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের কয়টি নিরেট গুলি তৈরি করা যাবে হিসাব করে লিখি।

15. **অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)**

(A) বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.) :

(i) 2r একক দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধিবিশিষ্ট নিরেট গোলকের আয়তন

(a) $\frac{32\pi r^3}{3}$ ঘনএকক (b) $\frac{16\pi r^3}{3}$ ঘনএকক (c) $\frac{8\pi r^3}{3}$ ঘনএকক (d) $\frac{64\pi r^3}{3}$ ঘনএকক

(ii) দুটি নিরেট গোলকের আয়তনের অনুপাত 1:8 হলে, তাদের বক্রতলের ক্ষেত্রফলের অনুপাত

(a) 1:2 (b) 1:4 (c) 1:8 (d) 1:16

(iii) 7সেমি দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি নিরেট অর্ধগোলকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল

(a) 588 π বর্গ সেমি. (b) 392 π বর্গ সেমি. (c) 147π বর্গ সেমি. (d) 98π বর্গ সেমি.

(iv) দুটি নিরেট গোলকের বক্রতলের ক্ষেত্রফলের অনুপাত 16:9 হলে, তাদের আয়তনের অনুপাত

(a) 64:27 (b) 4:3 (c) 27:64 (d) 3:4

(v) একটি নিরেট গোলকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল ও 3 গুণ আয়তনের সাংখ্যমান সমান হলে, গোলকটির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য

(a) 1 একক (b) 2 একক (c) 3 একক (d) 4 একক

(B) নীচের বিবৃতিগুলি সত্য না মিথ্যা লিখি :

(i) একটি নিরেট গোলকের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য দ্বিগুণ করলে গোলকটির আয়তন দ্বিগুণ হবে।

(ii) দুটি অর্ধগোলকের বক্রতলের ক্ষেত্রফলের অনুপাত 4:9 হলে, তাদের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের অনুপাত হবে 2:3.

(C) শূন্যস্থান পূরণ করি :

(i) একটি তলবিশিষ্ট ঘনবস্তুর নাম ________।

(ii) একটি নিরেট অর্ধগোলকের সমতলের সংখ্যা ________।

(iii) একটি নিরেট অর্ধগোলকের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 2r একক হলে সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল ________ πr^2 বর্গ একক।

16. **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S.A.)**

(i) একটি নিরেট অর্ধগোলকের আয়তন এবং সমগ্রতলের ক্ষেত্রফলের সাংখ্যমান সমান। অর্ধগোলকটির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য কত তা লিখি।

(ii) একটি নিরেট গোলকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল একটি নিরেট লম্ববৃত্তাকার চোঙের বক্রতলের ক্ষেত্রফলের সমান। চোঙটির উচ্চতা এবং ব্যাসের দৈর্ঘ্য উভয়েই 12 সেমি.। গোলকটির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য কত তা লিখি।

(iii) একটি নিরেট অর্ধগোলকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল এবং একটি নিরেট গোলকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল সমান। অর্ধগোলক এবং গোলকের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের অনুপাত কত তা লিখি।

(iv) একটি নিরেট গোলকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল = S এবং আয়তন = V হলে, $\frac{S^3}{V^2}$-এর মান কত তা লিখি। (π -এর মান না বসিয়ে)

(v) একটি গোলকের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 50% বৃদ্ধি করলে বক্রতলের ক্ষেত্রফল শতকরা কত বৃদ্ধি পায় তা লিখি।

13 ভেদ
VARIATION

আমি ও রাহুল ঠিক করেছি আমাদের গ্রামের কোথায় স্কুল, বাজার, হাসপাতাল, ডাক্তারখানা, নদী, সমবায় সমিতি, বড়ো পুকুর, চাষের জমি ইত্যাদি আছে নির্দেশ করে একটি রাস্তার মানচিত্র তৈরি করব ও আমাদের ক্লাবঘরের সামনের একটি বড়ো বোর্ডে আটকে রাখব।

তাই আজ গ্রীষ্মের দুপুরে আমরা দুজনে ছোটো বড়ো নানান মাপের আর্টপেপার, পেন, পেনসিল, কাঁচি, আঠা ইত্যাদি নিয়ে কাজ শুরু করেছি।

1 কিন্তু মানচিত্রে রাস্তার দৈর্ঘ্যের মাপ কীভাবে নেব?

গ্রামের 8 কিমি. রাস্তার দৈর্ঘ্যের মানকে মানচিত্রে 1 সেমি. দৈর্ঘ্যের সমতুল্য দেখালাম।

তাহলে, গ্রামের 24 কিমি. দৈর্ঘ্যের রাস্তা মানচিত্রে 3 সেমি. দৈর্ঘ্যের সমতুল্য হবে।

2 আমি নীচের ছকে গ্রামের রাস্তার দৈর্ঘ্য = x সেমি. এবং মানচিত্রে রাস্তার দৈর্ঘ্য = y সেমি. ধরে কী পাই লিখি।

$\times 5.5$ $\times 3.5$ $\times 7$ $\times 5$ $\times 3$

গ্রামের রাস্তার দৈর্ঘ্য (x) [সেমি.]	800000	2400000	4000000	5600000	2800000	4400000
মানচিত্রে রাস্তার দৈর্ঘ্য (y) [সেমি.]	1	3	5	7	3.5	5.5

$\times 3$ $\times 5$ $\times 7$ $\times 3.5$ $\times 5.5$

দেখছি, মানচিত্রের স্কেল অনুসারে গ্রামের রাস্তার দৈর্ঘ্য প্রথমের যতগুণ হচ্ছে মানচিত্রে রাস্তার দৈর্ঘ্যও প্রথমের ততগুণ হচ্ছে।

অর্থাৎ $\dfrac{800000}{1} = \dfrac{2400000}{3} = \dfrac{4000000}{5} = \cdots\cdots\cdots\cdots = \dfrac{x}{y}$

অর্থাৎ $\dfrac{x}{y}$ -এর মানের কোনো পরিবর্তন হচ্ছে না।

ধরি, $\dfrac{x}{y} = k$, $[k \neq 0]$ $\therefore x = ky$, [এখানে k অশূন্য ধ্রুবক]

3 যদি দুটি পরস্পর সম্পর্কযুক্ত চলরাশি x ও y এমন হয় যে, $\dfrac{x}{y} = k$ (অশূন্য ধ্রুবক) হয় তখন ওই দুটি চলরাশি কী সম্পর্কে আছে বলা হবে?

যদি দুটি পরস্পর সম্পর্কযুক্ত চলরাশি x ও y এমন হয় যে, $\dfrac{x}{y} = k$ (অশূন্য ধ্রুবক) হয় তখন বলা হয় যে x ও y **সরল ভেদে (Direct variation)** আছে এবং লেখা হয় $x \propto y$ এবং অশূন্য ধ্রুবকটিকে বলা হয় **ভেদধ্রুবক (Variation Constant)**।

যখন $\dfrac{x}{y} = k$ (অশূন্য ধ্রুবক), এবং $k > 0$, তখন একটির মান বৃদ্ধি পেলে অপরটির অনুরূপ মানও বৃদ্ধি পায় এবং একটির মান হ্রাস পেলে অপরটির অনুরূপ মানও হ্রাস পায়।

যদি $\dfrac{x}{y} = k$ (অশূন্য ধ্রুবক) এবং $k < 0$ হয় তখন x ও y চলরাশি দুটির পরিবর্তন কীরকম হবে নিজে লিখি।

রাস্তার দৈর্ঘ্য এবং মানচিত্রে রাস্তার দৈর্ঘ্য যথাক্রমে x ও y চলরাশি দুটি সরল ভেদে আছে অর্থাৎ $x \propto y$.