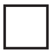
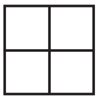
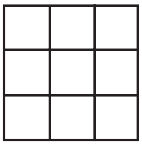
अध्याय 6

वर्ग मूल एवं घन मूल (SQUARE ROOTS AND CUBE ROOTS)

6.0 परिचय

एक इकाई भुजा वाले वर्ग को इकाई वर्ग कहते हैं।

आइए इकाई वर्गों की सहायता से वर्गाकार आकृति बनायें।
नीचे दी गई तालिका में इकाई वर्गों की संख्या पर ध्यान दो।

क्र.संख्या	आकृति	भुजा की लम्बाई इकाई में	इकाई वर्गों की संख्या
1		1	1
2		2	4
3		3	9

इसी प्रकार और दो वर्ग बनाइए।

क्या आप अनुमान लगा सकते हो कि 6 इकाई भुजा वाले वर्ग द्वारा कितने इकाई वर्ग बना सकते हो।
उक्त परीक्षण के आधार पर हम 1, 4, 9, 16, 25 … इकाई वर्गों द्वारा वर्गाकार आकृति बना सकते हैं।
1, 4, 9, 16, 25, … संख्याओं को हम इस प्रकार दर्शा सकते हैं।

$1 = 1 \times 1 = 1^2$

$4 = 2 \times 2 = 2^2$

$9 = 3 \times 3 = 3^2$

$16 = 4 \times 4 = 4^2$

25 = …… × …… = ……..

36 = ……. × …… = ……..

…………………………………..

…………………………………...

$m = n \times n = n^2$ जहाँ m, n पूर्णांक हैं।

गुणनखण्डों के क्रम पर ध्यान दें।

SCERT TELANGANA

आपने देखा कि दिए क्रम में संख्याओं को 2 समान गुणनखण्डों के गुणनफल द्वारा दर्शाया जाता है।

उदा: (i) 9 = 3×3

(ii) 49 = 7×7

(iii) 1.44 = 1.2×1.2

(iv) 2.25 = 1.5×1.5

सामान्य रूप में पूर्णांक 'm' को n^2 द्वारा दर्शाया जाता है जहाँ 'n' पूर्णांक होता है और 'm' एक वर्ग संख्या होती है।

सभी वर्ग संख्याएँ, पूर्ण वर्ग होती हैं किंतु सभी पूर्ण वर्ग, वर्ग संख्याएँ नहीं हो सकतीं।

उदा: 2.25 एक पूर्ण वर्ग है क्योंकि इसे $2.25 = (1.5)^2 = 1.5 \times 1.5$ द्वारा दर्शाया जा सकता है। परन्तु 1.5 एक पूर्ण संख्या नहीं है। इसलिए यह वर्ग संख्या नहीं है।

क्या 42 एक वर्ग संख्या है?

हम जानते हैं कि $6^2 = 36$ और $7^2 = 49$, यदि 42 एक वर्ग संख्या है तो वह एक पूर्णांक का वर्ग होना चाहिए और इसे 6 और 7 के बीच होना चाहिए लेकिन 6 और 7 के बीच कोई भी पूर्ण संख्या नहीं है इसलिए 42 वर्ग संख्या नहीं है।

आइए नीचे दी गई तालिका में पूर्ण वर्गों का निरीक्षण करें।

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

क्या उक्त तालिका में अंकित पूर्ण वर्गों के अलावा भी कोई पूर्ण वर्ग संख्या है?

इसे कीजिए:

1. निम्न संख्याओं के मध्य के पूर्ण वर्गों को लिखिए।

   (i) 100 और 150 (ii) 150 और 200

2. क्या 56 एक पूर्ण वर्ग है? कारण बताइए।

SCERT TELANGANA

6.1 वर्ग संख्याओं के गुण :

निम्न तालिका में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

संख्या	वर्ग
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	....
7	49
8	64
....	81
10	100

संख्या	वर्ग
11	121
12	144
13	....
14	196
15	225
16	....
17	289
18	324
19	361
20	400

संख्या	वर्ग
21	441
22	....
23	529
....	576
25	625
....	....
....	....
....	....
....	....
....	....

उक्त तालिका में वर्ग संख्याओं के इकाई स्थान के अंकों पर ध्यान दो। आप देखेंगे कि ये संख्याएँ इकाई स्थान पर 0, 1, 4, 5, 6 और 9 हैं। किसी भी इकाई स्थान पर 2, 3, 7 या 8 नहीं है। इसलिए इन संख्याओं के इकाई स्थान पर 2, 3, 7 या 8 होता है तो वह संख्या पूर्ण वर्ग नहीं है।

क्या हम कह सकते हैं कि जिन संख्याओं के इकाई स्थान पर 0, 1, 4, 5, 6 या 9 हो वह पूर्ण संख्या है? सोचिए।

प्रयत्न करो :

1. निम्न संख्याएँ पूर्ण वर्ग हैं या नहीं, पहचानिए और कारण बताइए।
   (i) 84 (ii) 108 (iii) 271 (iv) 240 (v) 529

1, 9, 11, 19, 21 संख्याओं के वर्ग लिखिए।

क्या आपने संख्या के इकाई स्थान के अंक और उनके वर्गों के बीच संबंध का निरीक्षण किया? निरीक्षण के द्वारा यह पाया गया कि यदि किसी संख्या का इकाई अंक 1 या 9 हो तो उस संख्या के वर्ग का इकाई अंक केवल 1 होगा।

यदि किसी संख्या का इकाई अंक 4 या 6 हो तो अंक संख्या के वर्ग का इकाई अंक हमेशा 6 होगा। इसी प्रकार उन वर्ग संख्याओं के इकाई अंकों का पता लगाइए जिनके अन्त में 0,2,3, 5, 7 और 8 हों।

SCERT TELANGANA

इसे कीजिए

1. किन वर्ग संख्याओं की इकाई स्थान पर 1 है?

   (i) 126^2 (ii) 179^2 (iii) 281^2 (iv) 363^2

2. किन वर्ग संख्याओं के इकाई स्थान पर 6 है?

   (i) 116^2 (ii) 228^2 (iii) 324^2 (iv) 363^2

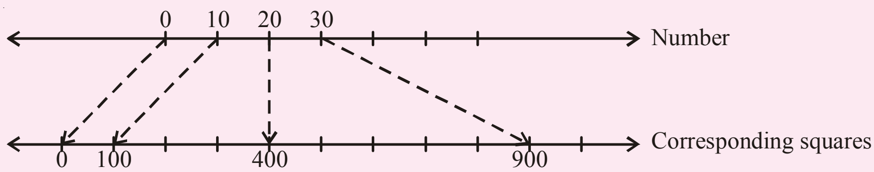
सोचो विचार करो एवं लिखिए:

संख्याएँ	वर्गों में अंकों की संख्या	
	(न्यूनतम)	(अधिकतम)
1-9	1	2
10-99	....	4
100-999	5	....
1009-9999	7	8
n अंक	....	....

प्रयत्न कीजिए।

1. निम्न संख्याओं के वर्गों के अंकों की संख्या ज्ञात कीजिए।

   (i) 72 (ii) 103 (iii) 1000

2. 

   27 , 20 और 30 के बीच में रहता है।

   27^2 , 20^2 और 30^2 के बीच में रहता है।

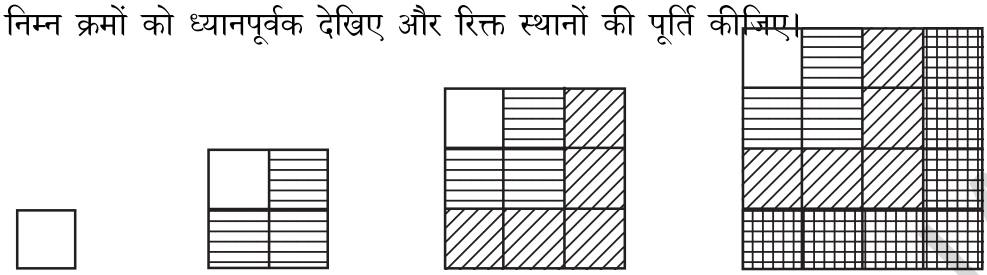
   अब बताइए कि 27^2 निम्न से कौन सा होगा?

   (i) 329 (ii) 525 (iii) 529 (iv) 729

SCERT TELANGANA

6.2. वर्गों का रोचक क्रम :

1. निम्न क्रमों को ध्यानपूर्वक देखिए और रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।



$1 = 1^2$ $\quad$ $1+3 = 4 = 2^2$ $\quad$ $1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$ $\quad$ $1+3+5+7 = 16 = 4^2$

$1 = 1 = 1^2$

$1 + 3 = 4 = 2^2$

$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$

$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 =$ ………. $= (\ )^2$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 =$ ………. $= (\ )^2$

उक्त क्रम से हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि प्रथम 'n' रूढ़ प्राकृतिक संख्याओं का योग 'n^2' के बराबर होता है?

2. निम्न क्रमों में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

$(11)^2 = 121$

$(101)^2 = 10201$

$(1001)^2 = 1002001$

$(10001)^2 =$ …………..

$(1000001)^2 =$ ……………

3. निम्न क्रमों की पूर्ति कीजिए।

1^2	=	1
11^2	=	1 2 1
111^2	=	1 2 3 2 1
1111^2	=	1 2 3 4 3 2 1
11111^2	=	……………………..
111111^2	=	……………………

इन संख्याओं को पैलिनड्रोम संख्याएँ कहते हैं ।

> पैलिनड्रोम एक शब्द, वाक्य या संख्या होती है जिसे आगे या पीछे पढ़ने में उसका क्रम नहीं बदलता
> उदाः जलज, NOON, MALAYALAM, MADAM, Rats live on no evil star, 15651

SCERT TELANGANA

4. नीचे दिये गये क्रम में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

$1^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2$

$2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2$

$3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$

$4^2 + 5^2 + (\ )^2 = 21^2$

$5^2 + (\ )^2 + 30^2 = (\ )^2$

$6^2 + 7^2 + (\ )^2 = (\ )^2$

> इन वर्गों के योग का ध्यानपूर्वक निरीक्षण करो
> क्या आपने इन वर्गों के आधारों में कोई संबंधों को देखा ?
> क्या वर्गों की तीसरी संख्या और पहली व दूसरी संख्या के आधारों में कोई संबंध है?
> तीसरी संख्या के वर्ग और अंतिम संख्या के वर्ग में किस प्रकार का संबंध है?

5. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

$3^2 = 9 = 4 + 5$ $\qquad \left(\frac{3^2-1}{2} + \frac{3^2+1}{2}\right)$

$5^2 = 25 = 12 + 13$ $\qquad \left(\frac{5^2-1}{2} + \frac{5^2+1}{2}\right)$

$7^2 = 49 = 24 + 25$ $\qquad (\qquad + \qquad)$

$11^2 = 121 = \ldots.. + \ldots..$ $\qquad \left(\frac{11^2-1}{2} + \frac{11^2+1}{2}\right)$

$15^2 = 225 = \ldots.. + \ldots..$ $\qquad (\qquad + \qquad)$

उक्त परिणामों के आधार पर हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि किसी रूढ़ संख्या (n) के वर्ग को दो क्रमागत संख्याओं के योग में इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है। $\left(\frac{n^2-1}{2} + \frac{n^2+1}{2}\right)$

6. क्रमागत वर्गों के मध्य संख्याएँ:

निम्न तालिका में रिक्त स्थान भरिए

क्रमागत वर्ग	क्रमागत वर्ग के मध्य संख्याएँ	संबंध
$1^2 = 1;\ 2^2 = 4$	2, 3 (1 और 4 के मध्य 2 संख्याएँ हैं)	2×प्रथम संख्या का आधार 1, (2×1=2)
$2^2 = 4;\ 3^2 = 9$	5, 6, 7, 8 (4 और 9 के मध्य 4 संख्याएँ हैं)	2×प्रथम संख्या का आधार 2, (2×2=4)
$3^2 = 9;\ 4^2 = 16$	10,11,12,13,14,15 (9 और 16 के मध्य 6 संख्याएँ हैं)	2×प्रथम संख्या का आधार 3 (2×3=6)
$4^2 = 16;\ 5^2 = 25$	....	2×प्रथम संख्या का आधार 4, (2×4=8)
$5^2 = 25;\ 6^2 = 36$	....	....
....	....	....

SCERT TELANGANA

तालिका से क्रमागत वर्ग संख्याएँ और उनके मध्य संख्याओं का निरीक्षण कीजिए। क्या इनके मध्य कोई संबंध है?

तालिका की सहायता से n^2 और $(n + 1)^2$ के मध्य ऐसी संख्याएँ ज्ञात कीजिए जो वर्ग संख्या नहीं है। n^2 और $(n + 1)^2$ के मध्य '2n' संख्याएँ हैं जो वर्ग नहीं है।

इसे करें :

1. 9^2 और 10^2 के बीच कितनी संख्याएँ हैं जो पूर्ण वर्ग नहीं है?
2. 15^2 और 16^2 के बीच कितनी संख्याएँ हैं जो पूर्ण वर्ग नहीं है?

प्रयत्न करें :

रेहान कहता है कि 9^2 और 11^2 के बीच 37 संख्याएँ है जो पूर्ण वर्ग नहीं है। क्या वह सही है? कारण बताइए।

अभ्यास - 6.1

1. निम्न संख्याओं के इकाई स्थान पर कौन-सा अंक होगा?

   (i) 39 (ii) 297 (iii) 5125 (iv) 7286 (v) 8742

2. निम्न में कौन-सी संख्याएँ पूर्ण वर्ग हैं?

   (i) 121 (ii) 136 (iii) 256 (iv) 321 (v) 600

3. निम्न संख्याएँ पूर्ण वर्ग नहीं हैं। कारण बताइए।

   (i) 257 (ii) 4592 (iii) 2433 (iv) 5050 (v) 6098

4. ज्ञात कीजिए कि निम्न संख्याओं के वर्ग सम हैं या विषम ?

   (i) 431 (ii) 2826 (iii) 8204 (iv) 17779 (v) 99998

5. निम्न संख्याओं के वर्गों के मध्य कितनी संख्याएँ होती हैं?

   (i) 25; 26 (ii) 56; 57 (iii) 107;108

6. बिना जोड़े निम्न संख्याओं का योग ज्ञात कीजिए।

   (i) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 =$

   (ii) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 =$

   (iii) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 + 25 =$

SCERT TELANGANA

6.3 पैथागोरस के त्रिक (Pythagorean Triplets)

माना

(i) $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$

(ii) $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$

संख्याएँ (3, 4, 5) और (5, 12, 13) पैथागोरस त्रिक के कुछ उदाहरण है।

सामान्यतः a, b, c धनात्मक पूर्णांक हैं । यदि $a^2 + b^2 = c^2$ तब a, b, c पैथागोरस त्रिक कहलाते हैं।

a,b,c के मध्य 1 के अतिरिक्त यदि कोई सामान्य खण्ड नहीं है तो त्रिक (a,b,c) रूढ़ त्रिक कहलाते हैं।

इसे करें

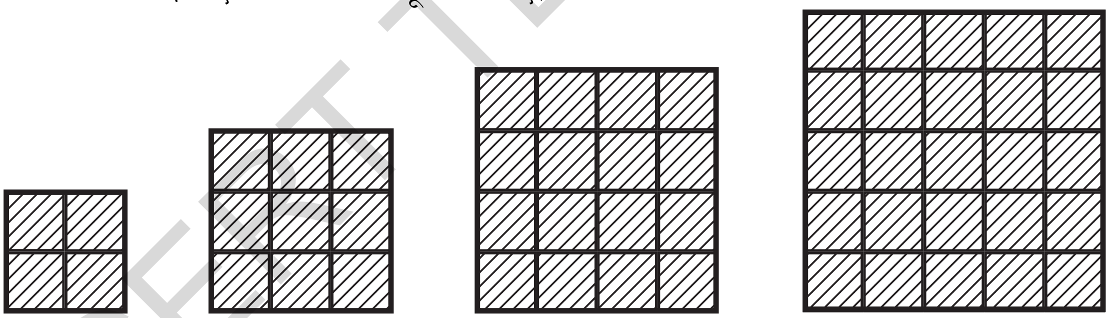
1. जाँच कीजिए कि क्या निम्न संख्याएँ पैथागोरस त्रिक बनाती हैं?

   (i) 2, 3, 4 (ii) 6, 8, 10 (iii) 9, 10, 11 (iv) 8, 15, 17

2. एक पैथागोरस त्रिक लीजिए। गुणक लिखिए। जाँच कीजिए कि क्या यह गुणक पैथागोरस त्रिक बनाते हैं।

6.4 वर्गमूल (Square Roots)

निम्न वर्गों को देखिए और तालिका पूर्ण कीजिए।



वर्ग का क्षेत्रफल (वर्ग सेमी) (A)	वर्ग की भुजा (सेमी) (S)
4 = 2 × 2	2
9 = 3 × 3	3
16 = 4 × 4	______
25 = 5 × 5	______

प्रत्येक स्तंभ एवं पंक्ति में वर्ग की इकाइयाँ वर्ग की भुजा दर्शाती हैं।

SCERT TELANGANA

वर्ग के क्षेत्रफल और उसकी भुजा के मध्य क्या आप कोई संबंध देखते हैं?
हमें ज्ञात है कि वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा× भुजा = भुजा^{2}
यदि वर्ग का क्षेत्रफल169 वर्ग से.मी. हो तो भुजा ज्ञात करो।
माना वर्ग की भुजा 'x' से.मी. है ।
$\Rightarrow 169 = x^2$
वर्ग की भुजा ज्ञात करने के लिए ऐसी संख्या ज्ञात करना आवश्यक है जिसका वर्ग 169 है ।
हम जानते हैं कि $169 = 13^2$ तब भुजा की लम्बाई =13 से.मी.
अतः यदि किसी वर्ग संख्या को दो समान खण्डों के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जाए तब वह खण्ड उस वर्ग संख्या का वर्गमूल कहलाता है। इस प्रकार यह वर्गीकरण का व्युत्क्रम है।

उदाहरण 1: $3^2 = 9$ अतः 9 का वर्गमूल 3($\sqrt{9} = 3$) है।
$4^2 = 16$ अतः 16 का वर्गमूल 4($\sqrt{16} = 4$) है।
$5^2 = 25$ अतः 25 का वर्गमूल 5($\sqrt{25} = 5$) है।
यदि $y^2 = x$ तब x का वर्गमूल y है$\left(\sqrt{x} = y\right)$

उदाहरण 2:
1. $\sqrt{4} = 2$ क्योंकि $2^2 = 4$
2. $\sqrt{16} = 4$ क्योंकि $4^2 = 16$
3. $\sqrt{225} = 15$ क्योंकि $15^2 = 225$ आदि

> 25 यह वर्ग है दोनों 5 और −5 का
> अतः 25 का वर्गमूल है 5 या −5.
> इस पाठ में हम केवल धनात्मक वर्गमूल अर्थात प्रधान वर्गमूल का ही अध्ययन करेंगे।
> $\therefore \sqrt{25} = 5.$

निम्न तालिका को पूर्ण कीजिए।

वर्ग	**वर्गमूल**
$1^2 = 1$	$\sqrt{1} = 1$
$2^2 = 4$	$\sqrt{4} = 2$
$3^2 = 9$	$\sqrt{9} = 3$
$4^2 = 16$	$\sqrt{16} = 4$
$5^2 = 25$	$\sqrt{25} = $ ……..
$6^2 = 36$	$\sqrt{36} = $ ……..
$7^2 = $ …......	$\sqrt{\ \ }$ = ……..
$8^2 = $ ……..	$\sqrt{\ \ }$ = ………
$9^2 = $ ……..	$\sqrt{\ \ }$ = ………
$10^2 = $ ……..	$\sqrt{\ \ }$ = ………

SCERT TELANGANA

6.5 क्रमित विषम संख्याओं के व्यकलन द्वारा वर्गमूल ज्ञात करना:

हमें ज्ञात है कि, प्रत्येक वर्ग संख्या 1 से प्रारंभ होने वाली क्रमित विषम प्राकृतिक के योग के बराबर होता है।

माना,
$1 + 3 = 4 = 2^2$

$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$

$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$

इस नमूने का विपरीत क्रम से वर्गमूल ज्ञात किया जा सकता है।

उदाहरणार्थ, $\sqrt{49}$ ज्ञात करो

चरण 1	$49 - 1 = 48$	(पहली विसम संख्या को घटाने पर)
चरण 2	$48 - 3 = 45$	(दूसरी विसम संख्या को घटाने पर)
चरण 3	$45 - 5 = 40$	(तीसरी विसम संख्या को घटाने पर)
चरण 4	$40 - 7 = 33$	
चरण 5	$33 - 9 = 24$	
चरण 6	$24 - 11 = 13$	
चरण 7	$13 - 13 = 0$	

$1+3+5+7+9+11+13 = 7^2 = 49$

$49 - [1+3+5+7+9+11+13] = 0$

अत: 49 एक पूर्ण वर्ग है ।

49 से हमने सात क्रमागत विषम संख्याओं (1 से प्रारंभ) को घटाया है और 7 वें चरम में शून्य (0) प्राप्त किया है।

$\therefore \sqrt{49} = 7$

नोट: यदि इस क्रिया में परिणाम शून्य नहीं है तो दी गई संख्या एक पूर्ण वर्ग नहीं है।

इसे करें:

(i) आवर्ती व्यकलन द्वारा ज्ञात कीजिए कि निम्न संख्याएँ पूर्ण वर्ग है या नहीं?

(i) 55 (ii) 90 (iii) 121

आवर्ती व्यकलन क्रिया द्वारा किसी भी वर्ग संख्या का वर्ग मूल आसानी से ज्ञात किया जा सकता है। परन्तु बड़ी संख्याएँ जैसे 625, 729.......... के लिए यह क्रिया काफी समय लेगी। अत: सरल पद्धति द्वारा वर्गमूल ज्ञात करने का प्रयास करें।

SCERT TELANGANA

दी गई संख्याओं के वर्गमूल ज्ञात करने की दो विधियाँ हैं। वह हैं-

(i) रूढ़ गुणनखंड विधि

(ii) भाग विधि

6.6 रूढ़ गुणनखण्ड विधि द्वारा वर्गमूल ज्ञात करना:

484 का वर्गमूल रूढ़ गुणनखण्ड विधि द्वारा ज्ञात करें।

2	484
2	242
11	121
11	11
	1

चरण 1: संख्या (484) के रूढ़ गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

हमें प्राप्त होता है $484 = 2 \times 2 \times 11 \times 11$

चरण 2: समान गुणनखण्डों के युग्म बनाइए।

$484 = (2 \times 2) \times (11 \times 11)$

चरण 3: प्रत्येक युग्म से एक खण्ड चयनित करने से हमें प्राप्त होगा

$\sqrt{484} = 2 \times 11 = 22$

अतः 484 का वर्गमूल 22 है।

अब हम कुछ और उदाहरण देखते हैं।

$484 = (2 \times 11) \times (2 \times 11) = (2 \times 11)^2$

$\sqrt{484} = \sqrt{(2 \times 11)^2}$

$= 2 \times 11$

$= 22$

उदाहरण 3 : 1296 का वर्गमूल रूढ़ गुणनखण्ड विधि द्वारा ज्ञात कीजिए।

हल: 1296 को रूढ़ गुणनखण्डों में विभाजित करने पर

$1296 = (2 \times 2) \times (2 \times 2) \times (3 \times 3) \times (3 \times 3)$

$\sqrt{1296} = 2 \times 2 \times 3 \times 3$

$\therefore \sqrt{1296} = 36$

2	1296
2	648
2	324
2	162
3	81
3	27
3	9
3	3
	1

उदाहरण 4 : 1764 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल : 1764 को रूढ़ गुणनखण्डों में विभाजित करने पर

$1764 = (2 \times 2) \times (3 \times 3) \times (7 \times 7)$

$\sqrt{1764} = 2 \times 3 \times 7$

$\therefore \sqrt{1764} = 42$

2	1764
2	882
3	441
3	147
7	49
7	7
	1

SCERT TELANGANA

उदाहरण 5: ऐसी न्यूनतम संख्या ज्ञात कीजिए जिससे विभाजित करने पर 720 एक पूर्ण वर्ग बन जाएगा।

हल : 720 को रूढ़ गुणनखण्डों में विभाजित करने पर, हमें प्राप्त होता है

2	720
2	360
2	180
2	90
3	45
3	15
5	5
	1

$720 = (2 \times 2) \times (2 \times 2) \times (3 \times 3) \times 5$

हम देखते हैं कि 2, 2, 3 युग्म में उपस्थित हैं जब कि 5 एकल है

अतः दी गई संख्या को 5 से गुणा करने पर पूर्ण वर्ग प्राप्त होगा।

इस प्रकार प्राप्त पूर्ण वर्ग है

$720 \times 5 = 3600$

उदाहरण 6: वह न्यूनतम संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 6000 को भाग देने पर वह पूर्ण वर्ग होगा। परिणामी संख्या का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल: 6000 को रूढ़ गुणनखण्डों में विभाजित करने पर

2	6000
2	3000
2	1500
2	750
3	375
5	125
5	25
5	5
	1

$6000 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5$

हम देखते हैं कि 2, 2, और 5 जोड़ियों में उपस्थित हैं परन्तु

3 और 5 जोड़ियों में नहीं है

अतः दी गई संख्या को $3 \times 5 = 15$ से विभाजित करना होगा।

इस प्रकार प्राप्त पूर्ण वर्ग $= 6000 \div 15 = 400$

$400 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5$

400 का वर्गमूल होगा।

2	400
2	200
2	100
2	50
5	25
5	5
	1

$\sqrt{400} = \sqrt{(2\times2)\times(2\times2)\times(5\times5)}$

$= 2 \times 2 \times 5$

$= 20$

अभ्यास - 6.2

1. निम्न संख्याओं के वर्गमूल रूढ़ गुणनखण्ड विधि द्वारा ज्ञात किजिए।

(i) 441 (ii) 784 (iii) 4096 (iv) 7056

SCERT TELANGANA

2. ऐसी न्यूनतम संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 3645 को गुणा करने पर कह एक पूर्ण वर्ग होगा।

3. 2400 को कौन-सी न्यूनतम संख्या से गुणा करना होगा कि वह एक पूर्ण वर्ग हो जाये। परिणामी संख्या का वर्गमूल भी ज्ञात करो।

4. 7776 को किस न्यूनतम संख्या से विभाजित करने पर वह एक पूर्ण वर्ग होगा?

5. एक बगीचे में 1521 वृक्ष इस प्रकार लगाए गए हैं कि प्रत्येक कतार में वृक्षों की संख्या, कतारों की संख्या के बराबर है। कतारों की संख्या और प्रत्येक कतार में वृक्षों की संख्या ज्ञात करो।

6. एक पाठशाला में विद्यार्थियों से शुल्क के रूप में 2601 प्राप्त किया गया। यदि प्रत्येक विद्यार्थी द्वारा जमा शुल्क और पाठशाला विद्यार्थियों की संख्या समान हो तो पाठशाला में विद्यार्थियों की संख्या क्या थी?

7. दो संख्याओं का गुणनफल 1296 है। यदि एक संख्या दूसरी संख्या 16 गुणा है तो दोनों संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

8. 7921 सैनिक एक ऑडिटोरियम में इस प्रकार बैठे हैं कि प्रत्येक कतार में सैनिकों की संख्या और कतारों की संख्या समान है। ऑडिटोरियम में कितनी कतारें हैं?

9. वर्गाकार खेत का क्षेत्रफल 5184 वर्ग मीटर है। एक आयताकार खेत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी परिमिति वर्गाकार खेत की परिमिति के समान है और जिसकी लंबाई उसकी चौड़ाई दुगनी है।

6.7 भाग विधि द्वारा वर्गमूल ज्ञात करना :

$|7\overline{84}|$

प्राकृतिक संख्याओं के वर्गमूल गुणनखण्ड विधि की सहायता से ज्ञात करने की विधि हमने सीखी। बड़ी संख्याओं के लिए यह विधि लम्बी एवं कठिन हो जाती है। अतः इस समस्या का हल प्राप्त करने के लिए हम भाग विधि का उपयोग करते हैं।

2	$7\overline{84}$	2

784 का वर्गमूल भाग विधि द्वारा ज्ञात करें।

2	$\overline{7}\,\overline{84}$	2
	4	
	3	

चरण 1 : दी गई संख्या के इकाई स्थान पर उपस्थित अंक से शुरू कर संख्या को दो समूह में बाँटिए। प्रत्येक समूह पर एक रेखा खींचिए।

चरण 2 : एक अधिकतम संख्या ज्ञात कीजिए जिसका वर्ग पहले समूह के बराबर या उससे कम हो या दाएँ पहली अंक (i.e. 2) इसे भाजक और भागफल लीजिए।

2	$7\overline{84}$	2
	−4	
	384	

चरण 3 : भाजक एवं भागफल के गुणनफल $(2 \times 2 = 4)$ को पहले अंक या पहले समूह से घटाइए (i.e. $7 - 4 = 3$)

चरण 4 : दूसरे समूह (i.e. 84) को शेष (i.e. 3) के दाहिनी ओर नीचे लाइए। यह नया भाज्य हो जाएगा (अर्थात् 384)

2	$7\overline{84}$	2
	−4	
4☐	384	

चरण 5 : अगले संभावित भाजक से भागफल को दुगुना (अर्थात् $2 \times 2 = 4$) कीजिए और उसके दाहिनी ओर के बाक्स में लिखिए।

SCERT TELANGANA

2	$\overline{7}\,\overline{84}$	28
	−4	
4[8]	384	
	384	
	0	

चरण 6 : अधिकतम संभावित अंक ज्ञात कीजिए ताकि उसे बॉक्स में लिखने पर नए भाजक और इस अंक का गुणनफल नए भाज्य (अर्थात् $48 \times 8 = 384$) बराबर था उससे कम हो।

2	$\overline{7}\,\overline{84}$	28
	−4	
48	384	
	−384	
	0	

चरण 7 : घटाने पर शेष शून्य प्राप्त होता है। परिणामी भागफल 28 वर्गमूल है

$$\therefore \sqrt{784} = 28$$

सोचो, चर्चा करो और लिखो :

निम्न विभाजन का निरिक्षण कीजिए। कारण बताइए कि ऊपरी उदाहरण में भाजक 48 में [8] ही क्यों लिया गया है?

$$4)\,384\,(9 \quad 36 \quad 24 \quad 81 = 9^2$$

$$4)\,384\,(8 \quad 32 \quad 64 \quad 64 = 8^2$$

$$4)\,384\,(7 \quad 28 \quad 104 \quad 49 = 7^2$$

कुछ उदाहरण देखेंगे

उदाहरण7: 1296 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए ।

a	$a^2 + 2ab + b^2$	$a + b$
a	a^2	
$2a + b$	$2ab + b^2$	$b(2a+b) = 2ab + b^2$
	$2ab + b^2$	
	0	

हल :

चरण 1 $\quad \overline{12}\,\overline{96}$

चरण 2

3	$\overline{12}\,\overline{96}$	3
	9	

चरण 3

3	$\overline{12}\,\overline{96}$	3
	-9	

चरण 4

3	$\overline{12}\,\overline{96}$	3
	-9	
6	396	

चरण 5

3	$\overline{12}\,\overline{96}$	36
	-9	
66	396	
	- 396	
	0	

ध्यान दीजिए

$$6)\,396\,(6 \quad 36 \quad 36 \quad 36 = 6^2 \quad 0$$

$$\therefore \sqrt{1296} = 36$$

SCERT TELANGANA

उदाहरण 8: 8281 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल :

9	$\overline{82}\,\overline{81}$	91
	-81	
181	181	
	-181	
	0	

इसलिए $\sqrt{8281} = 91$

देखिए
$18\overline{)181}$ (1
18
1
$1 = 1^2$
0

उदाहरण 9: चार अंकों वाली अधिकतम संख्या ज्ञात कीजिए जो एक पूर्ण वर्ग है।

हल: सबसे बड़ी चार अंकों वाली संख्या है 9999

भाग विधि द्वारा 9999 का वर्गमूल ज्ञात करेंगे

शेष 198 दर्शाता है कि 9999 से वह संख्या 198

यदि 9999 में से 198 घटाया जाए तो एक पूर्ण वर्ग प्राप्त होगा।

$\therefore$ 9999 – 198 = 9801 आवश्यक पूर्ण वर्ग है।

9	$\overline{99}\,\overline{99}$	99
	-81	
189	18 99	
	-17 01	
	1 98	

उदाहरण 10: वह न्यूनतम संख्या ज्ञात कीजिये जिसे 4215 से घटाने पर पूर्ण वर्ग प्राप्त होगा?

हल : भाग विधि द्वारा शेष है 119

अर्थात् यदि 4215 से 119 घटाया जाए तो एक पूर्ण वर्ग संख्या प्राप्त होगी।

अतः वह आवश्यक न्यूनतम संख्या 119 है।

6	$\overline{42}\,\overline{15}$	64
	-36	
1	6 15	
124	-4 96	
	1 19	

6.8 भाग विधि द्वारा दशमलव संख्याओं के वर्गमूल :

उदाः $\sqrt{17.64}$ का वर्गमूल ज्ञात करें।

चरण 1: संख्या के पूर्णांक भाग पर एक रेखा खींचिए। अर्थात् 17 पर। बाएं से दाएँ दशमलव की प्रत्येक जोड़ी पर रेखा खींचिए।

$\overline{17}.\overline{64}$

चरण 2: वह अधिकतम संख्या ज्ञात कीजिए (अर्थात् 4) जिसका वर्ग पहले पूर्णांक जोड़ी (17) के बराबर हो या उससे कम हो। इस संख्या 4 को भाजक और पहली जोड़ी 17 को भाज्य लीजिए। शेष 1 प्राप्त करें। भाग दीजिए और शेष प्राप्त करें अर्थात् 1

4	$\overline{17}\,.\,\overline{64}$	4
	-16	
	1	

चरण 3: अगली जोड़ी (64) को शेष के दाहिनी ओर लिखकर 164 प्राप्त करें। यह नया भाज्य होगा।

4	$\overline{17}.\overline{64}$	4
	-16	
	1.64	

SCERT TELANGANA

चरण 4: भागफल को दुगुना कीजिए ($2 \times 4 = 8$) और 8 लिखकर दाहिनी ओर एक डिब्बा बनाइए 64 दशमलव भिन्न वाला भाग है अतः भागफल में दशमलव बिन्दु लगाइए।

4	$\overline{17}.\overline{64}$	4
	-16	
8☐	- 164	

चरण 5: उस अंक का अनुमान लगाइए जिसे लिखने पर आए भाजक एवं उस अंक का गुणनफल भाज्य 164 के बराबर या उससे कम हो। यहाँ पर वह अंक 2 है। विभाजित करें और शेष प्राप्त करें।

4	$\overline{17}.\overline{64}$	4.2
	-16	
8[2]	164	
	-164	
	0	

चरण 6: शेष शून्य है और कोई जोड़ी बाकी नहीं है।

$\sqrt{17.64} = 4.2$

अब हम कुछ और उदाहरण देखेंगे।

उदाहरण 11: भाग विधि द्वारा 42.25 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल : चरण 1 :

6	$\overline{42}.\overline{25}$	6
	-36	
	6	

चरण 2 :

चरण 3 :

6	$\overline{42}.\overline{25}$	6.5
6	-36	
125	625	
	-625	
	0	

$\therefore \sqrt{42.25} = 6.5$.

उदाहरण 12: $\sqrt{96.04}$ ज्ञात कीजिए।

हल:

9	$\overline{96}.\overline{04}$	9.8
9	-81	
188	1504	
	-1504	
	0	

इसलिए $\sqrt{96.04} = 9.8$

SCERT TELANGANA

6.9 ऐसी संख्याओं के वर्गमूल का अनुमान लगाना जो पूर्ण वर्ग नहीं हैं :

अब तक हमने पूर्ण वर्ग संख्या का वर्गमूल ज्ञात करना सीखा। यदि संख्याएँ पूर्ण वर्ग नहीं है तो हम सही वर्गमूल नहीं ज्ञात कर सकेंगे। ऐसे में हमें वर्गमूल निर्धारित करना होगा।

$\sqrt{300}$ का अनुमान निकटतम पूर्ण संख्या तक कीजिए।

300 दो पूर्ण वर्ग 100 और 400 के बीच रहता है।

$\therefore\ 100 < 300 < 400$

$10^2 < 300 < 20^2$

अर्थात $10 < \sqrt{300} < 20$

परन्तु फिर भी हम वर्ग संख्या के निकट नहीं हैं। हमें ज्ञात है कि $17^2 = 289$, $18^2 = 324$

इसलिए $289 < 300 < 324$

$17 < \sqrt{300} < 18$

324 की तुलना में 289 निकटतम है 300 के

अतः $\sqrt{300}$ का लगभग मान 17 है।

अभ्यास - 6.3

1. भाग विधि द्वारा निम्न संख्याओं के वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

   (i) 1089 (ii) 2304 (iii) 7744 (iv) 6084 (v) 9025

2. निम्न दशमलव संख्याओं के वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

   (i) 2.56 (ii) 18.49 (iii) 68.89 (iv) 84.64

3. वह न्यूनतम संख्या ज्ञात कीजिए जिसे 4000 से घटाने पर एक पूर्ण वर्ग प्राप्त होगा?

4. 4489 वर्ग से.मी. क्षेत्रफल वाले वर्ग की भुजा ज्ञात कीजिए।

5. एक माली वर्गाकार में 8289 पौधे लगाना चाहता है। इस प्रकार लगाने पर 8 पौधे शेष रह जाते हैं। तो प्रत्येक पंक्ति में कितने पौधे लगाए गए हैं?

6. चार अंकों वाली न्यूनतम पूर्ण वर्ग संख्या ज्ञात कीजिए।

7. ऐसी न्यूनतम संख्या ज्ञात कीजिए जिसे 6412 को जोड़ने पर एक पूर्ण वर्ग बन जाए।

8. निम्न संख्याओं के मान निकटतम पूर्ण संख्या तक ज्ञात कीजिए।

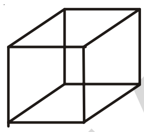
   (i) $\sqrt{97}$ (ii) $\sqrt{250}$ (iii) $\sqrt{780}$

SCERT TELANGANA

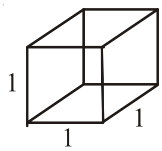
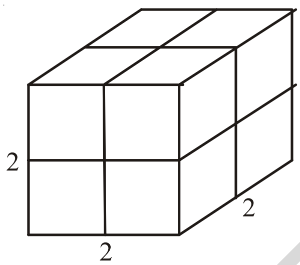
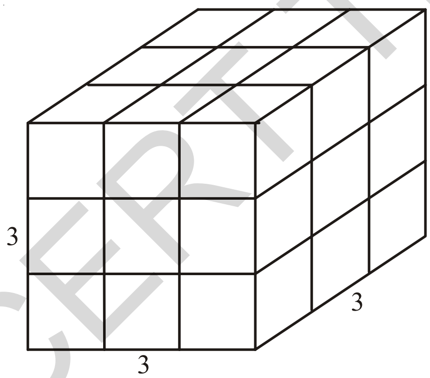
घन एवं घनमूल

6.10 परिचय

हम जानते हैं कि घन एक गेस आकृति है जिसमें छः समान वर्ग होते हैं ।



इकाई घनों द्वारा अब हम कुछ घन आकार बनाएँ

क्र.सं.	आकृति	भुजा की लंबाई	उपर्युक्त इकाई घन की संख्या
1		1	1
2		2	8
3		3	27

क्या आप अगली घन आकृति बना सकते है? अनुमान लगाइए कि 5 इकाई भुजा वाले घन को बनाने के लिए कितने इकाई घन उपयोग करने होंगे?

अतः, हमें 1, 8, 27, 64 …….. इकाई घन की आवश्यकता होगी।

यह संख्याएँ 1, 8, 27, 64 …… कहलाते हैं घन संख्याएँ या पूर्ण घन।

SCERT TELANGANA

क्योंकि $1 = 1 \times 1 \times 1 = 1^3$

$8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$

$27 = 3 \times 3 \times 3 = 3^3$

$64 = \ldots\ldots\ldots \times \ldots\ldots \times \ldots\ldots =$

अतः किसी संख्या को स्वयं से तीन बार गुणा करने पर जो संख्या प्राप्त होती है उसे घन संख्या कहते हैं।

अर्थात् किसी संख्या 'x' का घन है $x \times x \times x = x^3$

क्या 49 एक घन संख्या है ? नहीं। क्योंकि $49 = 7 \times 7$ और कोई ऐसी संख्या नहीं है जिसे स्वयं से तीन बार गुणा करने पर 49 प्राप्त हो। हम जानते हैं कि $3 \times 3 \times 3 = 27$ और $4 \times 4 \times 4 = 64$ यह दर्शाता है कि 49 एक पूर्ण घन नहीं है।

प्रयास करें :

1. क्या 81 एक पूर्ण घन है?
2. क्या 125 एक पूर्ण घन?

निम्न सारिणी का निरीक्षण कर पूरा कीजिए।

संख्या	घन
1	$1^3 = 1 \times 1 \times 1 = 1$
2	$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$
3	$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$
4	$4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$
5	$5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$
6	$6^3 = 6 \times 6 \times 6 = \ldots\ldots\ldots$
7	$7^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots$
8	$8^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots$
9	$9^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots$
10	$10^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots$

सोचो, चर्चा करो और लिखो

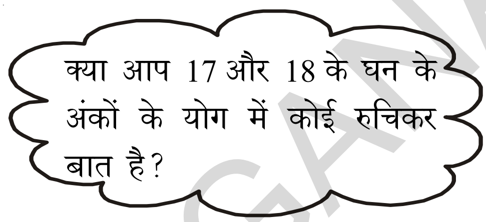
(i) 1 और 100, 1 और 500, 1 और 1000 के मध्य कितनी पूर्ण घन संख्याएँ हैं?

(ii) 500 और 1000 के मध्य कितनी घन संख्याएँ हैं?

SCERT TELANGANA

11 और 20 के मध्य की पूर्ण घन संख्याएँ निम्न हैं ।

संख्या	घन
11	1331
12	1728
13	2197
14	2744
15	3375
16	4096
17	4913
18	5832
19	6859
20	8000



सारिणी से हम यह देखते हैं कि प्रत्येक सम संख्या का घन एक सम संख्या है। क्या यह विषम संख्याओं के लिए भी सही है?

हम यह भी देखते हैं कि, यदि किसी संख्या के इकाई स्थान पर 1 है तो उसके घन का अन्त भी 1 से होता है।

इसी प्रकार, किसी संख्या के इसके स्थान पर 0, 4, 5, 6 या 9 हो तो उसके घन के इकाई स्थान के अंक के बारे में आप क्या कह सकते हैं?

प्रयास कीजिए :

1. निम्न संख्याओं के इकाई स्थान का अंक ज्ञात कीजिए।

(i) 75^3 (ii) 123^3 (iii) 157^3 (iv) 198^3 (v) 206^3

6.11 कुछ दिलचस्प उदाहरण :

1. क्रमागत विषम संख्याओं को जोड़िए। निम्न प्रतिमान देखिए।

$1 = 1 = 1^3$

$3 + 5 = 8 = 2^3$

$7 + 9 + 11 = 27 = 3^3$

$13 + 15 + 17 + 19 = \ldots\ldots = \ldots\ldots$

ज्ञात कीजिए कि आगामी कितनी क्रमागत विषम संख्याएँ 5^3 योग ज्ञात करने के लिए आवश्यक होंगी?

SCERT TELANGANA

2. निम्न प्रतिमान पर ध्यान दीजिए।

$2^3 - 1^3 = 1 + 2 \times 1 \times 3 = 7$

$3^3 - 2^3 = 1 + 3 \times 2 \times 3 = 19$

$4^3 - 3^3 = 1 + 4 \times 3 \times 3 = 37$

$5^3 - 4^3 =$ …………….. = ...

ऊपरी प्रतिमान का उपयोग कर निम्न के मूल्य ज्ञात कीजिए।

(i) $10^3 - 9^3$ (ii) $15^3 - 14^3$ (iii) $26^3 - 25^3$

3. निम्न प्रतिमान का निरीक्षण करें और पूरा कीजिए।

$1^3 = 1^2$

$1^3 + 2^3 = (1 + 2)^2 = (3)^2$

$1^3 + 2^3 + 3^3 = (1 + 2 + 3)^2 = (\ )^2$

$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = (_____)^2$

………………….. $= (1 + 2 + 3 + ... + 10)^2$

अतः सामान्यतः हम कह सकते हैं कि

प्रथम 'n' प्राकृतिक संख्याओं के घनों का योग, उनके योग के बराबर होता है।

अर्थात् $1^3 + 2^3 + 3^3 + ……… + n^3 = (1 + 2 + 3 + ... + n)^2$.

6.12 घन एवं अनेक रूढ़ खण्ड :

संख्याएँ 64 और 216 की कल्पना कीजिए।

64 और 216 को रूढ़ गुणनखण्डों में विभाजित करने पर

$64 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{2 \times 2 \times 2}$

$216 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{3 \times 3 \times 3}$

दोनों में प्रत्येक खण्ड तीन बार आता है। रूढ़ गुणनखण्डों को तीन-तीन के समूह में लिख सकते हैं।

इस प्रकार, यदि किसी संख्या को तीन समान खण्डों के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सके तो उसे पूर्ण घन या घन संख्या कहते हैं।

SCERT TELANGANA

क्या 540 एक पूर्ण घन है ?

540 को रूढ़ गुणनखण्डों में विभाजित करने पर

$540 = 2 \times 2 \times \cancel{3 \times 3 \times 3} \times 5$

यहाँ, 2 और 5 तीन के समूह में प्राप्त नहीं है ।

अतः 540 एक पूर्ण घन नहीं है ।

2	540
2	270
3	135
3	45
3	15
5	5
	1

यह कीजिए

1. निम्न में कौन-सी संख्याएँ पूर्ण घन हैं ?

(i) 243 (ii) 400 (iii) 500 (iv) 512 (v) 729

उदाहरण 13: ऐसी न्यूनतम संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 2560 को गुणा करने पर प्राप्त गुणनफल एक पूर्ण घन होगा?

हल : 2560 का रूढ़ गुणनखण्डों में विभाजित करने पर

$2560 = \overline{2 \times 2 \times 2} \times \overline{2 \times 2 \times 2} \times \overline{2 \times 2 \times 2} \times 5$

रूढ़ खण्ड 5 तीन के समूह में प्राप्त नहीं है।

इसलिए 2560 एक पूर्ण धन नहीं है।

अतः वह न्यूनतम संख्या जिससे गुणा करने पर 2560 पूर्ण घन होगा वह है $5 \times 5 = 25$

2	2560
2	1280
2	640
2	320
2	160
2	80
2	40
2	20
2	10
	5

उदाहरण 14: ऐसी न्यूनतम संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 1600 को विभाजित करने पर वह एक पूर्ण घन हो जाएगा।

हल: 1600 को रूढ़ गुणनखण्डों में विभाजित करने पर

$1600 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{2 \times 2 \times 2} \times 5 \times 5$

रूढ़ खण्ड 5 तीन के समूह में नहीं है।

अतः 1600 एक पूर्ण घन नहीं है।

इसलिए, वह न्यूनतम संख्या जिससे 1600 के भाग देने पर वह पूर्ण घन हो जाएगा $5 \times 5 = 25$

2	1600
2	800
2	400
2	200
2	100
2	50
5	25
	5

SCERT TELANGANA

अभ्यास - 6.4

1. निम्न संख्याओं के घन ज्ञात कीजिए।
   (i) 8 (ii) 16 (iii) 21 (iv) 30
2. जाँच कीजिए कि निम्न संख्या पूर्ण घन है या नहीं।
   (i) 243 (ii) 516 (iii) 729 (iv) 8000 (v) 2700
3. वह न्यूनतम संख्या ज्ञात कीजिए जिससे गुणा करने पर 8788 एक पूर्ण घन बन जाए।
4. 7803 को किस न्यूनतम संख्या से गुणा करने पर वह गुणनफल एक पूर्ण घन होगा।
5. ऐसी न्यूनतम संख्या ज्ञात कीजिए जिससे भाग देने पर वह एक पूर्ण घन होगा।
6. रवि ने एक प्लास्टिक का घनाभ बनाया जिसके परिमाण 12सेमी, 8सेमी और 3सेमी हैं। एक घन बनाने के लिए ऐसी न्यूनतम कितने घनाभ की आवश्यकता होगी?
7. कितने घनाभ की आवश्यकता होगी ?

6.13 घनमूल

हम जानते हैं कि 2 इकाई भुजा वाला घन बनाने के लिए हमें 8 इकाई घनों की आवश्यकता है। ($2^3 = 8$) इसी प्रकार 3 इकाई भुजा वाला घन बनाने के लिए घन की 27 इकाइयाँ आवश्यक होगी ($3^3 = 27$)

माना 64 इकाई घनों से एक घन बनाया गया तो घन की भुजा क्या होगी?

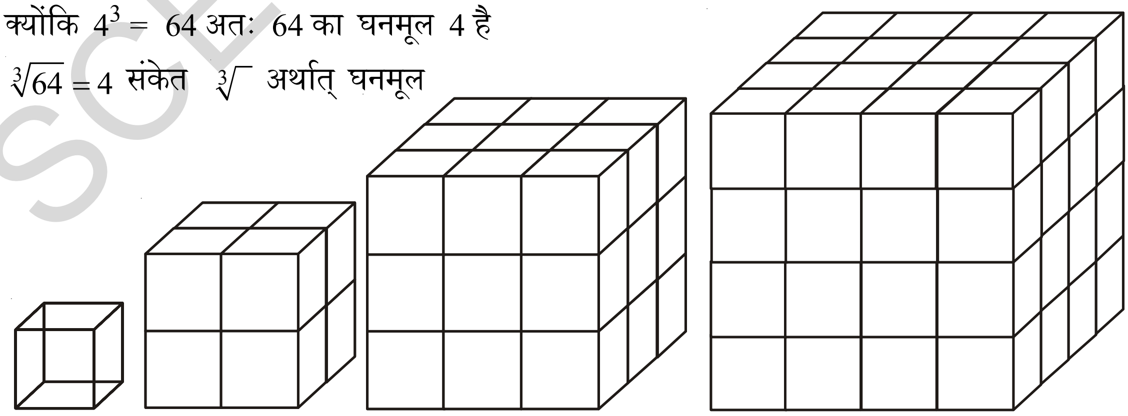
माना कि भुजा की लम्बाई 'x'

$\therefore \quad 64 = x^3$

एक घन की भुजा ज्ञात करने के लिए, एक ऐसी संख्या ज्ञात करनी होगी जिसका घन 64 है। अतः ऐसी संख्या मालम करना जिसका घन ज्ञात है इसका घनमूल ज्ञात करना है। यह घन ज्ञात करने के विपरीत क्रिया है।

क्योंकि $4^3 = 64$ अतः 64 का घनमूल 4 है

$\sqrt[3]{64} = 4$ संकेत $\sqrt[3]{\ }$ अर्थात् घनमूल



(1 घन इकाई)

इस प्रकार एक संख्या 'x' घनमूल होता है दूसरी संख्या y का। यदि $y = x^3$ तब $x = \sqrt[3]{y}$.

SCERT TELANGANA

निम्न तालिका को पूरा कीजिए :

घन	घनमूल
$1^3 = 1$	$\sqrt[3]{1} = 1$
$2^3 = 8$	$\sqrt[3]{8} = 2$
$3^3 = 27$	$\sqrt[3]{27} = 3$
$4^3 = 64$	$\sqrt[3]{64} = 4$
$5^3 = 125$	$\sqrt[3]{125} = 5$
$6^3 =$	$\sqrt[3]{\ }= 6$
$7^3 =$	$\sqrt[3]{\ } = 7$
$8^3 =$	$\sqrt[3]{\ } = 8$
...... = ...	.... = ...
...... = ...	.... = ...

6.14 रूढ़ गुणनखण्ड विधि द्वारा घनमूल ज्ञात करना:

आइए, 1728 का घनमूल रूढ़ गुणनखण्ड विधि द्वारा ज्ञात करें।

2	1728
2	864
2	432
2	216
2	108
2	54
3	27
3	9
	3

चरण 1 : 1728 को रूढ़ गुणनखण्डों में विभक्त कीजिए।

$1728 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$

चरण 2 : तीन समान खण्डों के समूह बनाइए।

$1728 = (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3 \times 3)$

चरण 3: प्रत्येक समूह से एक खण्ड लीजिए और गुणा कीजिए।

ऐसा करने पर

$\sqrt[3]{1728} = 2 \times 2 \times 3 = 12$ प्राप्त होता है।

$\therefore \sqrt[3]{1728} = 2 \times 2 \times 3 = 12$

कुछ और उदाहरण देखें।

उदाहरण15: 4096 का घनमूल ज्ञात कीजिए।

हल : रूढ़ खण्डों में 4096 को विभक्त करने पर

$4096 = (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2)$

$\sqrt[3]{4096} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

$\therefore \sqrt[3]{4096} = 16$

2	4096
2	2048
2	1024
2	512
2	256
2	128
2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
	2

SCERT TELANGANA

6.15 किसी संख्या के घनमूल का अनुमान लगाना :

यदि हम किसी दी गई संख्या की घन संख्या जानते हैं तो उसका घनमूल ज्ञात करने के लिए निम्न विधि का उपयोग किया जा सकता है।

अनुमान द्वारा 9261 का घनमूल ज्ञात करेंगे।

चरण 1: इकाई स्थान से शुरू कर तीन-तीन अंकों के समूह बनाना प्रारम्भ कीजिए।

अर्थात् 9	261
दूसरा समूह	पहला समूह

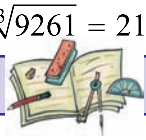
चरण 2: पहले समूह 261 से हमें घनमूल की संख्या का इकाई स्थान प्राप्त होगा ।261 के इकाई स्थान पर 1 है और घनमूल का भी 1 अतः घनमूल के इकाई स्थान में 1 होगा।

चरण 3: दूसरा समूह अर्थात् 9 लिजिए।

हम जानते हैं कि $2^3 < 9 < 3^3$.

न्यूनतम संख्या 2 है अतः यह घनमूल दहाई के स्थान में होगी ।

$\therefore \sqrt[3]{9261} = 21$



अभ्यास - 6.5

1. रूढ़ गुणनखण्ड विधि द्वारा निम्न संख्याओं का घनमूल ज्ञात कीजिए ।
   (i) 343 (ii) 729 (iii) 1331 (iv) 2744
2. अनुमान द्वारा निम्न संख्याओं का घनमूल ज्ञात कीजिए ।
   (i) 1512 (ii) 2197 (iii) 3375 (iv) 5832
3. सत्य या असत्य बताइए।
   (i) एक सम संख्या का घन विषम होता है।
   (ii) एक पूर्ण घन के अन्त में दो शून्य हो सकते हैं।
   (iii) यदि किसी संख्या का अन्त 5 से होता है तो उसके घन का अंतिम अंक भी 5 होगा।
   (iv) यदि किसी संख्या का अन्त शून्य से होता है तो उसके घन के दाई और तीन शून्य होते हैं।
   (v) एक अंक वाली संख्या का घन एक अंकीय संख्या हो सकती है।
   (vi) ऐसी कोई पूर्ण घन संख्या नहीं है जिसका अंत 8 से होता हो।
   (vii) **दो अंकीय संख्या का घन एक तीन अंकीय संख्या हो सकती है ।**
4. वह दो अंकीय संख्या ज्ञात कीजिए जो एक वर्ग संख्या है और साथ ही धन संख्या भी ।

SCERT TELANGANA

हमने क्या सीखा

- वर्ग संख्याओं का प्रतिमान।
- एक वर्ग संख्या में अंकों की संख्या अनुमानित करना।
- वर्ग संख्याओं में कुछ प्रतिमान।
- पैथागोरस त्रिक।
- रूढ़ गुणनखण्ड विधि और भाग विधि द्वारा वर्गमूल ज्ञात करना।
- ऐसी संख्याओं का वर्गमूल ज्ञात करना (अनुमान लगाना) जो पूर्ण वर्ग नहीं है।
- रूढ़ गुणनखण्ड विधि द्वारा घनमूल ज्ञात करना।
- किसी संख्या के घनमूल को अनुमानित करना।

अंत:त्रिभुज

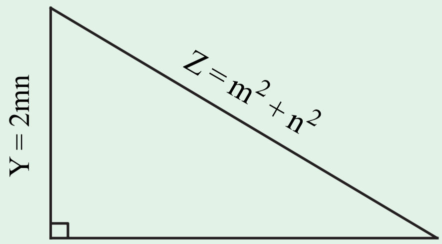
डिपोहंटस के समय और प्राचीन ग्रीक में भी समकोण त्रिभुज की भुजाओं को ज्ञात करने का सूत्र प्रचलित था। वह है-

एक भुजा $X = m^2 - n^2$

दूसरी भुजा $Y = 2mn$

कर्ण $Z = m^2 + n^2$

जहाँ m और n कोई दो पूर्णांक हैं।



उदाहरण

m	n	$X = m^2 - n^2$	$Y = 2mn$	$Z = m^2 + n^2$
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
5	2	21	20	29
4	3	7	24	25
4	1	15	8	27

SCERT TELANGANA