Chapter
25
अवकल समीकरण

परिभाषा (Definition)

वह समीकरण जिसमें स्वतंत्र चर x, परतंत्र चर y तथा अवकल गुणांक $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$,........ हों, अवकल समीकरण कहलाता है।

उदाहरणार्थ : (i) $\frac{dy}{dx} = 1 + x + y$ (ii) $\frac{dy}{dx} + xy = \cot x$

(iii) $\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)^3 - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 5\cos 3x$ (iv) $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 0$

(1) **अवकल समीकरण की कोटि :** अवकल समीकरण की कोटि समीकरण में विद्यमान उच्चतम अवकलज की कोटि होती है। उदाहरण स्वरूप उपर्युक्त समीकरणों की कोटियाँ क्रमशः 1,1,4 तथा 2 हैं।

अवकल समीकरण की कोटि एक धनात्मक पूर्णांक संख्या होती है। अवकल समीकरण की कोटि ज्ञात करने के लिए यह आवश्यक नहीं है कि समीकरण को करणीगत चिन्हों से स्वतंत्र किया जाए।

(2) **अवकल समीकरण की घात :** अवकल समीकरण की घात, समीकरण में विद्यमान उच्चतम कोटि के अवकलज की घात होती है, जबकि सभी अवकलज करणीगत चिन्हों से स्वतंत्र हों। दूसरे शब्दों में, एक अवकल समीकरण की घात समीकरण में विद्यमान उच्चतम कोटि के अवकलज की घात होती है यदि यह अवकलजों के बहुपद में व्यक्त किया गया हो। उपर्युक्त अवकल समीकरणों की घात क्रमशः 1, 1, 3 तथा 2 हैं।

अवकल समीकरण की संरचना
(Formation of differential equation)

वक्र-निकाय के समीकरण से अवकल समीकरण की रचना से तात्पर्य है उस अवकल समीकरण को ज्ञात करना जिसका हल दिया गया समीकरण है। वक्र-निकाय को व्यक्त करने वाले समीकरण में यदि n स्वेच्छ अचर हों तो हम इस समीकरण का n बार अवकलन करते हैं, ताकि n समीकरण मिल सकें।

अवकल समीकरण के निर्माण की कार्य विधि :

पद (i) **:** दिये गये समीकरण को लिखते हैं, जिसमें स्वतंत्र चर x, परतंत्र चर y तथा स्वेच्छ अचर हैं।

पद (ii) **:** स्वेच्छ अचर की संख्या ज्ञात करते हैं, माना यह संख्या n है।

पद (iii) **:** दिये समीकरण का x के सापेक्ष n बार अवकलन करते हैं।

पद (iv) **:** पद (i) के समीकरण तथा पद (iii) में प्राप्त n समीकरणों (जिसमें अवकलज होंगे) की सहायता से स्वेच्छ अचरों का विलोपन कर जो समीकरण प्राप्त होगा, वह अभीष्ट अवकल समीकरण होगा।

चरों के पृथक्करण रूप में अवकल समीकरण
(Variable separable type differential equation)

(1) **चरों के पृथक्करण रूप में अवकल समीकरण** : यदि अवकल समीकरण का स्वरूप निम्नांकित हो, $f_1(x)dx = f_2(y)dy$ .....(i)

जहाँ f_1 एवं f_2 क्रमशः केवल x एवं y के फलन हैं, तो हम कहते हैं कि अवकल समीकरण में चर पृथक है। अतः समीकरण (i) के समाकलन से हल प्राप्त होता है : $\int f_1(x)dx = \int f_2(y)dy + C$, जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है। दोनों ओर स्वेच्छ अचर लिखने की आवश्यकता नहीं है, क्योंकि उन्हें मिलाकर एक स्वेच्छ अचर प्राप्त होगा।

(2) **चर पृथक्करण में परिवर्तन योग्य अवकल समीकरण** :

(i) अवकल समीकरण,जो $\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$ के रूप में है, को निम्नलिखित प्रतिस्थापन द्वारा चर पृथक रूप में परिवर्तित किया जा सकता है $ax + by + c = Z$

$\therefore\ a + b\frac{dy}{dx} = \frac{dZ}{dx}; \therefore \left(\frac{dZ}{dx} - a\right)\frac{1}{b} = f(Z) \Rightarrow \frac{dZ}{dx} = a + bf(Z)$. यह चर पृथक रूप है।

(ii) $\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{Ax + By + C}$ के रूप का अवकल समीकरण, जहाँ $\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = K$ (माना); $\therefore\ \frac{dy}{dx} = \frac{K(Ax + By) + c}{Ax + By + C}$

$Ax + By = Z$ रखने पर

$$\therefore A + B\frac{dy}{dx} = \frac{dZ}{dx}, \therefore \left[\frac{dZ}{dx} - A\right]\frac{1}{B} = \frac{KZ + c}{Z + C}$$

$$\Rightarrow \frac{dZ}{dx} = A + B\frac{KZ + c}{Z + C}$$

यह चर पृथक रूप में है एवं हल किया जा सकता है।

समघातीय अवकल समीकरण
(Homogeneous differential equation)

(1) **समघातीय अवकल समीकरण :** फलन $f(x, y)$, n घात का समघातीय फलन कहलाता हैं यदि $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$.

उदाहरणार्थ : $f(x,y) = x^2 - y^2 + 3xy$ एक द्विघात का समघातीय फलन है, क्योंकि $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 x^2 - \lambda^2 y^2 + 3\lambda x . \lambda y = \lambda^2 f(x, y)$

n घात के एक समघातीय फलन $f(x, y)$ को हमेशा निम्नांकित रूप में लिखा जा सकता है $f(x,y) = x^n f\left(\frac{y}{x}\right)$ अथवा $f(x,y) = y^n f\left(\frac{x}{y}\right)$ यदि प्रथम कोटि एवं प्रथम घात का अवकल समीकरण निम्नांकित रूप में व्यक्त हो $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$, जहाँ $f(x, y)$ एवं $g(x, y)$ समान घात के समघातीय फलन हैं, तो इसे समघातीय अवकल समीकरण कहते है। इस प्रकार के समीकरणों का प्रतिस्थापन $y = vx$ द्वारा चर पृथक रूप में परिवर्तित कर किया जा सकता है। दिए गये अवकल समीकरण को इस प्रकार लिख सकते हैं : $\frac{dy}{dx} = \frac{x^n f(y/x)}{x^n g(y/x)} = \frac{f(y/x)}{g(y/x)} = F\left(\frac{y}{x}\right)$.

यदि $y = vx$, तो $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$.

$$\Rightarrow v + x\frac{dv}{dx} = F(v) \Rightarrow \frac{dv}{F(v) - v} = \frac{dx}{x}$$

समाकलन करने पर, $\int \frac{1}{F(v)-v} dv = \int \frac{dx}{x} + C$,जहाँ C समाकलन का स्वेच्छ अचर है समाकलन के पश्चात् पूर्ण हल में v के स्थान पर $\frac{y}{x}$ प्रतिस्थापित करते हैं।

(2) **समघातीय रूप में परिवर्तन योग्य समीकरण :** प्रथम कोटि व प्रथम घात का अवकल समीकरण, जिसका स्वरूप निम्नांकित है :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}, \text{ जहाँ } \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \quad .....(i)$$

यह असमघातीय समीकरण है, जिसे समघातीय स्वरूप में परिवर्तित किया जा सकता है। माना $x = X + h, y = Y + k$ जहाँ h तथा k अचर हैं।

यथातथ्य अवकल समीकरण (Exact differential equation)

(1) **यथातथ्य** (Exact) **अवकल समीकरण :** यदि M तथा N, x एवं y के फलन हों तो समीकरण $Mdx + Ndy = 0$ को यथातथ्य (exact) कहेंगे, जब x एवं y में एक फलन $f(x, y)$ इस प्रकार विद्यमान है, कि

$d[f(x, y)] = Mdx + Ndy$ अर्थात् $\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = Mdx + Ndy$

जहाँ, $\frac{\partial f}{\partial x} = f(x, y)$ का x के सापेक्ष आंशिक अवकलज

(y को नियत मानते हुए)

$\frac{\partial f}{\partial y} = f(x, y)$ का y के सापेक्ष आंशिक अवकलज (x को नियत मानते हुए)

अवकल समीकरण $Mdx + Ndy = 0$ के यथातथ्य अवकल समीकरण होने के लिए आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबन्ध $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ है। अर्थात् y के सापेक्ष $M(x, y)$ का आंशिक अवकलज= x के सापेक्ष $N(x, y)$ का आंशिक अवकलज

(2) **समाकलन गुणांक :** यदि समीकरण $Mdx + Ndy = 0$ यथातथ्य नहीं है तब, x एवं y के किसी फलन से गुणा करने पर इसे यथातथ्य बनाया जा सकता है। इस गुणक फलन को समाकलन गुणांक कहते हैं।

(3) **यथातथ्य अवकल समीकरण को हल करने की कार्यविधि**

पद (i) **:** दिये गये समीकरण की $Mdx + Ndy = 0$ से तुलना कर, M तथा N का मान प्राप्त करते हैं। इसके पश्चात् $\frac{\partial M}{\partial y}$ तथा $\frac{\partial N}{\partial x}$ का मान ज्ञात करते हैं, यदि $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, तो दिया गया समीकरण यथातथ्य होगा।

पद (ii) **:** y को अचर मानते हुए x के सापेक्ष M का समाकलन करते हैं।

पद (iii) **:** x को अचर मानते हुए y के सापेक्ष N का समाकलन करते हैं तथा उन पदों को हटा देते हैं जो M के समाकलन से प्राप्त होते हैं।

पद (iv) **:** (ii) एवं (iii) में प्राप्त पदों को जोड़ने के बाद इसे एक स्वेच्छ अचर के बराबर करने पर हमें अभीष्ट हल प्राप्त होता है।

दूसरे शब्दों में, एक यथातथ्य अवकल समीकरण का हल

$$\underset{y \text{ को नियत मानते हुए}}{\int Mdx} + \underset{\text{केवल वे पद जिनमें } x \text{ नहीं है}}{\int Ndy} = c \text{ है।}$$

परीक्षण द्वारा हल (Solution by inspection)

यदि अवकल समीरकण को निम्नांकित स्वरूप में लिखा जा सकता है $f(f_1(x,y))d(f_1(x,y)) + \phi(f_2(x,y))d(f_2(x,y)) + ... = 0$, तो प्रत्येक पद को आसानी से अलग–अलग समाकलित किया जा सकता है। इसके लिए निम्नलिखित परिणामों को याद रखें :

(i) $d(x + y) = dx + dy$ (ii) $d(xy) = xdy + ydx$

(iii) $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$ (iv) $d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{x^2}$

(v) $d\left(\frac{x^2}{y}\right) = \frac{2xydx - x^2 dy}{y^2}$ (vi) $d\left(\frac{y^2}{x}\right) = \frac{2xydy - y^2 dx}{x^2}$

(vii) $d\left(\frac{x^2}{y^2}\right) = \frac{2xy^2 dx - 2x^2 ydy}{y^4}$

(viii) $d\left(\frac{y^2}{x^2}\right) = \frac{2x^2 ydy - 2xy^2 dx}{x^4}$

(ix) $d\left(\tan^{-1}\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$ (x) $d\left(\tan^{-1}\frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$

(xi) $d[\ln(xy)] = \frac{xdy + ydx}{xy}$ (xii) $d\left(\ln\left(\frac{x}{y}\right)\right) = \frac{ydx - xdy}{xy}$

(xiii) $d\left[\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)\right] = \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}$

(xiv) $d\left[\ln\left(\frac{y}{x}\right)\right] = \frac{xdy - ydx}{xy}$ (xv) $d\left(-\frac{1}{xy}\right) = \frac{xdy + ydx}{x^2 y^2}$

(xvi) $d\left(\frac{e^x}{y}\right) = \frac{ye^x dx - e^x dy}{y^2}$ (xvii) $d\left(\frac{e^y}{x}\right) = \frac{xe^y dy - e^y dx}{x^2}$

(xviii) $d(x^m y^n) = x^{m-1} y^{n-1}(mydx + nxdy)$

(xix) $d\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = \frac{xdx + y\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

(xx) $d\left(\frac{1}{2}\log\frac{x+y}{x-y}\right) = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 - y^2}$ (xxi) $\frac{d[f(x,y)]^{1-n}}{1-n} = \frac{f'(x,y)}{(f(x,y))^n}$

रैखिक अवकल समीकरण (Linear differential equation)

(1) **रैखिक तथा अरैखिक अवकल समीकरण**

रैखिक अवकल समीकरण को

$P_o \frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + P_2 \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + ... + P_{n-1}\frac{dy}{dx} + P_n y = Q$ के पदों में निरूपित किया जाता है, जहाँ $P_0, P_1, P_2, ..., P_{n-1}, P_n$ एवं Q या तो नियतांक हैं या स्वतंत्र चर x के फलन हैं।

अतः यदि किसी अवकल समीकरण को बहुपद के रूप में व्यक्त किये जाने पर, इसमें अवकलज तथा परतंत्र चर प्रथम घात में हों, एवं इनका गुणनफल नहीं हो तथा इनके गुणांक नियतांक हो या स्वतंत्र चर के फलन हों, तो यह समीकरण रैखिक अवकल समीकरण कहलाता है अन्यथा इसे अरैखिक अवकल समीकरण कहते हैं।

उपर्युक्त परिभाषा से यह निष्कर्ष निकलता है कि एक अवकल समीकरण अरैखिक अवकल समीकरण होगा, यदि (i) समीकरण की घात एक से अधिक हो। (ii) किसी भी अवकल गुणांक की घात एक से अधिक हो। (iii) परतंत्र चर की घात एक से अधिक हो। (iv) परतंत्र चर तथा अवकल गुणांक का गुणनफल विद्यमान हो।

(2) **प्रथम कोटि का रैखिक अवकल समीकरण :** प्रथम कोटि के रैखिक अवकल समीकरण का व्यापक स्वरूप है :

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q \quad .....(i)$$

जहाँ P एवं Q, x के फलन हैं या नियतांक हैं।

उदाहरणस्वरूप, $\frac{dy}{dx} + xy = x^3$, $x\frac{dy}{dx} + 2y = x^3$, $\frac{dy}{dx} + 2y = \sin x$ इत्यादि रैखिक अवकल समीकरण हैं। इस प्रकार के अवकल समीकरण को हल करने के लिए इन्हें एक पद से गुणा करना होता है, जिसे समाकलन गुणांक ($I.F.$) कहते हैं।

समीकरण (i) के दोनों ओर $e^{\int P dx}$ से गुणा करने पर,

$$e^{\int P dx}\left(\frac{dy}{dx} + Py\right) = Q e^{\int P dx} \Rightarrow \frac{d}{dx}\left\{y e^{\int P dx}\right\} = Q e^{\int P dx}$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष समाकलन करने पर,

$$y e^{\int P dx} = \int Q e^{\int P dx} + C \quad ....(ii)$$

जो कि अभीष्ट हल है, जहाँ C समाकलन का नियतांक है। $e^{\int P dx}$ को समाकलन गुणांक ($I.F$) कहते हैं समीकरण (ii) को संक्षेप में निम्न प्रकार लिखा जा सकता है $y.(I.F.) = \int Q.(I.F.)dx + c$

(3) **रैखिक अवकल समीकरण $\frac{dx}{dy} + Rx = S$ को हल करने की कार्यविधि :** दिए गये समीकरण को $\frac{dx}{dy} + Rx = S$ के रूप में लिखकर R एवं S का मान ज्ञात करते हैं।

(4) **रैखिक अवकल समीकरण में परिवर्तन-योग्य समीकरण (बरनौली-अवकल समीकरण) :**

अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n$ ......(i)

जहाँ P एवं Q नियतांक हैं या केवल x के फलन हैं तथा n एक नियतांक है जिसका मान शून्य या एक नहीं है। समीकरण (i) को y^n से भाग देकर, तथा $y^{-n+1} = v$ रखकर रैखिक रूप में परिवर्तित किया जा सकता है,

समीकरण (i) को y^n से भाग देने पर, $y^{-n}\frac{dy}{dx} + Py^{-n+1} = Q$

$y^{-n+1} = v$ रखने पर, $(-n+1)y^{-n}\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$

$\Rightarrow \frac{1}{-n+1}\frac{dv}{dx} + Pv = Q \Rightarrow \frac{dv}{dx} + (1-n)Pv = (1-n)Q$,

जो एक रैखिक अवकल समीकरण है।

टिप्पणी : यदि $n = 1$, तब समीकरण (i) के चर, पृथक्करण योग्य हैं तथा यह आसानी से चर पृथक्करण विधि द्वारा समाकलित किया जा सकता है।

(5) **$\frac{dy}{dx} + P\phi(y) = Q\psi(y)$ रूप का अवकल समीकरण**

जहाँ P एवं Q केवल x के फलन हैं या अचर हैं।

$\psi(y)$ से भाग देने पर $\frac{1}{\psi(y)}\frac{dy}{dx} + \frac{\phi(y)}{\psi(y)}P = Q$

माना $\frac{\phi(y)}{\psi(y)} = v$, $\frac{d}{dx}\left\{\frac{\phi(y)}{\psi(y)}\right\} = \frac{dv}{dx}$

या $\frac{dv}{dx} = k \cdot \frac{1}{\psi(y)}\frac{dy}{dx}$, जहाँ k नियतांक है

$\frac{dv}{dx} + kP\,v = kQ$ जो कि रैखिक अवकल समीकरण है।

अवकल समीकरण के अनुप्रयोग
(Application of differential equation)

अवकल समीकरण की जीवन के प्रयोगिक क्षेत्र में काफी उपयोगिता है। इसका उपयोग भौतिक नियमों तथा राशियों को परिभाषित करने के लिए होता है। इसका भौतिकी, रसायन शास्त्र, अभियांत्रिकी इत्यादि में काफी उपयोग होता है।

कुछ महत्वपूर्ण उपयोगिता के क्षेत्र हैं :

(i) परिवर्तन की दर (ii) ज्यामितीय समस्यायें , इत्यादि

विविध अवकल समीकरण
(Miscellaneous differential equation)

द्वितीय कोटि का अवकल समीकरण :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x) \quad .....(i)$$

समीकरण (i) से, $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = f(x)$

$\Rightarrow d\left(\frac{dy}{dx}\right) = f(x)dx$

समाकलन करने पर, $\frac{dy}{dx} = \int f(x)dx + c_1$

अर्थात $\frac{dy}{dx} = F(x) + c_1$ ....(ii)

जहाँ, $F(x) = \int f(x)dx$

समीकरण (ii) से, $dy = F(x)dx + c_1 dx$

समाकलन करने पर, $y = \int F(x)dx + c_1 x + c_2$

$\therefore y = H(x) + c_1 x + c_2$

जहाँ $H(x) = \int F(x)dx$ तथा c_1 एवं c_2 स्वेच्छ अचर हैं।

Ordinary Thinking

Objective Questions

अवकल समीकरण की कोटि एवं घात

1. अवकल समीकरण $y = x\frac{dy}{dx} + \sqrt{a^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + b^2}$ की कोटि तथा घात है
   (a) 1, 2 (b) 2, 1
   (c) 1, 1 (d) 2, 2

2. यदि किसी वक्र निकाय के समीकरण में चार स्वेच्छ अचर हों, तो उस वक्र निकाय के अवकल समीकरण की कोटि होगी
   (a) 2 (b) 4
   (c) 6 (d) इनमें से कोई नहीं

3. अवकल समीकरण $\left[4 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{2/3} = \frac{d^2y}{dx^2}$ की कोटि तथा घात है
   (a) 2, 2 (b) 3, 3
   (c) 2, 3 (d) 3, 2

4. प्रथम कोटि तथा प्रथम घात का अवकल समीकरण है
   (a) $x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x + a = 0$ (b) $\frac{d^2y}{dx^2} + xy = 0$
   (c) $dy + dx = 0$ (d) इनमें से कोई नहीं

5. अवकल समीकरण $\sqrt{\frac{dy}{dx}} - 4\frac{dy}{dx} - 7x = 0$ की कोटि व घात क्रमशः हैं **[MP PET 1993]**
   (a) 1 व 1/2 (b) 2 व 1
   (c) 1 व 1 (d) 1 व 2

6. अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ की कोटि व घात क्रमशः हैं **[DCE 2002]**
   (a) 4, 2 (b) 1, 2
   (c) 2, 2 (d) $2, \frac{1}{2}$

7. अवकल समीकरण $\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2 + 3\left(\frac{ds}{dt}\right)^3 + 4 = 0$ की कोटि व घात क्रमशः हैं
   (a) 2,2 (b) 2,3
   (c) 3,2 (d) इनमें से कोई नहीं

8. अवकल समीकरण $\frac{d^4y}{dx^4} - 4\frac{d^3y}{dx^3} + 8\frac{d^2y}{dx^2} - 8\frac{dy}{dx} + 4y = 0$ की कोटि तथा घात क्रमशः हैं
   (a) 4, 1 (b) 1, 4
   (c) 1, 1 (d) इनमें से कोई नहीं

9. अवकल समीकरण $y\left(\frac{dy}{dx}\right) = x\bigg/\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3$ की कोटि है **[MP PET 1994]**
   (a) 1 (b) 2
   (c) 3 (d) 4

10. उस अवकल समीकरण की कोटि जिसका हल $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ है, है **[MP PET 1995]**
   (a) 1 (b) 2
   (c) 3 (d) 4

11. r त्रिज्या, y-अक्ष पर केन्द्र एवं मूलबिन्दु से जाने वाले उस वृत्त निकाय के अवकल समीकरण की कोटि है
   (a) 1 (b) 2
   (c) 3 (d) 4

12. उस अवकल समीकरण की कोटि जिसका हल $y = a\cos x + b\sin x + ce^{-x}$ है, होगी
   (a) 3 (b) 2
   (c) 1 (d) इनमें से कोई नहीं

13. a त्रिज्या के सभी वृत्त निकाय के अवकल समीकरण की कोटि होगी
   (a) 2 (b) 3
   (c) 4 (d) इनमें से कोई नहीं

14. प्रथम चतुर्थांश में स्थित उन सभी वृत्त निकाय के अवकल समीकरण जो निर्देशांक्षों को स्पर्श करते हैं, की कोटि होगी
   (a) 1 (b) 2
   (c) 3 (d) इनमें से कोई नहीं

15. अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} = \left\{y + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{1/4}$ की कोटि एवं घात क्रमशः है **[MP PET 1996]**
   (a) 4 तथा 2 (b) 1 तथा 2
   (c) 1 तथा 4 (d) 2 तथा 4

16. अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3} = 0$ की घात है **[Pb. CET 2003]**
   (a) 1 (b) 2
   (c) 3 (d) 6

17. दिये गये अवकल समीकरण $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 = \left(1 + \frac{dy}{dx}\right)^{1/2}$ की घात है **[MP PET 1997]**
   (a) 2 (b) 3
   (c) $\frac{1}{2}$ (d) 6

18. अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{4}} = 0$ की कोटि और घात क्रमशः हैं **[MP PET 1998]**
   (a) 2, 3 (b) 3, 3
   (c) 2, 6 (d) 2, 4

19. कितने घात का अवकल समीकरण, वक्र समूह $y = Ax + A^3$ को निरूपित करता है **[MP PET 1999]**
   (a) तीन (b) दो
   (c) एक (d) इनमें से कोई नहीं

20. किस अवकल समीकरण की कोटि और घात समान होगी **[Kurukshetra CEE 1998]**

(a) $\frac{d^4y}{dx^4}+8\left(\frac{dy}{dx}\right)^6+5y=e^x$

(b) $5\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^4+8\left(1+\frac{dy}{dx}\right)^2+5y=x^8$

(c) $\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3\right]^{2/3}=4\frac{d^3y}{dx^3}$

(d) $y=x^2\frac{dy}{dx}+\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

21. अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+\sin y+x^2=0$ का प्रकार है **[Roorkee 1998]**

(a) रेखीय (b) समघात
(c) कोटि 2 (d) घात 1

22. अवकल समीकरण $x\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3+\left(\frac{dy}{dx}\right)^4+y=x^2$ का है

(a) घात 3 और कोटि 2 (b) घात 1 और कोटि 1
(c) घात 4 और कोटि 3 (d) घात 4 और कोटि 4

23. यदि अवकल समीकरण $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^5+4\frac{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3}{\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)}+\frac{d^3y}{dx^3}=x^2-1$ की कोटि एवं घात क्रमशः m एवं n हैं, तब **[Karnataka CET 1999]**

(a) $m=3$ तथा $n=5$ (b) $m=3$ तथा $n=1$
(c) $m=3$ तथा $n=3$ (d) $m=3$ तथा $n=2$

24. द्वितीय कोटि का अवकल समीकरण है **[MP PET 2000]**

(a) $y'^2+x=y^2$ (b) $y'y''+y=\sin x$
(c) $y'''+y''+y=0$ (d) $y'=y$

25. अवकल समीकरण $x\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y^2=0$ की कोटि तथा घात क्रमशः हैं **[Karnataka CET 2001]**

(a) 2 तथा 2 (b) 1 तथा 1
(c) 2 तथा 1 (d) 1 तथा 2

26. अवकल समीकरण $\rho=\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{d^2y/dx^2}$ की कोटि एवं घात क्रमशः हैं **[MP PET 2001; UPSEAT 2002]**

(a) 2, 2 (b) 2, 3
(c) 2, 1 (d) इनमें से कोई नहीं

27. सभी सकेन्द्रीय वृत्तों जिनका केन्द्र (h, k) है, के लिए अवकल समीकरण की कोटि है **[EAMCET 2002]**

(a) 1 (b) 2
(c) 3 (d) 4

28. अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+6y=0$ की घात है **[Kerala (Engg.) 2002]**

(a) 1 (b) 3
(c) 2 (d) 5

29. अवकल समीकरण $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3+\left(\frac{dy}{dx}\right)^4-xy=0$ की कोटि तथा घात क्रमशः हैं **[MP PET 2003]**

(a) 2 तथा 4 (b) 3 तथा 2
(c) 4 तथा 5 (d) 2 तथा 3

30. $\frac{d^3y}{dx^3}+2\left[1+\frac{d^2y}{dx^2}\right]=1$ की घात तथा कोटि क्रमशः हैं **[UPSEAT 2003]**

(a) 1, 3 (b) 2, 3
(c) 3, 2 (d) 3, 1

31. परवलय का कुल जिसका अक्ष x–अक्ष है, के अवकल समीकरण की घात तथा कोटि क्रमशः हैं **[AIEEE 2003]**

(a) 2, 1 (b) 1, 2
(c) 3, 2 (d) 2, 3

32. अवकल समीकरण $\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/4}=\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{1/3}$ की घात है **[Karnataka CET 2004]**

(a) $\frac{1}{3}$ (b) 4
(c) 9 (d) $\frac{3}{4}$

33. अवकल समीकरण $x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2+3y+x=0$ के सापेक्ष कोटि और घात क्रमशः हैं **[MP PET 2004]**

(a) 3, 2 (b) 2, 1
(c) 2, 2 (d) 2, 3

34. अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2}-\sqrt{\frac{dy}{dx}-3}=x$ की घात है **[Orissa JEE 2004]**

(a) 2 (b) 1
(c) 1/2 (d) 3

35. x-अक्ष की दिशा के समान्तर सभी परवलयों के अवकल समीकरण की कोटि है **[Orissa JEE 2004]**

(a) 3 (b) 1
(c) 4 (d) 2

36. अवकल समीकरण

$y(x)=1+\frac{dy}{dx}+\frac{1}{1.2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{1}{1.2.3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+...$ की घात है **[Orissa JEE 2005]**

(a) 2 (b) 3
(c) 1 (d) इनमें से कोई नहीं

अवकल समीकरण की संरचना

1. $y=4\sin 3x$ किस अवकल समीकरण का एक हल है **[AI CBSE 1986]**

(a) $\frac{dy}{dx}+8y=0$ (b) $\frac{dy}{dx}-8y=0$

(c) $\frac{d^2y}{dx^2}+9y=0$ (d) $\frac{d^2y}{dx^2}-9y=0$

2. *xy*-समतल में स्थित सभी रेखाओं का अवकल समीकरण हैं

(a) $\frac{dy}{dx}-x=0$ (b) $\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}=0$

(c) $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ (d) $\frac{d^2y}{dx^2}+x=0$

3. समीकरण $x^2+y^2=a^2$ द्वारा निरूपित वक्र निकाय का अवकल समीकरण है

(a) $x+y\frac{dy}{dx}=0$ (b) $y\frac{dy}{dx}=x$

(c) $y\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0$ (d) इनमें से कोई नहीं

4. $y=\frac{x}{x+1}$ किस अवकल समीकरण का एक हल है

(a) $y^2\frac{dy}{dx}=x^2$ (b) $x^2\frac{dy}{dx}=y^2$

(c) $y\frac{dy}{dx}=x$ (d) $x\frac{dy}{dx}=y$

5. किस अवकल समीकरण का हल $y=A\sin x+B\cos x$ है

[CEE 1993; Kerala (Engg.) 2002]

(a) $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$ (b) $\frac{d^2y}{dx^2}-y=0$

(c) $\frac{dy}{dx}+y=0$ (d) इनमें से कोई नहीं

6. वक्र निकाय $y=a\cos(x+b)$ का अवकल समीकरण है

[MP PET 1993]

(a) $\frac{d^2y}{dx^2}-y=0$ (b) $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$

(c) $\frac{d^2y}{dx^2}+2y=0$ (d) इनमें से कोई नहीं

7. उन सभी सरल रेखाओं के लिए जो मूलबिन्दु से इकाई दूरी पर हैं, अवकल समीकरण है **[MP PET 1993]**

(a) $\left(y-x\frac{dy}{dx}\right)^2=1-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

(b) $\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)^2=1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

(c) $\left(y-x\frac{dy}{dx}\right)^2=1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

(d) $\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)^2=1-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

8. यदि $y=ce^{\sin^{-1}x}$ तो इसके सापेक्ष अवकल समीकरण है

(a) $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}$ (b) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(c) $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (d) इनमें से कोई नहीं

9. वक्र निकाय $x^2y=a$ का अवकल समीकरण है

(a) $\frac{dy}{dx}+\frac{2y}{x}=0$ (b) $\frac{dy}{dx}+\frac{2x}{y}=0$

(c) $\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x}=0$ (d) $\frac{dy}{dx}-\frac{2x}{y}=0$

10. पूर्वग् $y=e^{cx}$ के सापेक्ष समीकरण है

अथवा

समीकरण $y=e^{mx}$ से स्वेच्छ अचर m का विलोपन करने पर प्राप्त होने वाला अवकल समीकरण है

[MP PET 1995, 2000; Pb. CET 2000]

(a) $\frac{dy}{dx}=\left(\frac{y}{x}\right)\log x$ (b) $\frac{dy}{dx}=\left(\frac{x}{y}\right)\log y$

(c) $\frac{dy}{dx}=\left(\frac{y}{x}\right)\log y$ (d) $\frac{dy}{dx}=\left(\frac{x}{y}\right)\log x$

11. वह अवकल समीकरण जिसका हल $y=c_1\cos ax+c_2\sin ax$ है, है (जहाँ c_1, c_2 स्वेच्छ नियतांक हैं) **[MP PET 1996]**

(a) $\frac{d^2y}{dx^2}+y^2=0$ (b) $\frac{d^2y}{dx^2}+a^2y=0$

(c) $\frac{d^2y}{dx^2}+ay^2=0$ (d) $\frac{d^2y}{dx^2}-a^2y=0$

12. रेखा $y=mx+c$ के लिए अवकल समीकरण है (जहाँ c स्वेच्छ नियतांक है)

(a) $\frac{dy}{dx}=m$ (b) $\frac{dy}{dx}+m=0$

(c) $\frac{dy}{dx}=0$ (d) इनमें से कोई नहीं

13. बिन्दु $(1,-1)$ से गुजरने वाली सभी सरल रेखाओं का अवकल समीकरण है **[MP PET 1994]**

(a) $y=(x+1)\frac{dy}{dx}+1$

(b) $y=(x+1)\frac{dy}{dx}-1$

(c) $y=(x-1)\frac{dy}{dx}+1$

(d) $y=(x-1)\frac{dy}{dx}-1$

14. वक्रों के कुल $y^2=4a(x+a)$ का अवकल समीकरण होगा, जहाँ a स्वेच्छ नियतांक है

(a) $y\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]=2x\frac{dy}{dx}$ (b) $y\left[1-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]=2x\frac{dy}{dx}$

(c) $\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}=0$ (d) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+3\frac{dy}{dx}+y=0$

15. वक्रों के कुल $v=\left(\frac{A}{r}\right)+B$ का अवकल समीकरण होगा, जहाँ A व B स्वेच्छ नियतांक हैं

(a) $\frac{d^2v}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dv}{dr}=0$ (b) $\frac{d^2v}{dr^2}-\frac{2}{r}\frac{dv}{dr}=0$

(c) $\frac{d^2v}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dv}{dr}=0$ (d) इनमें से कोई नहीं

16. सभी वृत्तों के अवकल समीकरण जो मूलबिन्दु से गुजरते हैं तथा जिनके केन्द्र y-अक्ष पर हैं, होगा [MNR 1986; DCE 2000]

(a) $(x^2-y^2)\frac{dy}{dx}-2xy=0$ (b) $(x^2-y^2)\frac{dy}{dx}+2xy=0$

(c) $(x^2-y^2)\frac{dy}{dx}-xy=0$ (d) $(x^2-y^2)\frac{dy}{dx}+xy=0$

17. $2\pi/n$ आवर्तनांक की सरल आवर्ती गति के विस्थापन का अवकल समीकरण है

(a) $\frac{d^2x}{dt^2}+nx=0$ (b) $\frac{d^2x}{dt^2}+n^2x=0$

(c) $\frac{d^2x}{dt^2}-n^2x=0$ (d) $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{1}{n^2}x=0$

18. y-अक्ष के समान्तर अक्ष वाले सभी परवलयों का अवकल समीकरण होगा

(a) $\frac{d^3y}{dx^3}=0$ (b) $\frac{d^2x}{dy^2}=c$

(c) $\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{d^2x}{dy^2}=0$ (d) $\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}=c$

19. समीकरण $y=(x+K)e^{-x}$ से स्वेच्छ अचर K का विलोपन करने पर प्राप्त होने वाला अवकल समीकरण है

(a) $\frac{dy}{dx}-y=e^{-x}$ (b) $\frac{dy}{dx}-ye^x=1$

(c) $\frac{dy}{dx}+ye^x=1$ (d) $\frac{dy}{dx}+y=e^{-x}$

20. अवकल समीकरण जिसका हल $y=cx+c-c^3$ है, है [MP PET 1997]

(a) $\frac{dy}{dx}=c$ (b) $y=x\frac{dy}{dx}+\frac{dy}{dx}-\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$

(c) $\frac{dy}{dx}=c-3c^2$ (d) इनमें से कोई नहीं

21. वक्र समूह $y=e^x(A\cos x+B\sin x)$ निम्न अवकल समीकरण निरूपित करता है [MP PET 1999]

(a) $\frac{d^2y}{dx^2}=2\frac{dy}{dx}-y$ (b) $\frac{d^2y}{dx^2}=2\frac{dy}{dx}-2y$

(c) $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy}{dx}-2y$ (d) $\frac{d^2y}{dx^2}=2\frac{dy}{dx}+y$

22. $y=A+Bx+Ce^{-x}$ से स्वेच्छ अचरों A, B तथा C को विलोपित करने पर प्राप्त होने वाला अवकल समीकरण है [AMU 1999]

(a) $y'''-y'=0$ (b) $y'''-y''+y'=0$

(c) $y'''+y''=0$ (d) $y'''+y''-y'=0$

23. समीकरण $y=A\cos\omega t+B\sin\omega t$ से A तथा B को विलोपित करने पर प्राप्त होने वाला अवकल समीकरण है [Karnataka CET 2000; Pb. CET 2001]

(a) $y''=-\omega^2y$ (b) $y''+y=0$

(c) $y''+y'=0$ (d) $y''-\omega^2y=0$

24. यदि $y=ax^{n+1}+bx^{-n}$, तब $x^2\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान है [RPET 2001]

(a) $n(n-1)y$ (b) $n(n+1)y$

(c) ny (d) n^2y

25. मूलबिन्दु से गुजरने वाली सभी सरल रेखाओं का अवकल समीकरण है [DCE 2002; Kerala (Engg.) 2002; UPSEAT 2004]

(a) $y=\sqrt{x\frac{dy}{dx}}$ (b) $\frac{dy}{dx}=y+x$

(c) $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$ (d) इनमें से कोई नहीं

26. समीकरण $y=ae^{mx}+be^{-mx}$, निम्न में से किस अवकल समीकरण को संतुष्ट करता है [Karnataka CET 2002]

(a) $\frac{dy}{dx}-my=0$ (b) $\frac{dy}{dx}+my=0$

(c) $\frac{d^2y}{dx^2}+m^2y=0$ (d) $\frac{d^2y}{dx^2}-m^2y=0$

27. यदि $x^2+y^2=1$, तब $\left(y'=\frac{dy}{dx}, y''=\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ [IIT Screening 2000]

(a) $yy''-2(y')^2+1=0$ (b) $yy''+(y')^2+1=0$

(c) $yy''-(y')^2-1=0$ (d) $yy''+2(y')^2+1=0$

28. समीकरण $y=\sec(\tan^{-1}x)$ से प्राप्त अवकल समीकरण हैं [UPSEAT 2002]

(a) $(1+x^2)\frac{dy}{dx}=y+x$ (b) $(1+x^2)\frac{dy}{dx}=y-x$

(c) $(1+x^2)\frac{dy}{dx}=xy$ (d) $(1+x^2)\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}$

29. वक्र निकाय $y=ax\cos\left(\frac{1}{x}+b\right)$, जहाँ a, b तथा c प्राचल हैं, का अवकल समीकरण है [MP PET 2003]

(a) $x^2y_2+y=0$ (b) $x^4y_2+y=0$

(c) $xy_2-y=0$ (d) $x^4y_2-y=0$

30. वह अवकल समीकरण, जिसके लिए $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y=c$ है, है [Karnataka CET 2003]

(a) $\sqrt{1-x^2}\,dx+\sqrt{1-y^2}\,dy=0$

(b) $\sqrt{1-x^2}\,dy+\sqrt{1-y^2}\,dx=0$

(c) $\sqrt{1-x^2}\,dy-\sqrt{1-y^2}\,dx=0$

(d) $\sqrt{1-x^2}\,dx-\sqrt{1-y^2}\,dy=0$

31. यदि $x=\sin t$, $y=\cos pt$, तब [Karnataka CET 2005]

(a) $(1-x^2)y_2+xy_1+p^2y=0$

(b) $(1-x^2)y_2+xy_1-p^2y=0$

(c) $(1+x^2)y_2-xy_1+p^2y=0$

(d) $(1-x^2)y_2-xy_1+p^2y=0$

चर पृथक्करण प्रकार के अवकल समीकरण

1. अवकल समीकरण $3e^x \tan y dx + (1-e^x)\sec^2 y dy = 0$ का हल है [MP PET 1993; AISSE 1985]

(a) $\tan y = c(1-e^x)^3$ (b) $(1-e^x)^3 \tan y = c$

(c) $\tan y = c(1-e^x)$ (d) $(1-e^x)\tan y = c$

2. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$ का हल है [SCRA 1986]

(a) $1+xy+c(y+x)=0$

(b) $x+y=c(1-xy)$

(c) $y-x=c(1+xy)$

(d) $1+xy=c(x+y)$

3. अवकल समीकरण $x\cos y dy = (xe^x \log x + e^x)dx$ का हल है [DSSE 1988]

(a) $\sin y = \frac{1}{x}e^x + c$

(b) $\sin y + e^x \log x + c = 0$

(c) $\sin y = e^x \log x + c$

(d) इनमें से कोई नहीं

4. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = e^{x-y} + x^2 e^{-y}$ का हल है [MP PET 2004]

(a) $e^y = e^x + \frac{x^3}{3} + c$ (b) $e^y = e^x + 2x + c$

(c) $e^y = e^x + x^3 + c$ (d) $y = e^x + c$

5. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + \frac{1+x^2}{x} = 0$ का हल है

(a) $y = -\frac{1}{2}\tan^{-1} x + c$ (b) $y + \log x + \frac{x^2}{2} + c = 0$

(c) $y = \frac{1}{2}\tan^{-1} x + c$ (d) $y - \log x - \frac{x^2}{2} = c$

6. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \sec x(\sec x + \tan x)$ का हल है

(a) $y = \sec x + \tan x + c$ (b) $y = \sec x + \cot x + c$

(c) $y = \sec x - \tan x + c$ (d) इनमें से कोई नहीं

7. अवकल समीकरण $(1+x^2)\frac{dy}{dx} = x$ का हल है

(a) $y = \tan^{-1} x + c$

(b) $y = -\tan^{-1} x + c$

(c) $y = \frac{1}{2}\log_e(1+x^2) + c$

(d) $y = -\frac{1}{2}\log_e(1+x^2) + c$

8. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = e^x + \cos x + x + \tan x$ का हल है

(a) $y = e^x + \sin x + \frac{x^2}{2} + \log\cos x + c$

(b) $y = e^x + \sin x + \frac{x^2}{2} + \log\sec x + c$

(c) $y = e^x - \sin x + \frac{x^2}{2} + \log\cos x + c$

(d) $y = e^x - \sin x + \frac{x^2}{2} + \log\sec x + c$

9. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + \sin^2 y = 0$ का हल है [MP PET 1994]

(a) $y + 2\cos y = c$ (b) $y - 2\sin y = c$

(c) $x = \cot y + c$ (d) $y = \cot x + c$

10. अवकल समीकरण $(\sin x + \cos x)dy + (\cos x - \sin x)dx = 0$ का हल है

(a) $e^x(\sin x + \cos x) + c = 0$ (b) $e^y(\sin x + \cos x) = c$

(c) $e^y(\cos x - \sin x) = c$ (d) $e^x(\sin x - \cos x) = c$

11. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = (1+x)(1+y^2)$ का हल है

(a) $y = \tan(x^2 + x + c)$ (b) $y = \tan(2x^2 + x + c)$

(c) $y = \tan(x^2 - x + c)$ (d) $y = \tan\left(\frac{x^2}{2} + x + c\right)$

12. $\frac{dy}{dx} = e^x(\sin x + \cos x)$ का हल है

(a) $y = e^x(\sin x - \cos x) + c$ (b) $y = e^x(\cos x - \sin x) + c$

(c) $y = e^x \sin x + c$ (d) $y = e^x \cos x + c$

13. $x^2 \frac{dy}{dx} = 2$ का व्यापक हल है [AISSE 1984]

(a) $y = c + \frac{2}{x}$ (b) $y = c - \frac{2}{x}$

(c) $y = 2cx$ (d) $y = c - \frac{3}{x^2}$

14. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = x\log x$ का हल है [MP PET 2003]

(a) $y = x^2\log x - \frac{x^2}{2} + c$ (b) $y = \frac{x^2}{2}\log x - x^2 + c$

(c) $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2\log x + c$ (d) इनमें से कोई नहीं

15. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = 1 + x + y + xy$ का हल है [AISSE 1985; AI CBSE 1990; MP PET 2003]

(a) $\log(1+y) = x + \frac{x^2}{2} + c$

(b) $(1+y)^2 = x + \frac{x^2}{2} + c$

(c) $\log(1+y) = \log(1+x) + c$

(d) इनमें से कोई नहीं

16. अवकल समीकरण $(x^2 - yx^2)\frac{dy}{dx} + y^2 + xy^2 = 0$ का हल है

[Pb. CET 2003]

(a) $\log\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+c$ (b) $\log\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+c$

(c) $\log(xy)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+c$ (d) $\log(xy)+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=c$

17. अवकल समीकरण $x\sec y\frac{dy}{dx}=1$ का हल है

(a) $x\sec y\tan y=c$ (b) $cx=\sec y+\tan y$

(c) $cy=\sec x\tan x$ (d) $cy=\sec x+\tan x$

18. अवकल समीकरण $x\frac{dy}{dx}+y=y^2$ का हल है

(a) $y=1+cxy$ (b) $y=\log\{cxy\}$

(c) $y+1=cxy$ (d) $y=c+xy$

19. यदि $\frac{dy}{dx}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0$, तो [MNR 1983]

(a) $y+\sin^{-1}x=c$ (b) $y^2+2\sin^{-1}x+c=0$

(c) $x+\sin^{-1}y=0$ (d) $x^2+2\sin^{-1}y=1$

20. यदि $\frac{dy}{dx}=\frac{xy+y}{xy+x}$, तो अवकल समीकरण का हल है [SCRA 1980]

(a) $y=xe^x+c$ (b) $y=e^x+c$

(c) $y=Axe^{x-y}$ (d) $y=x+A$

21. समीकरण $(e^y+1)\cos x dx+e^y\sin x dy=0$ का व्यापक हल है [SCRA 1986]

(a) $(e^y+1)\cos x=c$ (b) $(e^y-1)\sin x=c$

(c) $(e^y+1)\sin x=c$ (d) इनमें से कोई नहीं

22. अवकल समीकरण $x^2dy=-2xydx$ का व्यापक हल है [SCRA 1990]

(a) $xy^2=c$ (b) $x^2y^2=c$

(c) $x^2y=c$ (d) $xy=c$

23. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}=(ae^{bx}+c\cos mx)$ का व्यापक हल है

(a) $y=\frac{ae^x}{b}+\frac{c}{m}\sin mx+k$ (b) $y=ae^x+c\sin mx+k$

(c) $y=\frac{ae^{bx}}{b}+\frac{c}{m}\sin mx+k$ (d) इनमें से कोई नहीं

24. अवकल समीकरण $(1+\cos x)dy=(1-\cos x)dx$ का हल है

(a) $y=2\tan\frac{x}{2}-x+c$ (b) $y=2\tan x+x+c$

(c) $y=2\tan\frac{x}{2}+x+c$ (d) $y=x-2\tan\frac{x}{2}+c$

25. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}=\frac{(1+x)y}{(y-1)x}$ का हल है [AISSE 1986; AI CBSE 1982; MP PET 2004]

(a) $\log xy+x+y=c$

(b) $\log\left(\frac{x}{y}\right)+x-y=c$

(c) $\log xy+x-y=c$

(d) इनमें से कोई नहीं

26. समीकरण $\sin^{-1}\left(\frac{dy}{dx}\right)=x+y$ का व्यापक हल है

(a) $\tan(x+y)+\sec(x+y)=x+c$

(b) $\tan(x+y)-\sec(x+y)=x+c$

(c) $\tan(x+y)+\sec(x+y)+x+c=0$

(d) इनमें से कोई नहीं

27. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}=x^2+\sin 3x$ का हल है [DSSE 1981]

(a) $y=\frac{x^3}{3}+\frac{\cos 3x}{3}+c$ (b) $y=\frac{x^3}{3}-\frac{\cos 3x}{3}+c$

(c) $y=\frac{x^3}{3}+\sin 3x+c$ (d) इनमें से कोई नहीं

28. समीकरण $(1+x^2)\frac{dy}{dx}=1$ का हल है

(a) $y=\log(1+x^2)+c$ (b) $y+\log(1+x^2)+c=0$

(c) $y-\log(1+x)=c$ (d) $y=\tan^{-1}x+c$

29. समीकरण $\frac{dy}{dx}=y(e^x+1)$ का हल है [AISSE 1986; AI CBSE 1984]

(a) $y+e^{(e^x+x+c)}=0$ (b) $\log y=e^x+x+c$

(c) $\log y+e^x=x+c$ (d) इनमें से कोई नहीं

30. समीकरण $\frac{dy}{dx}+\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}=0$ का हल है [Orissa JEE 2003]

(a) $x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}=c$

(b) $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=c$

(c) $x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}=c$

(d) इनमें से कोई नहीं

31. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}+\frac{1+\cos 2y}{1-\cos 2x}=0$ का हल है [AISSE 1982; Karnataka CET 2004]

(a) $\tan y+\cot x=c$ (b) $\tan y\cot x=c$

(c) $\tan y-\cot x=c$ (d) इनमें से कोई नहीं

32. अवकल समीकरण $(1+x^2)\frac{dy}{dx}=x(1+y^2)$ का हल है [AISSE 1983]

(a) $2\tan^{-1}y=\log(1+x^2)+c$

(b) $\tan^{-1}y=\log(1+x^2)+c$

(c) $2\tan^{-1}y+\log(1+x^2)+c=0$

(d) इनमें से कोई नहीं

33. समीकरण $(e^x+1)ydy=(y+1)e^xdx$ का हल है [AISSE 1988]

(a) $c(y+1)(e^x+1)+e^y=0$ (b) $c(y+1)(e^x-1)+e^y=0$

(c) $c(y+1)(e^x-1)-e^y=0$ (d) $c(y+1)(e^x+1)=e^y$

34. समीकरण $(1-x^2)dy+xydx=xy^2dx$ का हल है [DSSE 1989]

(a) $(y-1)^2(1-x^2)=0$

(b) $(y-1)^2(1-x^2)=c^2y^2$

(c) $(y-1)^2(1+x^2)=c^2y^2$

(d) इनमें से कोई नहीं

35. समीकरण $\sqrt{a+x}\,\frac{dy}{dx}+x=0$ का हल है [DSSE 1988]

(a) $3y+2\sqrt{a+x}.(x-2a)=3c$

(b) $3y+2\sqrt{x+a}.(x+2a)=3c$

(c) $3y+\sqrt{x+a}.(x+2a)=3c$

(d) इनमें से कोई नहीं

36. समीकरण $\cos x\cos y\frac{dy}{dx}=-\sin x\sin y$ का हल है [DSSE 1987]

(a) $\sin y+\cos x=c$ (b) $\sin y-\cos x=c$

(c) $\sin y.\cos x=c$ (d) $\sin y=c\cos x$

37. अवकल समीकरण $x(e^{2y}-1)dy+(x^2-1)e^y dx=0$ का हल है [AISSE 1990]

(a) $e^y+e^{-y}=\log x-\frac{x^2}{2}+c$

(b) $e^y-e^{-y}=\log x-\frac{x^2}{2}+c$

(c) $e^y+e^{-y}=\log x+\frac{x^2}{2}+c$

(d) इनमें से कोई नहीं

38. $\frac{dy}{dx}=\sin(x+y)+\cos(x+y)$ का हल है

(a) $\log\left[1+\tan\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]+c=0$

(b) $\log\left[1+\tan\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]=x+c$

(c) $\log\left[1-\tan\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]=x+c$

(d) इनमें से कोई नहीं

39. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}=\frac{x-y+3}{2(x-y)+5}$ का हल है

(a) $2(x-y)+\log(x-y)=x+c$

(b) $2(x-y)-\log(x-y+2)=x+c$

(c) $2(x-y)+\log(x-y+2)=x+c$

(d) इनमें से कोई नहीं

40. समीकरण $(1-x^2)(1-y)dx=xy(1+y)dy$ का हल है

(a) $\log[x(1-y)^2]=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}-2y+c$

(b) $\log[x(1-y)^2]=\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}+2y+c$

(c) $\log[x(1+y)^2]=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+2y+c$

(d) $\log[x(1-y)^2]=\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}-2y+c$

41. समीकरण $(x-y^2x)dx=(y-x^2y)dy$ का हल है [DSSE 1984]

(a) $(1-y^2)=c^2(1-x^2)$ (b) $(1+y^2)=c^2(1-x^2)$

(c) $(1+y^2)=c^2(1+x^2)$ (d) इनमें से कोई नहीं

42. $(\text{cosec}\,x\log y)dy+(x^2y)dx=0$ का हल है [AISSE 1986]

(a) $\frac{\log y}{2}+(2-x^2)\cos x+2\sin x=c$

(b) $\left(\frac{\log y}{2}\right)^2+(2-x^2)\cos x+2x\sin x=c$

(c) $\frac{(\log y)^2}{2}+(2-x^2)\cos x+2x\sin x=c$

(d) इनमें से कोई नहीं

43. $\frac{dy}{dx}=\frac{e^x(\sin^2x+\sin 2x)}{y(2\log y+1)}$ का हल है [AISSE 1990]

(a) $y^2(\log y)-e^x\sin^2x+c=0$

(b) $y^2(\log y)-e^x\cos^2x+c=0$

(c) $y^2(\log y)+e^x\cos^2x+c=0$

(d) इनमें से कोई नहीं

44. अवकल समीकरण $xy\frac{dy}{dx}=\frac{(1+y^2)(1+x+x^2)}{(1+x^2)}$ का हल है [AISSE 1983]

(a) $\frac{1}{2}\log(1+y^2)=\log x-\tan^{-1}x+c$

(b) $\frac{1}{2}\log(1+y^2)=\log x+\tan^{-1}x+c$

(c) $\log(1+y^2)=\log x-\tan^{-1}x+c$

(d) $\log(1+y^2)=\log x+\tan^{-1}x+c$

45. $(x\sqrt{1+y^2})dx+(y\sqrt{1+x^2})dy=0$ का हल है

(a) $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=c$

(b) $\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+y^2}=c$

(c) $(1+x^2)^{3/2}+(1+y^2)^{3/2}=c$

(d) इनमें से कोई नहीं

46. $e^{2x-3y}dx+e^{2y-3x}dy=0$ का हल है

(a) $e^{5x}+e^{5y}=c$ (b) $e^{5x}-e^{5y}=c$

(c) $e^{5x+5y}=c$ (d) इनमें से कोई नहीं

47. समीकरण $(1+x^2)(1+y)dy+(1+x)(1+y^2)dx=0$ का हल है [DSSE 1986]

(a) $\tan^{-1}x+\log(1+x^2)+\tan^{-1}y+\log(1+y^2)=c$

(b) $\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\log(1+x^2)+\tan^{-1}y-\frac{1}{2}\log(1+y^2)=c$

(c) $\tan^{-1}x+\frac{1}{2}\log(1+x^2)+\tan^{-1}y+\frac{1}{2}\log(1+y^2)=c$

(d) इनमें से कोई नहीं

48. समीकरण $\frac{dy}{dx}=(x+y)^2$ का हल है

(a) $x+y+\tan(x+c)=0$ (b) $x-y+\tan(x+c)=0$

(c) $x+y-\tan(x+c)=0$ (d) इनमें से कोई नहीं

49. अवकल समीकरण $\cos y\log(\sec x+\tan x)dx=\cos x\log(\sec y+\tan y)dy$ का हल है [AI CBSE 1990]

(a) $\sec^2 x+\sec^2 y=c$ (b) $\sec x+\sec y=c$

(c) $\sec x-\sec y=c$ (d) इनमें से कोई नहीं

50. $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$ का हल है

(a) $y+\log x+c=0$ (b) $y=\log x+c$

(c) $y^{\log x}+c=0$ (d) इनमें से कोई नहीं

51. अवकल समीकरण $\log\left(\frac{dy}{dx}\right)=x+y$ का व्यापक हल है [MP PET 1994; 1995; DSSE 1984]

(a) $e^x+e^y=c$ (b) $e^x+e^{-y}=c$

(c) $e^{-x}+e^y=c$ (d) $e^{-x}+e^{-y}=c$

52. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}=\cot x\cot y$ का व्यापक हल है [AISSE 1983; MP PET 1994]

(a) $\cos x=c\,\text{cosec}\,y$ (b) $\sin x=c\sec y$

(c) $\sin x=c\cos y$ (d) $\cos x=c\sin y$

53. समीकरण $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-y-2}{x^2+2x-3}$ का हल है

(a) $\frac{1}{3}\log\left|\frac{y-2}{y+1}\right|=\frac{1}{4}\log\left|\frac{x+3}{x-1}\right|+c$

(b) $\frac{1}{3}\log\left|\frac{y+1}{y-2}\right|=\frac{1}{4}\log\left|\frac{x-1}{x+3}\right|+c$

(c) $4\log\left|\frac{y-2}{y+1}\right|=3\log\left|\frac{x-1}{x+3}\right|+c$

(d) इनमें से कोई नहीं

54. अवकल समीकरण $ydx+(1+x^2)\tan^{-1}xdy=0$ का व्यापक हल है [MP PET 1995]

(a) $y\tan^{-1}x=c$

(b) $x\tan^{-1}y=c$

(c) $y+\tan^{-1}x=c$

(d) $x+\tan^{-1}y=c$

55. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{y^2}$ का हल है

(a) $x^3-y^3=c$ (b) $x^3+y^3=c$

(c) $x^2+y^2=c$ (d) $x^2-y^2=c$

56. यदि $\frac{dy}{dx}=e^{-2y}$ व $y=0$ जब $x=5$, तो $y=3$ के लिए x का मान होगा [MP PET 2001]

(a) e^5 (b) e^6+1

(c) $\frac{e^6+9}{2}$ (d) $\log_e 6$

57. अवकल समीकरण $dy-\sin x\sin y dx=0$ का हल है [MP PET 1996]

(a) $e^{\cos x}\tan\frac{y}{2}=c$ (b) $e^{\cos x}\tan y=c$

(c) $\cos x\tan y=c$ (d) $\cos x\sin y=c$

58. अवकल समीकरण $e^y\frac{dy}{dx}+(e^y+1)\cot x=0$ का व्यापक हल है

(a) $(e^y+1)\cos x=K$ (b) $(e^y+1)\text{cosec}\,x=K$

(c) $(e^y+1)\sin x=K$ (d) इनमें से कोई नहीं

59. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}=\sin x+2x$ का हल है [MP PET 1997]

(a) $y=x^2-\cos x+c$ (b) $y=\cos x+x^2+c$

(c) $y=\cos x+2$ (d) $y=\cos x+2+c$

60. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}=2xy$ का हल है [MP PET 1997]

(a) $y=ce^{x^2}$ (b) $y^2=2x^2+c$

(c) $y=e^{-x^2}+c$ (d) $y=x^2+c$

61. $ydx-xdy=x^2ydx$ का हल है [MP PET 1999]

(a) $ye^{x^2}=cx^2$ (b) $ye^{-x^2}=cx^2$

(c) $y^2e^{x^2}=cx^2$ (d) $y^2e^{-x^2}=cx^2$

62. $\frac{dy}{dx}=(4x+y+1)$ को हल करने के लिए निम्न में कौन सा प्रतिस्थापन उचित है [MP PET 1999]

(a) $y=vx$ (b) $y=4x+v$

(c) $y=4x$ (d) $y+4x+1=v$

63. $(x+y-1)dx+(2x+2y-3)dy=0$ का हल है [MP PET 1999]

(a) $y+x+\log(x+y-2)=c$

(b) $y+2x+\log(x+y-2)=c$

(c) $2y+x+\log(x+y-2)=c$

(d) $2y+2x+\log(x+y-2)=c$

64. अवकल समीकरण $\sin\frac{dy}{dx}=a$ का $y(0)=1$ के साथ हल होगा [Kurukshetra CEE 1998]

(a) $\sin^{-1}\frac{(y-1)}{x}=a$ (b) $\sin\frac{(y-1)}{x}=a$

(c) $\sin\frac{(1-y)}{(1+x)}=a$ (d) $\sin\frac{y}{(x+1)}=a$

65. अवकल समीकरण $\cos(x+y)dy=dx$ का हल है [DCE 1999]

(a) $y=\tan\left(\frac{x+y}{2}\right)+c$ (b) $y+\cos^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)=c$

(c) $y = x\sec\left(\frac{y}{x}\right)+c$ (d) इनमें से कोई नहीं

66. $\frac{dy}{dx}+\sqrt{\left(\frac{1-y^2}{1-x^2}\right)}=0$ का हल है [DCE 1999]

(a) $\tan^{-1}x+\cot^{-1}x=c$ (b) $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y=c$

(c) $\sec^{-1}x+\text{cosec}^{-1}x=c$ (d) इनमें से कोई नहीं

67. $\frac{dy}{dx}=2^{y-x}$ का हल है [Karnataka CET 2000]

(a) $2^x+2^y=c$ (b) $2^x-2^y=c$

(c) $\frac{1}{2^x}-\frac{1}{2^y}=c$ (d) $x+y=c$

68. $y'-y=1, y(0)=-1$ का हल $y(x)$ हो, तो [MP PET 2000]

(a) $-\exp(x)$ (b) $-\exp(-x)$

(c) -1 (d) $\exp(x)-2$

69. समीकरण $y'=\frac{y+1}{x-1}, y(1)=2$ के हलों की संख्या है [MP PET 2000]

(a) कोई नहीं (b) एक

(c) दो (d) अनन्त

70. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}+\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)=\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$ का व्यापक हल है [MP PET 2001]

(a) $\log\tan\left(\frac{y}{2}\right)=c-2\sin x$

(b) $\log\tan\left(\frac{y}{4}\right)=c-2\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

(c) $\log\tan\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=c-2\sin x$

(d) $\log\tan\left(\frac{y}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=c-2\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

71. अवकल समीकरण $(x+y)^2\frac{dy}{dx}=a^2$ का हल है [AMU 2001]

(a) $(x+y)^2=\frac{a^2}{2}x+c$ (b) $(x+y)^2=a^2x+c$

(c) $(x+y)^2=2a^2x+c$ (d) इनमें से कोई नहीं

72. अवकल समीकरण $\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}=0$ का हल है [Karnataka CET 2002]

(a) $xy=c$ (b) $x+y=c$

(c) $\log x\log y=c$ (d) $x^2+y^2=c$

73. अवकल समीकरण $y-x\frac{dy}{dx}=a\left(y^2+\frac{dy}{dx}\right)$ का हल है [MP PET 2002]

(a) $(x+a)(x+ay)=cy$ (b) $(x+a)(1-ay)=cy$

(c) $(x+a)(1-ay)=c$ (d) इनमें से कोई नहीं

74. $\log\left(\frac{dy}{dx}\right)=ax+by$ का हल है [AMU 2002]

(a) $\frac{e^{by}}{b}=\frac{e^{ax}}{a}+c$ (b) $\frac{e^{-by}}{-b}=\frac{e^{ax}}{a}+c$

(c) $\frac{e^{-by}}{a}=\frac{e^{ax}}{b}+c$ (d) इनमें से कोई नहीं

75. $\frac{dy}{dx}=\left(\frac{y}{x}\right)^{1/3}$ का हल है [EAMCET 2002]

(a) $x^{2/3}+y^{2/3}=c$ (b) $x^{1/3}+y^{1/3}=c$

(c) $y^{2/3}-x^{2/3}=c$ (d) $y^{1/3}-x^{1/3}=c$

76. समीकरण $(2y-1)\,dx-(2x+3)\,dy=0$ का हल है [Kerala (Engg.) 2002]

(a) $\frac{2x-1}{2y+3}=c$ (b) $\frac{2y+1}{2x-3}=c$

(c) $\frac{2x+3}{2y-1}=c$ (d) $\frac{2x-1}{2y-1}=c$

77. अवकल समीकरण $\cot y\,dx=x\,dy$ का हल है [Orissa JEE 2002]

(a) $y=\cos x$ (b) $x=c\sec y$

(c) $x=\sin y$ (d) $y=\sin x$

78. $\frac{dy}{dx}=\frac{x\log x^2+x}{\sin y+y\cos y}$ का हल है [EAMCET 2003]

(a) $y\sin y=x^2\log x+c$ (b) $y\sin y=x^2+c$

(c) $y\sin y=x^2+\log x+c$ (d) $y\sin y=x\log x+c$

79. यदि $\left(\frac{2+\sin x}{1+y}\right)\frac{dy}{dx}=-\cos x, y(0)=1,$ तब $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=$ [IIT Screening 2004]

(a) 1 (b) $\frac{1}{2}$

(c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{1}{4}$

80. $e^{dy/dx}=(x+1),\ y(0)=3$ का हल है [Kerala (Engg.) 2005]

(a) $y=x\log x-x+2$

(b) $y=(x+1)\log|x+1|-x+3$

(c) $y=(x+1)\log|x+1|+x+3$

(d) $y=x\log x+x+3$

(e) $y=-(x+1)\log|x+1|+x+3$

81. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}\tan y=\sin(x+y)+\sin(x-y)$ का हल है [Kerala (Engg.) 2005]

(a) $\sec y+2\cos x=c$ (b) $\sec y-2\cos x=c$

(c) $\cos y-2\sin x=c$ (d) $\tan y-2\sec y=c$

(e) $\sec y+2\sin x=c$

समघातीय अवकल समीकरण

1. अवकल समीकरण $x^2 \frac{dy}{dx} = x^2 + xy + y^2$ का हल है

(a) $\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \log x + c$ (b) $\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = -\log x + c$

(c) $\sin^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \log x + c$ (d) $\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) = \log x + c$

2. अवकल समीकरण $2xy \frac{dy}{dx} = x^2 + 3y^2$ का हल है [MP PET 1993]

(a) $x^3 + y^2 = px^2$ (b) $\frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{x} = y^2 + p$

(c) $x^2 + y^3 = px^2$ (d) $x^2 + y^2 = px^3$

(जहाँ p स्वेच्छ अचर है)

3. अवकल समीकरण $(x^2 + y^2)dx = 2xydy$ का हल है [MP PET 2003; Orissa JEE 2005]

(a) $x = c(x^2 + y^2)$ (b) $x = c(x^2 - y^2)$

(c) $x + c(x^2 - y^2) = 0$ (d) इनमें से कोई नहीं

4. समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$ का हल है [AI CBSE 1990]

(a) $c(x^2 + y^2)^{1/2} + e^{\tan^{-1}(y/x)} = 0$

(b) $c(x^2 + y^2)^{1/2} = e^{\tan^{-1}(y/x)}$

(c) $c(x^2 - y^2) = e^{\tan^{-1}(y/x)}$

(d) इनमें से कोई नहीं

5. अवकल समीकरण $(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0$ का हल है [AISSE 1990]

(a) $x^2(2xy + y^2) = c^2$ (b) $x^2(2xy - y^2) = c^2$

(c) $x^2(y^2 - 2xy) = c^2$ (d) इनमें से कोई नहीं

6. समीकरण $x\,dy - y\,dx = (\sqrt{x^2 + y^2})dx$ का हल है

(a) $y - \sqrt{x^2 + y^2} = cx^2$ (b) $y + \sqrt{x^2 + y^2} = cx^2$

(c) $y + \sqrt{x^2 + y^2} + cx^2 = 0$ (d) इनमें से कोई नहीं

7. अवकल समीकरण $(x + y)dx + xdy = 0$ का व्यापक हल है [MP PET 1994, 95]

(a) $x^2 + y^2 = c$ (b) $2x^2 - y^2 = c$

(c) $x^2 + 2xy = c$ (d) $y^2 + 2xy = c$

8. अवकल समीकरण $x + y\frac{dy}{dx} = 2y$ का हल है

(a) $\log(y - x) = c + \frac{y - x}{x}$ (b) $\log(y - x) = c + \frac{x}{y - x}$

(c) $y - x = c + \log\frac{x}{y - x}$ (d) $y - x = c + \frac{x}{y - x}$

9. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ का हल है

(a) $ay^2 = e^{x^2/y^2}$ (b) $ay = e^{x/y}$

(c) $y = e^{x^2} + e^{y^2} + c$ (d) $y = e^{x^2} + y^2 + c$

10. समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2y - x}$ का हल है

(a) $(x - y)(x + 2y)^2 = c$ (b) $y = x + c$

(c) $y = (2y - x) + c$ (d) $y = \frac{x}{2y - x} + c$

11. समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\left(\log\frac{y}{x} + 1\right)$ का हल है

(a) $\log\left(\frac{y}{x}\right) = cx$ (b) $\frac{y}{x} = \log y + c$

(c) $y = \log y + 1$ (d) $y = xy + c$

12. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{y - x}{y + x}$ का हल है [MP PET 1997]

(a) $\log_e(x^2 + y^2) + 2\tan^{-1}\frac{y}{x} + c = 0$

(b) $\frac{y^2}{2} + xy = xy - \frac{x^2}{2} + c$

(c) $\left(1 + \frac{x}{y}\right)y = \left(1 - \frac{x}{y}\right)x + c$

(d) $y = x - 2\log_e y + c$

13. यदि $y' = \frac{x - y}{x + y}$, तब इसका हल है [MP PET 2000]

(a) $y^2 + 2xy - x^2 = c$ (b) $y^2 + 2xy + x^2 = c$

(c) $y^2 - 2xy - x^2 = c$ (d) $y^2 - 2xy + x^2 = c$

14. अवकल समीकरण $(2x - y + 1)dx + (2y - x + 1)dy = 0$ का व्यापक हल है [Karnataka CET 2005]

(a) $x^2 + y^2 + xy - x + y = c$

(b) $x^2 + y^2 - xy + x + y = c$

(c) $x^2 - y^2 + 2xy - x + y = c$

(d) $x^2 - y^2 - 2xy + x - y = c$

यथातथ्य (Exact) अवकल समीकरण

1. $y\,dx - xdy + 3x^2y^2e^{x^3}dx = 0$ का हल है

(a) $\frac{x}{y} + e^{x^3} = c$ (b) $\frac{x}{y} - e^{x^3} = 0$

(c) $\frac{-x}{y} + e^{x^3} = 0$ (d) इनमें से कोई नहीं

2. यदि $xdy = y(dx + ydy), y > 0$ और $y(1) = 1$, तब $y(-3) =$ [IIT Screening 2005]

(a) 1 (b) 3

(c) 5 (d) –1

3. $(1 + xy)y\,dx + (1 - xy)x\,dy = 0$ का हल है

(a) $\frac{x}{y}+\frac{1}{xy}=k$ (b) $\log\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{1}{xy}+k$

(c) $\frac{x}{y}=e^{xy}+k$ (d) $\log\left(\frac{x}{y}\right)=xy+k$

4. अवकल समीकरण $y\,dx+(x+x^2y)dy=0$ का हल है **[AIEEE 2004]**

(a) $\log y=cx$ (b) $-\frac{1}{xy}+\log y=c$

(c) $\frac{1}{xy}-\log y=c$ (d) $\frac{1}{xy}+\log y=c$

5. $(xy\cos xy+\sin xy)dx+x^2\cos xy\,dy=0$ का हल है

(a) $x\sin(xy)=k$ (b) $xy\sin(xy)=k$

(c) $\frac{x}{y}\sin(xy)=k$ (d) $x\sin(xy)+xy\cos xy=k$

6. $(x-y^3)dx+3xy^2dy=0$ का हल है

(a) $\log x+\frac{x}{y^3}=k$ (b) $\log x+\frac{y^3}{x}=k$

(c) $\log x-\frac{x}{y^3}=k$ (d) $\log xy-y^3=k$

7. $ye^{-x/y}dx-(xe^{-x/y}+y^3)dy=0$ का हल है

(a) $\frac{y^2}{2}+e^{-x/y}=k$ (b) $\frac{x^2}{2}+e^{-x/y}=k$

(c) $\frac{x^2}{2}+e^{x/y}=k$ (d) $\frac{y^2}{2}+e^{x/y}=k$

8. अवकल समीकरण $x\,dy+y\,dx-\sqrt{1-x^2y^2}dx=0$ का हल है

(a) $\sin^{-1}xy=c-x$ (b) $xy=\sin(x+c)$

(c) $\log(1-x^2y^2)=x+c$ (d) $y=x\sin x+c$

9. अवकल समीकरण $y\,dx-x\,dy+xy^2dx=0$ का हल हो सकता है

(a) $2x+x^2y=\lambda y$ (b) $2y+y^2x=\lambda y$

(c) $2y-y^2x=\lambda y$ (d) इनमें से कोई नहीं

10. यदि c कोई स्वेच्छ नियतांक है तब अवकल समीकरण $ydx-xdy=xy\,dx$ का व्यापक हल हैं **[J & K 2005]**

(a) $y=cxe^x$ (b) $x=cye^{-x}$

(c) $y+e^x=cx$ (d) $ye^x=cx$

11. $(x^2+y^2)dy=xydx$. यदि $y(x_0)=e$, $y(1)=1$, तब x_0 का मान है **[IIT Screening 2005]**

(a) $\sqrt{3}e$ (b) $\sqrt{e^2-\frac{1}{2}}$

(c) $\sqrt{\frac{e^2-1}{2}}$ (d) $\sqrt{\frac{e^2+1}{2}}$

रैखिक अवकल समीकरण

1. निम्न समीकरणों में से कौन सा रैखिक अवकल समीकरण नहीं है

(a) $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=\log x$ (b) $y\frac{dy}{dx}+4x=0$

(c) $dx+dy=0$ (d) $\frac{dy}{dx}=\cos x$

2. निम्न समीकरणों में कौन सा रैखिक अवकल समीकरण है

(a) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2+x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0$ (b) $y=\frac{dy}{dx}+\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

(c) $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=\log x$ (d) $y\frac{dy}{dx}-4=x$

3. समीकरण $\frac{dy}{dx}+y\tan x=x^m\cos x$ का हल है

(a) $(m+1)y=x^{m+1}\cos x+c(m+1)\cos x$

(b) $my=(x^m+c)\cos x$

(c) $y=(x^{m+1}+c)\cos x$

(d) इनमें से कोई नहीं

4. अवकल समीकरण $(1+y^2)dx-(\tan^{-1}y-x)dy=0$ के लिए समाकलन गुणांक (I.F.) है **[MP PET 1993]**

(a) $\tan^{-1}y$ (b) $e^{\tan^{-1}y}$

(c) $\frac{1}{1+y^2}$ (d) $\frac{1}{x(1+y^2)}$

5. मूल बिन्दु से जाने वाले उस वक्र का समीकरण जो समीकरण $(1+x^2)\frac{dy}{dx}+2xy=4x^2$ को संतुष्ट करता है, होगा

(a) $3(1+x^2)y=4x^3$ (b) $3(1-x^2)y=4x^3$

(c) $3(1+x^2)=x^3$ (d) इनमें से कोई नहीं

6. कौन सा समीकरण अरैखिक है

(a) $\frac{dy}{dx}=\cos x$ (b) $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$

(c) $dx+dy=0$ (d) $x\frac{dy}{dx}+\frac{3}{\frac{dy}{dx}}=y^2$

7. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=x^2$ का हल है

(a) $4xy=x^4+c$ (b) $xy=x^4+c$

(c) $\frac{1}{4}xy=x^4+c$ (d) $xy=4x^4+c$

8. अवकल समीकरण $x\frac{dy}{dx}+y=x^2+3x+2$ का हल है

(a) $xy=\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2+2x+c$ (b) $xy=\frac{x^4}{4}+x^3+x^2+c$

(c) $xy=\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+x^2+c$ (d) $xy=\frac{x^4}{4}+x^3+x^2+cx$

9. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}+\frac{3x^2}{1+x^3}y=\frac{\sin^2 x}{1+x^3}$ का हल है

(a) $y(1+x^3)=x+\frac{1}{2}\sin 2x+c$

(b) $y(1+x^3)=cx+\frac{1}{2}\sin 2x$

(c) $y(1+x^3)=cx-\frac{1}{2}\sin 2x$

(d) $y(1+x^3)=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x+c$

10. कौन सा समीकरण रैखिक है

(a) $\frac{dy}{dx}+xy^2=1$ (b) $x^2\frac{dy}{dx}+y=e^x$

(c) $\frac{dy}{dx}+3y=xy^2$ (d) $x\frac{dy}{dx}+y^2=\sin x$

11. समीकरण $x\frac{dy}{dx}+3y=x$ का हल है

(a) $x^3y+\frac{x^4}{4}+c=0$ (b) $x^3y=\frac{x^4}{4}+c$

(c) $x^3y+\frac{x^4}{4}=0$ (d) इनमें से कोई नहीं

12. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}+y=\cos x$ का हल है [AISSE 1990]

(a) $y=\frac{1}{2}(\cos x+\sin x)+ce^{-x}$

(b) $y=\frac{1}{2}(\cos x-\sin x)+ce^{-x}$

(c) $y=\cos x+\sin x+ce^{-x}$

(d) इनमें से कोई नहीं

13. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}+y\cot x=2\cos x$ का हल है

(a) $y\sin x+\cos 2x=2c$ (b) $2y\sin x+\cos x=c$

(c) $y\sin x+\cos x=c$ (d) $2y\sin x+\cos 2x=c$

14. समीकरण $(x+2y^3)\frac{dy}{dx}-y=0$ का हल है [MP PET 1998; 2002]

(a) $y(1-xy)=Ax$ (b) $y^3-x=Ay$

(c) $x(1-xy)=Ay$ (d) $x(1+xy)=Ay$

जहाँ A यादृच्छिक नियतांक है

15. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}=y\tan x-y^2\sec x$ का समाकलन गुणांक है [MP PET 1995; Pb. CET 2002]

(a) $\tan x$

(b) $\sec x$

(c) $-\sec x$

(d) $\cot x$

16. अवकल समीकरण $\cos x\frac{dy}{dx}+y\sin x=1$ का समाकलन गुणांक है [MP PET 1996]

(a) $\cos x$ (b) $\tan x$

(c) $\sec x$ (d) $\sin x$

17. अवकलन समीकरण $\frac{dy}{dx}+ay=e^{mx}$ का हल है [MP PET 1996]

(a) $(a+m)y=e^{mx}+c$

(b) $ye^{ax}=me^{mx}+c$

(c) $y=e^{mx}+ce^{-ax}$

(d) $(a+m)y=e^{mx}+ce^{-ax}(a+m)$

18. अवकल समीकरण $(x\log x)\frac{dy}{dx}+y=2\log x$ का समाकलन गुणांक है

(a) $\log x$ (b) $\log(\log x)$

(c) e^x (d) x

19. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}+y\tan x-\sec x=0$ का समाकलन गुणांक है [MP PET 2002]

(a) $e^{\sin x}$ (b) $\frac{1}{\sin x}$

(c) $\frac{1}{\cos x}$ (d) $e^{\cos x}$

20. अवकल समीकरण $x\log x\frac{dy}{dx}+y=2\log x$ का हल है

(a) $y=\log x+c$ (b) $y=\log x^2+c$

(c) $y\log x=(\log x)^2+c$ (d) $y=x\log x+c$

21. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}+2y\cot x=3x^2\text{cosec}^2 x$ का हल है

(a) $y\sin^2 x=x^3+c$ (b) $y\sin x=c$

(c) $y\cos x^2=c$ (d) $y\sin x^2=c$

22. अवकल समीकरण $x\frac{dy}{dx}=y+x^2$ का हल है [MP PET 1997]

(a) $y=\log_e x+\frac{x^2}{2}+a$ (b) $y=\frac{x^3}{3}+\frac{a}{x}$

(c) $y=x^2+ax$ (d) इनमें से कोई नहीं

23. $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=x^3-3$ का समाकलन गुणांक है [MP PET 1999]

(a) x (b) $\log x$

(c) $-x$ (d) e^x

24. $\cos x\frac{dy}{dx}+y\sin x=1$ का हल है [MP PET 1999]

(a) $y\sec x\tan x=c$ (b) $y\sec x=\tan x+c$

(c) $y\tan x=\sec x+c$ (d) $y\tan x=\sec x\tan x+c$

25. $\frac{dy}{dx}+2y\tan x=\sin x$ का हल है [DCE 1999]

(a) $y\sec^3 x=\sec^2 x+c$

(b) $y\sec^2 x=\sec x+c$

(c) $y\sin x=\tan x+c$

(d) इनमें से कोई नहीं

26. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}+y\sec^2 x=\tan x\sec^2 x$ का हल है [DCE 2001, 05]

(a) $y=\tan x-1+ce^{-\tan x}$
(b) $y^2=\tan x-1+ce^{\tan x}$
(c) $ye^{\tan x}=\tan x-1+c$
(d) $ye^{-\tan x}=\tan x-1+c$

27. अवकल समीकरण $(1-x^2)\frac{dy}{dx}-xy=1$, का समाकलन गुणांक है [MP PET 2001]

(a) $-x$ (b) $-\frac{x}{(1-x^2)}$
(c) $\sqrt{(1-x^2)}$ (d) $\frac{1}{2}\log(1-x^2)$

28. समीकरण $(x^2+1)\frac{dy}{dx}+2xy=x^2-1$ का समाकल गुणांक है [UPSEAT 2002]

(a) x^2+1 (b) $\frac{2x}{x^2+1}$
(c) $\frac{x^2-1}{x^2+1}$ (d) इनमें से कोई नहीं

29. $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{3}=1$ का हल है [EAMCET 2002]

(a) $y=3+ce^{x/3}$ (b) $y=3+ce^{-x/3}$
(c) $3y=c+e^{x/3}$ (d) $3y=c+e^{-x/3}$

30. $y+x^2=\frac{dy}{dx}$ का हल है [EAMCET 2002]

(a) $y+x^2+2x+2=ce^x$ (b) $y+x+x^2+2=ce^{2x}$
(c) $y+x+2x^2+2=ce^x$ (d) $y^2+x+x^2+2=ce^x$

31. $\frac{dy}{dx}+p(x)y=0$ का हल है [Kerala (Engg.) 2002]

(a) $y=ce^{\int p\,dx}$ (b) $x=ce^{-\int p\,dy}$
(c) $y=ce^{-\int p\,dx}$ (d) $x=ce^{\int p\,dy}$

32. $\frac{dy}{dx}+y=e^{-x}$, $y(0)=0$ का हल है [Kerala (Engg.) 2002]

(a) $y=e^{-x}(x-1)$ (b) $y=xe^{x}$
(c) $y=xe^{-x}+1$ (d) $y=xe^{-x}$

33. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ का समाकल गुणांक है [UPSEAT 2004]

(a) $\int P\,dx$ (b) $\int Q\,dx$
(c) $e^{\int P\,dx}$ (d) $e^{\int Q\,dx}$

34. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x).y^n$ को रैखिक रूप में परिवर्तित करने के लिये प्रतिस्थापन है [UPSEAT 2004]

(a) $v=\frac{1}{y^n}$ (b) $v=\frac{1}{y^{n-1}}$
(c) $v=y^n$ (d) $v=y^{n-1}$

35. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}+y=1$ का हल है [Pb. CET 2000]

(a) $y=1+ce^{-x}$ (b) $y=1-ce^{-x}$
(c) $y=x+ce^{-x}$ (d) $y=x-ce^{-x}$

36. $dy=\cos x(2-y\operatorname{cosec}x)dx$, जहाँ $y=2$ जब $x=\frac{\pi}{2}$, का हल है [J & K 2005]

(a) $y=\sin x+\operatorname{cosec} x$
(b) $y=\tan\frac{x}{2}+\cot\frac{x}{2}$
(c) $y=\frac{1}{\sqrt{2}}\sec\frac{x}{2}+\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}$
(d) इनमें से कोई नहीं

37. अवकल समीकरण $x\frac{dy}{dx}+y\log x=xe^x x^{-\frac{1}{2}\log x}$, $(x>0)$ का समाकलन गुणांक है [Kerala (Engg.) 2005]

(a) $x^{\log x}$ (b) $(\sqrt{x})^{\log x}$
(c) $(\sqrt{e})^{\log x}$ (d) e^{x^2}
(e) $x^2/2$

38. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=\sin x$ का हल है [Kerala (Engg.) 2005]

(a) $x(y+\cos x)=\sin x+c$ (b) $x(y-\cos x)=\sin x+c$
(c) $x(y\cdot\cos x)=\sin x+c$ (d) $x(y-\cos x)=\cos x+c$
(e) $x(y+\cos x)=\cos x+c$

39. समीकरण $(x+\log y)dy+y\,dx=0$ का हल है

(a) $xy+y\log y=c$ (b) $xy+y\log y-y=c$
(c) $xy+\log y-x=c$ (d) इनमें से कोई नहीं

अवकल समीकरण के अनुप्रयोग

1. उस वक्र का समीकरण जो बिन्दु (1, 1) से गुजरता है तथा जिसकी प्रवणता $\frac{2y}{x}$ है, है [Roorkee 1987]

(a) $y=x^2$ (b) $x^2-y^2=0$
(c) $2x^2+y^2=3$ (d) इनमें से कोई नहीं

2. उस वक्र का समीकरण जो $(1,2)$ से गुजरता है तथा अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}=\frac{-2xy}{(x^2+1)}$ को सन्तुष्ट करता है, है

(a) $y(x^2+1)=4$ (b) $y(x^2+1)+4=0$
(c) $y(x^2-1)=4$ (d) इनमें से कोई नहीं

3. उस वक्र का समीकरण जो बिन्दु $(1,0)$ से जाता है तथा अवकल समीकरण $(1+y^2)dx-xydy=0$ को सन्तुष्ट करता है, होगा [WB JEE 1986]

(a) $x^2+y^2=1$ (b) $x^2-y^2=1$
(c) $2x^2+y^2=2$ (d) इनमें से कोई नहीं

4. उस वक्र का समीकरण जो बिन्दु (3, 9) से जाता है तथा अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}=x+\frac{1}{x^2}$ को सन्तुष्ट करता है, होगा [WB JEE 1986]

(a) $6xy=3x^2-6x+29$ (b) $6xy=3x^3-29x+6$

(c) $6xy=3x^3+29x-6$ (d) इनमें से कोई नहीं

5. अवकल समीकरण $y\frac{dy}{dx}+x=a$ (a कोई भी नियतांक है) निरूपित करता है

(a) y-अक्ष पर केन्द्र वाला वृत्त निकाय

(b) x- अक्ष पर केन्द्र वाला वृत्त निकाय

(c) दीर्घवृत्त निकाय

(d) इनमें से कोई नहीं

6. बिन्दु $\left(2,\frac{7}{2}\right)$ से जाने वाला एवं बिन्दु (x,y) पर $1-\frac{1}{x^2}$ प्रवणता वाला वक्र होगा

(a) $y=x^2+x+1$ (b) $xy=x^2+x+1$

(c) $xy=x+1$ (d) इनमें से कोई नहीं

7. बिन्दु (1,0) से जाने वाला एवं $\frac{y-1}{x^2+x}$ प्रवणता वाला वक्र होगा

(a) $(y-1)(x+1)+2x=0$ (b) $2x(y-1)+x+1=0$

(c) $x(y-1)(x+1)+2=0$ (d) इनमें से कोई नहीं

8. वक्र के किसी बिन्दु पर प्रवणता उस बिन्दु की कोटि की दुगनी की व्युत्क्रम है एवं यह बिन्दु (4, 3) से गुजरता है, तो वक्र का समीकरण होगा

(a) $x^2=y+5$ (b) $y^2=x-5$

(c) $y^2=x+5$ (d) $x^2=y-5$

9. एक कण सरल रेखा में वेग $\frac{dx}{dt}=x+1$ (x चली दूरी) से गति करता है, तो 99 मीटर दूरी तय करने में लिया गया समय है

(a) $\log_{10}e$ (b) $2\log_e 10$

(c) $2\log_{10}e$ (d) $\frac{1}{2}\log_{10}e$

10. अवकल समीकरण $x\,dy-y\,dx=0$ का हल निरूपित करता है [MP PET 1996]

(a) समकोणीय अतिपरवलय

(b) मूलबिन्दु से जाने वाली सरल रेखा

(c) परवलय जिसका शीर्ष मूलबिन्दु पर है

(d) वृत्त जिसका केन्द्र मूलबिन्दु पर है

11. समाकलन वक्र जो कि $y'=\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}, y(1)=2$ का संतुष्ट करता है। इस वक्र की बिन्दु (1, 0) पर प्रवणता है [MP PET 2000]

(a) – 5/3 (b) – 1

(c) 1 (d) 5/3

12. एक कण मूलबिन्दु से चलना प्रारम्भ करता है और x–अक्ष के अनुदिश इस प्रकार गति करता है कि बिन्दु $(x, 0)$ पर कण का वेग सूत्र $\frac{dx}{dt}=\cos^2\pi x$ द्वारा दिया जाता है, तब कण निम्न में से किस बिन्दु पर कभी नहीं पहुँचेगा [AMU 2000]

(a) $x=\frac{1}{4}$ पर (b) $x=\frac{3}{4}$ पर

(c) $x=\frac{1}{2}$ पर (d) $x=1$ पर

13. यदि बिन्दु (2, 1) से गुजरने वाले वक्र के बिन्दु (x, y) पर स्पर्शी का ढाल $\frac{x^2+y^2}{2xy}$ है, तब वक्र का समीकरण है [MP PET 2002]

(a) $2(x^2-y^2)=3x$ (b) $2(x^2-y^2)=6y$

(c) $x(x^2-y^2)=6$ (d) $x(x^2+y^2)=10$

14. एक फलन $y=f(x)$ का द्वितीय कोटि अवकलज $f''(x)=6(x-1)$. है। यदि इसका ग्राफ बिन्दु (2, 1) से होकर गुजरता है तथा इस बिन्दु पर ग्राफ की स्पर्शज्या $y=3x-5$ है, तब फलन है [AIEEE 2004]

(a) $(x+1)^3$ (b) $(x-1)^3$

(c) $(x+1)^2$ (d) $(x-1)^2$

विविध अवकल समीकरण

1. अवकल समीकरण $x\frac{d^2y}{dx^2}=1$ का हल, यदि $y=1, \frac{dy}{dx}=0$ जब $x=1$ है, होगा

(a) $y=x\log x+x+2$ (b) $y=x\log x-x+2$

(c) $y=x\log x+x$ (d) $y=x\log x-x$

2. अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{x^2}$ का हल है [MP PET 2003]

(a) $y=\log x+c_1x+c_2$ (b) $y=-\log x+c_1x+c_2$

(c) $y=-\frac{1}{x}+c_1x+c_2$ (d) इनमें से कोई नहीं

3. अवकल समीकरण $\cos^2 x\frac{d^2y}{dx^2}=1$ का हल है

(a) $y=\log\cos x+cx$ (b) $y=\log\sec x+c_1x+c_2$

(c) $y=\log\sec x-c_1x+c_2$ (d) इनमें से कोई नहीं

4. $\frac{d^2y}{dx^2}=\sec^2 x+xe^x$ का हल है [DSSE 1985]

(a) $y=\log(\sec x)+(x-2)e^x+c_1x+c_2$

(b) $y=\log(\sec x)+(x+2)e^x+c_1x+c_2$

(c) $y=\log(\sec x)-(x+2)e^x+c_1x+c_2$

(d) इनमें से कोई नहीं

5. यदि $\frac{d^2y}{dx^2}=0$, तब [UPSEAT 1999]

(a) $y=ax+b$ (b) $y^2=ax+b$

(c) $y=\log x$ (d) $y=e^x+c$

6. यदि $\frac{d^2y}{dx^2}+\sin x=0$, तब अवकल समीकरण का हल है [Pb. CET 2001]

(a) $\sin x+c_1x+c_2$ (b) $\cos x+c_1x+c_2$

(c) $\tan x+c_1x+c_2$ (d) $\log\sin x+c_1x+c_2$

7. समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2}=e^{-2x}$ का हल है [AIEEE 2002]

(a) $\frac{1}{4}e^{-2x}$ (b) $\frac{1}{4}e^{-2x}+cx+d$

(c) $\frac{1}{4}e^{-2x}+cx^2+d$ (d) $\frac{1}{4}e^{-2x}+c+d$

Critical Thinking

Objective Questions

1. अवकल समीकरण $3\frac{d^2y}{dx^2}=\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}$ की घात है [MP PET 1994, 95]

(a) 1 (b) 2
(c) 3 (d) 6

2. वक्र निकाय $y^2=2c(x+\sqrt{c})$, जहाँ c एक धनात्मक प्राचल है, को निरूपित करने वाली अवकल समीकरण [IIT 1999; AIEEE 2005; MP PET 2002]

(a) की कोटि 1 है (b) की कोटि 2 है
(c) की घात 3 है (d) की घात 4 है

3. उस अवकल समीकरण की कोटि जिसका व्यापक हल $y=C_1e^{2x+C_2}+C_3e^x+C_4\sin(x+C_5)$ है [AMU 2000]

(a) 5 (b) 4
(c) 3 (d) 2

4. अवकल समीकरण $\left(1+3\frac{dy}{dx}\right)^{\frac{2}{3}}=4\frac{d^3y}{dx^3}$ की कोटि तथा घात क्रमशः है [AIEEE 2002]

(a) $1, \frac{2}{3}$ (b) 3, 1
(c) 3, 3 (d) 1, 2

5. अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2}+3\left[\frac{dy}{dx}\right]^2=x^2\log\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]$ की घात है [Pb. CET 2004]

(a) 1 (b) 2
(c) 3 (d) इनमें से कोई नहीं

6. वक्रों के कुल $y=Ae^{3x}+Be^{5x}$ का अवकल समीकरण होगा, जहाँ A, B स्वेच्छ नियतांक हैं [MNR 1988]

(a) $\frac{d^2y}{dx^2}+8\frac{dy}{dx}+15y=0$ (b) $\frac{d^2y}{dx^2}-8\frac{dy}{dx}+15y=0$
(c) $\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}+y=0$ (d) इनमें से कोई नहीं

7. परवलय के कुल का अवकल समीकरण, जिसकी नाभि मूलबिन्दु पर तथा अक्ष, x–अक्ष पर है, है [EAMCET 2003]

(a) $y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+4x\frac{dy}{dx}=4y$ (b) $-y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=2x\frac{dy}{dx}-y$
(c) $y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y=2xy\frac{dy}{dx}$ (d) $y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2xy\frac{dy}{dx}+y=0$

8. उन वक्र कुल का अवकल समीकरण जिसके लिये अभिलम्ब की लम्बाई, नियतांक k के बराबर है, है [Pb. CET 2004]

(a) $y^2\frac{dy}{dx}=k^2-y^2$ (b) $\left(y\frac{dy}{dx}\right)^2=k^2-y^2$
(c) $y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=k^2+y^2$ (d) $\left(y\frac{dy}{dx}\right)^2=k^2+y^2$

9. अवकल समीकरण $y-x\frac{dy}{dx}=a\left(y^2+\frac{dy}{dx}\right)$ का हल है [AISSE 1989, 90]

(a) $y=c(x+a)(1+ay)$ (b) $y=c(x+a)(1-ay)$
(c) $y=c(x-a)(1+ay)$ (d) इनमें से कोई नहीं

10. अवकल समीकरण $\sqrt{a+x}\frac{dy}{dx}+xy=0$ का हल है [MP PET 1998]

(a) $y=Ae^{2/3(2a-x)\sqrt{x+a}}$ (b) $y=Ae^{-2/3(a-x)\sqrt{x+a}}$
(c) $y=Ae^{2/3(2a+x)\sqrt{x+a}}$ (d) $y=Ae^{-2/3(2a-x)\sqrt{x+a}}$
(जहाँ पर A कोई स्वेच्छ अचर है)

11. अवकल समीकरण $x\frac{dy}{dx}=y(\log y-\log x+1)$ का हल है [IIT 1986; AIEEE 2005]

(a) $y=xe^{cx}$ (b) $y+xe^{cx}=0$
(c) $y+e^x=0$ (d) इनमें से कोई नहीं

12. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\frac{\phi\left(\frac{y}{x}\right)}{\phi'\left(\frac{y}{x}\right)}$ का हल है [DCE 2002]

(a) $\phi\left(\frac{y}{x}\right)=kx$ (b) $x\,\phi\left(\frac{y}{x}\right)=k$
(c) $\phi\left(\frac{y}{x}\right)=ky$ (d) $y\,\phi\left(\frac{y}{x}\right)=k$

13. $y^2\,dx+(x^2-xy+y^2)\,dy=0$ का व्यापक हल है [EAMCET 2003]

(a) $\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)+\log y+c=0$
(b) $2\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)+\log x+c=0$
(c) $\log(y+\sqrt{x^2+y^2})+\log y+c=0$
(d) $\sinh^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)+\log y+c=0$

14. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x+y+1}$ का हल है

(a) $x=ce^y-y-2$ (b) $y=x+ce^y-2$
(c) $x+ce^y-y-2=0$ (d) इनमें से कोई नहीं

15. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}+2xy=y$ का हल है [Roorkee 1995]

(a) $y=ce^{x-x^2}$ (b) $y=ce^{x^2-x}$
(c) $y=ce^x$ (d) $y=ce^{-x^2}$

16. यदि $x(1-x^2)dy+(2x^2y-y-ax^3)dx=0$ का समाकलन गुणांक $e^{\int Pdx}$ हो, तो P बराबर है [MP PET 1999]

(a) $\frac{2x^2-ax^3}{x(1-x^2)}$ (b) $(2x^2-1)$
(c) $\frac{2x^2-1}{ax^3}$ (d) $\frac{(2x^2-1)}{x(1-x^2)}$

17. अवकल समीकरण $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x\frac{dy}{dx} + y = 0$ का एक हल है [IIT 1999; Karnataka CET 2002]

(a) $y = 2$ (b) $y = 2x$

(c) $y = 2x - 4$ (d) $y = 2x^2 - 4$

18. वक्र के बिन्दु (x, y) पर प्रवणता $\frac{y}{x} - \cos^2\left(\frac{y}{x}\right)$ है। यह वक्र बिन्दु $\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$ से जाता है, तो वक्र का समीकरण होगा [Kurukshetra CEE 2002]

(a) $y = \tan^{-1}\left[\log\left(\frac{e}{x}\right)\right]$ (b) $y = x\tan^{-1}\left[\log\left(\frac{x}{e}\right)\right]$

(c) $y = x\tan^{-1}\left[\log\left(\frac{e}{x}\right)\right]$ (d) इनमें से कोई नहीं

19. उस वक्र निकाय का समीकरण जिसके अभिलम्ब की लम्बाई त्रिज्या सदिश के बराबर है, होगा

(a) $y^2 \pm x^2 = k$ (b) $y \pm x = k$

(c) $y^2 = kx$ (d) इनमें से कोई नहीं

20. एक सतत् अवकलनीय फलन $\phi(x)$ अंतराल $(0, \pi)$ में $y' = 1 + y^2, y(0) = 0 = y(\pi)$ को संतुष्ट करता है, होगा [MP PET 2000]

(a) $\tan x$ (b) $x(x - \pi)$

(c) $(x - \pi)\ (1 - e^x)$ (d) संभव नहीं है

21. एक निश्चित प्रतिदर्श में जीवाणुओं की संख्या में वृद्धि की दर, उसमें उपस्थित जीवाणुओं की संख्या के समानुपाती है। यदि यह 5 घण्टे में दोगुनी हो जाती है, तो 25 घण्टे पश्चात् संख्या होगी [Pb. CET 2004]

(a) प्रारम्भिक की 8 गुनी (b) प्रारम्भिक की 16 गुनी

(c) प्रारम्भिक की 32 गुनी (d) प्रारम्भिक की 64 गुनी

22. $\frac{d^2y}{dx^2} = \cos x - \sin x$ का हल है

(a) $y = -\cos x + \sin x + c_1x + c_2$

(b) $y = -\cos x - \sin x + c_1x + c_2$

(c) $y = \cos x - \sin x + c_1x^2 + c_2x$

(d) $y = \cos x + \sin x + c_1x^2 + c_2x$

23. अवकल समीकरण $x^4\frac{dy}{dx} + x^3y + \text{cosec}\,(xy) = 0$ का हल है [Pb. CET 2004]

(a) $2\cos(xy) + x^{-2} = c$ (b) $2\cos(xy) + y^{-2} = c$

(c) $2\sin(xy) + x^{-2} = c$ (d) $2\sin(xy) + y^{-2} = c$

24. समीकरण $x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \ln x$ का हल, जबकि $x = 1$, $y = 0$ तथा $\frac{dy}{dx} = -1$ है, है [Orissa JEE 2003]

(a) $\frac{1}{2}(\ln x)^2 + \ln x$ (b) $\frac{1}{2}(\ln x)^2 - \ln x$

(c) $-\frac{1}{2}(\ln x)^2 + \ln x$ (d) $-\frac{1}{2}(\ln x)^2 - \ln x$

25. यदि $y\cos x + x\cos y = \pi$, तब $y''(0)$ है [IIT Screening 2005]

(a) 1 (b) π

(c) 0 (d) $-\pi$

Answers

अवकल समीकरण की कोटि एवं घात

1	a	2	b	3	c	4	c	5	d
6	c	7	a	8	a	9	a	10	c
11	a	12	a	13	a	14	a	15	d
16	b	17	d	18	a	19	a	20	c
21	cd	22	a	23	d	24	b	25	c
26	a	27	a	28	a	29	d	30	a
31	b	32	b	33	c	34	a	35	a
36	c								

अवकल समीकरण की संरचना

1	c	2	c	3	a	4	b	5	a
6	b	7	c	8	a	9	a	10	c
11	b	12	a	13	d	14	b	15	c
16	a	17	b	18	a	19	d	20	b
21	b	22	c	23	a	24	b	25	c
26	d	27	b	28	c	29	b	30	b
31	d								

चर पृथक्करण प्रकार के अवकल समीकरण

1	a	2	c	3	c	4	a	5	b
6	a	7	c	8	b	9	c	10	b
11	d	12	c	13	b	14	d	15	a
16	a	17	b	18	a	19	a	20	c
21	c	22	c	23	c	24	a	25	c
26	b	27	b	28	d	29	b	30	b
31	c	32	a	33	d	34	b	35	a
36	d	37	a	38	b	39	c	40	d
41	a	42	c	43	a	44	b	45	a
46	a	47	c	48	c	49	d	50	b
51	b	52	b	53	c	54	a	55	a
56	c	57	a	58	c	59	a	60	a
61	c	62	d	63	c	64	b	65	a
66	b	67	c	68	c	69	a	70	b
71	d	72	a	73	b	74	b	75	c
76	c	77	b	78	a	79	c	80	b
81	a								

समघातीय अवकल समीकरण

1	a	2	d	3	b	4	b	5	a
6	b	7	c	8	b	9	a	10	a
11	a	12	a	13	a	14	b		

यथातथ्य (Exact) अवकल समीकरण

1	a	2	b	3	b	4	b	5	a
6	b	7	a	8	b	9	a	10	d
11	a								

रैखिक अवकल समीकरण

1	b	2	c	3	a	4	b	5	a
6	d	7	a	8	a	9	d	10	b
11	b	12	a	13	d	14	b	15	b
16	c	17	d	18	a	19	c	20	c
21	a	22	c	23	a	24	b	25	b
26	a	27	c	28	a	29	b	30	a
31	c	32	d	33	c	34	b	35	a
36	a	37	b	38	a	39	b		

अवकल समीकरण के अनुप्रयोग

1	a	2	a	3	b	4	c	5	b
6	b	7	a	8	c	9	b	10	b
11	c	12	c	13	a	14	b		

विविध अवकल समीकरण

1	b	2	a	3	bc	4	a	5	a
6	a	7	b						

Critical Thinking Questions

1	b	2	ac	3	b	4	c	5	d
6	b	7	b	8	b	9	b	10	a
11	a	12	a	13	a	14	a	15	a
16	d	17	c	18	c	19	a	20	d
21	c	22	a	23	a	24	d	25	b

Answers and Solutions

अवकल समीकरण की कोटि एवं घात

1. (a) दिये गये अवकल समीकरण को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है

$$y^2+x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2xy.\frac{dy}{dx}=a^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+b^2.$$

अतः यह प्रथम कोटि व द्वितीय घात का अवकल समीकरण है।

2. (b) यह स्पष्ट है।

3. (c) यहाँ अवकल गुणांक पर घात भिन्नात्मक है, अतः इसे धनात्मक पूर्णांक बनाने पर,

$$\left[4+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{2/3}=\frac{d^2y}{dx^2}\Rightarrow\left[4+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^2=\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]^3$$

अतः कोटि 2 व घात 3 है।

4. (c) (a) प्रथम कोटि व दो घात।

(b) दो कोटि व एक घात।

(c) प्रथम कोटि व एक घात।

अर्थात् $dy+dx=0$ या $\frac{dy}{dx}+1=0$

5. (d) समीकरण $\sqrt{\frac{dy}{dx}}-4.\frac{dy}{dx}-7x=0$

$$\Rightarrow\frac{dy}{dx}=16\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+49x^2+56x\frac{dy}{dx}$$

स्पष्टतः यह प्रथम कोटि व द्वितीय घात का अवकल समीकरण है।

6. (c) दिये गये समीकरण को निम्न प्रकार लिखा जा सकता हैं

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2=1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

अतः कोटि 2 व घात 2 है।

7. (a) कोटि 2 व घात 2 है।

8. (a) कोटि 4 व घात 1 है।

9. (a) स्पष्टतः कोटि 1 है।

10. (c) चूँकि समीकरण में तीन स्वेच्छ अचर g, f व c हैं अतः इस अवकल समीकरण की कोटि 3 होगी।

11. (a) स्पष्टतः वृत्त का समीकरण $(x-0)^2+(y-r)^2=r^2$ या $x^2+y^2-2ry=0$ होगा। इसमें केवल एक प्राचल है, अतः कोटि 1 होगी।

12. (a) $y=a\cos x+b\sin x+ce^{-x}$ में 3 प्राचल हैं, अतः कोटि 3 होगी।

13. (a) स्पष्टतः वृत्त का समीकरण $(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$ होगा। जिसमें दो प्राचल हैं। अतः कोटि 2 होगी

14. (a) स्पष्टतः वृत्त का समीकरण $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$ होगा। अतः कोटि 1 होगी।

15. (d) दोनों तरफ चार घात लगाने पर $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^4 = y + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

स्पष्टतः कोटि 2 व घात 4 है।

16. (b) $\frac{d^2y}{dx^2} = -\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3}$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3$

स्पष्टतः घात 2 है।

17. (d) वर्ग करने पर परिणाम मिल जाएगा।

18. (a) $\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^{1/3} + x^{1/4} = 0$

घन करने पर, $\left[\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)^{1/3} + x^{1/4}\right]^3 = 0$

उच्चतम अवकलज की कोटि $= 2$

उच्चतम अवकलज की घात $= 3$.

19. (a) दिये गये समीकरण का अवकलन करने पर, $\frac{dy}{dx} = A$

$\therefore y = x\left(\frac{dy}{dx}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3$ जो कि घात 3 का है।

20. (c) (a) कोटि = 4, घात $= 1$.

(b) कोटि = 3, घात $= 4$.

(c) कोटि = 3, घात $= 3$ (घन लेने पर).

(d) कोटि =1, घात $= 2$ (वर्ग करने पर).

21. (c,d) $\frac{d^2y}{dx^2} + x.\frac{dy}{dx} + \sin y + x^2 = 0$

उच्चतम अवकलज की कोटि = 2 व घात = 1

22. (a) दिया गया अवकल समीकरण है, $x\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + y = x^2$

इस समीकरण में उच्चतम अवकलज की कोटि 2 है,

अतः कोटि $= 2$, उच्चतम अवकलज की घात $= 3$.

23. (d) दिये गये अवकल समीकरण की अधिकतम कोटि $(m) = 3$ तथा घात $(n) = 2$ है।

$\therefore\ m = 3\ ,\ n = 2$

24. (b) किसी अवकल समीकरण की कोटि, उसमें विद्यमान उच्चतम कोटि के अवकलज की कोटि के बराबर होती है।

25. (c) दिये गये अवकल समीकरण की कोटि तथा घात क्रमशः 2 तथा 1 हैं।

26. (a) $\rho.\frac{d^2y}{dx^2} = \left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2} \Rightarrow \left(\rho.\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = \left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3$

कोटि = 2, घात = 2.

27. (a) $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$. यहाँ r एक स्वेच्छ अचर है।

$\therefore$ अवकल समीकरण की कोटि = 1

28. (a) स्पष्टतः घात = 1.

29. (d) स्पष्टतः कोटि = 2, घात = 3.

30. (a) स्पष्टतः घात = 1, कोटि = 3.

31. (b) $y^2 = \pm 4a(x-h)$

$\Rightarrow 2yy_1 = \pm 4a \Rightarrow yy_1 = \pm 2a \Rightarrow y_1^2 + yy_2 = 0$

अतः घात = 1, कोटि = 2.

32. (b) $\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/4} = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{1/3} \Rightarrow \left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^9 = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^4$

स्पष्टतः घात 4 है।

33. (c) स्पष्टतः अवकलज की अधिकतम कोटि = 2,

और उच्चतम कोटि अवकलज की अधिकतम घात = 2

$\therefore$ कोटि = 2, घात = 2.

34. (a) $\frac{d^2y}{dx^2} - \sqrt{\frac{dy}{dx} - 3} = x \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} - x = \sqrt{\frac{dy}{dx} - 3}$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर, $\left(\frac{d^2y}{dx^2} - x\right)^2 = \left(\frac{dy}{dx} - 3\right)$

$\Rightarrow \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + x^2 - 2x\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} - 3$. स्पष्टतः घात = 2.

35. (a) उन सभी परवलय के समीकरण जिनकी नियता x-अक्ष के समान्तर है, है $(x-h)^2 = \pm 4a(y-k)$.

यहाँ तीन स्वेच्छ अचर h, k व a हैं।

$\therefore$ कोटि = 3.

36. (c) $y = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + ... + \infty$ जहाँ $t = \frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow y = e^t$, $\therefore\ t = \log y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \log y$. अतः घात 1 है।

अवकल समीकरण की संरचना

1. (c) माना $y = 4\sin 3x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 12\cos 3x$

$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = -36\sin 3x = -9\times 4\sin 3x = -9y$

$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} + 9y = 0$.

2. (c) xy-तल में रेखाओं के समीकरण को निम्न प्रकार दिया जाता है $y = mx + c$

इसका x के सापेक्ष दो बार अवकलन करने पर $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

3. (a) दिया गया समीकरण $x^2 + y^2 = a^2$

इसका x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow x + y\frac{dy}{dx} = 0$.

4. (b) $y = \frac{x}{x+1} \Rightarrow \frac{1}{y} = 1 + \frac{1}{x}$

$-\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} = 0 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2\frac{dy}{dx} = y^2$.

5. (a) $y = A\sin x + B\cos x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = A\cos x - B\sin x$

$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = -A\sin x - B\cos x = -(A\sin x + B\cos x) = -y$

$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ ही अभीष्ट अवकल समीकरण है।

6. (b) दिया गया समीकरण $y = a\cos(x+b)$ है।

इसका x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\frac{dy}{dx} = -a\sin(x+b)$

पुनः $\frac{d^2y}{dx^2} = -a\cos(x+b) = -y$ या $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

7. (c) चूँकि उन रेखाओं का समीकरण जिनकी मूल बिन्दु से दूरी इकाई है, निम्न होगा $x\cos\alpha + y\sin\alpha = 1$ .....(i)

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\cos\alpha + \frac{dy}{dx}\sin\alpha = 0$ .....(ii)

(i) व (ii) की सहायता से 'α' का विलोपन करने पर अर्थात् (i) $-x\times$ (ii)

$\Rightarrow \sin\alpha\left(y - x\frac{dy}{dx}\right) = 1 \Rightarrow \left(y - x\frac{dy}{dx}\right) = \operatorname{cosec}\alpha$ .....(iii)

एवं (ii) $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\cot\alpha \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \cot^2\alpha$ .....(iv)

अतः (iii) व (iv) से, $1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \left(y - x\frac{dy}{dx}\right)^2$.

8. (a) $y = ce^{\sin^{-1}x}$. इसका x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\frac{dy}{dx} = ce^{\sin^{-1}x}.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{y}{\sqrt{1-x^2}}$ या $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{1-x^2}}$.

9. (a) $x^2y = a$ (अवकलन करने पर)

$x^2\frac{dy}{dx} + y\frac{d}{dx}(x^2) = 0 \Rightarrow x^2\frac{dy}{dx} + 2xy = 0$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = 0$.

10. (c) $y = e^{mx} \Rightarrow \log y = mx \Rightarrow m = \frac{\log y}{x}$

अब $y = e^{mx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = me^{mx} = \frac{\log y}{x}.y = \left(\frac{y}{x}\right)\log y$.

11. (b) हल दिया है, $y = c_1\cos ax + c_2\sin ax$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\frac{dy}{dx} = -c_1a\sin ax + c_2a\cos ax$

पुनः $\frac{d^2y}{dx^2} = -c_1a^2\cos ax - c_2a^2\sin ax$

$\frac{d^2y}{dx^2} = -a^2(c_1\cos ax + c_2\sin ax) \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = -a^2y$

या $\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = 0$.

12. (a) x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\frac{dy}{dx} = m$ जो कि अभीष्ट अवकल समीकरण है।

13. (d) चूँकि (1,–1) से गुजरने वाली रेखा का समीकरण $y + 1 = m(x-1)$ है।

$\Rightarrow y + 1 = \frac{dy}{dx}(x-1) \Rightarrow y = (x-1)\frac{dy}{dx} - 1$.

14. (b) दिया गया है $y^2 = 4a(x+a)$.

अवकलन करने पर, $2y\left(\frac{dy}{dx}\right) = 4a$

(i) व (ii) में से a का विलोपन करने पर अभीष्ट समीकरण

$y\left[1 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = 2x\frac{dy}{dx}$ है।

15. (c) $\frac{dv}{dr} = -\frac{A}{r^2} + 0 \Rightarrow \frac{d^2v}{dr^2} = \frac{2A}{r^3} \Rightarrow \frac{d^2v}{dr^2} = \frac{2}{r}\left(\frac{A}{r^2}\right)$

$\Rightarrow \frac{d^2v}{dr^2} = \frac{2}{r}\left(-\frac{dv}{dr}\right) \Rightarrow \frac{d^2v}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dv}{dr} = 0$.

16. (a) उन वृत्तों का निकाय जो मूल बिन्दु से जाता है व केन्द्र y-अक्ष पर है, निम्न है $x^2 + y^2 - 2ay = 0$

$\Rightarrow 2x + 2y\frac{dy}{dx} - 2a\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 2a = 2y + 2x\frac{dx}{dy}$

अतः अभीष्ट अवकल समीकरण

$x^2 + y^2 - 2y^2 - 2xy\frac{dx}{dy} = 0 \Rightarrow (x^2 - y^2)\frac{dy}{dx} - 2xy = 0$.

17. (b) सरल आवर्ती गति के लिए विस्थापन $x = a\cos(nt + b)$ होता है।

अतः $\frac{dx}{dt} = -na\sin(nt+b)$

$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -n^2a\cos(nt+b) \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -n^2x$

$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + n^2x = 0$

18. (a) स्पष्टतः परवलय, $y = Ax^2 + Bx + C$ .....(i)

जहाँ A, B, C स्वेच्छ नियतांक है

(i) का x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\frac{dy}{dx} = 2Ax + B$ .....(ii)

पुनः अवकलन करने पर, $\frac{d^2y}{dx^2} = 2A$ .....(iii)

पुनः अवकलन करने पर, $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$ .....(iv)

19. (d) $y = (x+K)e^{-x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -(x+K)e^{-x} + e^{-x}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -y + e^{-x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} + y = e^{-x}$.

20. (b) अवकलन करने पर, $\frac{dy}{dx} = c$

अतः अभीष्ट अवकल समीकरण, $y = x\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^3$ होगा।

21. (b) $y = e^xA\cos x + e^xB\sin x$

$\frac{dy}{dx} = Ae^x\cos x - Ae^x\sin x + Be^x\sin x + Be^x\cos x$

$\frac{dy}{dx} = (A+B)e^x\cos x + (B-A)e^x\sin x$

$\frac{d^2y}{dx^2} = (A+B)e^x\cos x - e^x\sin x(A+B)$

$+ (B-A)e^x\sin x + (B-A)e^x\cos x$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 2Be^x\cos x - 2Ae^x\sin x$. अतः $\frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{dy}{dx} - 2y$.

22. (c) $y = A + Bx + Ce^{-x}$ .....(i)

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = B - Ce^{-x}$ .....(ii)

$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = Ce^{-x}$ .....(iii), $\frac{d^3y}{dx^3} = -Ce^{-x}$ .....(iv)

समीकरण (iii) तथा (iv) को जोड़ने पर,

$\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{d^2y}{dx^2}=0$ अर्थात् $y'''+y''=0$.

23. (a) $y'=-A\omega\sin\omega t+B\omega\cos\omega t$

$\Rightarrow y''=-A\omega^2\cos\omega t-B\omega^2\sin\omega t$

$=-\omega^2(A\cos\omega t+B\sin\omega t)$

$\Rightarrow y''=-\omega^2 y$

24. (b) $y=ax^{n+1}+bx^{-n}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=a(n+1)x^n-bnx^{-n-1}$

$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=a\,n(n+1)x^{n-1}+b\,n(n+1)x^{-n-2}$

$\Rightarrow x^2\frac{d^2y}{dx^2}=a\,n(n+1)x^{n+1}+b\,n(n+1)x^{-n}$

$\Rightarrow x^2\frac{d^2y}{dx^2}=n(n+1)y$.

25. (c) मूलबिन्दु से गुजरने वाली सरल रेखाओं का समीकरण $y=mx$ .....(i)

जहाँ m स्वेच्छ अचर है।

समीकरण (i) का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\frac{dy}{dx}=m \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$

26. (d) $y=ae^{mx}+be^{-mx} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=mae^{mx}-mbe^{-mx}$

$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=m^2ae^{mx}+m^2be^{-mx}=m^2(ae^{mx}+be^{-mx})=m^2y$

$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}-m^2y=0$

27. (b) x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$2x+2yy'=0$ या $x+yy'=0$

x के सापेक्ष पुनः अवकलन करने पर, $1+y'^2+yy''=0$

28. (c) $y=\sec(\tan^{-1}x)$

$\frac{dy}{dx}=\sec(\tan^{-1}x)\tan(\tan^{-1}x).\frac{1}{1+x^2}=\frac{xy}{1+x^2}$

$\Rightarrow (1+x^2)\frac{dy}{dx}=xy$.

29. (b) $y=ax\cos\left(\frac{1}{x}+b\right)$ ..... (i)

समीकरण (i) का अवकलन करने पर,

$y_1=a\left[\cos\left(\frac{1}{x}+b\right)-x\sin\left(\frac{1}{x}+b\right)\left(\frac{-1}{x^2}\right)\right]$

$=a\left[\cos\left(\frac{1}{x}+b\right)+\frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}+b\right)\right]$ .....(ii)

पुनः (ii) का अवकलन करने पर,

$y_2=\frac{-a}{x^3}\cos\left(\frac{1}{x}+b\right)=\frac{-ax}{x^4}\cos\left(\frac{1}{x}+b\right)=\frac{-y}{x^4}$

$\Rightarrow x^4y_2+y=0$.

30. (b) $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y=c$ .....(i)

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$

$\Rightarrow \sqrt{1-x^2}\,dy+\sqrt{1-y^2}\,dx=0$

यही अभीष्ट अवकल समीकरण है।

31. (d) $x=\sin t$, $y=\cos pt$

$\frac{dx}{dt}=\cos t$; $\frac{dy}{dt}=-p\sin pt$; $\frac{dy}{dx}=\frac{-p\sin pt}{\cos t}$

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-\cos t\,p^2\cos pt(dt/dx)-p\sin pt\sin t(dt/dx)}{\cos^2 t}$

$\Rightarrow (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+p^2y=0$

या $(1-x^2)y_2-xy_1+p^2y=0$.

चर पृथक्करण प्रकार के अवकल समीकरण

1. (a) यह निम्न प्रकार लिखा जा सकता है

$\frac{\sec^2 y}{\tan y}dy=-3\frac{e^x}{1-e^x}dx$

$\int\frac{\sec^2 y}{\tan y}dy=-3\int\frac{e^x}{1-e^x}dx$

$\Rightarrow \log(\tan y)=3\log(1-e^x)+\log c \Rightarrow \tan y=c(1-e^x)^3$.

2. (c) $\frac{dy}{dx}=\frac{1+y^2}{1+x^2} \Rightarrow \frac{1}{1+y^2}dy=\frac{1}{1+x^2}dx$

अब दोनों तरफ समाकलन करने पर,

$\tan^{-1}y=\tan^{-1}x+\tan^{-1}c \Rightarrow \tan^{-1}y=\tan^{-1}\left(\frac{x+c}{1-cx}\right)$

$\Rightarrow y=\frac{x+c}{1-cx} \Rightarrow y-x=c(1+xy)$.

3. (c) $x\cos y\,dy=(xe^x\log x+e^x)dx$

$\Rightarrow \cos y\,dy=\left(e^x\log x+\frac{e^x}{x}\right)dx$

समाकलन करने पर, $\sin y=e^x\log x+c$.

4. (a) $\frac{dy}{dx}=e^{x-y}+x^2e^{-y}=e^{-y}(e^x+x^2)$

$\Rightarrow e^y dy=(x^2+e^x)dx$

दोनों तरफ समाकलन करने पर, $e^y=\frac{x^3}{3}+e^x+c$.

5. (b) $\frac{dy}{dx}+\frac{1+x^2}{x}=0 \Rightarrow dy+\left(\frac{1}{x}+x\right)dx=0$

समाकलन करने पर, $y+\log x+\frac{x^2}{2}+c=0$.

6. (a) $\frac{dy}{dx}=\sec x(\sec x+\tan x) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\sec^2 x+\sec x\tan x$

अब दोनों तरफ समाकलन करने पर, $y=\tan x+\sec x+c$.

7. (c) $(1+x^2)\frac{dy}{dx}=x \Rightarrow dy=\frac{x}{1+x^2}dx$

$\Rightarrow \int dy = \int \frac{x}{1+x^2}dx + c \Rightarrow y = \frac{1}{2}\log_e(1+x^2)+c$.

8. (b) $\frac{dy}{dx} = e^x + \cos x + x + \tan x$

दोनों तरफ समाकलन करने पर,

$y = e^x + \sin x + \frac{x^2}{2} + \log\sec x + c$.

9. (c) $\frac{dy}{dx} + \sin^2 y = 0 \Rightarrow -\frac{dy}{\sin^2 y} = dx$.

समाकलन करने पर, $x = \cot y + c$.

10. (b) यहाँ $\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} \Rightarrow dy = -\left(\frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}\right)dx$

दोनों तरफ समाकलन करने पर,

$\Rightarrow y = -\log(\sin x + \cos x) + \log c$

$\Rightarrow y = \log\left(\frac{c}{\sin x + \cos x}\right) \Rightarrow e^y(\sin x + \cos x) = c$.

11. (d) $\frac{dy}{dx} = (1+x)(1+y^2) \Rightarrow \frac{dy}{1+y^2} = (1+x)dx$

दोनों तरफ समाकलन करने पर,

$\tan^{-1} y = \frac{x^2}{2} + x + c \Rightarrow y = \tan\left(\frac{x^2}{2} + x + c\right)$.

12. (c) दिया गया समीकरण $\frac{dy}{dx} = e^x(\sin x + \cos x)$

$\Rightarrow dy = e^x(\sin x + \cos x)dx$

समाकलन करने पर, $y = e^x \sin x + c$

13. (b) $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x^2} \Rightarrow dy = \frac{2}{x^2}dx$

अब इसका समाकलन करने पर अभीष्ट परिणाम प्राप्त होगा।

14. (d) $\frac{dy}{dx} = x\log x \Rightarrow dy = x\log x dx$

$\Rightarrow \int dy = \int x\log x dx \Rightarrow y = \frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4} + c$.

15. (a) $\frac{dy}{dx} = 1 + x + y + xy$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = (1+x)(1+y) \Rightarrow \frac{dy}{1+y} = (1+x)dx$

समाकलन करने पर, $\log(1+y) = \frac{x^2}{2} + x + c$.

16. (a) दिया गया समीकरण $(x^2 - yx^2)\frac{dy}{dx} + y^2 + xy^2 = 0$

$\Rightarrow \frac{1-y}{y^2}dy + \frac{1+x}{x^2}dx = 0$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{y}\right)dy + \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right)dx = 0$

समाकलन करने पर, $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + c$.

17. (b) $x\sec y\frac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow \sec y dy = \frac{dx}{x}$

दोनों तरफ समाकलन करने पर,

$\log(\sec y + \tan y) = \log x + \log c \Rightarrow \sec y + \tan y = cx$.

18. (a) $x\frac{dy}{dx} + y = y^2 \Rightarrow x\frac{dy}{dx} = y^2 - y$

$\Rightarrow \frac{dy}{y^2 - y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \left[\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}\right]dy = \frac{dx}{x}$

समाकलन करने पर, $\log(y-1) - \log y = \log x + \log c$

$\Rightarrow \frac{y-1}{y} = xc \Rightarrow y = 1 + cxy$.

19. (a) $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow dy = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

समाकलन करने पर, $y = \cos^{-1} x + c$

$\Rightarrow y = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} x + c \Rightarrow y + \sin^{-1} x = c$.

20. (c) $\frac{dy}{dx} = \frac{xy + y}{xy + x} \Rightarrow \left(\frac{1+y}{y}\right)dy = \left(\frac{1+x}{x}\right)dx$

दोनों तरफ समाकलन करने पर,

$\log y + y = \log x + x + \log A$

$\Rightarrow \log\left(\frac{y}{Ax}\right) = x - y \Rightarrow y = Axe^{x-y}$.

21. (c) $(e^y + 1)\cos x dx + e^y \sin x dy = 0$

$\Rightarrow \frac{e^y dy}{e^y + 1} + \frac{\cos x}{\sin x}dx = 0$

दोनों फलनों का समाकलन करने पर,

$\log(e^y + 1) + \log(\sin x) = \log c \Rightarrow (e^y + 1)\sin x = c$.

22. (c) $x^2 dy = -2xy dx \Rightarrow \frac{1}{y}dy = -\frac{2x}{x^2}dx$

समाकलन करने पर, $\log y = -2\log x + \log c$

$\Rightarrow \log y = \log x^{-2} + \log c \Rightarrow \log yx^2 = \log c$ या $yx^2 = c$.

23. (c) $\frac{dy}{dx} = (ae^{bx} + c\cos mx) \Rightarrow dy = (ae^{bx} + c\cos mx)dx$

समाकलन करने पर, $y = \frac{ae^{bx}}{b} + \frac{c\sin(mx)}{m} + k$.

24. (a) यहाँ $\frac{dy}{dx} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \tan^2\frac{x}{2} \Rightarrow dy = \left(\sec^2\frac{x}{2} - 1\right)dx$

अब दोनों तरफ समाकलन करने पर,

$y = 2\tan\frac{x}{2} - x + c$.

25. (c) $\frac{dy}{dx} = \frac{(1+x)y}{(y-1)x}$ को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है

$\frac{y-1}{y}dy = \frac{(1+x)}{x}dx \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{y}\right)dy = \left(1 + \frac{1}{x}\right)dx$

$\Rightarrow (y - \log y) = (x + \log x) + c \Rightarrow x - y + \log xy = c$.

26. (b) यहाँ $\frac{dy}{dx} = \sin(x+y)$

अब $x + y = v$ व $\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} - 1$ रखने पर

इसलिए $\frac{dy}{dx}=\sin(x+y)$ निम्न रूप में बदल जाता है

$\frac{dv}{1+\sin v}=dx$

अब समाकलन करने पर, $\tan v-\sec v=x+c$

या $\tan(x+y)-\sec(x+y)=x+c$.

27. (b) $\frac{dy}{dx}=x^2+\sin 3x$.

समाकलन करने पर, $y=\frac{x^3}{3}-\frac{\cos 3x}{3}+c$

28. (d) $(1+x^2)\frac{dy}{dx}=1 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+x^2}$

समाकलन करने पर, $y=\tan^{-1}x+c$

29. (b) $\frac{dy}{dx}=y(e^x+1) \Rightarrow \frac{dy}{y}=(e^x+1)dx$

दोनों तरफ समाकलन करने पर, $\log y=e^x+x+c$

30. (b) $\frac{dy}{dx}+\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}=0 \Rightarrow \int\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=-\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$\Rightarrow \sin^{-1}y=-\sin^{-1}x+\sin^{-1}c$

$\Rightarrow \sin^{-1}\left[x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right]=\sin^{-1}c$

$\Rightarrow x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=c$

31. (c) $\frac{dy}{dx}=-\frac{1+\cos 2y}{1-\cos 2x} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{2\cos^2 y}{2\sin^2 x}$

$\Rightarrow \sec^2 y dy=-\text{cosec}^2 x dx$

दोनों तरफ समाकलन करने पर,

$\tan y=\cot x+c \Rightarrow \tan y-\cot x=c$

32. (a) $(1+x^2)\frac{dy}{dx}=x(1+y^2) \Rightarrow \frac{1}{1+y^2}dy=\frac{x}{1+x^2}dx$

समाकलन करने पर, $\tan^{-1}y=\frac{1}{2}\log(1+x^2)+c$

$\Rightarrow 2\tan^{-1}y=\log(1+x^2)+c$.

33. (d) $(e^x+1)y dy=(y+1)e^x dx$

$\Rightarrow \left(\frac{y}{y+1}\right)dy=\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)dx \Rightarrow \left[1-\frac{1}{y+1}\right]dy=\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)dx$

$\Rightarrow \int\left\{1-\frac{1}{y+1}\right\}dy=\int\frac{e^x}{e^x+1}dx$

$\Rightarrow y=\log(y+1)+\log(e^x+1)+\log c$ या $e^y=c(y+1)(e^x+1)$

34. (b) $(1-x^2)dy+xy dx=xy^2 dx$

$\Rightarrow (1-x^2)dy=xy(y-1)dx \Rightarrow \frac{1}{y(y-1)}dy=\frac{x}{(1-x^2)}dx$

दोनों तरफ समाकलन करने पर,

$\log(y-1)-\log y=-\frac{1}{2}\log(1-x^2)+\log c$

या $2\log(y-1)+\log(1-x^2)=\log y^2c^2$

अतः हल $(y-1)^2(1-x^2)=c^2y^2$.

35. (a) $\sqrt{a+x}\frac{dy}{dx}+x=0 \Rightarrow \int dy=-\int\frac{x}{\sqrt{a+x}}dx$

$\Rightarrow y=-\int\sqrt{a+x}dx+\int\frac{a}{\sqrt{a+x}}dx$

$\left\{\because \int\frac{x}{\sqrt{a+x}}dx=\int\frac{x+a-a}{\sqrt{a+x}}dx\right\}$

$\Rightarrow y=-\frac{2}{3}(a+x)^{3/2}+2a\sqrt{a+x}+c$

$\Rightarrow 3y=-\sqrt{a+x}(2(a+x)-6a)+3c$

$\Rightarrow 3y=-2\sqrt{a+x}(x-2a)+3c$

$\Rightarrow 3y+2\sqrt{a+x}(x-2a)=3c$.

36. (d) $\cos x\cos y\frac{dy}{dx}=-\sin x\sin y$

$\Rightarrow \frac{\cos y}{\sin y}dy=-\frac{\sin x}{\cos x}dx \Rightarrow \cot y dy=-\tan x dx$

समाकलन करने पर,

$\log\sin y=\log\cos x+\log c \Rightarrow \sin y=c\cos x$.

37. (a) $x(e^{2y}-1)dy+(x^2-1)e^y dx=0$

$\Rightarrow \int\frac{e^{2y}-1}{e^y}dy=\int\frac{1-x^2}{x}dx \Rightarrow e^y+e^{-y}=\log x-\frac{x^2}{2}+c$.

38. (b) $x+y=v$ व $1+\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}$ रखने पर

अतः अवकल समीकरण

$\frac{dv}{dx}=(1+\cos v)+\sin v$ रूप में बदल जाता है

$=2\cos^2\frac{v}{2}+2\sin\frac{v}{2}\cos\frac{v}{2}=2\cos^2\frac{v}{2}\left(1+\tan\frac{v}{2}\right)$

$\Rightarrow \int\frac{\sec^2(v/2)dv}{2[1+\tan(v/2)]}=\int dx \Rightarrow \log\left[1+\tan\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]=x+c$.

39. (c) माना $x-y=v$ व $\frac{dy}{dx}=1-\frac{dv}{dx}$, तो

$\frac{dv}{dx}=\frac{v+2}{2v+5} \Rightarrow \int\frac{2v+5}{v+2}dv=\int dx$

$\Rightarrow \int\left[2+\frac{1}{(v+2)}\right]dv=\int dx$

$\Rightarrow 2v+\log(v+2)=x+c$

या $2(x-y)+\log(x-y+2)=x+c$.

40. (d) $(1-x^2)(1-y)dx=xy(1+y)dy$

$\Rightarrow \int\frac{y(1+y)}{(1-y)}dy=\int\frac{(1-x^2)}{x}dx$ अब समाकलन करें।

41. (a) दिये गये समीकरण को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है

$\frac{x}{1-x^2}dx=\frac{y}{1-y^2}dy$

समाकलन करने पर, $-\frac{1}{2}\log(1-x^2)=-\frac{1}{2}\log(1-y^2)+\log c$

$\Rightarrow \log(1-x^2)-\log(1-y^2)=-2\log c \Rightarrow \frac{1-x^2}{1-y^2}=c^{-2}$

अत: $(1-y^2)=c^2(1-x^2)$.

42. (c) $(\text{cosec } x\log y)dy+(x^2y)dx=0$

$\Rightarrow \frac{1}{y}\log y dy=-x^2\sin x dx$

दोनों तरफ समाकलन करने पर,

$\frac{(\log y)^2}{2}+[x^2(-\cos x)+\int 2x\cos x dx]=c$

$\Rightarrow \frac{(\log y)^2}{2}-x^2\cos x+2(x\sin x+\cos x)=c$

$\Rightarrow \frac{(\log y)^2}{2}+(2-x^2)\cos x+2x\sin x=c$.

43. (a) $\frac{dy}{dx}=\frac{e^x(\sin^2 x+\sin 2x)}{y(2\log y+1)}$

$\Rightarrow \int(2y\log y+y)dy=\int e^x(\sin^2 x+\sin 2x)dx$

खण्डश: समाकलन करने पर, $y^2(\log y)=e^x\sin^2 x+c$.

44. (b) $xy\frac{dy}{dx}=\frac{(1+y^2)(1+x+x^2)}{(1+x^2)}$

$\Rightarrow \int\frac{ydy}{1+y^2}=\int\frac{(1+x+x^2)}{x(1+x^2)}dx=\int\frac{1}{x}dx+\int\frac{dx}{1+x^2}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\log(1+y^2)=\log x+\tan^{-1}x+c$.

45. (a) दिया गया समीकरण $(x\sqrt{1+y^2})dx+(y\sqrt{1+x^2})dy=0$

$\Rightarrow x\sqrt{1+y^2}dx=-y\sqrt{1+x^2}dy$

$\Rightarrow \int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx+\int\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}dy=c$

$\Rightarrow \sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=c$.

46. (a) $e^{2x-3y}dx+e^{2y-3x}dy=0$

समीकरण को e^{3x+3y} से गुणा करने पर,

$\Rightarrow e^{5x}dx+e^{5y}dy=0$

समाकलन करने पर, $e^{5x}+e^{5y}=5c'=c$.

47. (c) दिया गया समीकरण $(1+x^2)(1+y)dy+(1+x)(1+y^2)dx=0$

$\Rightarrow \frac{(1+y)}{(1+y^2)}dy=-\frac{(1+x)}{(1+x^2)}dx$

$\Rightarrow \int\left[\frac{1}{1+y^2}+\frac{y}{1+y^2}\right]dy+\int\left[\frac{1}{1+x^2}+\frac{x}{1+x^2}\right]dx+c=0$

$\Rightarrow \tan^{-1}y+\frac{1}{2}\log(1+y^2)+\tan^{-1}x+\frac{1}{2}\log(1+x^2)=c$.

48. (c) $x+y=v$ व $1+\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}$ रखने पर

$\Rightarrow \frac{dv}{dx}=v^2+1\Rightarrow\frac{dv}{v^2+1}=dx$

समाकलन करने पर,

$\tan^{-1}v=x+c$ या $v=\tan(x+c)\Rightarrow x+y=\tan(x+c)$.

49. (d) $\cos y\log(\sec x+\tan x)dx=\cos x\log(\sec y+\tan y)dy$

$\Rightarrow \int\sec y\log(\sec y+\tan y)dy$

$=\int\sec x\log(\sec x+\tan x)dx$

$\log(\sec x+\tan x)=t$ एवं $\log(\sec y+\tan y)=z$ रखने पर,

$\frac{[\log(\sec x+\tan x)]^2}{2}=\frac{[\log(\sec y+\tan y)]^2}{2}+c$.

50. (b) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$ समाकलन करने पर, $y=\log x+c$.

51. (b) $\log\left(\frac{dy}{dx}\right)=x+y\Rightarrow e^{x+y}=\frac{dy}{dx}\Rightarrow e^xe^y=\frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow \int e^xdx=\int\frac{dy}{e^y}\Rightarrow e^x=-e^{-y}+c\Rightarrow e^x+e^{-y}=c$.

52. (b) $\frac{dy}{dx}=\cot x\cot y\Rightarrow\int\tan y dy=\int\cot x dx$

$\Rightarrow \log\sec y=\log\sin x+\log c$

$\Rightarrow \sec y=c\sin x$ या $c\sec y=\sin x$.

53. (c) $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-y-2}{x^2+2x-3}\Rightarrow\frac{dy}{(y-2)(y+1)}=\frac{dx}{(x+3)(x-1)}$

$\Rightarrow \int\frac{dy}{(y-2)(y+1)}=\int\frac{dx}{(x+3)(x-1)}$

$\Rightarrow \frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{y-2}-\frac{1}{y+1}\right)dy=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+3}\right)dx$

$\Rightarrow \frac{1}{3}\log\left|\frac{y-2}{y+1}\right|=\frac{1}{4}\log\left|\frac{x-1}{x+3}\right|+c$.

54. (a) $ydx+(1+x^2)\tan^{-1}x dy=0$

$\Rightarrow \int\frac{dx}{(1+x^2)\tan^{-1}x}=-\int\frac{dy}{y}$

$\Rightarrow \log(\tan^{-1}x)+\log c=-\log y$

$\Rightarrow \log(y\tan^{-1}x)+\log c=0\Rightarrow y\tan^{-1}x=c$.

55. (a) दिया है, $y^2dy=x^2dx$

समाकलन करने पर, $y^3-x^3=k\Rightarrow x^3-y^3=c$.

56. (c) $\int\frac{dy}{e^{-2y}}=\int dx\Rightarrow\frac{e^{2y}}{2}=x+c$

अत: $x=5, y=0$ पर $\Rightarrow c=-\frac{9}{2}$

अत: $y=3$ के लिए $x=\frac{e^6+9}{2}$.

57. (a) $\int\frac{dy}{\sin y}=\int\sin x dx\Rightarrow\log\tan\frac{y}{2}=-\cos x+c$

$\Rightarrow \tan\frac{y}{2}=e^{-\cos x+c}\Rightarrow e^{\cos x}\tan\frac{y}{2}=e^C=c$.

58. (c) $\frac{dy}{dx}+\frac{(e^y+1)\cot x}{e^y}=0\Rightarrow\int\frac{e^y}{e^y+1}dy+\int\cot x dx=0$

$\Rightarrow \log(e^y+1)+\log\sin x=\log K\Rightarrow(e^y+1)\sin x=K$.

59. (a) $\int dy=\int\sin x dx+\int 2x dx\Rightarrow y=-\cos x+x^2+c$.

60. (a) $\int \frac{dy}{y} = \int 2x dx \Rightarrow \log_e y = x^2 + c$

$\Rightarrow y = e^{x^2+c} = e^c e^{x^2} \Rightarrow y = ce^{x^2}$.

61. (c) दिये गये समीकरण को निम्न प्रकार लिखने पर,

$\left(\frac{1-x^2}{x}\right)dx = \frac{dy}{y}$

समाकलन करने पर, $\log x - \frac{x^2}{2} = \log y + \log c$

$\Rightarrow \log x^2 - \log y^2 + \log c = x^2 \Rightarrow \log \frac{cx^2}{y^2} = x^2$

$\Rightarrow \frac{cx^2}{y^2} = e^{x^2} \Rightarrow cx^2 = y^2 e^{x^2}$

62. (d) उचित प्रतिस्थापन, $y + 4x + 1 = v$

63. (c) दिया गया समीकरण $\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{x+y-1}{2x+2y-3}\right)$ है

माना $x + y = t \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} - 1$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1-t}{2t-3} \Rightarrow \frac{dt}{dx} - 1 = \frac{1-t}{2t-3} \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{t-2}{2t-3}$

$\Rightarrow \frac{2t-3}{t-2} dt = dx$

दोनों तरफ समाकलन करने पर,

$\int \frac{2t-4}{t-2} dt - \int \frac{3-4}{t-2} dt = \int 1 dx$

$\Rightarrow 2t + \log(t-2) = x + c$

$\Rightarrow 2(x+y) + \log(x+y-2) = x + c$

$\Rightarrow 2y + x + \log(x+y-2) = c$

64. (b) $\sin \frac{dy}{dx} = a$; $dy = \sin^{-1} a \, dx$

समाकलन करने पर, $\int dy = \int \sin^{-1} a \, dx$

$y = x \sin^{-1} a + c$ तथा $y(0) = 0 + c = 1$, $\therefore c = 1$

$\therefore y = x \sin^{-1} a + 1 \Rightarrow a = \sin \frac{y-1}{x}$

65. (a) $\cos(x+y) dy = dx$ .....(i)

$x + y = v$

$\Rightarrow 1 + \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$ प्रतिस्थापित करने पर,

समीकरण (i) से, $\cos v \left(\frac{dv}{dx} - 1\right) = 1$

$\Rightarrow \cos v \frac{dv}{dx} = 1 + \cos v \Rightarrow \frac{\cos v}{1 + \cos v} dv = dx$

$\Rightarrow \left[\frac{2\cos^2(v/2) - 1}{2\cos^2(v/2)}\right] dv = dx \Rightarrow \left[1 - \frac{1}{2}\sec^2(v/2)\right] dv = dx$

समाकलन करने पर, $v - \tan(v/2) = x + c$

$x + y - \tan\left(\frac{x+y}{2}\right) = x + c \Rightarrow y = \tan\left(\frac{x+y}{2}\right) + c$.

66. (b) $\because \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0$

समाकलन करने पर, $\sin^{-1} y + \sin^{-1} x = c$.

67. (c) $\frac{dy}{dx} = 2^{y-x} = \frac{2^y}{2^x} \Rightarrow \frac{dy}{2^y} = \frac{dx}{2^x}$

समाकलन करने पर, $\int \frac{dy}{2^y} = \int \frac{dx}{2^x}$

$-2^{-y} \log 2 = -2^{-x} \log 2 + c_1$

$\frac{\log 2}{2^x} - \frac{\log 2}{2^y} = c_1$; $\frac{1}{2^x} - \frac{1}{2^y} = \frac{c_1}{\log 2} = c$.

68. (c) $\frac{dy}{dx} - y = 1 \Rightarrow \frac{dy}{1+y} = dx$

समाकलन करने पर, $\log(1+y) = x + c \Rightarrow 1 + y = e^x . e^c$

$\because x = 0, y = -1$. तब $1 - 1 = e.e^c \Rightarrow e^c = 0$

$\Rightarrow 1 + y = e^x \times 0 \Rightarrow y(x) = -1$.

69. (a) $\frac{dy}{dx} = \frac{y+1}{x-1} \Rightarrow \frac{dy}{y+1} = \frac{dx}{x-1}$

समाकलन करने पर, $\int \frac{dy}{y+1} = \int \frac{dx}{x-1}$

$\Rightarrow \log(y+1) = \log(x-1) + \log c \Rightarrow (y+1) = (x-1)c$

$x = 1$ पर $\Rightarrow y = -1$ जबकि $y(1) = 2$

अतः कोई हल संभव नहीं है।

70. (b) $\frac{dy}{dx} + \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) - \sin\left(\frac{x+y}{2}\right)$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -2\sin\left(\frac{y}{2}\right).\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

$\Rightarrow \text{cosec}\left(\frac{y}{2}\right).dy = -2\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर,

$\int \text{cosec}\left(\frac{y}{2}\right) dy = -\int 2\cos\left(\frac{x}{2}\right) dx + c$.

$\Rightarrow \frac{\log \tan \frac{y}{4}}{1/2} = -\frac{2\sin(x/2)}{1/2} + c$

$\Rightarrow \log(\tan \frac{y}{4}) = c - 2\sin(x/2)$.

71. (d) $x + y = v$ रखने पर,

$\Rightarrow 1 + \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} - 1$

$\therefore v^2\left(\frac{dv}{dx} - 1\right) = a^2$

$\Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{a^2}{v^2} + 1 = \frac{a^2 + v^2}{v^2} \Rightarrow \frac{v^2}{a^2 + v^2} dv = dx$

$\Rightarrow \left(1 - \frac{a^2}{a^2 + v^2}\right) dv = dx \Rightarrow v - a\tan^{-1}\frac{v}{a} = x + c$

$\Rightarrow y = a\tan^{-1}\left(\frac{x+y}{a}\right) + c$

72. (a) अवकल समीकरण $\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0$. समाकलन करने पर,

$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dy}{y} = 0 \Rightarrow \log x + \log y = \log c$

$\Rightarrow \log(xy) = \log c \Rightarrow xy = c$

73. (b) $y - x\frac{dy}{dx} = a\left(y^2 + \frac{dy}{dx}\right) \Rightarrow y - ay^2 = a\frac{dy}{dx} + x\frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow y(1-ay) = (a+x).\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dx}{(a+x)} = \frac{dy}{y(1-ay)}$

समाकलन करने पर, $\int \frac{dx}{(a+x)} = \int \frac{dy}{y(1-ay)}$

$\Rightarrow \int \frac{dx}{a+x} = \int \left[\frac{1}{y} + \frac{a}{(1-ay)}\right] dx$

$\log(a+x) = \log y + \frac{a\log(1-ay)}{-a}$

$\Rightarrow \log(a+x) = \log y - \log(1-ay) + \log c$

$\Rightarrow \log(x+a)(1-ay) = \log cy \Rightarrow (x+a)(1-ay) = cy$

74. (b) $\log\left(\frac{dy}{dx}\right) = ax + by \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{ax+by} = e^{ax}.e^{by}$ s

$\Rightarrow e^{-by}dy = e^{ax}dx \Rightarrow \frac{e^{-by}}{-b} = \frac{e^{ax}}{a} + c$.

75. (c) $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{y}{x}\right)^{1/3} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y^{1/3}}{x^{1/3}} \Rightarrow \frac{dy}{y^{1/3}} = \frac{dx}{x^{1/3}}$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर, $\frac{y^{2/3}}{2/3} = \frac{x^{2/3}}{2/3} + c$

$\frac{3}{2}\cdot y^{2/3} = \frac{3}{2}x^{2/3} + c \Rightarrow y^{2/3} - x^{2/3} = c$.

76. (c) $\frac{dy}{2y-1} = \frac{dx}{2x+3}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\log(2y-1) = \frac{1}{2}\log(2x+3) + \log c \Rightarrow \frac{2x+3}{2y-1} = c$.

77. (b) $\cot y.dx = x.dy \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dy}{\cot y} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \tan y.dy$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर,

$\log x = \log \sec y + \log c \Rightarrow x = c\sec y$.

78. (a) $\frac{dy}{dx} = \frac{x\log x^2 + x}{\sin y + y\cos y}$.

चरों का पृथक्करण कर समाकलन करने पर,

$\int(\sin y + y\cos y)dy = \int(x\log x^2 + x)dx$

$\Rightarrow -\cos y + y\sin y + \cos y$

$= \frac{x^2}{2}\log x^2 - \int \frac{x^2}{2}.\frac{1}{x^2}.2xdx + \int x\,dx + c$

$\Rightarrow y\sin y = \frac{x^2}{2}2\log x - \int x\,dx + \int xdx + c$

$\Rightarrow y\sin y = x^2\log x + c$

79. (c) दिया गया अवकल समीकरण है $\frac{\cos x}{2+\sin x}dx + \frac{dy}{y+1} = 0$

$\Rightarrow \log(2+\sin x) + \log(y+1) = \log c$

$\Rightarrow (y+1)(2+\sin x) = c \Rightarrow 2\times 2 = c \Rightarrow c = 4$

इस प्रकार, $y + 1 = \frac{4}{2+\sin x} \Rightarrow y = \frac{2-\sin x}{2+\sin x}$

$\Rightarrow y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{3}$.

80. (b) $\frac{dy}{dx} = \log(x+1) \Rightarrow dy = \log(x+1)dx$

$y = \int \log(x+1)dx = x.\log(x+1) - \int \frac{x}{x+1}dx$

$= x.\log(x+1) - \int\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx$

$= x.\log(x+1) - x + \log(x+1) + c$

$= (x+1)\log(x+1) - x + c$

$x = 0$ पर $y = 3$

$3 = (1)\log(1) - 0 + c \Rightarrow 3 = 0 + c \Rightarrow c = 3$

$\therefore y = (x+1)\log|x+1| - x + 3$

81. (a) $\frac{dy}{dx}\tan y = \sin(x+y) + \sin(x-y)$

$\frac{dy}{dx}(\tan y) = 2\sin x\cos y \Rightarrow \frac{\sin y}{\cos^2 y}dy = 2\sin xdx$

$\Rightarrow \int \frac{\sin y}{\cos^2 y}dy = 2\int \sin xdx \Rightarrow \frac{1}{\cos y} = -2\cos x + c$

$\therefore \sec y + 2\cos x = c$.

समघातीय अवकल समीकरण

1. (a) यह समघातीय समीकरण है जिसे निम्न प्रकार लिखा जा सकता है $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$

अब $y = vx$ व $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ रखने पर,

$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{x^2 + vx^2 + v^2x^2}{x^2} = 1 + v + v^2$

$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} = 1 + v^2 \Rightarrow \frac{dv}{1+v^2} = \frac{dx}{x}$

अब दोनों तरफ समाकलन करने पर, $\tan^{-1}v = \log x + c$

$\Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \log x + c \quad \{\because y = vx \Rightarrow v = y/x\}$

2. (d) यह समघातीय समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 3y^2}{2xy}$ है

$y = vx$ व $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ रखने पर,

$x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2}{2v} \Rightarrow \frac{2vdv}{1+v^2} = \frac{dx}{x}$

समाकलन करने पर, $x^2 + y^2 = px^3$

3. (b) इसे समघातीय समीकरण के रूप में लिखा जा सकता है

$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$

अब इसे $y = vx$ व $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ रखकर हल करें।

4. (b) दिया गया समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$ है।

यह समघातीय समीकरण है, अतः $y = vx$ व $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

रखने पर, $v + x\frac{dv}{dx} = \frac{x+vx}{x-vx} = \frac{1+v}{1-v} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2}{1-v}$

$\Rightarrow \frac{1}{x}dx = \left(\frac{1}{1+v^2} - \frac{v}{1+v^2}\right)dv$

$\Rightarrow \log_e x = \tan^{-1} v - \frac{1}{2}\log(1+v^2) + \log_e c$

$v = \frac{y}{x}$ रखने पर,

$\log_e x = \tan^{-1}\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\log\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right] + \log_e c$

$\Rightarrow c(x^2+y^2)^{1/2} = e^{\tan^{-1}(y/x)}$.

5. (a) इसे समघातीय समीकरण के रूप में लिखा जा सकता है

$\frac{dy}{dx} = -\frac{3xy+y^2}{x^2+xy}$

अब $y = vx$ व $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ रखने पर,

इसलिए $v + x\frac{dv}{dx} = -\frac{3x^2v + x^2v^2}{x^2+x^2v} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{-2v(v+2)}{v+1}$

$\Rightarrow \frac{1}{x}dx = -\frac{v+1}{2v(v+2)}dv = -\left[\frac{1}{2(v+2)} + \frac{1}{2v(v+2)}\right]dv$

$\Rightarrow -\frac{2}{x}dx = \left[\frac{1}{v+2} + \frac{1}{2v} - \frac{1}{2v(v+2)}\right]$

समाकलन करने पर,

$-2\log_e x = \frac{1}{2}\log(v+2) + \frac{1}{2}\log v + \log c$

$\Rightarrow v(v+2)x^4 = c^2 \Rightarrow \frac{y}{x}\left(\frac{y}{x}+2\right)x^4 = c^2, \left(\because v = \frac{y}{x}\right)$

अतः अभीष्ट हल $(y^2+2xy)x^2 = c^2$ है।

6. (b) यह समघातीय समीकरण है, अतः

$y = vx$ व $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ रखकर हल करें।

7. (c) $(x+y)dx + xdy = 0 \Rightarrow xdy = -(x+y)dx$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x+y}{x}$

यह समघातीय समीकरण है, अतः $y = vx$ व $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

रखने पर, $v + x\frac{dv}{dx} = -\frac{x+vx}{x} = -\frac{1+v}{1}$

$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} = -1-2v \Rightarrow \int\frac{dv}{1+2v} = -\int\frac{dx}{x}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\log(1+2v) = -\log x + \log c \Rightarrow \log\left(1+2\frac{y}{x}\right) = 2\log\frac{c}{x}$

$\Rightarrow \frac{x+2y}{x} = \left(\frac{c}{x}\right)^2 \Rightarrow x^2+2xy = c$

8. (b) $x + y\frac{dy}{dx} = 2y \Rightarrow \frac{x}{y} + \frac{dy}{dx} = 2$

$y = vx$ तथा $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ रखने पर,

$\therefore \frac{1}{v} + v + x\frac{dv}{dx} = 2 \Rightarrow v + x.\frac{dv}{dx} = \frac{2v-1}{v}$

$\Rightarrow \frac{v}{(v-1)^2}dv = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{v-1+1}{(v-1)^2}dv = -\frac{dx}{x}$

$\left[\frac{1}{(v-1)} + \frac{1}{(v-1)^2}\right]dv = -\frac{dx}{x}$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर,

$\int\frac{dv}{v-1} + \int\frac{dv}{(v-1)^2} = -\int\frac{dx}{x}$

$\Rightarrow \log(v-1) - \frac{1}{v-1} = -\log x + c \Rightarrow \log(y-x) = \frac{x}{y-x} + c$

9. (a) $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2+y^2}$

$y = vx$ रखने पर, $\frac{dy}{dx} = v + x.\frac{dv}{dx}$

$\therefore v + x\frac{dv}{dx} = \frac{(x)(vx)}{x^2+v^2x^2}$

$\Rightarrow v + x.\frac{dv}{dx} = \frac{v}{1+v^2} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{-v^3}{1+v^2}$

$\Rightarrow \frac{(1+v^2)}{v^3}dv = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \left(\frac{1}{v^3} + \frac{1}{v}\right)dv = -\frac{dx}{x}$

दोनों पक्षों के समाकलन से, $\int\frac{dv}{v^3} + \int\frac{dv}{v} = -\int\frac{dx}{x}$

$\Rightarrow -\frac{1}{2v^2} + \log v = -\log x - \log c$

$\Rightarrow -\frac{x^2}{2y^2} + \log y = -\log c \Rightarrow \log cy = \frac{x^2}{2y^2}$

$\Rightarrow cy = e^{x^2/2y^2} \Rightarrow c^2y^2 = e^{x^2/y^2}$

$\therefore y^2a = e^{x^2/y^2}$, जहाँ $c^2 = a$

10. (a) $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2y-x}$

$y = vx \Rightarrow v + x\frac{dv}{dx} = \frac{dy}{dx}$ रखने पर,

$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{x}{2v-x} = \frac{1}{2v-1}$

$x\frac{dv}{dx} = \frac{1}{2v-1} - v = \frac{1-2v^2+v}{2v-1} = -\frac{(v-1)(2v+1)}{2v-1}$

$\frac{(2v-1)}{(2v+1)(v-1)} = \frac{-dx}{x}$; $\frac{1}{3(v-1)} + \frac{4}{3(2v+1)} = \frac{-dx}{x}$

$\frac{1}{3}\log(v-1) + \frac{4}{3}.\frac{1}{2}\log(2v+1) = \log\frac{1}{x} + \log c$

$\log(v-1)^{1/3} + \log(2v+1)^{2/3} = \log\frac{c}{x}$

$\Rightarrow (v-1)^{1/3}(2v+1)^{2/3} = \frac{c}{x}$

$\left(\frac{y-x}{x}\right)\left(\frac{2y+x}{x}\right)^2 = \frac{c^3}{x^3} \Rightarrow (x-y)(x+2y)^2 = c$

11. (a) $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\left(\log\frac{y}{x}+1\right)$

$y=vx$ रखने पर, $\frac{dy}{dx}=v+x.\frac{dv}{dx}$

$\therefore v+x.\frac{dv}{dx}=v(\log v+1)$

$v+x\frac{dv}{dx}=v\log v+v \Rightarrow x\frac{dv}{dx}=v\log v \Rightarrow \frac{dv}{v\log v}=\frac{dx}{x}$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर, $\int\frac{dv}{v\log v}=\int\frac{dx}{x}$

$\log\log v=\log x+\log c \Rightarrow \log v=xc$

$\Rightarrow \log(y/x)=xc$.

12. (a) $y=vx \Rightarrow \frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$ रखने पर,

$\therefore v+x\frac{dv}{dx}=\frac{v-1}{v+1} \Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{v-1}{v+1}-v$

$\Rightarrow x\frac{dv}{dx}=-\frac{v^2+1}{v+1} \Rightarrow \int\frac{dx}{x}=-\int\frac{v+1}{v^2+1}dv$

$\Rightarrow -\log_e x=\frac{1}{2}\int\frac{2v}{v^2+1}dv+\int\frac{1}{v^2+1}dv$

$\Rightarrow -\log_e x=\frac{1}{2}\log(v^2+1)+\tan^{-1}v+c$

$\Rightarrow -2\log_e x=\log\left(\frac{x^2+y^2}{x^2}\right)+2\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)+c$

$\Rightarrow \log_e(x^2+y^2)+2\tan^{-1}\frac{y}{x}+c=0$.

13. (a) $\frac{dy}{dx}=\frac{x-y}{x+y}$

$y=vx \Rightarrow \frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$ रखने पर,

$\therefore v+x\frac{dv}{dx}=\frac{x-vx}{x+vx}$

$\Rightarrow v+x\frac{dv}{dx}=\frac{1-v}{1+v} \Rightarrow \frac{1+v}{2-(1+v)^2}dv=\frac{dx}{x}$

समाकलन करने पर, $\int\frac{1+v}{2-(1+v)^2}dv=\int\frac{dx}{x}$

$(1+v)^2=t \Rightarrow 2(1+v)dv=dt$ रखने पर,

$\Rightarrow \frac{1}{2}\int\frac{dt}{2-t}=\int\frac{dx}{x} \Rightarrow -\frac{1}{2}\log(2-t)=\log xc$

$\Rightarrow -\frac{1}{2}\log[2-(1+v)^2]=\log xc$

$\Rightarrow -\frac{1}{2}\log[-v^2-2v+1]=\log xc$

$\Rightarrow \log\frac{1}{\sqrt{1-2v-v^2}}=\log xc$

$\Rightarrow x^2c^2(1-2v-v^2)=1 \Rightarrow y^2+2xy-x^2=c_1$.

14. (b) $(2x-y+1)dx+(2y-x+1)dy=0$

$\frac{dy}{dx}=\frac{2x-y+1}{x-2y-1}$, $x=X+h$, $y=Y+k$ रखने पर,

$\frac{dY}{dX}=\frac{2X-Y+2h-k+1}{X-2Y+h-2k-1}$

$2h-k+1=0$, $h-2k-1=0$

हल करने पर, $h=-1$, $k=-1$; $\therefore \frac{dY}{dX}=\frac{2X-Y}{X-2Y}$

$Y=vX$ रखने पर, $\therefore \frac{dY}{dX}=v+X\frac{dv}{dX}$

$v+X\frac{dv}{dX}=\frac{2X-vX}{X-2vX}=\frac{2-v}{1-2v}$

$X\frac{dv}{dX}=\frac{2-2v+2v^2}{1-2v}=\frac{2(v^2-v+1)}{1-2v}$

$\therefore \frac{dX}{X}=\frac{(1-2v)}{2(v^2-v+1)}dv$

$v^2-v+1=t$ रखने पर, $(2v-1)dv=dt$

$\therefore \frac{dX}{X}=-\frac{dt}{2t}$ $\therefore \log X=\log t^{-1/2}+\log c$

$\therefore X=t^{-1/2}c \Rightarrow X=(v^2-v+1)^{-1/2}.c$

$X^2(v^2-v+1)=$ नियतांक

$(x+1)^2\left(\frac{(y+1)^2}{(x+1)^2}-\frac{(y+1)}{x+1}+1\right)=$ नियतांक

$(y+1)^2-(y+1)(x+1)+(x+1)^2=c$

$y^2+x^2-xy+x+y=c$.

यथातथ्य (Exact) अवकल समीकरण

1. (a) $ydx-xdy+3x^2y^2e^{x^3}dx=0$

$\frac{ydx-xdy}{y^2}+3x^2e^{x^3}dx=0 \Rightarrow d\left(\frac{x}{y}\right)+de^{x^3}=0$

समाकलन करने पर, $\frac{x}{y}+e^{x^3}=c$

2. (b) $xdy=y(dx+ydy) \Rightarrow \frac{xdy-ydx}{y^2}=dy \Rightarrow -d\left(\frac{x}{y}\right)=dy$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर, $\frac{x}{y}+y=c$

$\because y(1)=1 \Rightarrow c=2$; $\therefore \frac{x}{y}+y=2$

$x=-3$ के लिए,

$y^2-2y-3=0 \Rightarrow y=-1$ या $3 \Rightarrow y=3$ $(\because y>0)$

3. (b) $ydx+xdy+xy^2dx-x^2ydy=0$

$\frac{ydx+xdy}{x^2y^2}+\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}=0$

समाकलन करने पर,

$-\frac{1}{xy}+\log x-\log y=k \Rightarrow \log\frac{x}{y}=\frac{1}{xy}+k$

4. (b) $ydx+xdy=-x^2ydy \Rightarrow \frac{1}{(xy)^2}dxy=-\frac{dy}{y}$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर,

$-\frac{1}{xy}=-\log y+c \Rightarrow -\frac{1}{xy}+\log y=c$

5. (a) $[xy\cos(xy)+\sin(xy)]dx+x^2\cos(xy)dy=0$

$xy\cos(xy)dx + x^2\cos(xy)dy + \sin(xy)dx = 0$

$x\cos(xy)(ydx + xdy) + \sin(xy)dx = 0$

$\cot(xy)dxy + \frac{dx}{x} = 0$

$\log\sin(xy) + \log x = k \Rightarrow x\sin(xy) = k$.

6. (b) $xdx - y^3dx + 3xy^2dy = 0$

$y^3 = t$ रखने पर, $dt = 3y^2dy$

$x\,dx - tdx + xdt = 0 \Rightarrow xdx + xdt - tdx = 0$

$\Rightarrow \frac{dx}{x} + d\left(\frac{t}{x}\right) = 0$

समाकलन करने पर, $\log x + \frac{t}{x} = k \Rightarrow \log x + \frac{y^3}{x} = k$

7. (a) $y\,e^{-x/y}dx - (xe^{-x/y} + y^3)dy = 0$

$e^{-x/y}(ydx - xdy) = y^3dy \Rightarrow e^{-x/y}\frac{(ydx - xdy)}{y^2} = ydy$

$e^{-x/y}d\left(\frac{x}{y}\right) = ydy$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर,

$k - e^{-x/y} = \frac{y^2}{2} \Rightarrow \frac{y^2}{2} + e^{-x/y} = k$

8. (b) $xdy + ydx = \sqrt{1 - x^2y^2}\,dx \Rightarrow \frac{xdy + ydx}{\sqrt{1 - x^2y^2}} = dx$

$\frac{dxy}{\sqrt{1 - (xy)^2}} = dx$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर,

$\sin^{-1}xy = x + c \Rightarrow xy = \sin(x + c)$.

9. (a) $\frac{ydx - xdy}{y^2} = -xdx \Rightarrow d\left(\frac{x}{y}\right) = -xdx$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर, $\frac{x}{y} = -\frac{x^2}{2} + c$

$\Rightarrow 2x + x^2y = 2cy \Rightarrow 2x + x^2y = \lambda y \quad [\lambda = 2c]$

10. (d) दिया है $ydx - xdy = xydx$

$\Rightarrow \frac{ydx - xdy}{xy} = dx \Rightarrow d\left[\ln\left(\frac{x}{y}\right)\right] = dx$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर,

$\ln\frac{x}{y} + \ln c = x \Rightarrow ye^x = cx$

11. (a) $x^2dy + y^2dy = xydx \Rightarrow x(xdy - ydx) = -y^2dy$

$\Rightarrow x\frac{(ydx - xdy)}{y^2} = dy \Rightarrow \frac{x}{y}d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{dy}{y}$

समाकलन करने पर, $\frac{x^2}{2y^2} = \log_e y + c$

दिया है $y(1) = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x^2}{2y^2} = \log_e y + \frac{1}{2}$

अब $y(x_0) = e \Rightarrow \frac{x_0^2}{2e^2} - \log_e e - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x_0^2 = 3e^2$

$\Rightarrow x_0 = \pm\sqrt{3}e$

रैखिक अवकल समीकरण

1. (b) वह अवकल समीकरण जिसमें परतन्त्र चर व इसका अवकल गुणांक केवल एक घातीय है एवं एक–दूसरे के गुणांक नहीं होते, रैखिक अवकल समीकरण कहलाता है।

अतः $y\frac{dy}{dx} + 4x = 0$ रैखिक नहीं है।

2. (c) $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \log x$ एक रैखिक अवकल समीकरण है।

3. (a) यह $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ रूप का रेखीय समीकरण है जहाँ $P = \tan x$ व $Q = x^m\cos x$

समाकलन गुणांक (I.F.) $= e^{\int Pdx} = e^{\int \tan dx}$

$= e^{\log\sec x} = \sec x$

अतः हल निम्न प्रकार दिया जाता है

$y.e^{\int Pdx} = \int Q.e^{\int Pdx}dx + c$

$\Rightarrow y.\sec x = \int x^m.\cos x.\sec x dx + c \Rightarrow y\sec x = \frac{x^{m+1}}{m+1} + c$

$\Rightarrow (m+1)y = x^{m+1}\cos x + c(m+1)\cos x$.

4. (b) $(1 + y^2)dx - (\tan^{-1}y - x)dy = 0$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1 + y^2}{\tan^{-1}y - x} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{\tan^{-1}y}{1 + y^2} - \frac{x}{1 + y^2}$

$\Rightarrow \frac{dx}{dy} + \frac{x}{1 + y^2} = \frac{\tan^{-1}y}{1 + y^2}$

यह $\frac{dx}{dy} + Px = Q$ प्रकार का समीकरण है।

अतः I.F. $= e^{\int P\,dy} = e^{\int \frac{1}{1+y^2}.dy} = e^{\tan^{-1}y}$.

5. (a) $\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{1 + x^2}y = \frac{4x^2}{1 + x^2}$

यह $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ प्रकार का समीकरण है।

यहाँ $P = \frac{2x}{1 + x^2}$ व $Q = \frac{4x^2}{1 + x^2}$

I.F. $= e^{\int \frac{2x}{1+x^2}dx} = e^{\log(1+x^2)} = (1 + x^2)$

अतः हल

$y.(1 + x^2) = \int \frac{4x^2}{1 + x^2}(1 + x^2)dx + c = \frac{4x^3}{3} + c$.

परन्तु यह (0,0) से गुजरता है, अतः $c = 0$ इसलिए वक्र $3y(1 + x^2) = 4x^3$ है।

6. (d) $x\frac{dy}{dx}+\frac{3}{(dy/dx)}=y^2 \Rightarrow x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-y^2\frac{dy}{dx}+3=0$

अतः यह एक अरेखीय समीकरण है।

7. (a) दिया गया समीकरण $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=x^2$ निम्न रूप $\frac{dy}{dx}+Py=Q$ का है।

अतः I.F.= $e^{\int\frac{1}{x}dx}=e^{\log x}=x$

अतः अभीष्ट हल $xy=\int x.x^2dx+c$

$\Rightarrow xy=\frac{x^4}{4}+c \Rightarrow 4xy=x^4+4c$

8. (a) $x\frac{dy}{dx}+y=x^2+3x+2 \Rightarrow \frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=x+3+\frac{2}{x}$

यहाँ $P=\frac{1}{x}, Q=x+3+\frac{2}{x}$, इसलिए I.F. $=e^{\int\frac{1}{x}dx}=x$

अब इसे हल करें।

9. (d) $\frac{dy}{dx}+\frac{3x^2}{1+x^3}y=\frac{\sin^2 x}{1+x^3}$

यहाँ $P=\frac{3x^2}{1+x^3} \Rightarrow$ I.F. $=e^{\int P\,dx}=e^{\log(1+x^3)}=1+x^3$

अतः हल

$y.(1+x^3)=\int\frac{\sin^2 x}{1+x^3}(1+x^3)dx=\int\frac{1-\cos 2x}{2}dx$

$\Rightarrow y(1+x^3)=\frac{1}{2}x-\frac{\sin 2x}{4}+c$.

10. (b) $x^2\frac{dy}{dx}+y=e^x$ को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है

$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x^2}=\frac{e^x}{x^2}$, जो कि रेखीय समीकरण है।

11. (b) $x\frac{dy}{dx}+3y=x \Rightarrow \frac{dy}{dx}+\frac{3y}{x}=1$

यह $\frac{dy}{dx}+Py=Q$ रूप का है।

अतः I.F. $=e^{\int Pdx}=e^{3\int\frac{1}{x}dx}=e^{3\log x}=x^3$

अतः अभीष्ट हल

$yx^3=\int x^3\,1\,dx=\frac{x^4}{4}+c \Rightarrow yx^3=\frac{x^4}{4}+c$

12. (a) यह $\frac{dy}{dx}+Py=Q$ रूप का रेखीय समीकरण है

अतः I.F. $=e^{\int 1dx}=e^x$

अतः हल $y.e^x=\int\cos x.e^xdx+c$ है।

$\Rightarrow y=\frac{1}{2}(\cos x+\sin x)+ce^{-x}$

13. (d) $\frac{dy}{dx}+y\cot x=2\cos x$

यह $\frac{dy}{dx}+Py=Q$ रूप का रेखीय समीकरण है

अतः I.F. $=e^{\int Pdx}=e^{\int\cot xdx}=e^{\log\sin x}=\sin x$

अतः अभीष्ट हल $y\sin x=\int 2\sin x\cos xdx+c$

$\Rightarrow y\sin x=-\frac{1}{2}\cos 2x+c \Rightarrow 2y\sin x+\cos 2x=c$ है।

14. (b) $(x+2y^3)\frac{dy}{dx}=y \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{y}{x+2y^3}$

$\Rightarrow \frac{dx}{dy}=\frac{x+2y^3}{y}$ या $\frac{dx}{dy}-\frac{x}{y}=2y^2$,

जो कि $\frac{dx}{dy}+Px=Q$ रूप का है।

अतः (I.F.) $=e^{-\int\frac{1}{y}dy}$ एवं हल

$x\frac{1}{y}=\int\frac{1}{y}2y^2dy+A=y^2+A \Rightarrow x=y^3+Ay$

$\Rightarrow y^3-x=Ay;$

(जहाँ A ऋणात्मक या धनात्मक हो सकता है)

15. (b) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}-y\tan x=-y^2\sec x$

समाकलन गुणांक $=e^{-\int\tan xdx}$

यह बरनौली का समीकरण है अर्थात् समीकरण में परिवर्तनीय समीकरण को y^2 से विभाजित करने पर,

$\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}-\frac{1}{y}\tan x=-\sec x$ .....(i)

$\frac{1}{y}=Y \Rightarrow -\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}=\frac{dY}{dx}$ रखने पर,

समीकरण (i) घटाने पर $-\frac{dY}{dx}-Y\tan x=-\sec x$

$\Rightarrow \frac{dY}{dx}+Y\tan x=\sec x$

यह रेखीय समीकरण है।

अतः समाकलन गुणांक $=e^{\int\tan x\,dx}=\sec x$

16. (c) $\frac{dy}{dx}+y\tan x=\sec x$

I.F. $=e^{\int\tan x\,dx}=e^{\log\sec x}=\sec x$

17. (d) I.F. $=e^{\int a\,dx}=e^{ax}$

$\therefore$ अभीष्ट हल $y.e^{ax}=\int e^{mx}.e^{ax}dx=\frac{e^{(a+m)x}}{a+m}+C$

$\Rightarrow y=\frac{e^{mx}}{a+m}+Ce^{-ax} \Rightarrow y(a+m)=e^{mx}+C(a+m)e^{-ax}$.

18. (a) I.F. $= e^{\int \frac{1}{x\log x}dx} = e^{\log(\log x)} = \log x$.

19. (c) $\frac{dy}{dx} + y\tan x = \sec x$, जहाँ $p = \tan x,\ Q = \sec x$

यह y में एक रेखीय अवकल समीकरण है।

अतः I.F. $= e^{\int pdx} = e^{\int \tan x\,dx}$; I.F. $= e^{\log\sec x} = \sec x$

20. (c) $x\log x\frac{dy}{dx} + y = 2\log x \Rightarrow \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x\log x}y = \frac{2}{x}$

यह y में रैखिक अवकल समीकरण है।

$\therefore$ I.F. $= e^{\int \frac{1}{x\log x}dx} = e^{\log_e \log_e x} = \log x$

$\Rightarrow y.$ (I.F.) $= \int Q\,.(I.F.)\,dx \Rightarrow y\log x = \int \frac{2}{x}.\log x dx$

$\Rightarrow y\log x = (\log x)^2 + c$.

21. (a) $\frac{dy}{dx} + 2\cot x.y = 3x^2\text{cosec}^2 x$

यह y में एक रैखिक अवकल समीकरण है।

I.F. $= e^{2\int \cot x dx} = e^{2\log\sin x} = \sin^2 x$

$y.$ (I.F.)$= \int Q(\text{I.F.})\,dx$

$y.\sin^2 x = \int 3x^2\text{cosec}^2 x.\sin^2 x dx = x^3 + c$

22. (c) $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x$ जो कि रैखिक अवकल समीकरण है।

I.F. $= e^{\int -\frac{1}{x}dx} = \frac{1}{x}$

अतः हल $y\cdot\frac{1}{x} = \int x\cdot\frac{1}{x}dx \Rightarrow \frac{y}{x} = x + a$

$\Rightarrow y = x^2 + ax$

23. (a) I.F. $= e^{\int p.dx} \Rightarrow e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\log_e x} = x$

24. (b) दिये गये समीकरण को निम्न प्रकार लिखने पर,

$\frac{dy}{dx} + y\tan x = \sec x$

$\therefore$ I.F. $= e^{\int \tan x dx} = e^{\log\sec x} = \sec x$

अतः इसका हल है $y\sec x = \int \sec^2 x + c = \tan x + c$

25. (b) $\frac{dy}{dx} + 2y\tan x = \sin x$

$\frac{dy}{dx} + y\,f(x) = g(x)$

अतः इसका समाकल गुणांक

I.F. $= e^{\int f(x)dx} = e^{\int 2\tan x\,dx} = e^{2\log(\sec x)} = e^{\log\sec^2 x} = \sec^2 x$

$\Rightarrow y\,(\text{I.F.}) = \int g(x)\,\text{I.F.}\,dx + c$

$\Rightarrow y(\sec^2 x) = \int \sin x\sec^2 x\,dx + c$

$\Rightarrow y\sec^2 x = \int \sec x\tan x\,dx + c \Rightarrow y\sec^2 x = \sec x + c$

26. (a) I.F. $= e^{\int \sec^2 x\,dx} = e^{\tan x}$

$\therefore$ अभीष्ट हल है $ye^{\tan x} = c + \int \tan x e^{\tan x}\sec^2 x\,dx$

$\Rightarrow y = ce^{-\tan x} + \tan x - 1$

27. (c) $(1 - x^2).\frac{dy}{dx} - xy = 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} - \frac{x}{1 - x^2}.y = \frac{1}{1 - x^2}$

I.F. $= e^{\int p.dx} = e^{\int \frac{-x}{1-x^2}dx} = e^{\frac{1}{2}\log(1-x^2)} = \sqrt{1 - x^2}$.

28. (a) $\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{1 + x^2}y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

I.F. $= e^{\int \frac{2x}{1+x^2}dx} = e^{\log(1+x^2)} = 1 + x^2$

29. (b) $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{3} = 1 \Rightarrow$ I.F. $= e^{\int \frac{1}{3}dx} = e^{x/3}$

अतः $y.e^{x/3} = \int 1.e^{x/3}\,dx + c$

$y.e^{x/3} = 3e^{x/3} + c$; $y = 3 + ce^{-x/3}$.

30. (a) $y + x^2 = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} - y = x^2$

यह y में एक रेखीय अवकल समीकरण है, जहाँ $P = -1, Q = x^2$

I.F. $= e^{\int P.dx} = e^{\int -dx} = e^{-x}$

अतः $y.(\text{I.F}). = \int Q.(\text{I.F})dx + c$

$\Rightarrow ye^{-x} = -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + c$

$\Rightarrow y + x^2 + 2x + 2 = ce^x$

31. (c) $\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$ यह एक रैखिक अवकल समीकरण है।

I.F. $= e^{\int pdx}$

$\therefore$ अभीष्ट हल $ye^{\int pdx} = 0 + c \Rightarrow y = ce^{-\int pdx}$ है।

32. (d) $\frac{dy}{dx} + y = e^{-x} \Rightarrow$ I.F. $= e^{\int dx} = e^x$

$\therefore ye^x = \int e^{-x}.e^x dx + c \Rightarrow ye^x = x + c$

चूँकि $y(0) = 0$, $\therefore\ c = 0$

अतः अभीष्ट हल, $ye^x = x \Rightarrow y = xe^{-x}$

33. (c) यह स्पष्ट है।

34. (b) यह स्पष्ट है।

35. (a) $\frac{dy}{dx} + y = 1$; I.F. $= e^{\int Pdx} = e^{\int dx} = e^x$

अतः हल है $y.e^x = \int e^x dx + c$

$ye^x = e^x + c \Rightarrow y = 1 + ce^{-x}$

36. (a) $\frac{dy}{dx} = 2\cos x - y\cot x \Rightarrow \frac{dy}{dx} + y\cot x = 2\cos x$

I.F. $= e^{\int \cot x dx} = \sin x$

$y.\sin x = \int 2\cos x.\sin x + c$

$y\sin x = \sin^2 x + c$

$y = 2$ और $x = \frac{\pi}{2}$ पर, $c = 1$; $y = \sin x + \text{cosec} x$.

37. (b) $\frac{dy}{dx} + \left(\frac{\log x}{x}\right) y = e^x x^{-\frac{1}{2}\log x}$

$\text{I.F.} = e^{\int \frac{\log x}{x} dx} = e^{\frac{1}{2}(\log x)^2} = \left(e^{\frac{1}{2}(\log x)}\right)^{\log x}$

$= \left(e^{\log \sqrt{x}}\right)^{\log x} = (\sqrt{x})^{\log x}$

38. (a) $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \sin x$; $\text{I.F.} = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\log x} = x$

$\therefore\ yx = \int x\sin x dx \Rightarrow yx = \int x\sin x dx$

$\Rightarrow xy = -x\cos x + \sin x + c \Rightarrow x(y + \cos x) = \sin x + c$.

39. (b) $xdy + ydx + \log y dy = 0 \Rightarrow xdy + ydx = -\log y dy$

$y\frac{dx}{dy} + x = -\log y \Rightarrow \frac{dx}{dy} + \frac{x}{y} = -\frac{\log y}{y}$

$\text{I.F.} = e^{\int \frac{1}{y} dy} = y$

अतः हल है $x.y = -\int y.\frac{\log y dy}{y} + c$

$\Rightarrow xy = -(y\log y - y) + c \Rightarrow xy + (y\log y - y) = c$.

अवकल समीकरण के अनुप्रयोग

1. (a) प्रवणता $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \Rightarrow 2\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y}$

$\Rightarrow 2\log x = \log y + \log c \Rightarrow x^2 = yc$

चूँकि यह (1, 1) से गुजरता है, इसलिए $c = 1$

अतः $x^2 - y = 0 \Rightarrow y = x^2$

2. (a) $\frac{dy}{dx} = \frac{-2xy}{(x^2+1)} \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{2x}{x^2+1}dx$

समाकलन करने पर,

$\log y = -\log(1+x^2) + \log c \Rightarrow y(1+x^2) = c$

चूँकि वक्र (1, 2) से गुजरता है, इसलिए

$c = 2(1+1^2) \Rightarrow c = 4$

अतः हल $y(x^2+1) = 4$ है।

3. (b) $\frac{dx}{x} = \frac{y\,dy}{1+y^2}$

समाकलन करने पर, $\log|x| = \frac{1}{2}\log(1+y^2) + \log c$

या $|x| = c\sqrt{(1+y^2)}$

परन्तु यह (1, 0) से गुजरता है अतः $c = 1$

अतः हल $x^2 = y^2 + 1$ या $x^2 - y^2 = 1$ है।

4. (c) $\frac{dy}{dx} = x + \frac{1}{x^2}$

$\Rightarrow \int dy = \int \left(x + \frac{1}{x^2}\right)dx \Rightarrow y = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + c$

चूँकि यह (3, 9) से गुजरता है। अतः

$9 = \frac{9}{2} - \frac{1}{3} + c \Rightarrow c = \frac{29}{6}$

$\therefore y = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + \frac{29}{6} \Rightarrow 6xy = 3x^3 + 29x - 6$

5. (b) चूँकि $y\frac{dy}{dx} + x = a$ या $ydy + xdx = adx$

समाकलन करने पर, $\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = ax + c$

या $x^2 + y^2 - 2ax + k = 0$

जो कि x-अक्ष पर केन्द्र वाला वृत्त निकाय है।

6. (b) $\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow y = x + \frac{1}{x} + c$

यह $\left(2, \frac{7}{2}\right)$ से गुजरता है, अतः $\frac{7}{2} = 2 + \frac{1}{2} + c \Rightarrow c = 1$

अतः वक्र का समीकरण, $y = x + \frac{1}{x} + 1$ या $xy = x^2 + x + 1$

7. (a) प्रवणता $= \frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y-1}{x^2+x} \Rightarrow \frac{dy}{y-1} = \frac{dx}{x^2+x}$

$\Rightarrow \int \frac{1}{y-1}dy = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx + c \Rightarrow \frac{(y-1)(x+1)}{x} = k$

$x = 1$, $y = 0$ रखने पर $k = -2$ प्राप्त होगा।

अतः वक्र का समीकरण $(y-1)(x+1) + 2x = 0$ है।

8. (c) प्रश्नानुसार, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y} \Rightarrow 2ydy = dx$

समाकलन से $y^2 = x + c$

यह (4,3) से गुजरता है, अतः $9 = 4 + c \Rightarrow c = 5$

अतः वक्र का समीकरण $y^2 = x + 5$ है।

9. (b) $\frac{dx}{dt} = x + 1 \Rightarrow \log(x+1) = t + c$

$t = 0, x = 0$ रखने पर, $\log 1 = c \Rightarrow c = 0$

$\therefore t = \log(x+1)$

$x = 99$ के लिए $t = \log_e 100 = 2\log_e 10$.

10. (b) $ydx - xdy = 0 \Rightarrow \frac{1}{x}dx = \frac{1}{y}dy$

समाकलन करने पर, $\log x = \log y + \log c$

$\Rightarrow \log\frac{x}{y} = \log c \Rightarrow x = cy$

यह मूल बिन्दु से होकर जाने वाली सरल रेखा है।

11. (c) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ तथा $\frac{dy}{dx}$ वक्र का ढाल है।

$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,0)} = \frac{1+0}{1-0} = 1$

12. (c) $\frac{dx}{dt} = \cos^2 \pi x$, t के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\frac{d^2x}{dt^2} = -2\pi \sin 2\pi x =$ ऋणात्मक

$\because \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \Rightarrow -2\pi \sin 2\pi x = 0 \Rightarrow \sin 2\pi x = \sin \pi$

$\Rightarrow 2\pi x = \pi \Rightarrow x = 1/2$

अतः कण बिन्दु $x = \frac{1}{2}$ पर कभी नहीं पहुँचेगा।

13. (a) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$, $y = vx$ रखने पर,

$v + x.\frac{dv}{dx} = \frac{x^2 + v^2x^2}{2vx^2} \Rightarrow \frac{2v}{1-v^2}.dv = \frac{dx}{x}$

समाकलन करने पर, $-\log(1-v^2) = \log x + \log c$

$-\log\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) = \log x + \log c$ .....(i)

यह बिन्दु (2,1) से गुजरता है

$\Rightarrow -\log\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \log 2 + \log c \Rightarrow c = \frac{2}{3}$

समीकरण (i) से, $\log\left(\frac{x^2}{x^2 - y^2}\right) = \log xc$

$\Rightarrow 2(x^2 - y^2) = 3x$

14. (b) दिया है $f''(x) = 6(x-1)$

$f'(x) = 3(x-1)^2 + c_1$ .....(i)

लेकिन वक्र $y = f(x)$ के बिन्दु (2,1) पर स्पर्श रेखा $y = 3x - 5$ है।

अतः $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2} = 3$ या $f'(2) = 3$

तब समीकरण (i) से $f'(2) = 3(2-1)^2 + c_1$

$3 = 3 + c_1 \Rightarrow c_1 = 0$ अर्थात् $f'(x) = 3(x-1)^2$

दिया है $f(2) = 1$

$f(x) = (x-1)^3 + c_2 \Rightarrow f(2) = 1 + c_2$

$\Rightarrow 1 = 1 + c_2 \Rightarrow c_2 = 0$

अतः $f(x) = (x-1)^3$

विविध अवकल समीकरण

1. (b) $x\frac{d^2y}{dx^2} = 1 \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \log x + c_1$

$\Rightarrow y = x\log x - x + c_1x + c_2$ (दो बार समाकलन करने पर)

दिया है, $y = 1$ व $x = 1$ पर $\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow c_1 = 0$ व $c_2 = 2$

अतः अभीष्ट हल $y = x\log x - x + 2$ है।

2. (a) $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}$ दोनों तरफ समाकलन करने परए

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} + c_1 \Rightarrow y = \log x + c_1x + c_2$

3. (b,c) $\cos^2 x\frac{d^2y}{dx^2} = 1 \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \sec^2 x$

समाकलन करने पर, $\frac{dy}{dx} = \tan x \pm c_1$

पुनः समाकलन करने पर, $y = \log \sec x \pm c_1x \pm c_2$

4. (a) $\frac{d^2y}{dx^2} = \sec^2 x + xe^x$

समाकलन करने पर, $\frac{dy}{dx} = \tan x + xe^x - e^x + c_1$

पुनः $y = \log(\sec x) + xe^x - e^x - e^x + c_1x + c_2$

अतः अभीष्ट हल

$y = \log(\sec x) + (x-2)e^x + c_1x + c_2$

5. (a) $\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$ .....(i)

x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\frac{dy}{dx} = a$ .....(ii)

जहाँ a एक स्वेच्छ अचर है

(ii) का x के सापेक्ष समाकलन करने पर

$\int \frac{dy}{dx}dx = \int adx + b \Rightarrow y = ax + b$

जहाँ b दूसरा स्वेच्छ अचर है।

6. (a) हमें दिया है $\frac{d^2y}{dx^2} + \sin x = 0$ या $\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x$

समाकलन करने पर, $\frac{dy}{dx} = -(-\cos x) + c_1 = \cos x + c_1$

पुनः समाकलन करने पर, $y = \sin x + c_1x + c_2$.

7. (b) $\frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2x}$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर, $\frac{dy}{dx} = \frac{e^{-2x}}{-2} + c$

$\Rightarrow y = \frac{e^{-2x}}{4} + cx + d$

Critical Thinking Questions

1. (b) $3\frac{d^2y}{dx^2} = \left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}$

वर्ग करने पर $9\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = \left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^3$

स्पष्टतः उच्चतम अवकल गुणांक $\frac{d^2y}{dx^2}$ की घात 2 है।

2. (a,c) दिया गया वक्र $y^2 = 2c(x + \sqrt{c})$ है,

x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $2y\frac{dy}{dx} = 2c \Rightarrow c = y\frac{dy}{dx}$

अतः अवकल समीकरण है

$$y^2 = 2y\frac{dy}{dx}\left(x + \sqrt{y\frac{dy}{dx}}\right) \Rightarrow \frac{y}{2dy/dx} - x = \sqrt{y\frac{dy}{dx}}$$

वर्ग करके $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ से गुणा करने पर,

$$y\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + xy\left(\frac{dy}{dx}\right) - \frac{y^2}{4} = 0$$

अतः अवकल समीकरण की कोटि 1 और घात 3 है।

3. (b) $y = C_1 e^{2x+C_2} + C_3 e^x + C_4 \sin(x + C_5)$

$= C_1.e^{C_2}e^{2x} + C_3 e^x + C_4(\sin x \cos C_5 + \cos x \sin C_5)$

$= Ae^{2x} + C_3 e^x + B\sin x + D\cos x$

यहाँ $A = C_1 e^{C_2}$, $B = C_4 \cos C_5$, $D = C_4 \sin C_5$

(चूँकि समीकरण में चार स्वेच्छ अचर हैं)

$\therefore$ अवकल समीकरण की कोटि = 4

4. (c) दिये गये अवकल समीकरण की कोटि तथा घात ज्ञात करने के लिए इसे करणीगत चिन्हों से स्वतंत्र होना चाहिए। दोनों पक्षों का घन करने पर,

$$\left(1 + 3.\frac{dy}{dx}\right)^2 = \left(4.\frac{d^3y}{dx^3}\right)^3$$

स्पष्टतः कोटि = 3, घात = 3.

5. (d) चूँकि समीकरण सभी अवकल गुणांकों में एक बहुपद नहीं है, इसलिए इसकी घात परिभाषित नहीं है।

6. (b) $y = Ae^{3x} + Be^{5x}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3Ae^{3x} + 5Be^{5x} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 9Ae^{3x} + 25Be^{5x}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} - 8\frac{dy}{dx} + 15y = 0 \quad \text{(निरीक्षण से)}$$

7. (b) परवलय के कुल का समीकरण जिसका नाभि $(0,0)$ पर तथा अक्ष, x-अक्ष है।

$y^2 = 4a(x + a)$ .....(i)

समीकरण (i) का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$2yy_1 = 4a;\ y^2 = 2yy_1\left(x + \frac{yy_1}{2}\right)$$

$$y = 2xy_1 + yy_1^2 \Rightarrow y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x\frac{dy}{dx} = y.$$

8. (b) दिया है अभिलम्ब की लम्बाई, $y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

$$\therefore\ y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = k \Rightarrow y^2\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = k^2$$

$$\Rightarrow y^2 + y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = k^2 \Rightarrow y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = k^2 - y^2$$

9. (b) $y - x\frac{dy}{dx} = a\left(y^2 + \frac{dy}{dx}\right) \Rightarrow y - ay^2 = (x + a)\frac{dy}{dx}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y(1 - ay)} = \frac{dx}{x + a}$$

दोनों तरफ का समाकलन करने पर,

$$\Rightarrow \log y - \log(1 - ay) = \log(x + a) + \log c$$

$$\Rightarrow \frac{y}{(1 - ay)} = c(x + a) \text{ या } c(x + a)(1 - ay) = y$$

10. (a) $\frac{dy}{dx} + \frac{xy}{\sqrt{a + x}} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{-xdx}{\sqrt{a + x}}$

समाकलन करने पर, $\int\frac{dy}{y} = \int\frac{-x}{\sqrt{x + a}}dx$

$$\log y = -\int\frac{x + a - a}{\sqrt{x + a}}dx = -\int\sqrt{x + a}\,dx + \int\frac{a}{\sqrt{x + a}}dx$$

$$\Rightarrow \log y = -\frac{2}{3}(x + a)^{3/2} + 2a\sqrt{x + a} + \log A$$

$$y = Ae^{-2/3(x+a)^{3/2} + 2a\sqrt{x+a}} = Ae^{\left[(\sqrt{x+a}\left(-\frac{2}{3}(x+a) + 2a\right)\right]}$$

$$= Ae^{\left[\sqrt{x+a}\left(\frac{-2x - 2a + 6a}{3}\right)\right]} = Ae^{[-2/3\sqrt{x+a}(x - 2a)]}$$

या $y = Ae^{[2/3\sqrt{x+a}(2a - x)]}$.

11. (a) यहाँ $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\left(\log\frac{y}{x} + 1\right)$ .....(i)

यह समघातीय समीकरण है।

अतः $y = vx$ व $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ रखने पर समीकरण (i)

$\frac{dv}{v\log v} = \frac{dx}{x}$ में बदल जाता है।

समाकलन करने पर, $\log(\log v) = \log x + \log c$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{y}{x}\right) = cx \Rightarrow y = xe^{cx}$$

12. (a) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{\phi\left(\frac{y}{x}\right)}{\phi'\left(\frac{y}{x}\right)}$

$y = vx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ रखने पर,

$\therefore$ दिए गए अवकल समीकरण से,

$$v + x\frac{dv}{dx} = v + \frac{\phi(v)}{\phi'(v)} \Rightarrow \frac{\phi'(v)}{\phi(v)}dv = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \log\phi(v) = \log x + \log k \Rightarrow \phi(v) = kx \Rightarrow \phi\left(\frac{y}{x}\right) = kx$$

13. (a) $\frac{dx}{dy} + \frac{x^2 - xy + y^2}{y^2} = 0$

$$\frac{dx}{dy} + \left(\frac{x}{y}\right)^2 - \left(\frac{x}{y}\right) + 1 = 0$$

$v = x/y$ रखने पर $\Rightarrow x = vy \Rightarrow \frac{dx}{dy} = v + y\frac{dv}{dy}$

$$v + y\frac{dv}{dy} + v^2 - v + 1 = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v^2 + 1} + \frac{dy}{y} = 0$$

$$\Rightarrow \int\frac{dv}{v^2 + 1} + \int\frac{dy}{y} = 0 \Rightarrow \tan^{-1}(v) + \log y + C = 0$$

$\Rightarrow \tan^{-1}(x/y) + \log y + c = 0$

14. (a) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+y+1} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = x+y+1 \Rightarrow \frac{dx}{dy} - x = y+1$

यह रेखीय समीकरण है, अतः I.F. $= e^{\int -1 dy} = e^{-y}$

अतः समीकरण का हल

$x.e^{-y} = \int (y+1)e^{-y}dy + c \Rightarrow x = ce^{y} - y - 2$

15. (a) $\frac{dy}{dx} + (2x-1)y = 0$; I.F. $= e^{\int (2x-1)dx} = e^{x^2 - x}$

अभीष्ट हल $ye^{x^2-x} = c$ या $y = ce^{x-x^2}$ है।

16. (d) $x(1-x^2)dy + (2x^2y - y - ax^3)dx = 0$

$\frac{dy}{dx} + \frac{(2x^2-1)}{x(1-x^2)}y = \frac{ax^2}{(1-x^2)}$, $\therefore P = \frac{2x^2-1}{x(1-x^2)}$.

17. (c) दिये गये समीकरण को निम्न प्रकार लिखने पर,

$y = x\frac{dy}{dx} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

यदि $\frac{dy}{dx} = p$, तब $y = px - p^2$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$p = p + x\frac{dp}{dx} - 2p\frac{dp}{dx} \Rightarrow \frac{dp}{dx}(x - 2p) = 0 \Rightarrow \frac{dp}{dx} = 0$

x के सापेक्ष समाकलन करने पर, $p = c$

$\therefore \frac{dy}{dx} = c$; $\therefore y = cx - c^2$

यदि $c = 2$, तब $y = 2x - 4$.

18. (c) चूँकि $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \cos^2\left(\frac{y}{x}\right)$

$y = vx$ रखने पर $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

$\therefore v + x\frac{dv}{dx} = v - \cos^2 v$ या $\frac{dv}{\cos^2 v} = -\frac{dx}{x}$

समाकलन करने पर, $\tan v = -\log x + \log c$

$\Rightarrow \tan\left(\frac{y}{x}\right) = -\log x + \log C$

यह $\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$ से गुजरता है, अतः $1 = \log c$

$\Rightarrow \tan\left(\frac{y}{x}\right) = -\log x + \log e \Rightarrow y = x\tan^{-1}\left[\log\left(\frac{e}{x}\right)\right]$

19. (a) अभिलम्ब की लम्बाई $= y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ है। यह दिया है कि

$y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$

($\because$ त्रिज्या सदिश $= r = \sqrt{x^2 + y^2}$)

$\Rightarrow y^2 + y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = x^2$

$\Rightarrow ydy \pm xdx = 0 \Rightarrow y^2 \pm x^2 = k$

20. (d) $\frac{dy}{dx} = 1 + y^2 \Rightarrow \frac{dy}{1+y^2} = dx$

समाकलन करने पर,

$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int dx \Rightarrow \tan^{-1} y = x + c$

$x = 0$ पर, $y = 0$, तब $c = 0$

$x = \pi$ पर, $y = 0$, तब $\tan^{-1} 0 = \pi + c \Rightarrow c = -\pi$

$\therefore \tan^{-1} y = x \Rightarrow y = \tan x = \phi(x)$

अतः $y = \tan x$ समीकरण का हल है

लेकिन $\tan x$ अंतराल $(0, \pi)$ में सतत् नहीं है।

अतः $\phi(x)$ अंतराल $(0, \pi)$ में संभव नहीं है।

21. (c) माना P_0 प्रारम्भिक जनसंख्या है तथा माना t वर्ष पश्चात् जनसंख्या P है, तब $\frac{dP}{dt} = kP \Rightarrow \frac{dP}{P} = k\,dt$

समाकलन करने पर, $\log P = kt + c$

$t = 0$ पर, $P = P_0$ पर

$\therefore \log P_0 = 0 + c$; $\therefore \log P = kt + \log P_0 \Rightarrow \log\frac{P}{P_0} = kt$

जब $t = 5$ घण्टे, $P = 2P_0$

$\therefore \log\frac{2P_0}{P_0} = 5k \Rightarrow k = \frac{\log 2}{5}$; $\therefore \log\frac{P}{P_0} = \frac{\log 2}{5}t$

जब $t = 25$ घण्टे,

$\log\frac{P}{P_0} = \frac{\log 2}{5} \times 25 = 5\log 2 = \log 32$; $\therefore P = 32P_0$.

22. (a) $\frac{d^2y}{dx^2} = \cos x - \sin x$

दोनों तरफ समाकलन करने पर, $\frac{dy}{dx} = \sin x + \cos x + c_1$

पुनः $y = -\cos x + \sin x + c_1 x + c_2$.

23. (a) $x^4\frac{dy}{dx} + x^3 y + \text{cosec}(xy) = 0$

$x^4 dy + x^3 y\,dx + \text{cosec}\,(xy)dx = 0$

$x^3(x\,dy + y\,dx) + \text{cosec}\,(xy)dx = 0$

$x^3 d(xy) + \text{cosec}\,(xy)dx = 0$

$\frac{d(xy)}{\text{cosec}\,(xy)} + \frac{dx}{x^3} = 0$

दोनों तरफ समाकलन करने पर, $\int \frac{d(xy)}{\text{cosec}\,(xy)} + \int \frac{dx}{x^3} = 0$

$\int \sin(xy)d(xy) + \int x^{-3}dx = 0$

$-\cos(xy) + \left(\frac{x^{-2}}{-2}\right) = c$; $2\cos(xy) + x^{-2} = c$.

24. (d) $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\log x}{x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-(\log x + 1)}{x} + c$

$\frac{dy}{dx} = -1$ पर, $x = 1, y = 0, \therefore c = 0$

$\Rightarrow y = -\int \frac{\log x + 1}{x} dx = -\frac{1}{2}(\log x)^2 - \log x$.

25. (b) $y \cos x + x \cos y = \pi$

x के सापेक्ष दोनों पक्षों का अवकलन करने पर,

$-y \sin x + \cos x . y' + x(-\sin y) y' + \cos y$

पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$-y'' \sin x - y \cos x + \cos x . y'' + \sin x . y' - \sin y . y'$

$- x[\cos y . (y')^2 + \sin y . y''] - \sin y . y'$

$x = 0$ रखने पर $-y + y'' - 2 \sin y \, y' = 0$

$y'' = y + 2y' \sin y$

$x = 0$ पर $y = \pi$; $(y'')_0 = \pi$.

अवकल समीकरण

SET Self Evaluation Test - 25

s

1. अवकल समीकरण जिसका व्यापक हल $y = (c_1 + c_2)\cos(x + c_3) - c_4 e^{x+c_5}$ है, जहाँ c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 स्वेच्छ अचर हैं, की कोटि होगी [IIT 1998; DCE 2005]
   (a) 5 (b) 4
   (c) 3 (d) 2

2. अवकल समीकरण $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^{1/2} = y^3$ की घात है [Roorkee 1999]
   (a) 1/2 (b) 2
   (c) 3 (d) 4

3. मूल बिन्दु से गुजरने वाले तथा x-अक्ष पर केन्द्र वाले सभी वृत्तों का अवकल समीकरण होगा [Kurukshetra CEE 1998; Karnataka CET 2005]
   (a) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + x^2}{2xy}$ (b) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + x^2}{2x}$
   (c) $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$ (d) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$

4. वक्रों $x^2 + y^2 - 2ay = 0$, जहाँ a एक स्वेच्छ नियतांक है, के कुल के लिए अवकल समीकरण है [AIEEE 2004]
   (a) $(x^2 + y^2)y' = 2xy$ (b) $2(x^2 + y^2)y' = 2xy$
   (c) $(x^2 - y^2)y' = 2xy$ (d) $2(x^2 - y^2)y' = xy$

5. अवकल समीकरण $\sec^2 x \tan y dx + \sec^2 y \tan x dy = 0$ का हल है [AISSE 1983; Karnataka CET 1999; MP PET 2003; UPSEAT 2004]
   (a) $\tan x = c \tan y$ (b) $\tan x = c \tan(x + y)$
   (c) $\tan x = c \cot y$ (d) $\tan x \sec y = c$

6. यदि $\frac{dy}{dx} = 1 + x + y + xy$ तथा $y(-1) = 0$ है, तब फलन y है [MP PET 1998]
   (a) $e^{(1-x)^2/2}$ (b) $e^{(1+x)^2/2} - 1$
   (c) $\log_e(1 + x) - 1$ (d) $1 + x$

7. अवकल समीकरण $y' = 1 + x + y^2 + xy^2$, $y(0) = 0$ का हल है [MP PET 2000]
   (a) $y^2 = \exp\left(x + \frac{x^2}{2}\right) - 1$
   (b) $y^2 = 1 + c\ \exp\left(x + \frac{x^2}{2}\right)$
   (c) $y = \tan(c + x + x^2)$
   (d) $y = \tan\left(x + \frac{x^2}{2}\right)$

8. यदि समीकरण $(1 + t)\frac{dy}{dt} - ty = 1$ तथा $y(0) = -1$ का हल $y(t)$ है, तब $y(1)$ का मान है [IIT Screening 2003]
   (a) $-\frac{1}{2}$ (b) $e + \left(\frac{1}{2}\right)$
   (c) $e - \frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{2}$

9. समीकरण $x\frac{dy}{dx} = y - x\tan\left(\frac{y}{x}\right)$ का हल है [Roorkee 1982]
   (a) $x\sin\left(\frac{x}{y}\right) + c = 0$ (b) $x\sin y + c = 0$
   (c) $x\sin\left(\frac{y}{x}\right) = c$ (d) इनमें से कोई नहीं

10. समीकरण $ydx - xdy + \log x dx = 0$ का हल है
   (a) $y = cx - (1 + \log x)$ (b) $y = cx + (1 + \log x)$
   (c) $y + cx + (1 + \log x) = 0$ (d) इनमें से कोई नहीं

11. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + \frac{2xy}{1 - x^2} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$ का समाकलन गुणांक है [AMU 1999]
   (a) $(1 + x^2)^{-1}$ (b) $(1 - x^2)^{-1}$
   (c) $x/(1 - x^2)$ (d) $x/\sqrt{1 - x^2}$

12. अवकल समीकरण $y' = y\tan x - 2\sin x$ का हल है [AMU 1999]
   (a) $y = \tan x + 2c\cos x$ (b) $y = \tan x + c\cos x$
   (c) $y = \tan x - 2c\cos x$ (d) इनमें से कोई नहीं

13. अवकल समीकरण $(1 + y^2) + \left(x - e^{\tan^{-1} y}\right)\frac{dy}{dx} = 0$ का हल है [AIEEE 2003; DCE 2005]
   (a) $(x - 2) = ke^{\tan^{-1} y}$ (b) $2xe^{\tan^{-1} y} = e^{2\tan^{-1} y} + k$
   (c) $xe^{\tan^{-1} y} = \tan^{-1} y + k$ (d) $xe^{2\tan^{-1} y} = e^{\tan^{-1} y} + k$

14. एक वक्र की स्थिति इस प्रकार है कि इसके किसी बिन्दु पर स्पर्शी का ढाल, मूल बिन्दु को उस बिन्दु से मिलाने वाली रेखा के ढाल का दुगना है, तब वक्र है [Orissa JEE 2003]
   (a) एक वृत्त (b) एक दीर्घवृत्त
   (c) एक परवलय (d) एक अतिपरवलय

15. यदि बिन्दु $\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$ से जाने वाले वक्र के किसी बिन्दु (x, y) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $\left\{\frac{y}{x} - \sin^2\left(\frac{y}{x}\right)\right\}$ है, तब वक्र का समीकरण है [MP PET 1998]
   (a) $y = \cot^{-1}(\log_e x)$ (b) $y = \cot^{-1}\left(\log_e \frac{x}{e}\right)$
   (c) $y = x\cot^{-1}(\log_e ex)$ (d) $y = \cot^{-1}\left(\log_e \frac{e}{x}\right)$

Answers and Solutions

(SET - 25)

1. (c) $y=(c_1+c_2)\cos(x+c_3)-c_4e^{x+c_5}$

$y_1=-(c_1+c_2)\sin(x+c_3)-c_4e^{x+c_5}$

$y_2=-(c_1+c_2)\cos(x+c_3)-c_4e^{x+C_5}=-y-2c_4e^{x+c_5}$

$\Rightarrow y_3=-y_1-2c_4e^{x+c_5}=-y_1+y_2+y$

अतः अवकल समीकरण $y_3-y_2+y_1-y=0$ है तथा इसकी कोटि 3 है।

2. (d) $\left(\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2-y^3\right)^2=\frac{dy}{dx}$

अतः समीकरण से स्पष्ट है कि घात 4 है।

3. (d) प्रश्नानुसार, वृत्त का समीकरण

$x^2+y^2-2hx=0$ .....(i)

जहाँ $h=$ त्रिज्या

x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $2x+2y\frac{dy}{dx}-2h=0$

$\therefore\ h=x+y\frac{dy}{dx}$

समीकरण (i) में रखने पर, $x^2+y^2-2x\left(x+y\frac{dy}{dx}\right)=0$

$x^2+y^2-2x^2-2xy\frac{dy}{dx}=0$

$y^2-x^2-2xy\frac{dy}{dx}=0$, $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-x^2}{2xy}$.

4. (c) दिया गया वक्र का कुल है

$x^2+y^2-2ay=0$ .....(i)

$\therefore\ 2x+2yy'-2ay'=0$ .....(ii)

$2a$ का मान समीकरण (ii) से (i) में रखने पर,

$2x+2yy'-\frac{x^2+y^2}{y}y'=0$

$\Rightarrow 2xy+(y^2-x^2)y'=0$

$\Rightarrow (x^2-y^2)y'=2xy$

5. (c) $\sec^2x\tan y\,dx+\sec^2y\tan x\,dy=0$

$\Rightarrow \frac{\sec^2x}{\tan x}dx+\frac{\sec^2y}{\tan y}dy=0$

समाकलन करने पर, $\log\tan x+\log\tan y=\log c$

$\Rightarrow \log(\tan x\tan y)=\log c\ \Rightarrow\ \tan x=c\cot y$

6. (b) $\frac{dy}{dx}=1+x+y+xy$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=(1+x)+y(1+x)$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=(1+x)(1+y)$

$\Rightarrow \frac{dy}{(1+y)}=dx(1+x)$

समाकलन करने पर, $\int\frac{dy}{(1+y)}=\int dx(1+x)$

$\log(1+y)=x+\frac{x^2}{2}+\log c$

$y=ce^{x+(x^2/2)}-1$

$\Rightarrow y(-1)=ce^{-1+(1/2)}-1=0$

$\therefore ce^{-1/2}=1\ \Rightarrow\ c=e^{1/2}$

$\therefore y=e^{1/2}e^{x+\frac{x^2}{2}}-1$, $y=e^{\frac{(x+1)^2}{2}}-1$.

7. (d) दिया है, $\frac{dy}{dx}=1+x+y^2+xy^2$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=(1+x)+y^2(1+x)\ \Rightarrow\ \frac{dy}{dx}=(1+x)(1+y^2)$

$\Rightarrow \frac{dy}{1+y^2}=(1+x)dx$

समाकलन करने पर, $\int\frac{dy}{1+y^2}=\int(1+x)dx$

$\Rightarrow\ \tan^{-1}y=x+\frac{x^2}{2}+c$

$y(0)=0$ रखने पर, $\therefore 0=0+0+c\Rightarrow c=0$

$\therefore \tan^{-1}y=x+\frac{x^2}{2}\ \Rightarrow\ y=\tan\left(x+\frac{x^2}{2}\right)$.

8. (a) पदों को पुनः व्यवस्थित करने पर, $\frac{dy}{dt}-\frac{t}{1+t}y=\frac{1}{1+t}$

I.F. $=e^{\int-\frac{t}{1+t}dt}=e^{-t}.(1+t)$

$\therefore$ हल है, $ye^{-t}.(1+t)=\int(1+t).e^{-t}\frac{1}{(1+t)}+c$

$ye^{-t}(1+t)=-e^{-t}+c$

$\because y(0)=-1\Rightarrow c=0\Rightarrow y(1)=\frac{-1}{2}$

9. (c) $x\frac{dy}{dx} = y - x\tan\left(\frac{y}{x}\right)$ या $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \tan\left(\frac{y}{x}\right)$

यह समघातीय समीकरण है अतः $y = vx$ रखने पर,

$v + x\frac{dv}{dx} = v - \tan v$

$\Rightarrow \int \cot v dv = -\int \frac{dx}{x}$

$\Rightarrow \log(x\sin v) = \log c \Rightarrow x\sin\left(\frac{y}{x}\right) = c$

10. (a) समीकरण $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = \frac{\log x}{x}$ है, अतः

I.F. $= e^{\int -\frac{1}{x}dx} = e^{-\log x} = \frac{1}{x}$

अभीष्ट हल $y.\frac{1}{x} = \int \frac{\log x}{x} \times \frac{1}{x}dx$

$\Rightarrow \frac{y}{x} = -\frac{\log x}{x} - \frac{1}{x} + c$

$\Rightarrow y = cx - (1 + \log x)$

11. (b) I.F. $= e^{\int \frac{2x}{1-x^2}dx} = e^{-\log(1-x^2)} = e^{\log(1-x^2)^{-1}} = (1-x^2)^{-1}$.

12. (d) $y' = y\tan x - 2\sin x \Rightarrow \frac{dy}{dx} - y\tan x = -2\sin x$

I.F. $= e^{-\int \tan x\, dx} = e^{\log\cos x} = \cos x$

$\therefore y\cos x = \int(-2\sin x)(\cos x)dx + c$

$\Rightarrow y\cos x = -\int \sin 2x\, dx + c$

$\Rightarrow 2y\cos x = \cos 2x + c$

13. (b) $(1+y^2) + (x - e^{\tan^{-1}y})\frac{dy}{dx} = 0$

$(1+y^2)\frac{dx}{dy} + x = e^{\tan^{-1}y}$

$\frac{dx}{dy} + \frac{x}{(1+y^2)} = \frac{e^{\tan^{-1}y}}{(1+y^2)}$

I.F. $= e^{\int \frac{1}{1+y^2}dy} = e^{\tan^{-1}y}$

$\Rightarrow x\left(e^{\tan^{-1}y}\right) = \int \frac{e^{\tan^{-1}y}}{1+y^2}e^{\tan^{-1}y}dy$

$\Rightarrow x\left(e^{\tan^{-1}y}\right) = \frac{e^{2\tan^{-1}y}}{2} + c$,

$\therefore 2xe^{\tan^{-1}y} = e^{2\tan^{-1}y} + k$.

14. (c) $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \Rightarrow \log y = 2\log x + \log c \Rightarrow y = cx^2$.

15. (c) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \sin^2\left(\frac{y}{x}\right)$

$y = vx$ रखने पर $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

$v + x\frac{dv}{dx} = v - \sin^2 v \Rightarrow -\text{cosec}^2 v\, dv = \frac{dx}{x}$

समाकलन करने पर, $-\int \text{cosec}^2 v\, dv = \int \frac{dx}{x}$

$\Rightarrow \cot v = \log x + c$, $\cot\frac{y}{x} = \log x + c$

चूँकि यह वक्र बिन्दु $\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$ से होकर गुजरता है

$\therefore c = 1 \Rightarrow \cot\frac{y}{x} = \log x + \log_e e$

$\cot\frac{y}{x} = \log x e \Rightarrow y = x\cot^{-1}(\log x e)$

* * *