अध्याय **1**

परिमेय संख्याएँ (RATIONAL NUMBERS)

1.0 परिचय

सलमा तीन पेन पाँच रुपये की दर से खरीदना चाहती है। उसका दोस्त सतीश भी दो पेन उसी दर में खरीदना चाहता है। इसलिए दोनों थोक दुकान पर जाते हैं। व्यापारी ने कहा कि पाँच पेन वाले एक पैकेट का दाम ₹ 22 हैं। प्रत्येक पेन का दाम कितना है? हम आसानी से इसकी गणना कर सकते हैं। एक पेन का दाम $\frac{22}{5}$ होगा। यह संख्या पुर्ण संख्या नही हो सकती हमें इसे दर्शाने के लिए भिन्नों की आवश्यकता होगी।

आइए कुछ और उदाहरण देखें।

शिमला में एक विशेष दिन दर्ज किये गये तापमान के आँकड़े नीचे तालिका में हैं।

समय	10.00 a.m.	12.00 Noon	3.00 p.m.	7.00 p.m.	10.00 p.m.
तापमान	11 °C	14 °C	17 °C	10 °C	5 °C

प्रत्येक स्थिति में तापमान में परिवर्तन का प्रति घंटा दर क्या है?

स्थिति I सुबह के समय : प्रति घंटा तापमान परिवर्तन दर $\frac{14^0c-11^0c}{2} = \frac{3}{2}$ °C/hr.
(10.00 A.M. - 12.00 Noon)

स्थिति II दोपहर के समय : प्रति घंटा तापमान परिवर्तन दर $\frac{17\,^oC-14\,^oC}{3} = 1$ °C/hr.
(12.00 Noon - 3.00 P.M.)

स्थिति III शाम के समय : प्रति घंटा तापमान परिवर्तन दर $\frac{10\,^oC-17\,^oC}{4} = \frac{-7}{4}$ °C/hr.
(3.00 P.M. - 7.00 P.M.)

स्थिति IV रात के समय : प्रति घंटा तापमान परिवर्तन दर $\frac{5\,^oC-10\,^oC}{3} = \frac{-5}{3}$ °C/hr.
(7.00 P.M. - 10.00 P.M.)

ऊपर की सभी स्थितियों में हमें $\frac{3}{2}$ °C, 1 °C, $\frac{-7}{4}$ °C, $\frac{-5}{3}$ °C आदि संख्याएँ प्राप्त हुईं। इन तापमानों में उपयोग में आई हुई संख्याएँ $\frac{3}{2}$ °C, 1 °C, $\frac{-7}{3}$ °C, $\frac{-5}{3}$ °C हैं। इन संख्याओं को आप क्या कहेंगे?

SCERT TELANGANA

इन संख्यांओं मे धन और ऋण भिन्न होते है तथा इसे $\frac{p}{q}$ के रुप में लिखा जाता है, जहाँ $q \neq o$

आइए इस तरह की कुछ संख्याओं के बारे में चर्चा करेंगे।

$\frac{3}{4}, \frac{7}{9}, \frac{-10}{17}, \frac{3}{-2}, \frac{2013}{2014}, ...$

वे संख्याएँ जिन्हें $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कर सकते हैं,जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq o$ उन्हें 'परिमेय संख्याएँ' कहलाती हैं। परिमेय संख्याओं के समुच्चय को'Q' से दर्शाते हैं। इन्हें भागफल संख्याएँ भी कहते हैं। ध्यान से देखिए।

हम कोई भी प्राकृतिक संख्या इस रूप में व्यक्त कर सकते हैं,उदाहरण के लिए 5 को $\frac{5}{1}$ या $\frac{10}{2}$ या $\frac{15}{3}$ ....**लिखेंगे**

इसी प्रकार किसी भी पूर्ण संख्या को व्यक्त किया जा सकता है, उदा. 0 को $\frac{0}{1}$ या $\frac{0}{2}$ या $\frac{0}{5}$ .....**लिखेंगे**

हम किसी भी पूर्णांक को इस रूप में व्यक्त कर सकते हैं, जैसे- -3 को $\frac{-3}{1}$ या $\frac{-6}{2}$, ...ये सभी संख्या

अतः $\frac{15}{3}, \frac{0}{5}, \frac{-6}{2}$ **को परिमेय संख्या कहते हैं।**

ऊपर के निरीक्षण द्वारा हम निष्कर्ष निकालते हैं कि किसी भी प्राकृतिक संख्या, सभी पूर्ण संख्या और पूर्णांक को परिमेय संख्या के रूप में भी व्यक्त किया जा सकता है।

प्रयत्न कीजिए।

इन संख्याओं के समूहों के बारे में सोचिए। इन्हें योग्य श्रेणी में लिखिए। $1, \frac{1}{2}, -2, 0.5, 4\frac{1}{2}, \frac{-33}{7}, 0, \frac{4}{7}, 0.\overline{3}, 22, -5, \frac{2}{19}, 0.125$. [एक संख्या अनेक समूहों में भी लिखी जा सकती है]

(i) प्राकृतिक संख्याएँ ____________________

(ii) पूर्ण संख्याएँ ____________________

(iii) पूर्णांक ____________________

(iv) परिमेय संख्याएँ ____________________

क्या आप दी गई संख्याओं में से कोई परिमेय संख्या छोड़ सकते हैं?

क्या प्रत्येक प्राकृतिक संख्या, पूर्ण संख्या और पूर्णांक, परिमेय संख्याएँ हैं?

SCERT TELANGANA

प्रयत्न कीजिए।

1. हामिद ने कहा, $\frac{5}{3}$ परिमेय संख्या है और 5 केवल प्राकृतिक संख्या है। साक्षी ने कहा दोनों परिमेय संख्याएँ हैं। आप किससे सहमत हैं?
2. नीचे दिए कथनों के लिए एक-एक उदाहरण दीजिए।

   (i) सभी प्राकृतिक संख्याएँ, पूर्ण संख्याएँ होती हैं किंतु सभी पूर्ण संख्याएँ, प्राकृतिक संख्या हों यह आवश्यक नहीं हैं।

   (ii) सभी पूर्ण संख्याएँ, पूर्णांक होती हैं किंतु सभी पूर्णांक, पूर्ण संख्याएँ नहीं होते।

   (iii) सभी पूर्णांक परिमेय संख्याएँ हैं किंतु सभी परिमेय संख्याएँ, पूर्णांक हों यह आवश्यक नहीं है।

हम परिमेय संख्याओं की मूल संक्रियाओं को पहले की कक्षाओं में ही सीख चुके हैं। अब हम परिमेय संख्याओं के गुणधर्मों और उनकी संक्रियाओं की चर्चा करेंगे।

1.1 परिमेय संख्याओं की संक्रियायें (Operations on Rational numbers)

सातवी कक्षा में हमने परिमेय संख्याओं के जोड घटानों की चर्चा की है। अब उसे कुछ उदाहरणों द्वारा दोहराएँगे।

हल किजिए।

(i) $\frac{9}{10}+\left(\frac{-13}{8}\right)$ (ii) $1\frac{3}{5}+4\frac{2}{7}$

(iii) $\frac{-7}{16}-\left(\frac{-9}{20}\right)$ (iv) $\frac{-11}{14}-\left(\frac{1}{21}\right)$

(v) निम्न संख्याओं के योग विलोम लिखिए. $\frac{-7}{6}, \frac{1}{10}, \frac{-3}{4}, 8$

1.1.1 परिमेय संख्याओं का गुणनफल (Multiplication of Rational Numbers)

अब हम परिमेय संख्याओं को गुणा कैसे करते है, सिखेंगे सातवी कक्षा में भिन्नों के गुणा को सिखा था। उसी प्रक्रिया से हम परिमेय संख्याओं का गुणा करेंगे।

परिमेय संख्या $\frac{2}{3}$ तथा $\frac{5}{7}$ को देखो। ये संख्याये भिन्न भी है।

हम $\frac{2}{3}$ तथा $\frac{5}{7}$ को गुणा करेंगे।

$\frac{2}{3}\times\frac{5}{7}=\frac{2\times5}{3\times7}=\frac{10}{21}$ $\left(\frac{\text{अंशो का गुणनफल}}{\text{हरों का गुणनफल}}\right)$

अब $\frac{-2}{3}\times\frac{5}{7}$ को देखो।

$\frac{-2\times5}{3\times7}=\frac{-10}{21}$ प्राप्त होगा।

चलिए अब हम एक और उदाहरण देखेंगे $\frac{-10}{21}\times\frac{14}{25}$

$$\frac{-10}{21}\times\frac{14}{25}=\frac{-10\times14}{21\times25}=\frac{-\cancel{140}^{28}}{\cancel{525}_{105}}=\frac{-28}{105}=\frac{-4}{15}$$

या इसे ऐसे भी हल कर सकते है।

$$\frac{-\cancel{10}^{2}}{\cancel{21}_{3}}\times\frac{\cancel{14}^{2}}{\cancel{25}_{5}}=\frac{-4}{15}$$

इसे किजिए

(i) $\frac{18}{11}\times\frac{-33}{45}$ (ii) $\frac{-7}{17}\times\frac{-1}{10}$

(iii) $\frac{-105}{72}\times\frac{18}{15}$ (iv) $\frac{13}{120}\times\frac{100}{16}$

1.1.2 परिमेय संख्याओं का भाग (Division of Rational Numbers)

इसे देखिए।

$\frac{2}{5}\times\frac{5}{2}=1$

$\frac{-9}{11}\times\frac{11}{-9}=1$

यहाँ हमने देखा की गुणनफल '1'है। जब किन्ही परिमेय संख्याओं का गुणनफल '1' होता है। तो उन्हें गुणा का विलोम कहते है, यहाँ $\frac{2}{5}$ तथा $\frac{5}{2}$; $\frac{-9}{11}$ तथा $\frac{11}{-9}$ एक दुसरे के गुणन विलोम है।

SCERT TELANGANA

$\frac{-3}{7}, 11, \frac{9}{5}, \frac{1}{-17}$ के गुणन विलोम लिखाए। सातवी कक्षा में हमने भिन्नों के भाग को सिखा है। परिमेय संख्याओं के भाग के लिए उसी प्रक्रिया का उपयोग करेंगे।

$\frac{3}{4}$ तथा $\frac{7}{11}$ को देखिए ये भिन्न संख्याए है।

हम $\frac{3}{4}$ तथा $\frac{7}{11}$ का भाग करेंगे।

$$\frac{3}{4} \div \frac{7}{11} = \frac{3}{4} \times \frac{11}{7} \qquad \left(\frac{7}{11} \text{ का गुणन विलोम}\right)$$

$$= \frac{3 \times 11}{4 \times 7} = \frac{33}{28} = 1\frac{5}{28}$$

अब हम निम्न उदाहरणों को हल करेंगे।

(i) $$\frac{-5}{9} \div \frac{3}{4} = \frac{-5}{9} \times \frac{4}{3} \qquad \left(\frac{3}{4} \text{ का गुणन विलोम}\right)$$

$$= \frac{-5 \times 4}{9 \times 3} = \frac{-20}{27}$$

(ii) $$\frac{-12}{21} \div \left(\frac{2}{-7}\right) = \frac{-12}{21} \times \left(\frac{-7}{2}\right) = \frac{6}{3} = 2 \qquad \left(\frac{2}{-7} \text{ का गुणन विलोम}\right)$$

इसे किजिए

(i) $\frac{8}{5} \div \frac{2}{3}$ (ii) $\frac{18}{25} \div \left(\frac{-72}{75}\right)$

(iii) $\frac{-125}{64} \div \frac{50}{16}$ (iv) $\frac{-512}{441}$ को $\frac{-1024}{21}$ से भाग दिजिए

SCERT TELANGANA

1.2 परिमेय संख्याओं के गुणधर्म

1.2.1 संवृत (Closure) :

> यदि दो पूर्ण संख्याओं का योग एक पूर्ण संख्या हो तो हम कह सकते हैं कि पूर्ण संख्याओं का समुच्चय योग के सापेक्ष संवृत गुण को संतुष्ट करता है।

(i) पूर्ण संख्याएँ और पूर्णांक

आइए, एक बार पुनः संक्षेप में पूर्ण संख्याओं एवं पूर्णांकों के लिए सभी संक्रियाओं पर संवृत गुणधर्म की चर्चा करते हैं।

इस तालिका को पूर्ण कीजिए जो आवश्यक चर्चा के लिए है। इसमें संबंधित उदाहरण भी हैं।

संख्याएँ	संक्रियाएँ			
	योग	**व्यवकलन**	**गुणन**	**भाग**
पूर्ण संख्याएँ	किन्हीं दो पूर्ण संख्याओं a और b के लिए $a+b$ पूर्ण संख्या है, इसलिए यह संवृत है। उदा:	संवृत नहीं हैं $5-7=-2$ जो पूर्ण संख्या नहीं है।	संवृत हैं क्योंकि	संवृत नहीं हैं क्योंकि $5 \div 8 = \frac{5}{8}$ पूर्ण संख्या संख्या नहीं है।
पूर्णांक	....	संवृत है क्योंकि $a-b$ एक पूर्णांक है किन्हीं a और b दो पूर्णांकों के लिए।	....	संवृत नहीं है क्योंकि ....

(ii) परिमेय संख्याएँ - संवृत गुणधर्म

(a) योग

मान लीजिए दो परिमेय संख्याएँ $\frac{2}{7}, \frac{5}{8}$

$$\frac{2}{7}+\frac{5}{8} = \frac{16+35}{56} = \frac{51}{56}$$

परिणाम $\frac{51}{56}$ पुनः परिमेय संख्या प्राप्त हुआ।

$8+\left(\frac{-19}{2}\right) =$ ______ क्या यह परिमेय संख्या है?

$\frac{2}{7} + \frac{-2}{7} =$ ______ क्या उत्तर परिमेय संख्या होगा?

इसे कुछ और संख्याओं के साथ भी जाँच कीजिए।

$3+\frac{5}{7}, \quad 0+\frac{1}{2}, \quad \frac{7}{2}+\frac{2}{7}$

SCERT TELANGANA

हम देखते हैं कि दो परिमेय संख्याओं का योग पुनः परिमेय संख्या है। अतः योग के सापेक्ष परिमेय संख्याएँ संवृत रहती हैं। यदि $(a + b)$ एक परिमेय संख्या है, कोई भी दो परिमेय संख्याओं के लिए, तो $\forall a, b \in Q$; $(a + b) \in Q$.

∈ घटक है सब ∀ के लिए

मान लीजिए $A = \{1, 2, 3\}$

घटक 3 जो A में है, इस प्रकार दर्शाया जा सकता है $3 \in A$ और हम इसे पढ़ते हैं-'3 घटक या सदस्य है A का'

देखिए $x = 1 \Rightarrow 1 + 0 = 1$

$x = 2 \Rightarrow 2 + 0 = 2$

$x = 3 \Rightarrow 3 + 0 = 3$

इसका अर्थ है कि सभी $x \in A$ के लिए हमें $x + 0 = x$ प्राप्त होगा। हम इसे $x + 0 = x \ \forall x \in A$ के रूप में व्यक्त करेंगे। हम इसे इस प्रकार पढ़ेंगे- सभी या प्रत्येक $x \in A$ के लिए; $x + 0 = x$.

(b) व्यवकलन :

मान लीजिए दो परिमेय संख्याएँ हैं $\frac{5}{9}$ और $\frac{3}{4}$

तो $\frac{5}{9} - \frac{3}{4} = \frac{5\times4-3\times9}{36}$

$= \frac{20-27}{36} = \frac{-7}{36}$

फिर हमें परिमेय संख्या $\frac{-7}{36}$ प्राप्त हुआ। (क्योंकि –7, 36 पूर्णांक हैं और 36 शून्य के **समान नहीं** है, अतः $\frac{-7}{36}$ भी एक परिमेय संख्या है।)

इसकी जाँच निम्न परिमेय संख्याओं के संदर्भ में भी कीजिए।

(i) $\frac{2}{3} - \frac{3}{7} = \frac{14-9}{21} =$ ______________ क्या यह एक परिमेय संख्या है?

(ii) $\left(\frac{48}{9}\right) - \frac{11}{18} =$ ______________ क्या यह एक परिमेय संख्या है?

हमने पाया कि किन्हीं दो परिमेय संख्याओं के लिए, उनका अंतर भी परिमेय संख्या है। अतः व्यवकलन के सापेक्ष परिमेय संख्याएँ संवृत रहती हैं।

किन्हीं दो परिमेय संख्याओं a और b के लिए, a - b भी परिमेय संख्या रहती है। अर्थात, $\forall a, b \in Q$, $(a-b) \in Q$

(c) गुणन

निम्न पर ध्यान दीजिए।

$3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$\frac{6}{5} \times \frac{-11}{2} = \frac{-66}{10} = \frac{-33}{5}$

$\frac{3}{7} \times \frac{5}{2} =$ ___________ ; $\frac{2}{1} \times \frac{19}{13} =$ ___________

SCERT TELANGANA

सभी उदाहरणों में हम देखते हैं कि दो परिमेय संख्याओं का गुणनफल एक परिमेय संख्या रहती है। कुछ और परिमेय संख्याओं के युग्मों को गुणा कीजिए। जाँच कीजिए कि गुणनफल परिमेय संख्या है या नहीं। क्या आप ऐसी परिमेय संख्या बता सकते हैं जिनका गुणनफल एक परिमेय संख्या नहीं है। अतः हमें पता चलता है कि गुणा के सापेक्ष परिमेय संख्याएँ संवृत हैं।

किन्हीं दो परिमेय संख्याओं a और b के लिए, $a \times b$ भी एक परिमेय संख्या होगी। अर्थात, $\forall\, a, b \in Q$, $a \times b \in Q$

(d) भाग

दो परिमेय संख्याएँ लीजिए $\frac{2}{3}, \frac{7}{8}$

तो $\frac{2}{3} \div \frac{7}{8} = \frac{2}{3} \times \frac{8}{7} = \frac{16}{21}$ जो कि एक परिमेय संख्या है?

कुछ अन्य उदाहरणों में जाँच कीजिए।

$\frac{5}{7} \div 2 = \frac{5}{7} \div \frac{2}{1} = \frac{5}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{14}$

$-\frac{2}{3} \div \frac{6}{11} =$ ______ $=$ ______ $=$ ______

$3 \div \frac{17}{13} = \frac{3}{1} \div \frac{17}{13} =$ ______ $=$ ______ $=$ ______

ऊपर के सभी उदाहरणों द्वारा हम देखते हैं कि जब हम दो परिमेय संख्याओं का भाग करते हैं तो हमें परिमेय संख्या प्राप्त होती है। अब क्या हम कह सकते हैं कि परिमेय संख्याओं के भाग के लिए संवृत गुण सही है?

आइए, इनकी जाँच करें : $0, 5$ परिमेय संख्याएँ हैं और $\frac{5}{0}$ अपरिभाषित है। अतः परिमेय संख्याओं का समूह Q भाग के सापेक्ष संवृत नहीं है।

इस तरह हम कह सकते हैं कि यदि Q में से हम शून्य निकाल दें तो समूह भाग के सापेक्ष संवृत रहता है।

> $\frac{5}{0}$ क्यों अपरिभाषित है?
> भाग कीजिए। $5 \div 0$ $0\overline{)5}$ (?
> क्या आप भाग पूर्ण कर सकते हैं? भागफल क्या है? आप देखते हैं कि '0' के साथ किसी भी अंक से गुणा करने पर '0' प्राप्त होता है। अतः भाग संभव नहीं है।

प्रयत्न कीजिए।

यदि हम पूर्णांकों के समुच्चय से शून्य निकाल दें तो क्या यह भाग के सापेक्ष संवृत है?

इसी तरह प्राकृतिक संख्याओं के लिए भी जाँच कीजिए।

SCERT TELANGANA

प्रयत्न कीजिए।

तालिका के खाली स्थानों को भरिए।

संख्याएँ	अंतर्गत संवृत है			
	योग	व्यवकलन	गुणन	भाग
प्राकृतिक संख्या	हाँ	—	—	—
पूर्ण संख्याएँ	—	—	—	नहीं
पूर्णांक	—	हाँ	—	—
परिमेय संख्याएँ	—	—	हाँ	—

1.2.2. क्रमविनमेय गुण (Commutative Property):

आइए, पूर्ण संख्याओं और पूर्णांकों दोनों के लिए हम अलग-अलग संक्रियाओं के साथ क्रमविनिमेय गुणों को हम पुनः स्मरण करते हैं।

निम्न तालिका पूर्ण कीजिए।

(i) पूर्ण संख्याएँ

> क्रमविनिमेयता वह गुण है जिसमें यदि संख्याओं की द्विधारी प्रक्रिया में, संख्याओं का क्रम बदल दिया जाये तो परिणाम पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता।
> जैसे- $a + b = b + a$
> $a \times b = b \times a$
> यहाँ द्विधारी प्रक्रिया, चारों मूल संक्रियाओं में से कोई भी एक हो सकती है, अर्थात, $+, -, \times, \div$

संक्रियाएँ	उदाहरण	टिप्पणी
योग	2, 3 पूर्ण संख्याएँ है। $2+3 = 5$ और $3 + 2 = 5$ $\therefore 2 + 3 = 3 + 2$	W में योग क्रमविनिमेय गुण का पालन करता है।
व्यवकलन	क्या $3 - 2$ और $2 - 3$ समान हैं?	क्रमविनिमेय गुण का पालन नहीं करता।
गुणन	------	------
भाग	$4 \div 2 = ?$ $2 \div 4 = ?$ Is $4 \div 2 = 2 \div 4$?	-------

SCERT TELANGANA

(ii) पूर्णांक

संक्रिया	उदाहरण	टिप्पणी
योग	---	पूर्णांकों में योग क्रमविनिमेय है।
व्यवकलन	2, 3 पूर्णांक हैं 2 – (3) = ? (3) – 2 = ? क्या 2 – (3) = (3) – 2 = ?	....
गुणन	... ...	... ...
भाग	... ...	पूर्णांकों में भाग क्रमविनिमेय नहीं है।

(iii) परिमेय संख्याएँ

(a) योग

दो परिमेय संख्याएँ $\frac{5}{2}, \frac{-3}{4}$ लीजिए। इन्हें जोड़ दीजिए।

$$\frac{5}{2} + \frac{(-3)}{4} = \frac{2\times5+1\times(-3)}{4} = \frac{10-3}{4} = \frac{7}{4}$$

और $\frac{(-3)}{4} + \frac{5}{2} = \frac{1\times(-3)+2\times5}{4} = \frac{-3+10}{4} = \frac{7}{4}$

तो $\frac{5}{2} + \left(\frac{-3}{4}\right) = \frac{-3}{4} + \frac{5}{2}$

अब इस गुण को परिमेय संख्याओं के कुछ और युग्मों के लिए जाँच कीजिए।

मान लीजिए $\frac{1}{2} + \frac{5}{7}$ और $\frac{5}{7} + \frac{1}{2}$. क्या $\frac{1}{2} + \frac{5}{7} = \frac{5}{7} + \frac{1}{2}$?

क्या $\frac{-2}{3} + \left(\frac{-4}{5}\right) = \frac{(-4)}{5} + \left(\frac{-2}{3}\right)$?

क्या आप परिमेय संख्याओं के कोई ऐसे युग्म बता सकते हैं जिनपर यह नियम गलत हो?

हम कह सकते हैं कि किन्हीं a और b परिमेय संख्याओं के लिए a + b = b + a

इस प्रकार परिमेय संख्याओं के समुच्चय में योग क्रमविनिमेय रहता है।

$\therefore \forall a, b \in Q, a + b = b + a$

SCERT TELANGANA

(b) व्यवकलन : दो परिमेय संख्याएँ $\frac{2}{3}$ और $\frac{7}{8}$ लीजिए।

$\frac{2}{3} - \frac{7}{8} = \frac{16-21}{24} = \frac{-5}{24}$ और $\frac{7}{8} - \frac{2}{3} = \frac{21-16}{24} = \frac{5}{24}$

इसलिए $\frac{2}{3} - \frac{7}{8} \neq \frac{7}{8} - \frac{2}{3}$

इनकी जाँच कीजिए।

क्या $2 - \frac{5}{4} = \frac{5}{4} - 2$?

क्या $\frac{1}{2} - \frac{3}{5} = \frac{3}{5} - \frac{1}{2}$?

इस प्रकार हम कह सकते हैं कि परिमेय संख्याओं के समुच्चय में गटाना क्रमविनिमेय नहीं है।

$a - b \neq b - a$ किन्हीं दो परिमेय संख्याओं a और b के लिए।

(c) गुणन : दो परिमेय संख्याएँ 2 और $-\frac{5}{7}$ लीजिए।

$2 \times \frac{-5}{7} = \frac{-10}{7}$; $\frac{-5}{7} \times 2 = \frac{-10}{7}$ अतः $2 \times \frac{-5}{7} = \frac{-5}{7} \times 2$

क्या $\frac{-1}{2} \times \left(\frac{-3}{4}\right) = \left(\frac{-3}{4}\right) \times \left(\frac{-1}{2}\right)$?

इन्हें कुछ और परिमेय संख्याओं के लिए जाँच कीजिए।

हम निष्कर्ष निकालते हैं कि परिमेय संख्याओं के अंतर्गत गुणन क्रमविनिमेय है।

अर्थात $a \times b = b \times a$ किन्हीं दो परिमेय संख्याओं a और b के लिए।

अर्थात $\forall\, a, b \in Q,\ a \times b = b \times a$

(d) भाग

क्या $\frac{7}{3} \div \frac{14}{9} = \frac{14}{9} \div \frac{7}{3}$?

$\frac{7}{3} \div \frac{14}{9} = \frac{\cancel{7}^{1}}{\cancel{3}_{1}} x \frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{14}_{2}} = \frac{3}{2}$ और $\frac{14}{9} \div \frac{7}{3} = \frac{\cancel{14}^{2}}{\cancel{9}_{3}} \times \frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{7}_{1}} = \frac{2}{3}$

$\frac{7}{3} \div \frac{14}{9} \neq \frac{14}{9} \div \frac{7}{3}$

इस प्रकार हम कह सकते हैं कि परिमेय संख्याओं के समुच्चय में भाग क्रमविनिमेय नहीं हैं।

SCERT TELANGANA

प्रयत्न कीजिए।

यह तालिका पूर्ण कीजिए।

संख्याएँ	**क्रमविनिमेयता के अंतर्गत**			
	योग	**व्यवकलन**	**गुणन**	**भाग**
प्राकृतिक संख्याएँ	हाँ	नहीं	हाँ	— — —
पूर्ण संख्याएँ	— — —	— — —	— — —	नहीं
पूर्णांक	— — —	— — —	— — —	— — —
परिमेय संख्याएँ	— — —	— — —	— — —	नहीं

1.2.3 साहचर्य गुण (Associative Property)

साहचर्य गुण यह दर्शाता है की यदि आपको तीन संख्याओं को जोडना हो तो, आप पहली दो संख्याओं को जोडकर उसके योगफल में तिसरी संख्या जोड सकते है या फिर पहले आप दुसरी तथा तिसरी संख्या को जोडकर उसके योगफल से पहली संख्या को जोडेंगे तो परिणाम एक जैसे ही प्राप्त होंगे। $(3+2)+5$ तथा $3+(2+5)$.

चार संक्रियाएँ, अर्थात, योग, घटाना, गुणा और भाग के सापेक्ष पूर्ण संख्याओं को साहचर्य गुण के बारे में याद कीजिए।

(i) पूर्ण संख्याएँ

आवश्यक उदाहरण और टिप्पणियों द्वारा तालिका पूर्ण कीजिए।

संक्रिया	**पूर्ण संख्याओं के उदाहरण**	**टिप्पणी**
योग	क्या $2+(3+0)=(2+3)+0$? $2+(3+0)=2+3=5$ $(2+3)+0=5+0=5$ $\Rightarrow 2+(3+0)=(2+3)+0$ $a+(b+c)=(a+b)+c$ किन्हीं a, b, c पूर्ण संख्याओं के लिए	— — — — — —
व्यवकलन	$(2-3)-2=?$ $2-(3-2)=?$ Is $(2-3)-2 = 2-(3-2)$?	व्यवकलन साहचर्य नहीं है।
गुणन	— — — — — — — — — — — —	गुणन साहचर्य है।
भाग	क्या $2\div(3\div5)=(2\div3)\div5$? $2\div(3\div5)=2\div\frac{3}{5}=2\times\frac{5}{3}=\frac{10}{3}$ $(2\div3)\div5=\frac{2}{3}\div5=\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{2}{15}$ $2\div(3\div5)\neq(2\div3)\div5$	भाग साहचर्य नहीं है.

SCERT TELANGANA

(ii) पूर्णांक

चार संक्रियाओं के सापेक्ष पूर्णांकों की साहचर्यता को स्मरण कीजिए।

निम्न तालिका आवश्यक टिप्पणियों के साथ पूर्ण कीजिए।

संक्रिया	पूर्णांक उदाहरण के साथ	टिप्पणी
योग	क्या $2 + [(-3) + 5)] = [(2 + (-3)] + 5$? $2+[(-3)+5]=2+[-3+5]=2+2=4$ $[2+(-3)]+5=[2-3]+5=-1+5=4$ किन्हीं a, b और c तीन पूर्णांकों के लिए $a + (b + c) = (a + b) + c$	— — —— —
व्यवकलन	क्या $6 - (9 - 5) = (6 - 9) - 5$?	— — —— —
गुणन	क्या $2\times[7\times(-3)] = (2\times7)\times(-3)$?	— — —— —
भाग	$10 \div [2\div(-5)] = [10 \div 2]\div(-5)$? $10 \div [2\div(-5)] = 10\div\frac{-2}{5} = 10\times\frac{-5}{2} = -25$ अब $(10\div2)\div(-5) = \frac{10}{2}\div-5 = 5\div-5 = \frac{5}{-5} = -1$ इस प्रकार $10 \div [2\div(-5)] \neq [10\div2]\div(-5)$	— — —— —

(iii) परिमेय संख्याएँ - साहचर्यता

(a) योग

मान लीजिए तीन परिमेय संख्याएँ $\frac{2}{7}, 5, \frac{1}{2}$ हैं। इनकी जाँच कीजिए कि

$$\frac{2}{7}+\left[5+\left(\frac{1}{2}\right)\right]=\left[\left(\frac{2}{7}+5\right)\right]+\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{L.H.S.} = \frac{2}{7}+\left[5+\left(\frac{1}{2}\right)\right]=\frac{2}{7}+\left[5+\frac{1}{2}\right]=\frac{2}{7}+\left[\frac{10+1}{2}\right]=\frac{4+77}{14}=\frac{81}{14}$$

$$\text{R.H.S.} = \left[\left(\frac{2}{7}+5\right)\right]+\left(\frac{1}{2}\right)=\left[\left(\frac{2+35}{7}\right)\right]+\frac{1}{2}=\frac{37}{7}+\frac{1}{2}=\frac{74+7}{14}=\frac{81}{14}$$

L.H.S. = R.H.S.

SCERT TELANGANA

ज्ञात कीजिए। $\frac{1}{2}+\left[\frac{3}{7}+\frac{4}{3}\right]$ और $\left[\frac{1}{2}+\frac{3}{7}\right]+\left(\frac{4}{3}\right)$

क्या दोनों योग समान हैं?

कुछ अन्य परिमेय संख्याओं को लेकर इनकी साहचर्यता की जाँच कीजिए।

हमें प्राप्त हुआ कि परिमेय संख्याएँ योग के अंतर्गत साहचर्य नियम का पालन करती हैं।

$a + (b + c) = (a + b) + c$ किन्हीं तीन परिमेय संख्याओं a, b और c के लिए।

अर्थात. $\forall$ a, b, c $\in$ Q, $a + (b + c) = (a + b) + c$

(b) व्यवकलन

तीन परिमेय संख्याएँ $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ और $\frac{-5}{4}$ लीजिए।

जाँच कीजिए $\frac{1}{2}-\left[\frac{3}{4}-\left(\frac{-5}{4}\right)\right]=\left[\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right]-\left(\frac{-5}{4}\right)$

$$\text{L.H.S.} = \frac{1}{2}-\left[\frac{3}{4}-\left(\frac{-5}{4}\right)\right] = \frac{1}{2}-\left[\frac{3}{4}+\frac{5}{4}\right]=\frac{1}{2}-\left[\frac{8}{4}\right]$$

$$= \frac{1}{2}-2=\frac{1-4}{2}=\frac{-3}{2}$$

$$\text{R.H.S.} = \left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)-\left(\frac{-5}{4}\right) = \left(\frac{1\times 2-3}{4}\right)+\frac{5}{4}=\left(\frac{-1}{4}\right)+\frac{5}{4}$$

$$= \frac{-1+5}{4}=\frac{4}{4}=1$$

$$\therefore \frac{1}{2}-\left[\frac{3}{4}-\left(\frac{-5}{4}\right)\right] \neq \left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)-\left(\frac{-5}{4}\right)$$

L.H.S. $\neq$ R.H.S.

हमने ज्ञात किया कि परिमेय संख्याओं के समुच्चय में व्यवकलन साहचर्य नियम का पालन नहीं करता है। अतः $a-(b-c) \neq (a-b)-c$ किन्हीं तीन परिमेय संख्याओं a, b, c के लिए।

(c) गुणन

तीन परिमेय संख्याएँ लीजिए $\frac{2}{3}, \frac{4}{7}, \frac{-5}{7}$

क्या $\frac{2}{3}\times\left[\frac{4}{7}\times\left(\frac{-5}{7}\right)\right]=\left(\frac{2}{3}\times\frac{4}{7}\right)\times\left(\frac{-5}{7}\right)$?

$$\text{LHS} = \frac{2}{3}\times\left[\frac{4}{7}\times\left(\frac{-5}{7}\right)\right] = \frac{2}{3}\left[\frac{-20}{49}\right]=\frac{-40}{147}$$

SCERT TELANGANA

R.H.S. $= \left(\frac{2}{3} \times \frac{4}{7}\right) \times \left(\frac{-5}{7}\right) = \left(\frac{8}{21}\right) \times \left(\frac{-5}{7}\right) = \frac{-40}{147}$

L.H.S. = R.H.S.

इनकी जाँच कीजिए।

ज्ञात कीजिए। $2 \times \left(\frac{1}{2} \times 3\right)$ और $\left(2 \times \frac{1}{2}\right) \times 3$

क्या $2 \times \left(\frac{1}{2} \times 3\right) = \left(2 \times \frac{1}{2}\right) \times 3$?

ज्ञात कीजिए $\frac{5}{3} \times \left(\frac{3}{7} \times \frac{7}{5}\right)$ और $\left(\frac{5}{3} \times \frac{3}{7}\right) \times \frac{7}{5}$

क्या $\frac{5}{3} \times \left(\frac{3}{7} \times \frac{7}{5}\right) = \left(\frac{5}{3} \times \frac{3}{7}\right) \times \frac{7}{5}$?

हम ऊपर की सभी स्थितियों में पाते हैं कि L.H.S. = R.H.S.

इस प्रकार परिमेय संख्याओं में गुणा साहचर्य नियम का पालन करता है।

$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$ किन्हीं a, b, c परिमेय संख्याओं के लिए

अर्थात, $\forall\, a, b, c \in Q,\ \ a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$

(d) भाग

कोई तीन परिमेय संख्याएँ लीजिए जैसे- $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ और $\frac{1}{7}$

क्या $\frac{2}{3} \div \left(\frac{3}{4} \div \frac{1}{7}\right) = \left(\frac{2}{3} \div \frac{3}{4}\right) \div \frac{1}{7}$?

L.H.S. $= \frac{2}{3} \div \left(\frac{3}{4} \div \frac{1}{7}\right) = \frac{2}{3} \div \left(\frac{3}{4} \times \frac{7}{1}\right) = \frac{2}{3} \div \frac{21}{4} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{21} = \frac{8}{63}$

R.H.S. $= \left(\frac{2}{3} \div \frac{3}{4}\right) \div \frac{1}{7} = \left(\frac{2}{3} \times \frac{4}{3}\right) \div \frac{1}{7} = \left(\frac{8}{9}\right) \div \frac{1}{7} = \frac{8}{9} \times \frac{7}{1} = \frac{56}{9}$

$$\frac{2}{3} \div \left(\frac{3}{4} \div \frac{1}{7}\right) \neq \left(\frac{2}{3} \div \frac{3}{4}\right) \div \frac{1}{7}$$

L.H.S. ≠ R.H.S.

अतः $a \div (b \div c) \neq (a \div b) \div c$ किन्हीं तीन परिमेय संख्याओं a, b, c के लिए

इसलिए, परिमेय संख्याओं में भाग साहचर्य नियम का पालन नहीं करता।

इसे कीजिए।

इस तालिका को पूर्ण कीजिए।

संख्याएँ	साहचर्य के अंतर्गत			
	योग	व्यवकलन	गुणन	भाग
प्राकृतिक संख्याएँ	हाँ	नहीं	.....	.....
पूर्ण संख्याएँ	.....	.....	.....	नहीं
पूर्णांक	.....	नहीं	हाँ	.....
परिमेय संख्याएँ	.....	.....	.....	.....

1.2.4 शून्य की भूमिका

क्या आप कोई ऐसी संख्या बता सकते हैं, जिसे किसी संख्या में जोड़ने पर वही संख्या प्राप्त होती है? जब **'0'** किसी भी परिमेय संख्या में जोड़ा जाता है तो पुनः वही परिमेय संख्या प्राप्त होती है। उदाहरण के लिए

$1 + 0 = 1$ और $0 + 1 = 1$

$-2 + 0 = -2$ और $0 + (-2) = -2$

$\frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$ और $0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

इस कारण हम '0' को योग तत्समक घटक या योज्य तत्समक कहते हैं। इस गुण का सार नीचे प्रस्तुत किया गया है।

यदि **a** कोई परिमेय संख्या का प्रतिनिधित्व करता है तो $a + 0 = a$ और $0 + a = a$

क्या प्राकृतिक संख्याओं के समुच्चय में योज्य तत्समक है?

1.2.5 एक (1) की भूमिका

रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

$3 \times \square = 3$ और $\square \times 3 = 3$

$-2 \times \square = -2$ और $\square \times -2 = -2$

$\frac{7}{8} \times \square = \frac{7}{8}$ और $\square \times \frac{7}{8} = \frac{7}{8}$

SCERT TELANGANA

आपने ऊपर के गुणनफल में क्या कुछ विशेष देखा?

अतः हम कह सकते हैं कि कोई भी परिमेय संख्या '1' से गुणा की जाये तो गुणनफल पुनः वही परिमेय संख्या प्राप्त होगी।

हम कह सकते हैं कि '1' परिमेय संख्याओं के लिए गुणनात्मक तत्समक है।

पूर्णांक और पूर्ण संख्याओं के लिए गुणनात्मक तत्समक क्या है?

उदाहरण के लिए जब $\frac{15}{50}$ को सरल रूप में लिखने के लिए हम निम्न प्रकार से करते हैं।

$$\frac{15}{50} = \frac{3 \times 5}{10 \times 5} = \frac{3}{10} \times \frac{5}{5} = \frac{3}{10} \times 1 = \frac{3}{10}$$

जहाँ हम लिखते हैं कि $\frac{3}{10} \times 1 = \frac{3}{10}$. यहाँ हमने गुणनफल के तत्समक गुण का उपयोग किया है।

1.2.6 विलोम का अस्तित्व

(i) योगात्मक विलोम (Additive Inverse)

$3 + (-3) = 0$ और $-3 + 3 = 0$

$-5 + 5 = 0$ और $5 + (-5) =$ ______

$\frac{2}{3} + ? = 0$ और ____ $+ \frac{2}{3} =$ ______?

$\left(-\frac{1}{2}\right) + ? = 0$ और ______? $+ \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$

यहाँ –3 और 3 एक दूसरे के योगात्मक विलोम कहलाते हैं, क्योंकि इनको जोड़ने पर हमें योग '0' प्राप्त होता है। कोई दो योगात्मक इकाई संख्याएँ जिनका योग '0' हो, एक दूसरे के योगात्मक विलोम कहलाते हैं। सामान्यतः यदि **a** कोई परिमेय संख्या है तो $\mathbf{a + (-a) = 0}$ और $\mathbf{(-a) + a = 0}$.

तो 'a', '–a' एक दूसरे के योगात्मक विलोम हैं।

0 का योगात्मक विलोम 0 ही रहता है क्योंकि $0 + 0 = 0$.

(ii) गुणात्मक विलोम (Multiplecative Inverse)

परिमेय संख्या $\frac{2}{7}$ किस संख्या से गुणा किया जाये कि गुणनफल 1 प्राप्त हो?

हम देते हैं $\frac{2}{7} \times \frac{7}{2} = 1$ और $\frac{7}{2} \times \frac{2}{7} = 1$

SCERT TELANGANA

नीचे दिए खाली डिब्बे भरिए।

$2 \times \square = 1$ और $\square \times 2 = 1$

$-5 \times \square = 1$ और $\square \times 5 = 1$

$\frac{-17}{19} \times \square = 1$ और $\square \times \frac{-17}{19} = 1$

$1 \times ? = 1$

$-1 \times ? = 1$

कोई दो संख्याएँ जिनका गुणनफल '1' हो, वे एक दूसरे के गुणात्मक विलोम कहलाते हैं।

उदाहरणतया, $4 \times \frac{1}{4} = 1$ और $\frac{1}{4} \times 4 = 1$, अतः संख्या 4 और $\frac{1}{4}$ एक दूसरे के गुणात्मक विलोम (या प्रतिलोम) हैं।

हम कह सकते हैं कि एक परिमेय संख्या $\frac{c}{d}$, दूसरी परिमेय संख्या $\frac{a}{b}$ का गुणात्मक विलोम कहलाती है यदि $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = 1$

प्रयत्न कीजिए :

वितरण नियम का उपयोग करते हुए ज्ञात कीजिए।

(1) $\left\{\frac{7}{5} \times \left(\frac{-3}{10}\right)\right\} + \left\{\frac{7}{5} \times \frac{9}{10}\right\}$

(2) $\left\{\frac{9}{16} \times 3\right\} + \left\{\frac{9}{16} \times -19\right\}$

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए।

1. परिमेय संख्याओं के लिए योग के साथ एक गुण सही हो तो क्या वह पूर्णांकों के लिए भी सही होगा? और पूर्ण संख्याओं के लिए? कौनसा सही होगा? कौनसा सही नहीं होगा?
2. ऐसी संख्याएँ लिखिए जिनके गुणात्मक विलोम, वही संख्याएँ हों।
3. क्या आप '0' (zero) का गुणात्मक प्रतिलोम बता सकते हैं? क्या कोई परिमेय संख्या ऐसी है जिसे '0' से गुणा करने पर '1' प्राप्त हो?

$\square \times 0 = 1$ और $0 \times \square = 1$

1.3 योग पर गुणा का वितरण (Distributive)

कोई तीन परिमेय संख्याएँ $\frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ लीजिए।

जाँच कीजिए कि $\frac{2}{5} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) = \left(\frac{2}{5}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{5}\right) \times \left(\frac{3}{4}\right)$

SCERT TELANGANA

$$\text{L.H.S} = \frac{2}{5} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) = \frac{2}{5} \times \left(\frac{2+3}{4}\right) = \frac{2}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

$$\text{R.H.S} = \frac{2}{5} \times \left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{5} \times \left(\frac{3}{4}\right) = \frac{2}{10} + \frac{6}{20} = \frac{4+6}{20} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

$$\text{L.H.S} = \text{R.H.S}$$

अत: $$\frac{2}{5} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) = \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{4}\right)$$

यह गुण योग पर गुणा का वितरण कहलाता है।

अब निम्न की जाँच कीजिए।

क्या $\frac{2}{5} \times \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right) = \frac{2}{5} \times \left(\frac{1}{2}\right) - \frac{2}{5} \times \left(\frac{3}{4}\right)$

आपने क्या ध्यान दिया? क्या L.H.S. = R.H.S.?

यह गुण व्यवकलन पर गुणा वितरण नियम कहलाता है।

कुछ और परिमे संख्याओं के युग्मों को लीजिए और वितरण नियम की जाँच कीजिए।

सभी परिमेय संख्याओं a, b और c के लिए

हम कह सकते हैं

$a(b + c) = ab + ac$

$a(b - c) = ab - ac$

इसे कीजिए।

तालिका की पूर्ति कीजिए।

संख्याएँ	योगात्मक गुण				
	संवृत	क्रमविनिमेय	साहचर्य	इकाई घटक का अस्तित्व	विलोम घटक का अस्तित्व
परिमेय संख्याएँ	हाँ	——	——	——	——
पूर्णांक	हाँ	——	——	——	——
पूर्ण संख्याएँ	——	——	——	हाँ	नहीं
प्राकृतिक संख्याएँ	हाँ	——	——	——	——

SCERT TELANGANA

तालिका पूर्ण कीजिए।

संख्याएँ	गुणात्मक गुण				
	संवृत	क्रमविनिमेय	साहचर्य	इकाई घटक का अस्तित्व	विलोम घटक का अस्तित्व
परिमेय संख्याएँ	हाँ	——	——	——	——
पूर्णांक	——	हाँ	——	——	——
पूर्ण संख्याएँ	——	——	हाँ	——	——
प्राकृतिक संख्याएँ	——	——	——	हाँ	——

उदाहरण 1. सरल कीजिए $\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\left(\frac{-6}{5}\right)+\left(\frac{-13}{7}\right)$

हल : दिए गए भिन्नों में से सदृश भिन्नों को एक साथ रखते हुए पुनर्व्यवस्थापन कीजिए।

$$\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\left(\frac{-6}{5}\right)+\left(\frac{-13}{7}\right)=\frac{2}{5}+\frac{3}{7}-\frac{6}{5}-\frac{13}{7}$$

$$=\left(\frac{2}{5}-\frac{6}{5}\right)+\left(\frac{3}{7}-\frac{13}{7}\right)$$ (योग के क्रमविनिमेय नियम द्वारा)

$$=\frac{2-6}{5}+\frac{3-13}{7}$$

$$=\frac{-4}{5}+\frac{-10}{7}=\frac{-4}{5}-\frac{10}{7}$$

$$=\frac{-4\times7-10\times5}{35}=\frac{-28-50}{35}=\frac{-78}{35}$$

उदाहरण 2: निम्न परिमेय संख्याओं के प्रत्येक के योगात्मक विलोम लिखिए।

(i) $\frac{2}{7}$ (ii) $\frac{-11}{5}$ (iii) $\frac{7}{-13}$ (iv) $\frac{-2}{-3}$

हल : (i) $\frac{2}{7}$ का योगात्मक प्रतिलोम $\frac{-2}{7}$ है।

क्योंकि $\frac{2}{7}+\left(\frac{-2}{7}\right)=\frac{2-2}{7}=0$

SCERT TELANGANA

(ii) $\frac{-11}{5}$ का योगात्मक विलोम $-\left(\frac{-11}{5}\right) = \frac{11}{5}$

(iii) $\frac{7}{-13}$ का योगात्मक विलोम $-\left(\frac{7}{-13}\right) = \frac{-7}{-13} = \frac{7}{13}$

(iv) $\frac{-2}{-3}$ का योगात्मक विलोम $-\left(\frac{\not{-}2}{\not{-}3}\right) = -\frac{2}{3}$

उदाहरण 3 : ज्ञात कीजिए $\frac{2}{5} \times \frac{-1}{9} + \frac{23}{180} - \frac{1}{9} \times \frac{3}{4}$

हल : $\frac{2}{5} \times \frac{-1}{9} + \frac{23}{180} - \frac{1}{9} \times \frac{3}{4} = \frac{2}{5} \times \frac{-1}{9} - \frac{1}{9} \times \frac{3}{4} + \frac{23}{180}$

(योग के क्रमविनिमेय नियम द्वारा)

$$= \frac{2}{5} \times \left(\frac{-1}{9}\right) + \left(\frac{-1}{9}\right) \times \frac{3}{4} + \frac{23}{180}$$

$$= \frac{-1}{9}\left(\frac{2}{5} + \frac{3}{4}\right) + \frac{23}{180}$$ (वितरण नियम द्वारा)

$$= -\frac{1}{9}\left(\frac{8+15}{20}\right) + \frac{23}{180}$$

$$= -\frac{1}{9}\left(\frac{23}{20}\right) + \frac{23}{180} = \frac{-23}{180} + \frac{23}{180} = 0$$ (योगात्मक विलोम नियम द्वारा)

उदाहरण 4: $\frac{-9}{2}, \frac{5}{18}$ के प्रतिलोम का गुणा कीजिए और गुणनफल को $\left(\frac{-4}{5}\right)$ के योगात्मक विलोम के साथ जोड़िए। उत्तर क्या आया?

हल : $\frac{-9}{2}$ का प्रतिलोम $\frac{-2}{9}$ है।

$\frac{5}{18}$ का प्रतिलोम $\frac{18}{5}$ है।

प्रतिलोमों का गुणनफल $= \frac{-2}{\not{9}_{1}} \times \frac{\not{18}^{2}}{5} = \frac{-4}{5}$

SCERT TELANGANA

$\left(\frac{-4}{5}\right)$ का योगात्मक प्रतिलोम $\frac{4}{5}$ है।

तो गुणनफल + योगात्मक प्रतिलोम = $\frac{-4}{5}+\frac{4}{5}=0$ (योगात्म विलोम गुण)

अभ्यास 1.1

1. निम्न उदाहरणों में बताए गुणों का नाम दीजिए।

(i) $\frac{8}{5}+0=\frac{8}{5}=0+\frac{8}{5}$

(ii) $2\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\right)=2\left(\frac{3}{5}\right)+2\left(\frac{1}{2}\right)$

(iii) $\frac{3}{7}\times 1=\frac{3}{7}=1\times\frac{3}{7}$

(iv) $\left(\frac{-2}{5}\right)\times 1=\frac{-2}{5}=1\times\left(\frac{-2}{5}\right)$

(v) $\frac{2}{5}+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}+\frac{2}{5}$

(vi) $\frac{5}{2}\times\frac{3}{7}=\frac{15}{14}$

(vii) $7a+(-7a) = 0$

(viii) $x\times\frac{1}{x}=1\ (x\neq 0)$

(ix) $(2\times x)+(2\times 6) = 2\times(x+6)$

2. इन संख्याओं के योगात्मक तथा गुणात्मक प्रतिलोम लिखिए।

(i) $\frac{-3}{5}$ (ii) 1 (iii) 0 (iv) $\frac{7}{9}$ (v) -1

3. खाली स्थान भरिए।

(i) $\left(\frac{-1}{17}\right)+(____)=\left(\frac{-12}{5}\right)+\left(\frac{-1}{17}\right)$

(ii) $\frac{-2}{3}+____\ \frac{-2}{3}$

(iii) $1\times____=\frac{9}{11}$

(iv) $-12+\left(\frac{5}{6}+\frac{6}{7}\right)=\left(-12+\frac{5}{6}\right)+(____)$

(v) $(____)\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3}{4}\times____\right)$

(vi) $\frac{-16}{7}+____=\frac{-16}{7}$

SCERT TELANGANA

4. $\frac{2}{11}$ को $\frac{-5}{14}$ के प्रतिलोम द्वारा गुणा कीजिए।

5. $\frac{2}{5}\times\left(5\times\frac{7}{6}\right)+\frac{1}{3}\times\left(3\times\frac{4}{11}\right)$ की गणना में कौनसे गुणों का उपयोग किया जाता है?

6. निम्न की जाँच कीजिए। तथा उपयोग में लाए गए गुण को लिखिए।

$$\left(\frac{5}{4}+\frac{-1}{2}\right)+\frac{-3}{2}=\frac{5}{4}+\left(\frac{-1}{2}+\frac{-3}{2}\right)$$

7. $\frac{3}{5}+\frac{7}{3}+\left(\frac{-2}{5}\right)+\left(\frac{-2}{3}\right)$ का पुनर्व्यवस्थापन करने के बाद मूल्यांकन कीजिए।

8. घटाइए

(i) $\frac{1}{3}$ से $\frac{3}{4}$ (ii) 2 से $\frac{-32}{13}$ (iii) $\frac{-4}{7}$ से -7

9. $\frac{-5}{8}$ में कौन सी संख्या जोड़ें कि उत्तर $\frac{-3}{2}$ प्राप्त हो?

10. दो परिमेय संख्याओं का योग 8 है। यदि एक संख्या $\frac{-5}{6}$ हो तो दूसरी संख्या ज्ञात कीजिए।

11. क्या परिमेय संख्याओं में व्यवकलन साहचर्य नियम का पालन करते हैं? उदाहरण सहित स्पष्ट कीजिए।

12. जाँच कीजिए कि $-(-x)=x$ के लिए

(i) $x=\frac{2}{15}$ (ii) $x=\frac{-13}{17}$

13. लिखिए-

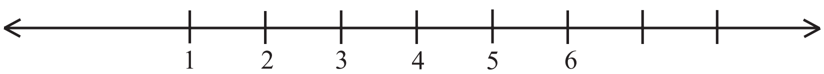
(i) संख्याओं का समुच्चय जिसमें योगात्मक इकाई घटक नहीं है।

(ii) वह परिमेय संख्या जिसका कोई प्रतिलोम नहीं है।

(iii) ऋणात्मक परिमेय संख्या का प्रतिलोम

1.4 संख्यारेखा पर परिमेय संख्याओं का चित्रण

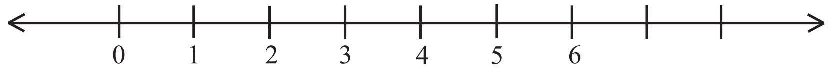
गायत्री ने एक संख्यारेखा खींची और उसपर संख्याएँ अंकित कीं।



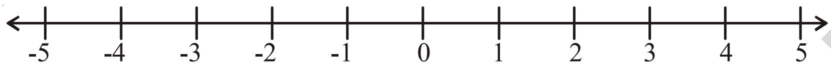
रेखा पर कौनसी संख्याओं का सम्मुचय चिह्नित किया गया है?

SCERT TELANGANA

सुजाता ने कहा- “वे प्राकृतिक संख्याएँ हैं”. परमेश ने कहा- “वे परिमेय संख्याएँ हैं” आस किससे सहमत हैं ?



रेखा पर कौन सी संख्याओं का समुच्चय चिह्नित है? वे पूर्ण संख्याएँ हैं या परिमेय संख्याएँ?



रेखा पर कौन सी संख्याओं का समुच्चय चिह्नित है?

क्या आप –5 और 3 के बीच की कोई दो संख्याएँ संख्यारेखा पर दर्शा सकते हैं।

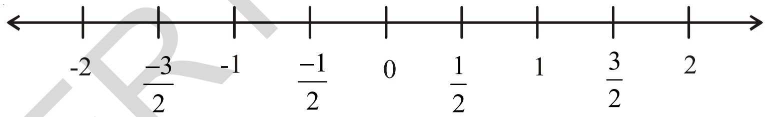
क्या आप उपर्युक्त रेखा पर पूर्णांक 0 और 1 या –1 और 0 के बीच की कोई संख्या देख सकते हो?

0 और 1 के बीच में संख्या $\frac{1}{2}$ है।

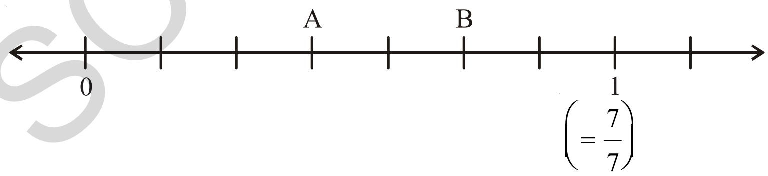
1 और 2 के बीच $1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, 0 और –1 के बीच $-\frac{1}{2}$ है।

– 1 और –2 के बीच $-1\frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$ है।

ये परिमेय संख्याएँ संख्या रेखा पर निम्न प्रकार से दर्शाई जा सकती हैं-



उदाहरण 5 : नीचे दी गई संख्यारेखा पर चिह्नित A और B से दिखाई गई परिमेय संख्याओं को पहचानिए।



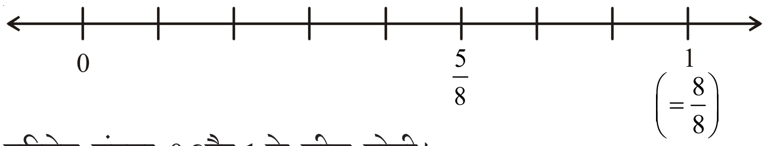
कोई भी परिमेय संख्या, संख्या रेखा पर दर्शा सकते हैं। ध्यान रहे कि परिमेय संख्या में हर, प्रत्येक इकाई को समान भागों में विभाजित करने वाली संख्या को दर्शाता है। अंश, इन भागों में से कितने भाग लिये गये हैं, दर्शाता है।

हल : यहाँ एक इकाई, 0 से 1 को 7 समान भागों में बाँटा गया। 7 भागों में तीसरे भाग को A से प्रदर्शित करते हैं। इसलिए, A प्रदर्शित करता है $\frac{3}{7}$ को और B प्रदर्शित करता है $\frac{5}{7}$ को।

SCERT TELANGANA

उदाहरण 6: संख्यारेखा पर $\frac{5}{8}$ दर्शाइए।

हल :



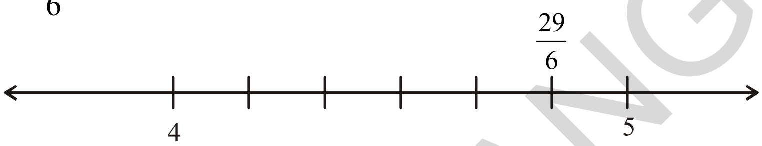
$\frac{5}{8}$ परिमेय संख्या 0 और 1 के बीच होगी।

इसलिए 0 और 1 के बीच की संख्यारेखा को 8 (हर) समान भागों में विभाजित कीजिए।

0 से नापते हुए 5वें भाग (अंश) को $\frac{5}{8}$ से चिह्नित कीजिए। यही परिमेय संख्या $\frac{5}{8}$ है।

उदाहरण 7: $\frac{29}{6}$ को संख्यारेखा पर दर्शाइए।

हल :



$\frac{29}{6} = 4\frac{5}{6} = 4+\frac{5}{6}$. यह संख्यारेखा पर 4 और 5 के बीच रहता है।

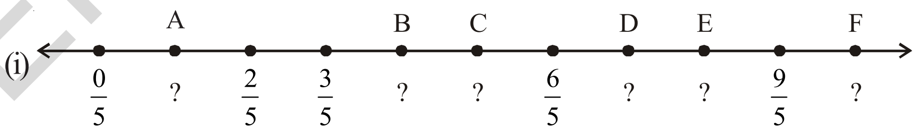
4 और 5 के बीच को 6 (हर) समान भागों में विभाजित कीजिए।

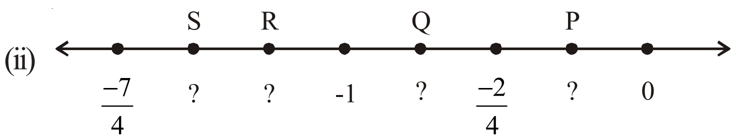
4 से नापते हुए 5वें भाग (परिमेय भाग का अंश) को चिह्नित कीजिए।

यही $\frac{29}{6}$ का स्थान है।

प्रयत्न कीजिए।

संख्यारेखा पर अक्षरों से चिह्नित बिंदुओं के लिए परिमेय संख्याएँ लिखिए।





इसे कीजिए।

(i) $-\frac{13}{5}$ को संख्यारेखा पर दर्शाइए।

SCERT TELANGANA

1.5 दो परिमेय संख्याओं के बीच परिमेय संख्या

निम्न को ध्यान से देखिए।

5 और 1 के बीच प्राकृतिक संख्याएँ 4, 3, 2 हैं।

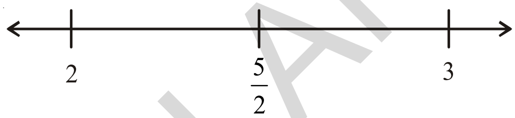
क्या कोई प्राकृतिक संख्या 1 और 2 के बीच है?

–4 और 3 के बीच पूर्णांक –3, –2, –1, 0, 1, 2 हैं। क्या –2 और –1 के बीच कोई पूर्णांक है? क्या आप इसे ज्ञात कर सकते हैं? अतः दो क्रमिक पूर्णांकों के बीच कोई भी पूर्णांक नहीं रहता है।

किंतु दो क्रमिक पूर्णांकों के बीच हम परिमेय संख्या लिख सकते हैं।

आइए अब 2 और 3 के बीच कोई परिमेय संख्या लें।

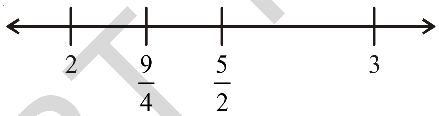
हम जानते हैं कि a और b दो परिमेय संख्याएँ हैं तब $\frac{a+b}{2}$ (यह a और b का माध्य भी कहलाता है) इनके बीच की परिमेय संख्या है। इसलिए $\frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$ परिमेय संख्या है जो 2 और 3 के ठीक बीच में स्थित है।



इस प्रकार $2 < \frac{5}{2} < 3.$

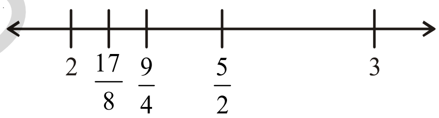
अब 2 और $\frac{5}{2}$ के बीच की परिमेय संख्या $\frac{2+\frac{5}{2}}{2} = \frac{\frac{9}{2}}{2} = \frac{9}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{9}{4}.$ है।

इस प्रकार



$$2 < \frac{9}{4} < \frac{5}{2} < 3$$

पुनः 2 और $\frac{9}{4}$ का माध्य होगा- $\frac{2+\frac{9}{4}}{2} = \frac{\frac{17}{4}}{2} = \frac{17}{8}$



इसलिए $2 < \frac{17}{8} < \frac{9}{4} < \frac{5}{2} < 3$

इस प्रकार दो संख्याओं के बीच हम कितने भी अंतर्निर्विष्ट परिमेय संख्याएँ प्राप्त कर सकते हैं। वास्तव में दो परिमेय संख्याओं के बीच अनंत परिमेय संख्याएँ हैं।

SCERT TELANGANA

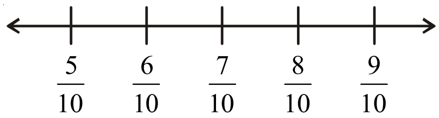
दूसरी विधि

क्या आप $\frac{5}{10}$ और $\frac{9}{10}$ के बीच के एक सौ परिमेय संख्याएँ माध्यमान पद्धति से लिख सकते हैं?

आपको कठिनाई हो सकती है क्योंकि यह बहुत लंबी प्रक्रिया है।

यह आपके लिए क दूसरी विधि दी जा रही है

हम जानते हैं कि $\frac{5}{10} < \frac{6}{10} < \frac{7}{10} < \frac{8}{10} < \frac{9}{10}$



यहाँ $\frac{5}{10}$ और $\frac{9}{10}$ के बीच की कोई तीन परिमेय संख्याएँ लिखिए।

लेकिन अगर हम ध्यान दें $\frac{5}{10} = \frac{50}{100}$ और $\frac{9}{10} = \frac{90}{100}$

अब $\frac{50}{100}$ और $\frac{90}{100}$ के बीच की परिमेय संख्याएँ होंगी-

$$\frac{5}{10} = \frac{50}{100} < \frac{51}{100} < \frac{52}{100} < \frac{53}{100} < \ldots\ldots. < \frac{89}{100} < \frac{90}{100} = \frac{9}{10}$$

इसी प्रकार, जब हम मानते हैं

$$\frac{5}{10} = \frac{500}{1000} \text{ और } \frac{9}{10} = \frac{900}{1000}$$

इसलिए $\frac{5}{10} = \frac{500}{1000} < \frac{501}{1000} < \frac{502}{1000} < \frac{503}{1000} < \ldots\ldots\ldots\ldots < \frac{899}{1000} < \frac{900}{1000} = \frac{9}{10}$

इस प्रकार हम परिमेय संख्याओं की अभीष्ट संख्या अंतर्निविष्ट कर सकते हैं।

SCERT TELANGANA

उदाहरण 8: -3 और 0 के बीच के कोई पाँच परिमेय संख्याएँ लिखिए।

हल : $-3 = -\frac{30}{10}$ और $0 = \frac{0}{10}$ अत:

$-\frac{29}{10}, -\frac{28}{10}, -\frac{27}{10}, ..., -\frac{2}{10}, -\frac{1}{10}$ जो -3 और 0 के बीच में हैं।

हम इनमें से किन्हीं पाँच को ले सकते हैं।

अभ्यास - 1.2

1. इन संख्याओं को संख्यारेखा पर दर्शाइए।

   (i) $\frac{9}{7}$ (ii) $-\frac{7}{5}$

2. $-\frac{2}{13}, \frac{5}{13}, \frac{-9}{13}$ इन संख्याओं को संख्यारेखा पर दर्शाइए।

3. $\frac{5}{6}$ से छोटी कोई पाँच परिमेय संख्याएँ लिखिए।

4. -1 और 2 के बीच की किन्हीं बारह परिमेय संख्याओं को ज्ञात कीजिए।

5. $\frac{2}{3}$ और $-\frac{3}{4}$ के बीच की एक परिमेय संख्या लिखिए।

   [**संकेतः** पहले समान हर की परिमेय संख्याएँ लिखिए।]

6. $-\frac{3}{4}$ और $\frac{5}{6}$ के बीच की कोई दस परिमेय संख्याएँ लिखिए।

1.6 परिमेय संख्याओं का दशमलव में निरूपण

हम जानते हैं कि कोई भी परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ के रूप में रहती है जहाँ $q \neq 0$ और p, q पूर्णांक हैं।

आइए देखें कि कैसे परिमेय संख्या को दशमलव में बदला जा सकता है?

भाग पद्धति से परिमेय संख्या को दशमलव में बदल सकते हैं।

मान लीजिए कि $\frac{25}{16}$ एक परिमेय संख्या है।

SCERT TELANGANA

सोपान 1: हर को अंश से भाग दीजिए।

$$16\overline{)25}\,(1$$
16
9

सोपान 2: शेषफल, भाजक से कम आने तक भागक्रिया जारी रखिए।

सोपान 3: भाज्य में और भागफल में अंत में दशमलव बिंदु दीजिए।

$$16\overline{)25.0}\,(1.$$
16
90

सोपान 4: भाज्य में दशमलव बिंदु के दाहिने तरफ शेषफल के भी दाहिनी ओर शून्य दीजिए। पुनः पूर्ण संख्याओं के समान भाग कीजिए।

सोपान 5: चरण 4 तब तक दोहराइए जबतक शेषफल शून्य अथवा दशमलव स्थान की अभीष्ट संख्या प्राप्त हो।

$$16\overline{)25.0000}\,(1.5625$$
16
90
80
100
96
40
32
80
80
0

इसलिए $\frac{25}{16} = 1.5625$

मान लीजिए $\frac{17}{5}$

$$5\overline{)17.0}\,(3.4$$
15
20
20
0

इसलिए $\frac{17}{5} = 3.4$

$\frac{1}{2}, \frac{13}{25}, \frac{8}{125}, \frac{1974}{10}$ को दशमलव रूप में व्यक्त करने का प्रयत्न कीजिए और मान लिखिए।

हमें पता चलता है कि इन परिमेय संख्याओं के दशमलव भाग में केवल सीमित अंकों की संख्या है। ऐसे दशमलव को अनावर्त दशमलव कहते हैं।

आवर्ती दशमलव :

माना कि परिमेय संख्या $\frac{5}{3}$

SCERT TELANGANA

दीर्घ भाग पद्धति द्वारा हमें ज्ञात होता है ⟶

$$\begin{array}{r} 3\overline{)5.000}\,(1.666 \\ 3 \\ \hline 20 \\ 18 \\ \hline 20 \\ 18 \\ \hline 20 \\ 18 \\ \hline 2 \end{array}$$

इसलिए $\frac{5}{3} = 1.666...$

हम इसे इस प्रकार लिखते हैं $\frac{5}{3} = 1.\overline{6}$ दशमलव भाग में '6' के ऊपर की रेखा, उस अंक को आवर्ती दर्शाती है।

हमें पता चलता है कि ऊपर के भाग में वही शेषफल बारबार दोहराया जा रहा है और भागफल में अंक 6 दोहराया गया है।

मान लीजिए परिमेय संख्या $\frac{1}{7}$ ⟶

दीर्घ भाग पद्धति द्वारा

$$\begin{array}{r} 7\overline{)10.00000000}\,(0.14285714 \\ 7 \\ \hline 30 \\ 28 \\ \hline 20 \\ 14 \\ \hline 60 \\ 56 \\ \hline 40 \\ 35 \\ \hline 50 \\ 49 \\ \hline 10 \\ 7 \\ \hline 30 \\ 28 \\ \hline 2 \end{array}$$

$\frac{1}{7} = 0.142857142857....$

$\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$.

142857 पर खींची गई रेखा इन अंकों को इसी क्रम में दोहराये जाने को दर्शाती है।

ऊपर दिये गये उदाहरण परिमेय संख्याओं का अशांत आवर्ती दशमलव के रूप में निरूपण करते हैं अथवा हम उन्हें पुनरावर्तनीय दशमलव कहते हैं।

$\frac{1}{3}$, $\frac{17}{6}$, $\frac{11}{9}$ और $\frac{20}{19}$ को दशमलव रूप में व्यक्त करने का प्रयत्न कीजिए।

$\frac{1}{3} = \square$ $\quad \frac{17}{6} = \square$ $\quad \frac{11}{9} = \square$ $\quad \frac{20}{19} = \square$

SCERT TELANGANA

जब हम कुछ परिमेय संख्याओं को भाग पद्धति से दशमलव रूप में बदलने का प्रयास करते हैं, तो हम देखते हैं कि भाग कभी खत्म नहीं होते। यह इसलिए होता है कि भाग करते समय कुछ निश्चित सोपानों के बाद शेषफल बार-बार दोहराया जाता है। इन उदाहरणों में भागफल में एक अंक अथवा अंकों का समुच्चय उसी क्रम में दोराया जाता है।

उदाहरण के लिए 0.33333------.= $0.\overline{3}$

0.12757575---------= $0.12\overline{75}$

123.121121121121----------= $123.\overline{121}$

5.678888-----------= $5.678\overline{8}$ आदि।

ऐसे दशमलव को पुनरावर्तनीय दशमलव अथवा आवर्ती दशमलव कहते हैं।

आवर्ती दशमलव में दोहराये जाने वाले अंकों के समुच्चय को आवर्त कहते हैं।

उदाहरण के लिए

0.3333 ...... = $0.\overline{3}$ में आवर्तन 3 है

0.12757575 .... = $0.12\overline{75}$ में आवर्तन 75 है

आवर्ती दशमलव के आवर्त में अंकों की संख्या आवर्तन कहलाती है।

उदाहरण के लिए

0.3333 ...... = $0.\overline{3}$ में आवर्तन 1 है।

0.12757575 .... = $0.12\overline{75}$ में आवर्तन 2 है।

0.23143143143....... का आवर्त = _______, आवर्तन = _______

125.6788989 ....का आवर्त = _______, आवर्तन = _______

सोचिए और चर्चा कीजिए।

1. इन्हें दशमलव रूप में लिखिए।

(i) $\frac{7}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{23}{10}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{17}{6}$, $\frac{22}{7}$

(ii) ऊपर दी गई परिमेय संख्याओं में कौन से शांत और कौन से अशांत दशमलव हैं?

(iii) ऊपर दी गई परिमेय संख्याओं के हर में अभाज्य संख्याओं के गुणा के रूप में लिखिए।

(iv) यदि ऊपर दी गई सरल परिमेय संख्याओं के हर में 2 और 5 के अलावा अभाज्य भाजक नहीं हैं तो आपको क्या निष्कर्ष निकालते हैं?

SCERT TELANGANA

1.7 दशमलव रूप को परिमेय रूप में परिवर्तित करना (Conversion)

1.7.1 शांत दशमलव को परिमेय रूप में परिवर्तित करना

कोई दशमलव संख्या लीजिए- 15.75

सोपान 1 : दी हुई संख्या में दशमलव बिन्दु के बाद की संख्या की संख्या जानिए। 15.75 में 2 दशमलव स्थान हैं।

$\therefore$ 15.75 को $\frac{1575}{100}$ भी लिख सकते है।

$$\frac{1575}{100} = \frac{1575 \div 5}{100 \div 5} = \frac{315 \div 5}{20 \div 5} = \frac{63}{4}$$

उदाहरण 9: निम्न दशमलव में से प्रत्येक को $\frac{p}{q}$ रूप में व्यक्त कीजिए।

(i) 0.35 (ii) –8.005 (iii) 2.104

हल : (i) $0.35 = \frac{35}{100} = \frac{35 \div 5}{100 \div 5} = \frac{7}{20}$

(ii) $-8.005 = \frac{-8005}{1000} = \frac{-8005 \div 5}{1000 \div 5} = \frac{-1601}{200}$

(iii) $2.104 = \frac{2104}{1000} = \frac{2104 \div 4}{1000 \div 4} = \frac{526 \div 2}{250 \div 2} = \frac{263}{125}$

1.7.2 अशांत आवर्ती दशमलव को परिमेय रूप में परिवर्तित करना

निम्न उदाहरण द्वारा परिवर्तित करने की विधि पर चर्चा करेंगे।

उदाहरण 10: नीचे दिए गए प्रत्येक दशमलव संख्या को परिमेय रूप में व्यक्त कीजिए।

(i) $0.\overline{4}$ (ii) $0.\overline{54}$ (iii) $4.\overline{7}$

हल (i): $0.\overline{4}$

माना कि $x = 0.\overline{4}$

$\Rightarrow x = 0.444\ ...$ ----------------(i)

यहाँ दशमलव का आवर्तन एक है।

SCERT TELANGANA

इसलिए हम (i) की दोनों ओर 10 से गुणा करते हैं, तो प्राप्त होता है

$10x = 4.44 \ldots$ ----------------(ii)

(ii) में से (i) घटाने पर

$$\begin{aligned} 10x &= 4.444\ldots\ldots \\ x &= 0.444\ldots\ldots \\ \hline 9x &= 4.000\ldots\ldots \\ \hline x &= \frac{4}{9} \end{aligned}$$

अतः $0.\overline{4} = \frac{4}{9}$

ध्यान दीजिए।

$0.\overline{4} = \frac{4}{9}$

$0.\overline{5} = \frac{5}{9}$

$0.\overline{54} = \frac{54}{99}$

$0.\overline{745} = \frac{745}{999}$

हल (ii): $0.\overline{54}$

माना कि $x = 0.\overline{54}$

$\Rightarrow x = 0.545454\ldots$ ------------------ (i)

यहाँ दशमलव का आवर्तन दो है।

अतः हम (i) की दोनों ओर 100 से गुणा करते हैं, और हमें प्राप्त होता है

$100x = 54.5454\ldots$ ------------------ (ii)

(ii) – (i) घटाने पर

$$\begin{aligned} 100x &= 54.5454\ \ldots\ldots \\ x &= 0.5454\ \ldots\ldots \\ \hline 99x &= 54.0000\ldots\ldots \\ \hline \end{aligned}$$

$x = \frac{54}{99}$. अतः $0.\overline{54} = \frac{54}{99}$.

हल (iii) : $4.\overline{7}$

माना कि $x = 4.\overline{7}$

$x = 4.777\ldots$ ---------------- (i)

यहाँ दशमलव का आवर्तन एक है।

(i) के दोनों ओर 10 से गुणा करने पर, हमें प्राप्त होता है

$10x = 47.777\ldots$ ---------------- (ii)

(ii) में से (i) घटाने पर हमें प्राप्त होता है

SCERT TELANGANA

$$10x = 47.777\ .....$$
$$x = 4.777\ .....$$
$$9x = 43.000......$$

$x = \dfrac{43}{9}$ इसलिए $4.\overline{7} = \dfrac{43}{9}$.

वैकल्पिक पद्धति : $4.\overline{7} = 4 + 0.\overline{7}$

$$= 4 + \frac{7}{9}$$

$$= \frac{9 \times 4 + 7}{9}$$

$$4.\overline{7} = \frac{43}{9}$$

उदाहरण 11: मिश्र आवर्ती दशमलव $15.7\overline{32}$ को $\dfrac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कीजिए।

हल : माना कि $x = 15.7\overline{32}$

x =15.7323232.... ---------------(i)

चूँकि दो अंक 32 दोहराये जा रहे हैं इसलिए ऊपर के दशमलव का आवर्तन दो है। अतः (i) में दोनों ओर 100 से गुणा करने पर,

100 x = 1573.2323.... -------------(ii)

(ii) में से (i) घटाने पर

$$100\,x = 1573.232323....$$
$$x = 15.732323....$$
$$99\,x = 1557.50$$

$$x = \frac{1557.5}{99} = \frac{15575}{990}$$

$$= 15.7\overline{32} = \frac{15575}{990}$$

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए।

दशमलव $0.\overline{9}$, $14.\overline{5}$ और $1.2\overline{4}$ को परिमेय संख्या में बदलिए। क्या आप इसके लिए औपचारिक पद्धति के अलावा कोई और पद्धति बता सकते हैं?

SCERT TELANGANA

अभ्यास - 1.3

1. निम्न में प्रत्येक दशमलव को $\frac{p}{q}$ रूप में लिखिए।

   (i) 0.57 (ii) 0.176 (iii) 1.00001 (iv) 25.125

2. निम्न में से प्रत्येक दशमलव को परिमेय रूप $\frac{p}{q}$ रूप में लिखिए।

   (i) $0.\overline{9}$ (ii) $0.\overline{57}$ (iii) $0.7\overline{29}$ (iv) $12.2\overline{8}$

3. ज्ञात कीजिए $(x+y) \div (x-y)$ यदि

   (i) $x=\frac{5}{2}, y=-\frac{3}{4}$ (ii) $x=\frac{1}{4}, y=\frac{3}{2}$

4. $-\frac{13}{5}$ और $\frac{12}{7}$ के योग को $-\frac{13}{7}$ और $-\frac{1}{2}$ के गुणनफल से भाग दीजिए।

5. यदि किसी संख्या का $\frac{2}{5}$ भाग उसी संख्या के $\frac{1}{7}$ भाग से 36 अधिक है, तो संख्या ज्ञात कीजिए।

6. एक 11मी. लंबी रस्सी में से $2\frac{3}{5}$ मी. और $3\frac{3}{10}$ मी. लंबाई के दो टुकड़े काटे गए तो शेष रस्सी की लंबाई क्या होगी?

7. $7\frac{2}{3}$ मी. कपड़े का दाम ₹$12\frac{3}{4}$ हो तो प्रति मीटर दाम ज्ञात कीजिए।

8. एक आयताकार बगीचे का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जो $18\frac{3}{5}$ मी. लंबा और $8\frac{2}{3}$ मी. चौड़ा है। 9.

$-\frac{11}{4}$ प्राप्त करने के लिए $-\frac{33}{16}$ को किस संख्या से भाग देना होगा?

10. यदि 64 मी. कपड़े में से समान माप के 36 पतलून बनाये जा सकते हैं तो प्रत्येक पतलून के लिए कितने कपड़े का उपयोग हुआ?

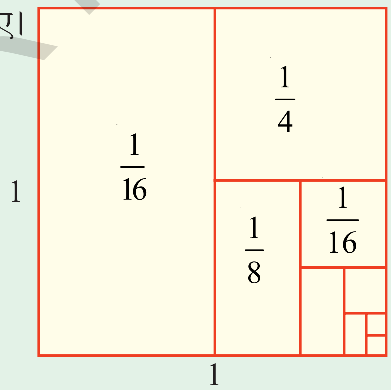
11. यदि 0.363636 ....दोहराये जाने वाले दशमलव को साधारण परिमेय संख्या में $\frac{p}{q}$ में लिखना हो तो $p+q$ का योग क्या होगा?

SCERT TELANGANA

हमने क्या विवेचन किया है?

1. परिमेय संख्याएँ, योग व्यवकलन और गुणा संक्रियाओं के सापेक्ष संवृत्त रहती हैं।
2. योग और गाणा की संक्रियाएँ रहती हैं:
   (i) परिमेय संख्याओं के लिए क्रमविनिमय
   (ii) परिमेय संख्याओं के लिए सहचर्य
3. परिमेय संख्याओं के लिए योगात्मक तत्समक '0' है।
4. परिमेय संख्याओं के लिए गणात्मक तत्समक '1' है।
5. परिमेय संख्या का योगात्मक प्रतिलोम उसकी गुणात्मक संख्या रहती है और विलोमता भी।
6. परिमेय संख्या का गुणात्मक प्रतिलोम उसका व्युत्क्रम रहता है।
7. परिमेय संख्याएँ a,b और c के लिए वितरणता
   $a (b + c) = ab + ac$ और $a (b – c) = ab – ac$
8. परिमेय संख्याएँ संख्यारेखा पर निर्देशित कर सकते हैं।
9. कोई भी दिये गये दो परिमेय संख्याओं के बीच अनंत परिमेय संख्याएँ रहती हैं। मध्य की संकलना कोई दो परिमेय संख्याओं के बीच की परिमेय संख्याएँ ज्ञात करने के लिए सहायक होती हैं।
10. परिमेय संख्याओं का दशमलव में निरूपण या तो शांत दशमलव अथवा अशांत आवर्ती दशमलव के रूप में होता है।

a_n के लिए एक सूत्र का अनुमान लगाइए। अपने अनुमान को सिद्ध करने के लिए विभाजित वर्ग इकाई का प्रयोग कीजिए।



संकेत : $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, $a_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$......... $a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^n}$

1
2

तो $a_n = ?$

SCERT TELANGANA