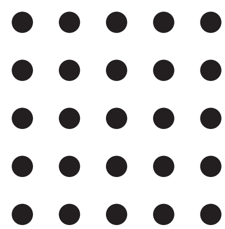
अध्याय–1
वर्ग एवं घन
SQUARE & CUBE

8N3ZVR

वर्ग संख्याएँ (Square Numbers)

नीचे दिए गए चित्र के प्रत्येक पंक्ति (आड़ी) एवं स्तम्भ (खड़ी) में बिन्दुओं की संख्या समान हैं। इनमें से प्रत्येक में 5–5 बिन्दु हैं, इन बिन्दुओं की कुल संख्या कितनी होगी?



चित्र 1

इसी प्रकार प्रत्येक पंक्ति तथा स्तम्भ में समान संख्या में दो–दो, तीन–तीन, चार–चार, आठ–आठ इत्यादि बिन्दु लेकर कुछ वर्गाकार पैटर्न (प्रतिरूप) बनाइए तथा तालिका की पूर्ति कीजिए–

सारणी 1.1
Table 1.1

क्रमांक	प्रत्येक पंक्ति या स्तम्भ में बिन्दुओं की संख्या	बनाए गए पैटर्न में बिन्दुओं की कुल संख्या
1.	5	25
2.	2	-------
3.	-------	9
4.	4	-------
5.	-------	-------
6.	-------	-------

अंतिम स्तम्भ की सभी संख्याएँ ऐसी हैं जो एक संख्या को उसी से गुणा करके प्राप्त की गई हैं। $25 = 5 \times 5$, $4 = 2 \times 2$, ये सभी संख्याएँ 1, 4, 9, 16, 25,... इत्यादि पूर्ण वर्ग संख्याएँ (Perfect Square Number) कहलाती हैं। आप भी 5 और पूर्ण वर्ग संख्याएँ लिखें।

इन संख्याओं को हमने स्वयं पूर्ण वर्ग संख्या बनाया है। अब यदि आपको कोई संख्या दी जाए तो कैसे पता करेंगे कि वह संख्या पूर्ण वर्ग संख्या है अथवा नहीं?

पूर्ण वर्ग संख्या की पहचान (Recognizing a Perfect Square Number)

आप पायेंगे कि 9 बिन्दुओं को तीन–तीन बिन्दुओं की तीन पँक्तियों में जमा सकते हैं,16 बिन्दुओं को चार–चार की चार पँक्तियों में जमा सकते हैं, किन्तु 10, 11, 12 बिन्दु होने पर उन्हें इस तरह नहीं जमाया जा सकता कि पँक्तियों की संख्या और प्रत्येक पँक्ति में बिन्दुओं की संख्या बराबर हो। चाहें तो कोशिश करके देख लें। 10, 11, 12 बिन्दु होने पर तो हम इस प्रकार जमा कर देखने का प्रयास कर सकते हैं किन्तु यदि बिन्दुओं की संख्या 109 हो, 784 हो या और भी बड़ी हो तो इस तरह बिन्दुओं को जमा कर जाँचना कठिन हो जायेगा। पूर्ण वर्ग संख्या पहचानने के लिए एक अच्छा तरीका है अभाज्य गुणनखण्ड की विधि।

अभाज्य गुणनखण्ड व पूर्ण वर्ग संख्या की पहचान (The Prime factor and the identification of the Perfect Square Number)

पूर्ण वर्ग संख्या में पंक्तियों की संख्या और प्रत्येक पंक्ति में बिन्दुओं की संख्या बराबर है। जैसे पूर्ण वर्ग संख्या $6 \times 6, 5 \times 5, 3 \times 3, 7 \times 7$ इत्यादि।

जिस संख्या में भी इस तरह गुणनखण्डों के जोड़े पूरे–पूरे बन जाए वही पूर्ण वर्ग संख्या होगी। इसके लिए हम दी गई संख्या के गुणनखण्ड कर लेंगे और फिर जोड़े बनाएँगे।

अभाज्य गुणनखण्ड की विधि (The Prime Factorisation Method)

इस विधि में दी गई संख्या के अभाज्य गुणनखण्ड करके जोड़े बनाते हैं। जिन संख्याओं में सभी समान अभाज्य गुणनखण्डों के जोड़े बन जाते हैं, वे पूर्ण वर्ग संख्या होंगी।

जैसे – (1) **144** को लें

144 के अभाज्य गुणनखण्ड हैं – $\underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3}$

यहाँ 144 में सभी अभाज्य गुणनखण्डों के जोड़े बन रहे हैं।

अतः 144 पूर्ण वर्ग संख्या हैं।

2	144
2	72
2	36
2	18
3	9
3	3
	1

(2) **252** को देखें

252 के अभाज्य गुणनखण्ड हैं – $\underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3} \times 7$

इसमें 7 का कोई जोड़ा नहीं है

अर्थात् 252 पूर्ण वर्ग संख्या नहीं है।

2	252
2	126
3	63
3	21
7	7
	1

क्रियाकलाप 1. (Activity 1)

नीचे दी गई सारणी में संख्याओं के अभाज्य गुणनखण्ड ज्ञात कर रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए

सारणी 1.2

क्र.सं.	संख्या	अभाज्य गुणनखण्ड	क्या सभी समान अभाज्य गुणनखण्डों के जोड़े बन रहे हैं?	पूर्ण वर्ग है या नहीं
1.	16	$\underline{2\times 2}\times\underline{2\times 2}$	हाँ	पूर्ण वर्ग हैं
2.	32	$\underline{2\times 2}\times\underline{2\times 2}\times 2$	नहीं	नहीं
3.	36			
4.	48			
5.	40			
6.	49			
7.	56			
8.	64			

अब इन्हें भी जाँचिए कि नीचे दी गई संख्याएँ पूर्ण वर्ग संख्या हैं या नहीं –

(i) 164 (ii) 256 (iii) 81 (iv) 120 (v) 576
(vi) 205 (vii) 625 (viii) 324 (ix) 216 (x) 196

पूर्ण वर्ग संख्याओं के कुछ गुण (Some characteristics of Perfect Square Numbers)

इकाई का अंक देख पूर्ण वर्ग की पहचान–

नीचे सारणी में दी गई पूर्ण वर्ग संख्याओं जैसे 4, 9, 16, 25, 81, 100,169, 324, 256, 625 आदि को ध्यान से देखिए। क्या कोई ऐसी पूर्ण वर्ग संख्या है, जिसमें इकाई के स्थान पर 2, 3, 7 अथवा 8 है? कुछ और संख्याए लेकर देखें क्या आप इनसे कुछ निष्कर्ष निकाल सकते हैं? आइए, इस सारणी को देखें –

सारणी 1·3

संख्या	पूर्ण वर्ग संख्या	संख्या	पूर्ण वर्ग संख्या
1	1	2	4
3	9	4	16
5	25	6	36
7	49	8	64
9	81	10	100
11	121	12	144
.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....

आप इस तालिका को और आगे बढ़ा सकते हैं।

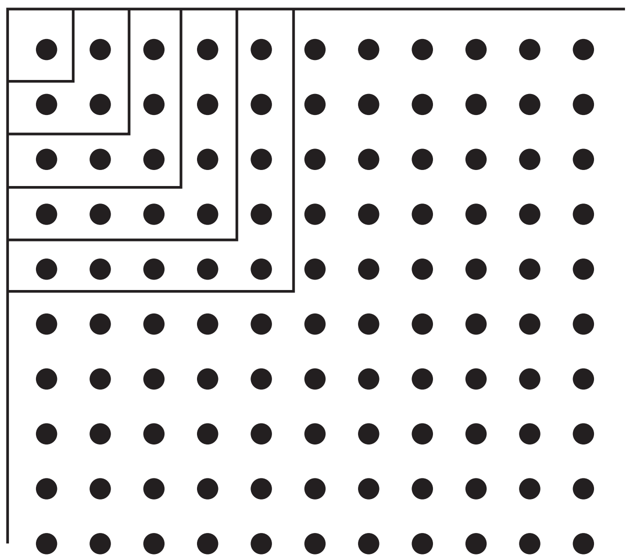
तालिका में दी गई विषम एवं सम संख्याओं के पूर्ण वर्ग किस प्रकार के हैं? नीचे ✓ का चिह्न लगाएँ।

विषम संख्याओं का पूर्ण वर्ग – विषम / सम

सम संख्याओं का पूर्ण वर्ग – विषम / सम

एक और मज़ेदार बात – (Another Interesting Observation)

नीचे दिए गए चित्र का अवलोकन करें –



चित्र 2

चित्र में एक किनारे से आरम्भ करके विभिन्न वर्गों की रचना की गई है। इन वर्गों के हिस्से अपने आप नये वर्गों में शामिल होते गए हैं। यदि हम सब हिस्सों में शामिल बिन्दुओं को अलग–अलग जोड़ें तो हम देखते हैं कि वर्गों में बिन्दुओं की संख्या इस प्रकार से है–

पहला वर्ग	1	=	1	=	1^2
दूसरा वर्ग	1 + 3	=	4	=	2^2
तीसरा वर्ग	1 + 3 + 5	=	9	=	3^2
चौथा वर्ग	1 + 3 + 5 + 7	=	16	=	4^2
पांचवा वर्ग	1 + 3 + 5 + 7+9	=	25	=	5^2
छठा वर्ग	1 + 3 + ...	=	36	=	6^2
सातवा वर्ग	....	=	.....	=	....
आठवा वर्ग	....	=	....	=	....

इसको आगे बढ़ाने पर हम देख सकते हैं कि जो भी वर्ग लें उसमें बिन्दुओं की कुल संख्या भी

पूर्ण वर्ग है। क्या आप बता सकते हैं कि ऐसे आठवे वर्ग में और दसवे वर्ग में कुल कितने बिन्दु होंगे?

हमने देखा कि पहले, दूसरे ...... आदि वर्गों में शामिल कुल बिन्दु इस प्रकार हैं।

पहला वर्ग = पहली विषम संख्या = 1^2

दूसरा वर्ग = पहली दो विषम संख्याओं का योग = 2^2

तीसरा वर्ग = पहली तीन विषम संख्याओं का योग = 3^2

और इसी तरह से आगे भी जैसे, पहली 8 विषम संख्याओं का योग 8^2 के बराबर होता है। हम कितना भी आगे जाए यह बात सही निकलती है।

इस प्रकार हम यह देख सकते हैं कि किसी भी प्राकृत संख्या n का वर्ग प्रारंभिक n विषम संख्याओं के योगफल के बराबर होता है।

कुछ और मनोरंजक पैटर्न –

1, 11, 111.... की वर्ग संख्याओं को देखें –

1^2 = 1

11^2 = 1 2 1

111^2 = 1 2 3 2 1

1111^2 = 1 2 3 4 3 2 1

11111^2 = - - - - - - - - - - -

111111^2 = - - - - - - - - - - - -

क्रियाकलाप 2. (Activity 2)

अपने मित्र से दो क्रमागत संख्या बोलने को कहें। उन संख्याओं को मौखिक रूप से जोड़कर अपने कॉपी में लिख लें। मित्र को उन दो क्रमागत संख्याओं की वर्ग संख्याएँ पता करने को कहें और बड़ी वर्ग संख्या में से छोटी वर्ग संख्या घटाने को कहें। बाद में अपनी कॉपी में लिखी संख्या को दिखा दें। दोनों संख्याएँ बराबर हैं न?

यह कैसे हुआ?

क्या आप सोच सकते हैं कि ऐसा कैसे होगा? निम्न प्रतिरूपों का अवलोकन करें।

$4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7 = 4 + 3,$

$9^2 - 8^2 = 81 - 64 = 17 = 9 + 8,$

$13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25 = 13 + 12$

इन उदाहरणों को देखिए

$3^2 + 4^2 = 9+16= 25 = 5^2,$ $6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 = 10^2$

$5^2 +12^2= 25+144 =169=13^2$ अर्थात् $5^2 + 12^2 = 13^2$

आप भी कुछ और ऐसे उदाहरण खोजें। आप देखेंगे कि हर उदाहरण में संख्याओं की एक तिगड़ी है। इस प्रत्येक तिगड़ी में विशेष प्रकार की संख्याएँ हैं। बड़ी संख्या का वर्ग, शेष दो संख्याओं के वर्गों के योगफल के बराबर है। इस प्रकार की संख्याएँ पाइथोगोरीय त्रिक कहलाती हैं। त्रिक याने तीन संख्याओं की तिगड़ी।

जैसे – (3, 4, 5), (6, 8, 10) एवं (5, 12, 13) पाइथोगोरीय त्रिक हैं।

उदाहरण 1. जाँच कीजिए कि (9, 40, 41) पाइथोगोरीय त्रिक है या नहीं?

हल: यहाँ $9^2 + 40^2 = 81 + 1600 = 1681$

तथा $41^2 = 1681$

अतः $9^2 + 40^2 = 41^2$, अतः (9, 40, 41) पाइथागोरीय त्रिक है।

अभ्यास 1 (PRACTICE - 1)

जाँच कीजिए कि नीचे दिए गए त्रिक पाइथागोरीय त्रिक हैं अथवा नहीं ?

(i) (5, 12, 13) (ii) (8, 15, 17)

(iii) (10, 15, 25) (iv) (4, 7, 11)

टिप्पणी : हमारे देश में संख्याओं का यह सम्बन्ध बहुत पहले से ज्ञात था। ऐसा माना जाता है कि 600 ईसा पूर्व एक भारतीय गणितज्ञ बोधायन ने इसे सर्वाधिक व्यापक रूप में व्यक्त किया और अनेक संख्यात्मक उदाहरणों के द्वारा स्पष्ट किया।

संख्याओं से पूर्ण वर्ग संख्याएँ बनाना (Making Perfect Squares From numbers)

जैसा कि पृष्ठ क्र. 2 में आपने देखा कि 252 के गुणनखण्डों में अभाज्य गुणनखंड 2 और 3 के जोड़े बन गए किन्तु अभाज्य गुणनखंड 7 का जोड़ा नहीं बना।

यदि इसमें 7 का गुणा या भाग कर दिया जाता तो सभी गुणनखण्डों के जोड़े बन जाएंगे, अर्थात 7 वह न्यूनतम संख्या है जिसका 252 से गुणा या भाग करने पर गुणनफल या भागफल पूर्ण वर्ग हो जायेगा। आइये, इसे कुछ उदाहरणो से समझे –

उदाहरण 2. वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 720 को गुणा करने पर प्राप्त संख्या पूर्ण वर्ग हो।

हल: $720 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3} \times 5$

720 के अभाज्य गुणनखण्डों में केवल 5 का जोड़ा नहीं बना। अतः पूर्ण वर्ग संख्या वह होगी जिसमें 5 का भी जोड़ा बन जाए इसके लिए हमें 720 को 5 से गुणा करना होगा।

अतः 5 वह छोटी से छोटी संख्या है, जिसका 720 से गुणा करने पर प्राप्त संख्या पूर्ण वर्ग होगी।

उदाहरण 3. वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 140 को भाग देने पर भागफल पूर्ण वर्ग संख्या हो।

हल: $140 = \underline{2 \times 2} \times 5 \times 7$

140 के अभाज्य गुणनखण्डों में अभाज्य गुणनखंड 5 एवं 7 के जोड़े नहीं है। यदि हम 140 को $5 \times 7 = 35$ से भाग दें तब भागफल पूर्ण वर्ग बन जाएगी।

उदाहरण 4. वह न्यूनतम पूर्ण वर्ग संख्या ज्ञात कीजिए जो 6 एवं 8 से पूर्णतः विभाजित हो।

हल: 6 एवं 8 का ल.स. = 24

24 के अभाज्य गुणनखण्ड = $\underline{2 \times 2} \times 2 \times 3$

अब हम देखते हैं कि 24 के गुणनखण्डों में 2 एवं 3 के जोड़े नहीं हैं। अतः यदि 24 को $(2\times3)=6$ से गुणा कर दें तब वह ऐसी पूर्ण वर्ग संख्या बन जाएगी जो 6 एवं 8 दोनों से विभाजित होगी। अतः वांछित संख्या $24\times6=144$ होगी।

इन्हें भी कीजिए — (Try These Also)

$(10)^2 = 100$ होता है, $(300)^2 = 90000$, $(5000)^2 = 25000000$

10 के वर्ग में 2 शून्य हैं, 300 के वर्ग में 4 शून्य तथा 5000 के वर्ग में 6 शून्य हैं, तो क्या कोई ऐसी संख्या सोच सकते हैं जिसका वर्ग करने पर मात्र इकाई के स्थान पर शून्य हों या इकाई, दहाई एवं सैकड़ा तीनों के स्थान पर शून्य हों।

अभ्यास 2 (PRACTICE - 2)

(i) वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिये जिसका 200 से गुणा करने पर गुणनफल पूर्ण वर्ग बन जाए।

(ii) वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिये जिसका 180 से गुणा करने पर गुणनफल पूर्ण वर्ग बन जाए।

(iii) वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिये जिसका 2352 में भाग देने पर भागफल पूर्ण वर्ग बन जाए।

प्रश्नावली 1.1 (EXERCISE - 1.1)

प्र.1. निम्न संख्याओं के गुणनखण्डों के जोड़े बनाकर बताइये कि ये संख्याएँ पूर्ण वर्ग हैं अथवा नहीं?

(i) 164 (ii) 121 (iii) 289

(iv) 729 (v) 1100

प्र.2. निम्न संख्याओं के पूर्ण वर्ग न होने का कारण बताइये।

(i) 12000 (ii) 1227 (iii) 790

(iv) 1482 (v) 165000 (vi) 15050 (vii) 1078 (viii) 8123

प्र.3. निम्न संख्याओं में से किन संख्याओं का वर्ग सम संख्या एवं किन संख्याओं का वर्ग विषम संख्या है ?

(i) 14 (ii) 277 (iii) 179

(iv) 205 (v) 608 (vi) 11288

(vii) 1079 (viii) 4010 (ix) 1225

प्र.4. निम्न प्रतिरूप का अवलोकन करें एवं रिक्त स्थानों की पूर्ति करें।

$11^2 = 121$

$101^2 = 10201$

$1001^2 = 1002001$

$10001^2 =$ -----------

$100001^2 =$ ------------

----------- $= 1000002000001$

घन संख्याएँ (Cube Numbers)

अब तक हमने वर्ग संख्याओं पर विचार किया। किसी संख्या को उसी संख्या से गुणा करने पर प्राप्त गुणनफल को उस संख्या की वर्ग संख्या कहते है। यदि अब गुणनफल को पुनः उसी संख्या से गुणा कर दिया जाए तब प्राप्त संख्या उस संख्या की घन संख्या बन जाएगी।

जैसे $2 \times 2 \times 2 = 8$ या $2^3 = 8$

$7 \times 7 \times 7 = 343$ या $7^3 = 343$

यहाँ 8 एवं 343 क्रमशः 2 एवं 7 की घन संख्याएँ हैं।

निम्न सारणी का अवलोकन कर रिक्त स्थानों की पूर्ति करें।

सारणी 1.4

संख्या	तीनबार गुणा	घातीय रूप	घन संख्या
1	$1 \times 1 \times 1$	1^3	1
2	$2 \times 2 \times 2$	2^3	8
3	$3 \times 3 \times 3$	------	------
4	---------	------	------
5	---------	------	------
6	---------	------	------
7	---------	------	------
8	---------	------	------
9	---------	------	------
10	---------	------	------

उपरोक्त तालिका के अन्तिम स्तम्भ से प्राप्त संख्याएँ 1, 8, 27 .... इत्यादि क्रमशः 1,2,3,.... इत्यादि पूर्णांकों की घन संख्याएँ हैं।

इस प्रकार की संख्याएँ पूर्ण घन संख्याएँ कहलाती हैं।

सारणी में दी गईं सम संख्याओं एवं उनके घनों पर विचार करें, आप किस निष्कर्ष पर पहुँचे? क्या सम संख्याओं के घन भी सम हैं? क्या विषम संख्याओं के घन भी विषम हैं?

घन संख्याओं की पहचान (Recognising Cube Numbers)

कोई संख्या घन संख्या है या नहीं इसकी पहचान कैसे होगी ? वर्ग संख्याएँ पहचानने के लिए हमने अभाज्य गुणनखण्डों के जोड़े बनाए थे। जिनके पूरे जोड़े बन गए थे, वे वर्ग संख्याएँ हैं।

घन संख्याओं के लिए इसी को आगे बढ़ाते हैं। 8 को हम $2 \times 2 \times 2$ के रूप में लिख सकते हैं अर्थात् इसके अभाज्य गुणनखण्ड करने पर हमें पता चलता है कि इसमें 2 को 2 के साथ तीन बार गुणा हुआ है और वह इनसे एक त्रिक (तिगड़ी) बनाने पर और कोई अभाज्य गुणनखण्ड नहीं बचता। इसी तरह 27 को देखें। इसमें तीन का तीन बार गुणा होता है। इसमें भी त्रिक बन जाएगा। यदि 24 को लें तो $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$ अर्थात् 2 तीन बार है और उससे तिगड़ी (त्रिक) बन गया किन्तु 3 बच गया, इसका मतलब हुआ कि 24 घन संख्या नहीं है।

इस प्रकार, पूर्ण घन संख्याओं की पहचान के लिए हम देखते हैं कि संख्या के अभाज्य

गुणनखण्डों में समान अभाज्य गुणनखण्डों के यदि सभी गुणनखण्ड त्रिकों में व्यवस्थित हो जाए तो वह संख्या पूर्ण घन संख्या होगी, अन्यथा नहीं।

आइए, कुछ उदाहरणों के द्वारा इसे समझें –

उदाहरण 5. 216 पूर्ण घन संख्या है अथवा नहीं?

हल : $216 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{3 \times 3 \times 3}$ (अभाज्य गुणनखण्ड बनाने पर)

$= 2^3 \times 3^3$ (सभी गुणनखण्डों के त्रिक बन गए)

$= (2 \times 3)^3 \quad = 6^3$

यहाँ 216 को 6 के घन के रूप में प्रदर्शित किया जा सकता है।

अतः 216 एक पूर्ण घन संख्या हैं।

उदाहरण 6. बताइये कि संख्या 23625 पूर्ण घन है अथवा नहीं?

हल : $23625 = \underline{3 \times 3 \times 3} \times \underline{5 \times 5 \times 5} \times 7$ (अभाज्य गुणनखण्ड करने पर)

यहाँ 23625 के गुणनखण्डों में 3 एवं 5 के त्रिक तो बन गए किन्तु 7 का नहीं।

अतः 23625 एक पूर्ण घन संख्या नहीं है।

उदाहरण 7. वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिसे 68600 में गुणा करने पर गुणनफल पूर्ण घन संख्या हो?

हलः $68600 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times 5 \times 5 \times \underline{7 \times 7 \times 7}$

यहाँ 68600 के गुणनखण्डों में 2 एवं 7 के लिए तो त्रिक बन गए किन्तु 5 के त्रिक बनाने के लिए एक बारऔर 5 का गुणा करना होगा। अतः 68600 में यदि 5 का गुणा कर दें तब वह पूर्ण घन संख्या बन जाएगी।

उदाहरण 8. वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिसे 408375 में भाग करने पर भागफल पूर्ण घन हो जाए?

हलः $408375 = \underline{3 \times 3 \times 3} \times \underline{5 \times 5 \times 5} \times 11 \times 11$

यहाँ 408375 के गुणनखण्डों में 3 एवं 5 के लिए तो त्रिक बन गए किन्तु 11 का त्रिक नहीं बन सका। अतः 408375 में $11 \times 11 = 121$ का भाग दें तब भागफल एक पूर्ण घन संख्या बन जाएगी।

प्रश्नावली 1.2 (EXERCISE - 1.2)

प्र.1. निम्न संख्याओं में से कौनसी संख्या पूर्ण घन है और कौन सी नहीं?

(i) 125 (ii) 800 (iii) 729 (iv) 2744

(v) 22000 (vi) 832

प्र.2. वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 256 को गुणा करने पर गुणनफल एक पूर्ण घन बन जाए।

प्र.3. वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 1352 को गुणा करने पर गुणनफल एक पूर्ण घन बन जाए।

प्र.4. वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 8019 को भाग देने पर भागफल एक पूर्ण घन बन जाए।

प्र.5. प्रश्न 1 में जो संख्याएँ घन संख्याएँ नहीं है उन्हें किस छोटी से छोटी संख्या से गुणा करें कि गुणनफल घन संख्या बन जाए

वर्गमूल [Square Root]

अध्याय के शुरूआत में हमने पूर्ण वर्ग संख्या के बारे में अध्ययन किया। आइए, उसे एक क्रियाकलाप द्वारा पुनः दोहराते है :–

क्रियाकलाप 3. (Activity 3)

सारणी 5

क्र.सं.	संख्या	अभाज्य गुणनखण्ड	किस संख्या का वर्ग है
1.	16	$\underline{2\times2}\times\underline{2\times2}$	$2\times2=4$
2.	25	$\underline{5\times5}$	5
3.	36		
4.	49		
5.	64		
6.	100		
7.	144		
8.	196		

उपरोक्त क्रियाकलाप में आपने देखा कि 4 का वर्ग 16 है, 5 का वर्ग 25, 8 का वर्ग 64 है।
इसे इस तरह भी हम कहते हैं कि 64 का वर्गमूल 8 है, 25 का वर्गमूल 5 है।
इसे ऐसे लिखते है :–

16 का वर्गमूल $=\sqrt{16}=4$, 25 का वर्गमूल $=\sqrt{25}$ (वर्गमूल को चिह्न "$\sqrt{\ }$" से दर्शाते हैं।)

आपने देखा है कि किसी प्राकृत संख्या n का वर्ग, प्रारंभिक n विषम संख्याओं के योगफल बराबर होता है। (चित्र : 2)

जैसे : $5^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$

जिस प्रकार पाँच प्रारंभिक विषम संख्याओं को जोड़ कर 5 का वर्ग (25) प्राप्त किया है, क्या उसी प्रकार 25 में से विषम संख्याओं को घटाकर 25 का वर्गमूल प्राप्त कर सकते हैं?
आइए देखें–

$25 - 1 = 24$, $24 - 3 = 21$, $21 - 5 = 16$

$16 - 7 = 9$, $9 - 9 = 0$,

यहाँ 25 में उत्तरोत्तर से प्रारंभिक पाँच विषम संख्याओं को घटाने पर शेषफल शून्य (0) प्राप्त हुआ है। इसका अर्थ हुआ कि 25 का वर्गमूल 5 है, अर्थात् $\sqrt{25}$

आप भी कुछ पूर्ण वर्ग संख्याओं के लिए इस प्रक्रिया को जाँचे।

आप पायेंगे कि **किसी पूर्ण वर्ग संख्या में से जितनी प्रारंभिक विषम संख्याओं को घटाने पर शून्य प्राप्त होता है, वही उस पूर्ण वर्ग संख्या का वर्गमूल होता है।**

क्या इस प्रक्रिया द्वारा पूर्ण वर्ग संख्या की जाँच की जा सकती है?
आप पायेंगे कि शेषफल शून्य नहीं होने की दशा में दी गई संख्या पूर्ण वर्ग नहीं होती।

अभ्यास 3 (PRACTICE - 3)

निम्नांकित के वर्गमूल मौखिक बताइए :–

(i) 25 (ii) 49 (iii) 64 (iv) 81 (v) 121 (vi) 144

कुछ संख्याओं के वर्गमूल हम मौखिक निकाल सकते हैं किन्तु सभी संख्याओं के वर्गमूल हम मौखिक ज्ञात नहीं कर सकते हैं। आइए, हम वर्गमूल निकालने की विधि पर चर्चा करें।

(1) अभाज्य गुणनखण्ड विधि द्वारा वर्गमूल : (Square root by prime multiple factors)

इस विधि के द्वारा वर्गमूल ज्ञात करने हेतु सर्वप्रथम दी गई संख्या के अभाज्य गुणनखण्ड ज्ञात कर लेते हैं। इसके पश्चात् समान अभाज्य गुणनखण्डों के जोड़े बनाते हैं तथा प्रत्येक जोड़े से एक संख्या लेकर उनका गुणा कर लेते हैं।

उदाहरण 9. 441 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

3	441
3	147
7	49
7	7
	1

हल : $441 = \underline{3\times3}\ \ \underline{7\times7}$

अतः $\sqrt{441} = \sqrt{\underline{3\times3}\times\underline{7\times7}}$

$= 3\times7$ (प्रत्येक जोड़े में से एक–एक संख्या लेने पर)

$= 21$

उदाहरण 10. 1296 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल : $1296 = \underline{2\times2}\times\underline{2\times2}\times\underline{3\times3}\times\underline{3\times3}$

अतः $\sqrt{1296} = \sqrt{\underline{2\times2}\times\underline{2\times2}\times\underline{3\times3}\times\underline{3\times3}}$

$= 2\times2\times3\times3$

$= 36$

अभ्यास 4 (PRACTICE - 4)

निम्नांकित के अभाज्य गुणनखण्ड करके वर्गमूल ज्ञात कीजिए

(i) 289 (ii) 625 (iii) 900 (iv) 361 (v) 1764

उदाहरण 11. यदि एक वर्गाकार चित्र का क्षेत्रफल 2025 वर्ग सेमी हो तब चित्र की एक भुजा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल: वर्गाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल = $(\text{भुजा})^2 = 2025$ वर्ग सेमी

अतः चित्र की एक भुजा की लम्बाई $= \sqrt{2025}$

$= \sqrt{\underline{3\times3}\times\underline{3\times3}\times\underline{5\times5}}$

$= 3 \times 3 \times 5$

$= 45$ सेमी.

3	2025
3	675
3	225
3	75
5	25
5	5
	1

उदाहरण 12. एक व्यक्ति अपने बाग में 11025 आम के पौधे इस प्रकार लगाता है कि हर पंक्ति में उतने ही पौधे हैं जितनी पंक्तियाँ हैं तो बाग में कितनी पंक्तियाँ हैं?

हल: माना बाग में पंक्तियों की संख्या x हैं

चूंकि पौधों की कुल संख्या $= x \times x = x^2$

$x^2 = 11025$ या $x = \sqrt{11025}$

$= \sqrt{3\times3\times5\times5\times7\times7}$

$= 3 \times 5 \times 7 = 105$

अतः बाग में पंक्तियों की संख्या $= 105$

3	11025
3	3675
5	1225
5	245
7	49
7	7
	1

प्रश्नावली 1.3 (EXERCISE - 1.3)

1. निम्नलिखित संख्याओं का वर्गमूल अभाज्य गुणनखण्ड द्वारा ज्ञात करिए

   (i) 361 (ii) 400 (iii) 784

   (iv) 1024 (v) 2304 (vi) 7056

2. एक बालकों की टोली ने 256 आम खरीदे और आपस में बाँट लिए यदि प्रत्येक को उतने ही आम मिले जितनी टोली में बालक थे तब बालकों की संख्या बताइये।

भागविधि से वर्गमूल ज्ञात करना (Finding Square Root through Division Method)

अभी तक हमने पूर्ण वर्ग संख्याओं का वर्गमूल निकालना सीखा है।

गणित में ऐसी भी मजेदार विधि है जिससे हम पूर्ण वर्ग संख्याओं के अलावा उन संख्याओं के वर्गमूल भी मालूम कर सकते हैं जो पूर्णवर्ग नहीं हैं। इसे वर्गमूल ज्ञात करने की 'भाग विधि' के नाम से जाना जाता है। इसे समझने के लिए हम कुछ उदाहरणों पर काम करेंगे।

आप जानते हैं कि एक अंक और दो अंक वाली पूर्णवर्ग संख्याओं के वर्गमूल के रूप में हमें एक अंक वाली संख्याएँ ही मिलती है। आप इन्हें पहाड़े का उपयोग कर आसानी से जान सकते हैं।

जैसे– $1 \times 1 = 1$, इसलिए 1 का वर्गमूल 1 है।

$3 \times 3 = 9$, इसलिए 9 का वर्गमूल 3 है।

$9 \times 9 = 81$, इसलिए 81 का वर्गमूल 9 है।

81 के बाद की पूर्ण वर्ग संख्या 100 है जो तीन अंक वाली संख्या है। इसका वर्गमूल 10 है, जो दो अंक वाली संख्या है। (क्या किसी संख्या और उसके वर्गमूल में निहित अंकों की संख्या में कोई पैटर्न दिखाई पड़ता है?) तीन अंकों वाली किसी बड़ी संख्या का वर्गमूल कैसे निकालेंगे? आइए इसे एक उदाहरण से समझते हैं।

उदाहरण 13. 625 का वर्गमूल ज्ञात करें।

हल :–

पद 1 :– संख्या 625 की इकाई की ओर से आरंभ करते हुए संख्याओं के जोड़े बनाइए। जोड़े बनाने के लिए संख्याओं के ऊपर एक छोटी सी आड़ी रेखा खींच सकते हैं। यहाँ केवल एक जोड़ा बनेगा 25, 6 अकेला रहेगा।

$$\overline{6}\,\overline{25}$$

पद 2 :– 625 को भाग चिह्न के भीतर रखिए। अब ऐसा बड़ा से बड़ा भाजक ढूँढ़िए जिसका वर्ग 6 से बड़ा न हो। यहाँ वह 2 होगा।

$$\begin{array}{r|l} & \text{भागफल} \\ \hline \text{भाजक} & \overline{6}\ \overline{25}\ \text{भाज्य} \end{array}$$

(2 × 2 = 4, 3 × 3 = 9, 9 > 6)

पद 3 :– भाजक और भागफल में 2 रखते हुए उनके गुणनफल 4 को 6 के नीचे रखकर घटाइए। शेष 2 मिलेगा।

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline 2 & \overline{6}\ \overline{25} \\ & -4 \\ \hline & 2 \end{array}$$

पद 4 :– भाजक में उतनी ही संख्या जोड़िए। 4 मिलेगा। उसे नीचे लिखिए। पद–3 में जो शेष 2 बचा था, उसके आगे पूरी एक जोड़ी संख्या 25 उतारकर रखिए। यह नया भाज्य 225 बनेगा।

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline 2 & \overline{6}\ \overline{25} \\ +2 & -4 \\ \hline 4 & 2\ 25 \end{array}$$

पद 5 :– अब हमें भाजक में 4 के आगे और भागफल में 2 के आगे एक ऐसी संख्या रखनी है जिससे उस संख्या और नए भाजक का गुणनफल 225 से अधिक न हो। यदि हम भागफल में 3 रखें तो भाजक में 4 के आगे भी 3 रखेंगे, जिससे नया भाजक 43 होगा।

43 × 3 = 129, 129 < 225

क्रमशः भागफल में 4 और 5 रखकर भी देखें।

44 × 4 = 176 < 225

45 × 5 = 225 = 225

स्पष्ट है कि भागफल में 5 लेना उपयुक्त होगा। इस गुणनफल 225 को नए भाज्य 225 के नीचे रखकर घटाइए। शेष 0 बचेगा। कुल भागफल 25 ही 625 का वर्गमूल होगा।

$$\begin{array}{r|l} & 2\ \ 5 \\ \hline 2 & \overline{6}\ \overline{25} \\ +2 & -4 \\ \hline 45 & 2\,2\,5 \\ & 2\,2\,5 \\ \hline & 0 \end{array}$$

अर्थात् $\sqrt{625} = 25$.

उदाहरण 14. 9409 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल :–

पद 1 :– हमें 4 अंकों की संख्या दी गई है। इकाई के स्थान की ओर से शुरू करते हुए 2–2 अंकों की जोड़ियाँ बनाइए। दो जोड़ियाँ बनेंगी–

$$\overline{94}\ \overline{09}$$

$$\sqrt{\overline{94}\ \overline{09}}$$

इन्हें भाग चिह्न के भीतर रखिए।

पद 2 :– दूसरी जोड़ी 94 को भाज्य मानते हुए सबसे बड़ा ऐसा भाजक चुनिए जिसका वर्ग 94 से अधिक न हो। स्पष्ट है वह भाजक 9 होगा। अब भाजक एवं भागफल में 9 रखते हुए इनका गुणनफल 81, 94 के नीचे रखकर घटाइए। शेष 13 मिलेगा।

$$\begin{array}{r|l} & 9 \\ \hline 9 & \overline{94}\ \overline{09} \\ & -81 \\ \hline & 13 \end{array}$$

पद 3 :– भाजक 9 में उतना ही जोड़िए। योगफल नीचे लिखिए। शेषफल 13 के आगे एक जोड़ी संख्या 09 उतारिए। नया भाज्य 1309 हो जाएगा। पहले उदाहरण की तरह देखिए, भाजक 18 के सामने क्या रखें कि इस संख्या और नए भाजक का गुणनफल 1309 के बराबर या उसके निकटतम और उससे छोटा हो। यहाँ हम अनुमान लगाते हैं। यहाँ भाजक तीन अंकों वाली संख्या होगी, भाज्य चार अंकों की संख्या है। दोनों से यदि इकाई का अंक छोड़ दें तो भाजक 18 और भाज्य 130 बचता है। अब यह आसानी से देखा जा सकता है कि 18 X 7=126 मिलता है जो 130 से छोटा है। अतः भाजक और भाज्य में 7 रख कर देखा जा सकता है।

$$\begin{array}{r|l} & 9 \\ \hline 9 & \overline{94}\ \overline{09} \\ +9 & -81 \\ \hline 18 & 13\ 09 \end{array}$$

$187 \times 7 = 1309$

इस गुणनफल को भागफल 1309 के नीचे रखकर घटाइए। शेष शून्य मिलेगा। कुल भागफल 97 ही संख्या 9409 का वर्गमूल होगा।

अर्थात् $\sqrt{9409} = 97$

$$\begin{array}{r|l} & 97 \\ \hline 9 & \overline{94}\ \overline{09} \\ +9 & -81 \\ \hline 187 & 13\ 09 \\ & -13\ 09 \\ \hline & 0 \end{array}$$

उक्त दोनों उदाहरणों में हमने पूर्ण वर्ग संख्याओं के वर्गमूल प्राप्त किए हैं। अब एक ऐसा उदाहरण लें जो पूर्ण वर्ग संख्या नहीं है। ऐसी स्थिति में वर्गमूल में दशमलव चिन्ह के बाद की संख्याएँ भी मिलती हैं।

उदाहरण 15. 8772 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल :– आप जानते हैं कि 8772 को 8772.0000 के रूप में लिखा जा सकता है। जिस प्रकार पहले के दोनों उदाहरणों में हमने इकाई से शुरु करके संख्याओं के जोड़े बनाए थे, उसी

प्रकार यहाँ भी बनाएँगे। इकाई दहाई के अंक एक साथ, सैकड़े और हजार के अंक एक साथ। दशमलव चिह्न के दायीं ओर जोड़ियाँ बनाते समय दशांश और शतांश स्थानों के अंक एक साथ रखते हैं और उससे आगे भी इसी तरह।

संख्या 8772.0000 को इस प्रकार लिखेंगे – $\overline{87}\,\overline{72}.\overline{00}\,\overline{00}$

पहले की ही तरह 8772 का वर्गमूल ज्ञात करें –

123 शेष बचने के बाद दशमलव चिह्न के बाद के शून्यों का एक जोड़ा उतारें। अब भागफल में जो संख्या लिखेंगे उसके पहले दशमलव का चिह्न लगाएँ। भाग की प्रक्रिया वैसे ही आगे बढ़ाएँ।
यदि वर्गमूल को दशमलव के बाद के दो अंकों तक ही प्राप्त करना हो तो यह प्रक्रिया यहाँ रोकी जा सकती है। यदि आगे बढ़ाना हो तो प्रत्येक बार शून्य का एक जोड़ा शेष के आगे लिखकर नया भागफल प्राप्त करते जाएँगे।

	93·65
9	$\overline{87}\,\overline{72}\cdot\overline{00}\,\overline{00}$
+9	–81
183	672
+3	–549
1866	12300
+6	–11196
18725	110400
	–93625
	16775

अतः 8772 का वर्गमूल लगभग 93.65 होगा।

$\sqrt{8772}$ = 93.65 लगभग

प्रश्नावली 1.4 (EXERCISE - 1.4)

प्रश्न 01. निम्नलिखित संख्याओं का वर्गमूल, भाग विधि से ज्ञात कीजिए :–

(i) 529 (ii) 1369 (iii) 1024 (iv) 5776

(v) 900 (vi) 7921 (vii) 50625 (viii) 363609

प्रश्न 02. एक सिनेमा हॉल में सिनेमा मालिक सीटों को इस प्रकार व्यवस्थित करना चाहते हैं कि सिनेमा हॉल में जितनी स्तम्भों की संख्या है, उतनी ही संख्या पंक्तियों की हों। यदि उस हॉल में कुल 1849 सीटें हों तो पंक्तियों व स्तम्भों की संख्या ज्ञात कीजिए?

प्रश्न 03. एक वर्गाकार बगीचे का क्षेत्रफल 1444 वर्ग मीटर हो, तो बगीचे की लम्बाई व चौड़ाई ज्ञात कीजिए?

उदाहरण 16. 51.84 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल :–

	7. 2
7	$\overline{51}.\,\overline{84}$
+ 7	- 49
14 2	02 84
	- 2 84
	0 00

$\sqrt{51.84}$ = 7.2

उदाहरण 17. 23.1 का वर्गमूल दशमलव के दो स्थानों तक ज्ञात कीजिए।

हल :–

	4. 80
4	$\overline{23}.\overline{10}\ \overline{00}\ \overline{00}$
+ 4	– 16
88	07 10
8	– 7 04
960	6 00
	–0 00
	6 00

$\sqrt{23.1} = 4.80$

उदाहरण 18. 2 का वर्गमूल दशमलव के तीन स्थानों तक ज्ञात कीजिए।

हल :–

	1.41 4
1	$2.\overline{00}\ \overline{00}\ \overline{00}$
+ 1	– 1
2 4	1 00
+ 4	– 96
2 81	04 00
+ 1	– 2 81
2824	1 19 00
	– 1 12 96
	0 07 04

प्रश्नावली–1.5 (EXERCISE - 1.5)

प्रश्न 01. निम्नलिखित संख्याओं के वर्गमूल ज्ञात कीजिए :–

(i) 7.29 (ii) 16.81 (iii) 9.3025

प्रश्न 02. निम्नलिखित संख्याओं के वर्गमूल दशमलव के दो स्थानों तक ज्ञात कीजिए :–

(i) 0.9 (ii) 5 (iii) 7

घनमूल (Cube root)

किसी संख्या का वर्गमूल ज्ञात करने के लिए हमने उसके अमाज्य गुणनखण्डों में से समान गुणनखण्डों के दो–दो के जोड़ों का प्रयोग किया था। प्रत्येक जोड़े में से एक–एक संख्या लेकर उनका गुणा करके वर्गमूल प्राप्त किया था। किसी संख्या का घनमूल ज्ञात करने के लिए इसी प्रक्रिया को आगे बढ़ाते हैं। किसी संख्या का घनमूल निकालने के लिए उसके अभाज्य गुणनखंण्डों में से

समान गुणनखंण्डों के तीन–तीन के त्रिक (तिकड़ी) बनाएँगे तथा ऐसी प्रत्येक तिकड़ी से एक–एक संख्या लेकर उनका गुणनफल ज्ञात कर लेंगे। यही दी गई संख्या का घनमूल होगा।

उदाहरण 17. 512 का घनमूल ज्ञात कीजिए।

2	512
2	256
2	128
2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

हल :–

$$512 = \underline{2\times2\times2}\times\underline{2\times2\times2}\times\underline{2\times2\times2}$$

$$\sqrt[3]{512} = 2\times2\times2$$

$$\sqrt[3]{512} = 8$$

उदाहरण 18. 91,125 का घनमूल ज्ञात कीजिए।

(संकेत –: हम देखते हैं कि संख्या के इकाई के स्थान पर 5 है अतः संख्या 5 से पूर्णतः विभाजित होगी।)

5	91,125
5	18,225
5	3,645
3	729
3	243
3	81
3	27
3	9
3	3
	1

हल :–

$$91,125 = \underline{5\times5\times5}\times\underline{3\times3\times3}\times\underline{3\times3\times3}$$

$$\sqrt[3]{91,125} = 5\times3\times3$$

$$\sqrt[3]{91,125} = 45$$

प्रश्नावली–1.6 (EXERCISE - 1.6)

1. निम्नलिखित संख्याओं के घनमूल ज्ञात कीजिए :–

(i) 125 (ii) 343 (iii) 1331
(vi) 2197 (v) 9261 (vi) 166375
(vii) 4913 (viii) 42875

8ZR5DY

हमने सीखा (We Have Learnt)

1. यदि n कोई संख्या है तब $n\times n$ या n^2 इसका वर्ग कहलाएगा और $n\times n\times n$ या n^3 इसका घन।
2. जिन संख्याओं के इकाई में 2,3,7 या 8 हो वे पूर्ण वर्ग संख्याएँ नहीं हो सकती हैं।
3. यदि पूर्ण वर्ग संख्या के अन्त में सम संख्या में शून्य हो तो वे भी पूर्ण वर्ग संख्या होगी।
4. सम संख्याओं के वर्ग एवं घन सदैव सम संख्याएँ एवं विषम संख्याओं के वर्ग एवं घन सदैव विषम संख्याएँ होती हैं।
5. किसी प्राकृत संख्या n का वर्ग, प्रारम्भिक n विषम संख्याओं के योगफल के बराबर होता है।
6. यदि तीन संख्याएँ इस प्रकार हो कि बड़ी संख्या का वर्ग शेष दोनों संख्याओं के वर्गों के योग के बराबर हो तब संख्याएँ पाइथागोरिय त्रिक कहलाती है। जैसे $3^2 + 4^2 = 5^2$ अतः (3,4,5) पाइथोगोरीय त्रिक है।
7. वर्गमूल को '7BI' चिह्न के द्वारा प्रदर्शित करते हैं। इस चिह्न को करणी चिह्न कहते हैं।