ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା

(REAL NUMBER)

2.1 ଉପକ୍ରମଣିକା (Introduction) :

ମାନବ ସଭ୍ୟତାର ଅଗ୍ରଗତିରେ ସଂଖ୍ୟା ଜଗତର ଭୂମିକା ସର୍ବଶ୍ରେଷ୍ଠ । ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କ ବ୍ୟବହାର ମଣିଷ କେବେ କରିଥିଲା, ତାହାର ଆଲୋଚନା ଅତି ଜଟିଳ । ଏତିକି ମାତ୍ର ଜାଣିବା ଦରକାର ଯେ, ଆବଶ୍ୟକତା ଦୃଷ୍ଟିରୁ ସଂଖ୍ୟା ଜଗତର ସୃଷ୍ଟି ହୋଇଥିଲା ଓ ସଂଖ୍ୟା ଜଗତ ବିନା ଆମର ଏ ସଭ୍ୟତାକୁ ପରିକଳ୍ପନା କରାଯାଇପାରିବ ନାହିଁ ।

ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ପ୍ରଥମେ ଆସିଥା'ନ୍ତି **ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା (Counting Numbers)** କିମ୍ୱା **ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା (Natural Numbers)** । ଏଗୁଡ଼ିକ ହେଲେ 1,2,3, 4, 5,... । ସମସ୍ତ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାର ସେଟ୍‌ର ସଂକେତ N ଓ ଏହାକୁ ତାଲିକା ପ୍ରଣାଳୀରେ ଲେଖିବା $N = \{1, 2, 3, ...\}$ ।

ଏହା ପରେ ଆସିଥା'ନ୍ତି ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ ଏବଂ ସମସ୍ତ **ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା (Integers)** ମାନଙ୍କ ସେଟ୍‌ର ସଂକେତ Z ଏବଂ $Z = \{...., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ । ଅର୍ଥାତ୍ ସମସ୍ତ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା, 0 (ଶୂନ) ଏବଂ ସମସ୍ତ ଋଣାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟାର ସେଟ୍ । ଏଠାରେ ଉଲ୍ଲେଖଯୋଗ୍ୟ ଯେ N ସେଟ୍‌ରେ 0 (ଶୂନ) ଉପାଦାନଟିକୁ ନେଇ ବିଚାର କଲେ ଆମେ N^* ସେଟ୍ ପାଇଥାଉ ଓ ଏହାକୁ **ସଂପ୍ରସାରିତ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟାସେଟ୍** N^* କୁହାଯାଏ । ଉକ୍ତ ସେଟ୍‌କୁ ତାଲିକା ପ୍ରଣାଳୀରେ $N^* = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ ଲେଖାଯାଏ ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ଶୂନ (0) ଏବଂ ଋଣାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା (...–3, –2, –1) ପ୍ରାଚୀନ ଭାରତୀୟଙ୍କ ଅବଦାନ । ବ୍ରହ୍ମଗୁପ୍ତ (ଖ୍ରୀଷ୍ଟାବ୍ଦ 598ରେ ଜନ୍ମ) ତାଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ଲିଖିତ 'ବ୍ରହ୍ମସିଦ୍ଧାନ୍ତ' ପୁସ୍ତକରେ ଋଣାତ୍ମକ ସଂଖ୍ୟା କଥା ଉଲ୍ଲେଖ କରିଛନ୍ତି ।

ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ Z ର ସଂପ୍ରସାରଣ ହେତୁ ସମସ୍ତ **ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା (Rational Numbers)** ସେଟ୍‌ର ସୃଷ୍ଟି । ଯେକୌଣସି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ବ୍ୟାପକ ରୂପ $\frac{p}{q}$ ଅଟେ, ଯେଉଁଠାରେ p ଓ q ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ଓ $q \neq 0$ । ସମସ୍ତ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍‌ର ସଂକେତ Q ଅଟେ ଏବଂ $Q = \left\{ \frac{p}{q} : p \text{ ଓ } q \text{ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ଓ } q \neq 0 \right\}$ ।

ଯେକୌଣସି ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ମଧ୍ୟ ଗୋଟିଏ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା । ଧନାତ୍ମକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ସୃଷ୍ଟି ବହୁ ପୁରାତନ । ଏହାର ଉଦ୍ଭାବନ ସମ୍ଭବତଃ ଖ୍ରୀଷ୍ଟପୂର୍ବ 3000-2000 ମସିହାର ଘଟଣା ।

ଏଠାରେ ମନେ ରଖିବା ଉଚିତ୍ ଯେ, $N \subset N^* \subset Z \subset Q$

N ସେଟ୍, Z ସେଟ୍ ଓ Q ସେଟ୍‌ର ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ଉପାଦାନ x ଓ y ନେଇ ସେମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ଯୋଗ(ମିଶାଣ) ଓ ଗୁଣନ ପ୍ରକ୍ରିୟା କିପରି କରାଯାଏ ତାହା ଆମେ ଜାଣିଛେ । ଏହି ପ୍ରକ୍ରିୟାମାନଙ୍କୁ ଯଥାକ୍ରମେ + ଓ x ଲେଖି ସୂଚାଯାଏ । ଅଷ୍ଟମ ଶ୍ରେଣୀର ସରଳ ଗଣିତ (ବୀଜଗଣିତ) ପୁସ୍ତକରେ ଏହି ପ୍ରକ୍ରିୟା ଦୁଇଗୋଟିର ବୀଜଗାଣିତିକ ଧର୍ମ (algebraic properties) ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଛି । Q ସେଟ୍‌ର ପୁନଃ ସମ୍ପ୍ରସାରଣ କରିବା ପୂର୍ବରୁ ସେହି ବୀଜଗାଣିତିକ ଧର୍ମ ଗୁଡ଼ିକୁ ସ୍ମରଣ କରିବା ଉଚିତ୍ ।

2.2 N ସେଟ୍‌ରେ ଯୋଗ ଓ ଗୁଣନ ପ୍ରକ୍ରିୟାର ବୀଜଗାଣିତିକ ଧର୍ମ

ପ୍ରଥମେ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ N ର ବୀଜଗାଣିତିକ ଧର୍ମ ଗୁଡ଼ିକୁ ଆଲୋଚନା କରିବା । ଏଠାରେ ବ୍ୟବହୃତ ସଂକେତ m, n ଓ p ପ୍ରତ୍ୟେକ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା । ଅର୍ଥାତ୍ $m, n, p \in N$

ଯୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟାର ଧର୍ମ :

1. ***ସଂବୃତ୍ତି ଧର୍ମ*** (Closure property) : $m + n \in N$ । ଅର୍ଥାତ୍ ଦୁଇଟି ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାର ଯୋଗଫଳ ଏକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ।

2. ***କ୍ରମବିନିମୟୀ ଧର୍ମ*** (Commutative property) : $m + n = n + m$

3. ***ସହଯୋଗୀ ଧର୍ମ*** (Associative property) : $m + (n + p) = (m + n) + p$

ଗୁଣନ ପ୍ରକ୍ରିୟାର ଧର୍ମ :

4. ***ସଂବୃତ୍ତି ଧର୍ମ*** : $m\,n \in N$ ଅର୍ଥାତ୍ ଦୁଇଟି ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାର ଗୁଣଫଳ ଏକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ।

($m \times n$ କିମ୍ବା $m.n$ କୁ mn ରୂପେ ଲେଖାଯାଏ ।)

5. ***କ୍ରମ ବିନିମୟୀ ଧର୍ମ*** : $mn = nm$

6. ***ସହଯୋଗୀ ଧର୍ମ*** : $m(np) = (mn)p$

7. ***ଅଭେଦ ଧର୍ମ*** (Identity property) : ଗୁଣନ ପ୍ରକ୍ରିୟାରେ ସଂଖ୍ୟା 1 (ଏକ) ଅଭେଦ ଓ $m.1 = m$ ।

1 କୁ ମଧ୍ୟ ଗୁଣନାତ୍ମକ ଅଭେଦ (Multiplicative Identity) କୁହାଯାଏ ।

୮. ***ବଣ୍ଟନ ଧର୍ମ*** (distributive property) : $m(n+p)= mn+mp$ ଅର୍ଥାତ୍ ଗୁଣନ ପ୍ରକ୍ରିୟା ଯୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟାକୁ ବଣ୍ଟନ କରିଥାଏ ।

ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାରେ କ୍ରମ (Order) :

N ସେଟ୍‌ର ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକ କ୍ରମିତ (ordered) । ଅର୍ଥାତ୍ ଦୁଇଟି ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା m ଓ n ଦିଆଗଲେ କେଉଁଟି ବଡ଼ ଓ କେଉଁଟି ସାନ କହିବା ସମ୍ଭବ । n ଅପେକ୍ଷା m ବଡ଼ ହେଲେ $m > n$ କିମ୍ବା $n < m$ ବୋଲି ଲେଖାଯାଏ । ବସ୍ତୁତଃ

$1 < 2 < 3 < 4 < \dots$ ।

N ସେଟ୍ ପରିବର୍ତ୍ତେ N^* ସେଟ୍ (ସଂପ୍ରସାରିତ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍) ନେଲେ ଉପରଲିଖିତ ସମସ୍ତ ଧର୍ମ ବ୍ୟତୀତ ନିମ୍ନଲିଖିତ ଧର୍ମଟି ମଧ୍ୟ ସତ୍ୟ ହେବ ।

ଯୋଗର ଅଭେଦ ଧର୍ମ : ଯେକୌଣସି ଉପାଦାନ $m \in N^*$ ହେଲେ $0+m = m$ ।

0 (ଶୂନ)କୁ ଯୋଗାତ୍ମକ ଅଭେଦ (Additive Identity) କୁହାଯାଏ ।

N^* ସେଟ୍‌ରେ ସିଦ୍ଧ ହେଉଥିବା ଯୋଗ ଓ ଗୁଣନ ପ୍ରକ୍ରିୟାର ସମସ୍ତ ଧର୍ମ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ Z ରେ ସତ୍ୟ ଅଟନ୍ତି । ଏତଦ୍‌ବ୍ୟତୀତ ଆଉ ଗୋଟିଏ ଧର୍ମ ମଧ୍ୟ ସତ୍ୟ ହୋଇଥାଏ । ତାହା ନିମ୍ନରେ ଦିଆଗଲା ।

ଯୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟା ପାଇଁ ବିଲୋମୀ ଧର୍ମ (Inverse property) : ଯେକୌଣସି ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା **m** ପାଇଁ ଏହାର ବିଲୋମୀ (inverse) ଟି $-m$ ଓ $-m \in Z$ ଏବଂ $m + (-m) = 0 = (-m) + m$ ।

m ଓ $-m$ ପରସ୍ପରର ବିଲୋମୀ ଅଟନ୍ତି ।

ସଂଖ୍ୟା 0 ର ବିଲୋମୀ -0 ଓ $-0 = 0$

Z ସେଟ୍‌ଟି ମଧ୍ୟ କ୍ରମିତ ଅର୍ଥାତ୍ $\ldots -4 < -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 < \ldots$

ଏଠାରେ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ଯେ N କିମ୍ବା N^* ସେଟ୍‌ରେ ବିୟୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟାର ସଂଜ୍ଞା ପ୍ରକରଣ ଅସମ୍ଭବ । ମାତ୍ର Z ସେଟ୍‌ର ସୃଷ୍ଟି ହେତୁ ବିୟୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟାଟିର ସଂଜ୍ଞା ପ୍ରକରଣ ସମ୍ଭବ ହୋଇ ପାରିଲା ।

ମନେରଖ ଯେ, ଦୁଇଗୋଟି ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟାର ବିୟୋଗଫଳ ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା । ତେଣୁ ବିୟୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟାଟି Z ସେଟ୍‌ରେ ସଂବୃତ୍ତି ନିୟମ ପାଳନ କରେ; ମାତ୍ର ବିୟୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟା ସହଯୋଗୀ କିମ୍ବା କ୍ରମ ବିନିମୟୀ ନୁହେଁ ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କ ପାଇଁ ନିମ୍ନଲିଖିତ ଉକ୍ତି ଗୁଡ଼ିକ ସତ୍ୟ ।

(i) $-(-m) = m$ (ii) $(-m)(-n) = mn$ (iii) $0 \times m = m \times 0 = 0$

କେତେକ ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ଧାରଣା :

(a) **ଇଉକ୍ଲିଡୀୟ ପଦ୍ଧତି (Euclidean algorithm) :** ଯଦି ମୋ ପାଖରେ 6 ଟି ପେନ୍‌ସିଲ୍ ଅଛି ଓ ଏହାକୁ 3 ଜଣ ପିଲାଙ୍କୁ ବାଣ୍ଟିବାକୁ ହେବ ତେବେ, ପ୍ରତ୍ୟେକ ପିଲାକୁ 2 ଟି କରି ପେନ୍‌ସିଲ ଦେଇ ହେବ । କାରଣ $3 \times 2 = 6$ । ମାତ୍ର ଯଦି ମୋ ପାଖରେ 10 ଟି ପେନ୍‌ସିଲ୍ ଅଛି ତେବେ ଜଣକୁ ତିନୋଟି କରି ଦେଇ ଦେଲା ପରେ ଆଉ ଗୋଟିଏ ବଳକା ରହିବ । କାରଣ $10 = 3 \times 3 + 1$ । ଏହି ଧାରଣା ହିଁ ଇୟୁକ୍ଲିଡ଼ୀୟ ପଦ୍ଧତି । ଏହା ବ୍ୟାପକ ରୂପେ ନିମ୍ନରେ ପ୍ରଦତ୍ତ ହେଲା ।

$p > 1$ ଏକ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା ଓ n ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ $n = mp + r$

ଯେଉଁଠାରେ m ଓ r ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ଓ $0 \le r < p$ । $n = mp + r$ ପରିପ୍ରକାଶଟି ଅନନ୍ୟ (ଅର୍ଥାତ୍ ଏପରି ଏକାଧିକ ପରିପ୍ରକାଶ ନାହିଁ) । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ $p = 4, n = 11$ ହେଲେ $11 = 2 \times 4 + 3$ ଓ ଏଠାରେ $m = 2, r = 3$ । ଏହି ପଦ୍ଧତିରେ n ଭାଜ୍ୟ (devidend) , p ଭାଜକ (divisor), m ଭାଗଫଳ (quotient) ଓ r ଭାଗଶେଷ (remainder କିମ୍ବା residue) । ଅର୍ଥାତ୍ **ଭାଜ୍ୟ = (ଭାଜକ) x (ଭାଗଫଳ) + ଭାଗଶେଷ ।**

ଏହି ପଦ୍ଧତିରୁ ଭାଗ ପ୍ରକ୍ରିୟା (division) ର ସୃଷ୍ଟି । ଯଦି $r = 0$ (ଭାଗଶେଷ = 0) ତେବେ ଆମେ କହିଥାଉ **n** ସଂଖ୍ୟାଟି **p** ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ।

(b) **ଯୁଗ୍ମ ଓ ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା (Even and Odd Numbers) :**

ଯେଉଁ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ 2 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ସେଗୁଡ଼ିକ ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା । $0, \pm 2, \pm 4, \pm 6$ ... ପ୍ରତ୍ୟେକ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା [± 2 ର ଅର୍ଥ 2 କିମ୍ବା -2] । ଯେଉଁ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ 2 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ନୁହଁନ୍ତି ସେଗୁଡ଼ିକ ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା ଓ । $\pm 1, \pm 3, \pm 5$.... ଇତ୍ୟାଦି ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା ।

ଗୋଟିଏ ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟାକୁ $2m, (m \in Z)$ ଓ ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟାକୁ $2m+1, (m \in Z)$ ଆକାରରେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଏ । ଦୁଇଟି ସଂଖ୍ୟା ପରସ୍ପର ମୌଳିକ (relatively prime) ଯଦି ସେମାନଙ୍କ ଗ.ସା.ଗୁ. 1 । ଅର୍ଥାତ୍ m ଓ n ପରସ୍ପର ମୌଳିକ ଯଦି $(m, n) = 1$ । 2, 3; 5, 8; 8, 9 ଆଦି ପରସ୍ପର ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟାଯୋଡ଼ା ଅଟନ୍ତି ।

(c) **ମୌଳିକ ଓ ଯୌଗିକ ସଂଖ୍ୟା (Prime & Composite Numbers) :**

1 ଅପେକ୍ଷା ବୃହତ୍ତର ଏକ ସ୍ୱାଭବିକ୍ ସଂଖ୍ୟା p କେବଳ 1 ଓ p ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ହେଉଥିଲେ, ସଂଖ୍ୟାଟି ଏକ ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟା । ଅର୍ଥାତ୍ ଏକଠାରୁ ବୃହତ୍ତର ସ୍ୱାଭବିକ ସଂଖ୍ୟାଟି ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟା ଯଦି ଏହାର 1 ଓ ସେହିସଂଖ୍ୟା ଭିନ୍ନ ଅନ୍ୟ କୌଣସି ଉତ୍ପାଦକ ନ ଥିବ ।

2, 3, 5, 7, 11, 13,17, 19, 23... ଇତ୍ୟାଦି ପ୍ରତ୍ୟେକ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟା ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ (1) : ପ୍ରତ୍ୟେକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାର ସେ ନିଜେ ଓ 1 ଉତ୍ପାଦକଦ୍ୱୟ ରହିଲେ ଏହି ଦୁଇଗୋଟି ଉତ୍ପାଦକକୁ ନଗଣ୍ୟ ଉତ୍ପାଦକ (Trivial factors) କୁହାଯାଏ ।

ମାତ୍ର ଯୌଗିକ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡିକର ଏହି ନଗଣ୍ୟ ଉତ୍ପାଦକ ବ୍ୟତୀତ ଗଣ୍ୟ ଉତ୍ପାଦକ (Non - trivial factors) ମଧ୍ୟ ଥାଏ । ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ଯେ, ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡିକର କେବଳ ନଗଣ୍ୟ ଉତ୍ପାଦକ ଥାଏ । କିନ୍ତୁ ଯୌଗିକ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ନଗଣ୍ୟ ଏବଂ ଗଣ୍ୟ ଉଭୟ ପ୍ରକାର ଉତ୍ପାଦକ ଥାଏ ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ (2) : ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖାଯାଇଛି ଯେ, 1 ରୁ 1000 ମଧ୍ୟରେ 168 ଟି, 1000 ରୁ 2000 ମଧ୍ୟରେ 135ଟି, 2000 ରୁ 3000 ମଧ୍ୟରେ 127 ଟି, 3000 ରୁ 4000 ମଧ୍ୟରେ 120 ଟି ଓ 4000 ରୁ 5000 ମଧ୍ୟରେ 119ଟି ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟା ଅଛି । ପ୍ରକୃତରେ ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟା ମାନଙ୍କର ସେଟ୍ ଅସୀମ ।

ଲକ୍ଷ୍ୟକର ଯେ, ପ୍ରତ୍ୟେକ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା (1 ଭିନ୍ନ), ଏକ ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟା ଅଥବା ଏହାକୁ କେତେକ ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟାର ଗୁଣଫଳରେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇପାରେ ।

ଯଥା : $6 = 2 \times 3$, $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$, $94860 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 17 \times 31$ ଇତ୍ୟାଦି ।

ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟାର ଏହି ପ୍ରକାର ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ଅନନ୍ୟ (Unique) ; ଅର୍ଥାତ୍ କୌଣସି ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟାକୁ ଦୁଇପ୍ରକାର ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟାର ଉତ୍ପାଦକର ଗୁଣଫଳରେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇ ନପାରେ । ଅବଶ୍ୟ କ୍ରମରେ ପରିବର୍ତ୍ତନ କରାଯାଇପାରେ; ଯଥା : $6 = 2 \times 3 = 3 \times 2$ । ଏହି ତଥ୍ୟ ନିମ୍ନ ଉପପାଦ୍ୟରେ ଲିପିବଦ୍ଧ ଯାହାକି **Fundamental Theorem of Arithmetic** ବା **Unique Factorisation Theorem** ନାମରେ ଅଭିହିତ ।

1 ଭିନ୍ନ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା ଅନନ୍ୟ ଭାବରେ ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟାର ଗୁଣଫଳରେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇପାରେ ।

ମନେରଖ - 1 ଗୋଟିଏ ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟା ନୁହେଁ ।

ଯୌଗିକ ସଂଖ୍ୟାର ମୌଳିକ ରାଶିମାନଙ୍କର ଉତ୍ପାଦକିକୃତ ରୂପକୁ **ଷ୍ଟାଣ୍ଡାର୍ଡ (standard)** ବା **କାନୋନିକାଲ୍ (Canonical)** ରୂପ କୁହାଯାଏ ।

2.3 ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା (Rational numbers) :

ଅଷ୍ଟମ ଶ୍ରେଣୀର ସରଳ ଗଣିତ (ବୀଜଗଣିତ) ପୁସ୍ତକର ଦ୍ୱିତୀୟ ଅଧ୍ୟାୟରେ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଥିଲା । ସ୍ମରଣ କରିବା ଆବଶ୍ୟକ **ଯେ,** ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ବ୍ୟାପକ ରୂପ $\frac{p}{q}$ ଯେଉଁଠାରେ p ଓ q ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ଓ $q \neq 0$ । $\frac{1}{2}, \frac{-3}{7}, \frac{-1}{-4}$ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା । ପ୍ରତ୍ୟେକ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା n ମଧ୍ୟ ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା କାରଣ ଏହାକୁ $\frac{n}{1}$ ରୂପେ ଲେଖି ହେବ ।

ତେଣୁ ଆମେ ପାଇବା, $N \subset Z \subset Q$

ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କୁ ନେଇ ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକ୍ରିୟା :

ନିମ୍ନଲିଖିତ ଆଲୋଚନାରେ $x, y \in Q$ (ଅର୍ଥାତ୍ x ଓ y ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା) । ସୁତରାଂ

$x = \frac{p}{q}$ ଓ $y = \frac{r}{s}$; ($p, q, r, s \in Z$ ଓ $q \neq 0, s \neq 0$)

ଯୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟା : $x + y = \frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps + qr}{qs} \in Q$;

ବିୟୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟା : $x - y = \frac{p}{q} - \frac{r}{s} = \frac{ps - qr}{qs} \in Q$;

ଗୁଣନ ପ୍ରକ୍ରିୟା : $x \times y = \frac{p}{q} \times \frac{r}{s} = \frac{pr}{qs} \in Q$;

ହରଣ ପ୍ରକ୍ରିୟା : ଯଦି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା $y \neq 0$, ଅର୍ଥାତ୍ $r \neq 0$ ତେବେ $\frac{x}{y} = \frac{\frac{p}{q}}{\frac{r}{s}} = \frac{ps}{qr} \in Q$ ।

ଅତଏବ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ Q କୁ ବିଚାର କଲେ ଚାରିଟିଯାକ ପ୍ରକ୍ରିୟା (ଯୋଗ, ବିୟୋଗ, ଗୁଣନ ଓ ହରଣ) ସଂବୃତ୍ତି ନିୟମ ପାଳନ କରନ୍ତି । କେବଳ ହରଣ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଭାଜକ ଭାବେ ରହିଥିବା ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାଟି ଅଣଶୂନ୍ୟ ହେବା ଆବଶ୍ୟକ ।

ଯୋଗ ଓ ଗୁଣନ ପ୍ରକ୍ରିୟା ଦ୍ୱୟ ପାଇଁ ନିମ୍ନଲିଖିତ ବୀଜଗାଣିତିକ ନିୟମଗୁଡ଼ିକ ସତ୍ୟ । ଏଠାରେ $x, y, z \in Q$

ଯୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟାର ନିୟମ :

(i) ***ସଂବୃତ୍ତି ନିୟମ*** : $x + y \in Q$

(ii) ***କ୍ରମବିନିମୟୀ ନିୟମ*** : $x + y = y + x$

(iii) ***ସହଯୋଗୀ ନିୟମ*** : $x + (y + z) = (x + y) + z$

(iv) ***ଅଭେଦ ନିୟମ*** : $x + 0 = x$ ('0' କୁ ଯୋଗାତ୍ମକ ଅଭେଦ କୁହାଯାଏ ।)

(v) ***ବିଲୋମୀ ନିୟମ*** : $x + (-x) = 0$ (x ଓ –x ପରସ୍ପରର ଯୋଗାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ ।)

ଗୁଣନ ପ୍ରକ୍ରିୟାର ନିୟମ :

(vi) ***ସଂବୃତ୍ତି ନିୟମ*** : $xy \in Q$

(vii) ***କ୍ରମବିନିମୟୀ ନିୟମ*** : $xy = yx$

(viii) ***ସହଯୋଗୀ ନିୟମ*** : $x(yz) = (xy)z$

(ix) ***ଅଭେଦ ନିୟମ*** : $x.1 = x$ (1 କୁ ଗୁଣନାତ୍ମକ ଅଭେଦ କୁହାଯାଏ ।)

(x) ***ବିଲୋମୀ ନିୟମ*** : $x(x \neq 0)$ ର ବିଲୋମୀ $\frac{1}{x}$ (କିମ୍ବା x^{-1}) ଓ $x \cdot \frac{1}{x} = 1$

(x ଓ $\frac{1}{x}$ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପରସ୍ପରର ଗୁଣନାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ ।)

ଯୋଗ ଓ ଗୁଣନ ପ୍ରକ୍ରିୟାଦ୍ୱୟର ନିୟମ :

(xi) **ବଣ୍ଟନ ନିୟମ** : $x(y + z) = xy + xz$,

ଯେଉଁ ସେଟ୍‌ର ଉପାଦାନ ଗୁଡ଼ିକ ଉପରୋକ୍ତ ଯୋଗାତ୍ମକ, ଗୁଣନାତ୍ମକ ତଥା ବଣ୍ଟନ ନିୟମ ପାଳନ କରୁଥିବେ ସେହି ସେଟ୍‌କୁ ଗୋଟିଏ ଫିଲ୍ଡ (Field) କୁହାଯାଏ ।

ଏ ସମସ୍ତ ସତ୍ୟ ହେତୁ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ Q ଏକ ଫିଲଡ଼ (field) ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ (i) : Q ସେଟ୍‌ରେ ଗୁଣନର ବିଲୋମୀ ନିୟମ ସତ୍ୟ; ମାତ୍ର ଏହା Z ସେଟ୍‌ରେ ସତ୍ୟ ହେଉ ନ ଥିଲା ।

(ii) : $a + a + a + \ldots\ldots$(n ଥର) $= na$ ଓ $a \times a \times a \times \ldots\ldots$ (n ଥର) $= a^n$

'a^n' ସଂକେତକୁ ପ୍ରଥମେ **ଫରାସୀ ଗଣିତଜ୍ଞ Rene Descartes** ବ୍ୟବହାର କରିଥିଲେ ।

ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ କ୍ରମିତ (Ordered) । ଦୁଇଗୋଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା x ଓ y ଦିଆଯାଇ ଥିଲେ ତୁଳନା କରି କହି ହେବ (i) $x>y$ କିମ୍ବା (ii) $x < y$ କିମ୍ବା $x = y$ । ଏହାକୁ **ତ୍ରିମୁଖୀ ନିୟମ** (trichotomy law) କୁହାଯାଏ ।

ମନେକର $x = \frac{p}{q}$ ଓ $y = \frac{r}{s}$; $p, q, r, s \in Z$ ଓ $q \neq 0$ ଓ $s \neq 0$ । x ଓ yର ବିୟୋଗଫଳ ନିରୂପଣ କରି ତ୍ରିମୁଖୀ ନିୟମକୁ ପରୀକ୍ଷା କରିବା ସହଜ । ଏଠାରେ ଆମେ q ଓ s କୁ ଧନାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ରୂପେ ନେଉଛେ ।

ଅସମାନତା ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ନିମ୍ନସ୍ଥ ନିୟମଗୁଡ଼ିକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର -

(i) $x < y$ ବା $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ ଯଦି ଓ କେବଳ ଯଦି $ps < qr$ ଅଥବା $ps - qr < 0$

(ii) $x > y$ ବା $\frac{p}{q} > \frac{r}{s}$ ଯଦି ଓ କେବଳ ଯଦି $ps > qr$ ଅଥବା $ps - qr > 0$

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ : $\frac{1}{6} - \frac{3}{7} = \frac{7-18}{42} = -\frac{11}{42} < 0$; $\quad \therefore \frac{1}{6} < \frac{3}{7}$

$$-\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-2+3}{6} = \frac{1}{6} > 0; \quad \therefore -\frac{1}{3} > -\frac{1}{2}$$

ନିମ୍ନଲିଖିତ ଅସମୀକରଣ ଗୁଡ଼ିକ ସତ୍ୟ ଅଟନ୍ତି ଯେଉଁ ଠାରେ $x, y, z \in Q$

(a) $x < y$ ଓ $y < z$ ହେଲେ, $x < z$, ଏହା **ସଂକ୍ରମୀ ନିୟମ** (law of transitivity)

(b) $x < y$ ହେଲେ, $x + z < y + z$,

(c) $x < y$ ଓ $z > 0$ ହେଲେ, $xz < yz$,

(d) $x < y$ ଓ $z < 0$ ହେଲେ, $xz > yz$,

(e) $0 < x < y$ ହେଲେ $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$ ଓ $y < x < 0$ ହେଲେ, $\frac{1}{y} > \frac{1}{x}$ ।

ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ଘନତ୍ୱ (Density)

ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର କ୍ରମ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଉପରୋକ୍ତ ତଥ୍ୟ ବ୍ୟବହାର କରି ଆମେ ପ୍ରମାଣ କରିପାରିବା ଯେ,

ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଅସଂଖ୍ୟ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଥାଏ ।

ଉଦାହରଣ- 1 : a ଓ b ଦୁଇଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଓ $a < b$ । ହେଲେ $a < \frac{a+b}{2} < b$ ।

ସମାଧାନ : $a < b \Rightarrow a + a < a + b$

$$\Rightarrow 2a < a + b \Rightarrow \frac{1}{2} \times 2a < \frac{1}{2}(a+b)$$

$$\Rightarrow a < \frac{a+b}{2} \quad ....(1)$$

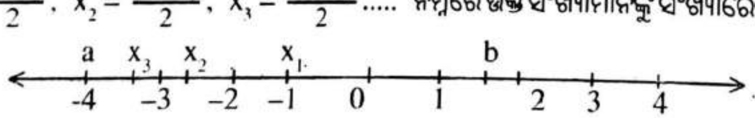
ପୁନଶ୍ଚ $a < b \Rightarrow a + b < b + b \Rightarrow a + b < 2b \Rightarrow \frac{1}{2}(a+b) < \frac{1}{2} \times 2b$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{2} < b \quad ....(2)$$

(1) ଓ (2) ରୁ ପାଇଲେ $a < \frac{a+b}{2} < b$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଏହି ପଦ୍ଧତିକୁ ବାରମ୍ବାର ପ୍ରୟୋଗ କଲେ, a ଓ b ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଅସଂଖ୍ୟ ସଂଖ୍ୟା ମିଳିବ । ଏହି ପ୍ରଣାଳୀରେ ବର୍ଣ୍ଣିତ a ଓ b ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ କେତେକ ସଂଖ୍ୟା ନିମ୍ନରେ ଦିଆଗଲା ।

$x_1 = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = \frac{a+x_1}{2}$, $x_3 = \frac{a+x_2}{2}$..... ନିମ୍ନରେ ଉକ୍ତ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କୁ ସଂଖ୍ୟାରେଖାରେ ଦର୍ଶାଯାଇଛି ।



(ଚିତ୍ର 2.1)

ମନେକର x ଓ y ଦୁଇଗୋଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଓ $x < y$ । x ଅପେକ୍ଷା ବୃହତ୍ତର ଓ y ଅପେକ୍ଷା କ୍ଷୁଦ୍ରତର ସଂଖ୍ୟାଟି $\frac{1}{2}(x+y) = z_1$; ସେହିପରି $\frac{1}{2}(x+z_1) = z_2$ ଓ $\frac{1}{2}(z_1+y) = z_3$ ମଧ୍ୟରେ x ଅପେକ୍ଷା ବୃହତ୍ତର ଓ y ଅପେକ୍ଷା କ୍ଷୁଦ୍ରତର

ଆଉ ଦୁଇଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା । ଏହି ସଂଖ୍ୟା z_1, z_2, z_3 .. ଇତ୍ୟାଦିଙ୍କୁ x ଓ y ମଧ୍ୟସ୍ଥ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା କୁହାଯାଏ । ଏହି ପଦ୍ଧତିକୁ ବାରମ୍ବାର ପ୍ରୟୋଗ କରି ଚାଲିଲେ ଆମେ ଦେଖିବା ଯେ, x ଓ y ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଅସଂଖ୍ୟ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ବିଦ୍ୟମାନ । ଏହି ଧର୍ମକୁ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍‌ର ଘନତ୍ୱ କୁହାଯାଏ । ଏଠାରେ ଲକ୍ଷ୍ୟ କରିବାର କଥା ଯେ $x < z_1 < y$, $x < z_2 < y$ ଇତ୍ୟାଦି । ଏହା ନିମ୍ନରେ ଦର୍ଶିତ ହୋଇଛି ।

$x < y$ ହେତୁ $y - x > 0$; $z_1 - x = \frac{x+y}{2} - x = \frac{y-x}{2} > 0$ । $(\because z_1 = \frac{x+y}{2})$

ସୁତରାଂ $z_1 > x$;

ସେହିପରି $y - z_1 = y - \frac{x+y}{2} = \frac{y-x}{2} > 0$ । ସୁତରାଂ $y > z_1$ ଅର୍ଥାତ୍ $x < z_1 < y$;

ସେହିପରି ଦର୍ଶାଯାଇପାରେ ଯେ $x < z_2 < z_1 < y$ ଓ $x < z_1 < z_3 < y$ ।

ଉଦାହରଣ- 2 : -1 ଓ 1 ମଧ୍ୟରେ ତିନିଗୋଟି ଋଣାତ୍ମକ ଓ ଦୁଇ ଗୋଟି ଧନାତ୍ମକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ : ଋଣାତ୍ମକ ସଂଖ୍ୟା ପାଇଁ $x = -1$ ଓ $y = 0$ ନିଆଯାଉ । ($\because$ ଏଠାରେ $-1 < 0 < 1$)

$$\therefore z_1 = \frac{x+y}{2} = \frac{-1+0}{2} = -\frac{1}{2},\ z_2 = \frac{x+z_1}{2} = \frac{-1+\left(-\frac{1}{2}\right)}{2} = \frac{-\frac{3}{2}}{2} = -\frac{3}{4} \text{ ଓ}$$

$$z_3 = \frac{z_1+y}{2} = \frac{-\frac{1}{2}+0}{2} = -\frac{1}{4} \text{ ।}$$

ଧନାତ୍ମକ ସଂଖ୍ୟା ପାଇଁ $x = 0$ ଓ $y = 1$ ନିଆଯାଉ ।

$$\therefore z_1 = \frac{x+y}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2},\ z_2 = \frac{x+z_1}{2} = \frac{0+\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4} \text{ ।}$$

ସୁତରାଂ -1 ଓ 1 ମଧ୍ୟରେ ଋଣାତ୍ମକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ତ୍ରୟ $-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}$ ଓ $-\frac{1}{4}$ ଏବଂ ଧନାତ୍ମକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟ $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ ।

ଉଦାହରଣ- 3 : $\frac{1}{3}$ ଓ $\frac{4}{9}$ ର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ତିନୋଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : $\frac{1}{3}$ ଓ $\frac{4}{9}$ ର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ସଂଖ୍ୟା ତିନୋଟି ହେଲେ -

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{9}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3+4}{9}\right) = \frac{7}{18},\ x_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{7}{18}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{6+7}{18}\right) = \frac{13}{36}$$

$$\text{ଓ } x_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{13}{36}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{12+13}{36}\right) = \frac{25}{72}$$

$\therefore$ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାତ୍ରୟ ହେଲେ $\frac{7}{18}, \frac{13}{36}$ ଓ $\frac{25}{72}$

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : x ଓ y ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ $(x \pm y)^2$, $(x \pm y)^3$, $x^2 - y^2$, $x^3 \pm y^3$ ସଂକ୍ରାନ୍ତୀୟ ସମସ୍ତ ସୂତ୍ର ସତ୍ୟ ଅଟନ୍ତି । ବୀଜଗାଣିତିକ ଧର୍ମଗୁଡ଼ିକର ପ୍ରୟୋଗରେ ଏହି ସୂତ୍ର ଗୁଡ଼ିକୁ ସାବ୍ୟସ୍ତ କରାଯାଇ ପାରିବ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ

$x^2 + 2xy + y^2 = x.x + xy + xy + yy$

$= x(x+y)+(x+y)y=x(x+y) + y\ (x+y)$ (ବଣ୍ଟନ ନିୟମ)

$= (x + y)\ (x + y) = (x + y)^2$ (ସଂଜ୍ଞା) । (ପ୍ରମାଣିତ)

2.4 ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ଦଶମିକ ରୂପ :

ମନେକର $x = \frac{p}{q}$ ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଓ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା $q > 0$ । p କୁ ଲବ ଓ q କୁ ହର କୁହାଯାଏ । p କୁ q ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କଲେ କେତେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଭାଗ ପ୍ରକ୍ରିୟାଟିର ପରିସମାପ୍ତି ଘଟେ ଓ ଆଉ କେତେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଭାଗ ପ୍ରକ୍ରିୟାର ପରିସମାପ୍ତି କେବେ ହେଲେ ବି ଘଟେ ନାହିଁ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ,

(i) $\frac{1}{2} = 0.5$, $\frac{1}{4} = 0.25$, $\frac{1}{5} = 0.2$, $\frac{3}{25} = 0.12$ ଇତ୍ୟାଦି; ଯେଉଁ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଭାଗ ପ୍ରକ୍ରିୟାର ପରିସମାପ୍ତି ଘଟିଥାଏ ।

(ii) $\frac{1}{3} = 0.33333....$, $\frac{1}{7} = 0.14285714285714$, $\frac{5}{6} = 0.83333.........$ ଇତ୍ୟାଦି; ଯେଉଁ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଭାଗ ପ୍ରକ୍ରିୟାଟିର ପରିସମାପ୍ତି ଜମା ଘଟେ ନାହିଁ ।

ପ୍ରଥମ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଦଶମିକ ରୂପଟି ସମୀମ ବା **ସରନ୍ତି (terminating)** କିନ୍ତୁ ଦ୍ୱିତୀୟ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଏହା ଅସୀମ ବା **ଅସରନ୍ତି (non-terminating)** ଦଶମିକ ଭଗ୍ନସଂଖ୍ୟା ।

ଯେଉଁ ଦଶମିକ ଭଗ୍ନସଂଖ୍ୟାରେ ଦଶମିକ ବିନ୍ଦୁ ପରବର୍ତ୍ତୀ ଗୋଟିଏ ଅଙ୍କ ବା ଏକାଧିକ ଅଙ୍କମାନ ବାରମ୍ବାର କ୍ରମାନ୍ୱୟରେ ଆବିର୍ଭାବ ହୁଏ ତାହାକୁ **ପୌନଃପୁନିକ ଦଶମିକ ଭଗ୍ନସଂଖ୍ୟା (Recurring Decimals)** କୁହାଯାଏ ।

ଯଥା : $0.3333.... = 0.\bar{3}$, $0.14285714285714... = 0.\overline{142857}$, $0.8333.... = 0.8\bar{3}$ ଇତ୍ୟାଦି ।

ଲକ୍ଷ୍ୟ କର, ପୁନରାବୃତ୍ତି ହେଉଥିବା ଅଙ୍କଗୁଡ଼ିକୁ ଥରେ ମାତ୍ର ଲେଖି ଏହା ଉପରେ ଗୋଟିଏ ଗାର ଦେଇ ପୁନରାବୃତ୍ତିକୁ ସୂଚାଯାଇଛି ।

ମନେରଖ : ପ୍ରତ୍ୟେକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଦୁଇଟି ରୂପରେ ପ୍ରକାଶିତ ହୋଇପାରେ ଯଥା :

ସସୀମ ଦଶମିକ (terminating decimals) ରୂପ ଏବଂ

ଅସୀମ ପୌନଃପୁନିକ ଦଶମିକ (non-terminating and recurring decimals) ରୂପ ।

ଏଥିରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ଜଣାପଡ଼େ ଯେ, **ପ୍ରତ୍ୟେକ ସସୀମ ଦଶମିକ ଭଗ୍ନସଂଖ୍ୟା ଏବଂ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅସୀମ ଅଥଚ ପୌନଃପୁନିକ ଦଶମିକ ଭଗ୍ନ ସଂଖ୍ୟା ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଅଟନ୍ତି ।**

ଉପରୋକ୍ତ ଦୁଇ ଭଗ୍ନ ସଂଖ୍ୟା ରୂପ ଭିନ୍ନ

(iii) 0.101001000100001....., −1.21221222122221... ଇତ୍ୟାଦି

ଦଶମିକ ଭଗ୍ନସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ ଅସୀମ (non-terminating) କିନ୍ତୁ ପୌନଃପୁନିକ ନୁହଁନ୍ତି । ତେଣୁ ଏଗୁଡ଼ିକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ନୁହଁନ୍ତି ।

ବି.ଦ୍ର.: ଯେକୌଣସି ସସୀମ ଦଶମିକ ସଂଖ୍ୟାକୁ ଅସୀମ ଦଶମିକ ଭଗ୍ନସଂଖ୍ୟାରେ ପରିଣତ କରାଯାଇପାରେ ।
ଯଥା: $0.5 = 0.5000....,\quad 0.31 = 0.310000....$ ଇତ୍ୟାଦି ।

ଦଶମିକ ରୂପରୁ ପରିମେୟ ରୂପକୁ ପରିବର୍ତ୍ତନ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ନିମ୍ନ ଉଦାହରଣଗୁଡ଼ିକୁ ଦେଖ ।

ଉଦାହରଣ - 4 : (i) 0.58 (ii) $5.\bar{7}$ (iii) $1.\overline{32}$ (iv) $0.7\overline{12}$ ର ପରିମେୟ ରୂପ ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ : (i) 0.58 ସସୀମ ଦଶମିକ ଭଗ୍ନସଂଖ୍ୟା । $\therefore 0.58 = \frac{58}{100} = \frac{29}{50}$ (ଉତ୍ତର)

(ii), (iii) ଓ (iv) ପ୍ରଶ୍ନରେ ଥିବା ଦଶମିକ ରାଶିଗୁଡ଼ିକ ଅସୀମ ପୌନଃପୁନିକ ଦଶମିକ ଭଗ୍ନସଂଖ୍ୟା ।

(ii) ମନେକର $x = 5.\bar{7} = 5.7777....\quad \Rightarrow 10x = 57.7777....$

ସୁତରାଂ $10x - x = (57.7777.....) - (5.7777.....)$

$\Rightarrow 9x = 52 \Rightarrow x = \frac{52}{9}$ । (ଉତ୍ତର)

(iii) ମନେକର $x = 1.\overline{32} = 1.323232.....$

$\Rightarrow 100x = 132.323232......$

$\therefore\ 100x - x = (132.323232.....) - (1.323232.....)$

$\Rightarrow 99x = 131 \Rightarrow x = \frac{131}{99}$ । (ଉତ୍ତର)

(iv) ମନେକର $x = 0.7\overline{12} = 0.7121212....$

$\Rightarrow 10x = 7.121212......\ \Rightarrow 1000x = 712.121212......$

$\therefore\ 1000x - 10x = (712.121212.....) - (7.121212.....)$

$\Rightarrow 990x = 705 \Rightarrow x = \frac{705}{990} = \frac{141}{198}$ । (ଉତ୍ତର)

($1000x - 100x,\ 100x - 10x$ ବା $100x - x$ ଦ୍ୱାରା 'x' ର ମାନ କାହିଁକି ନିରୂପଣ ନ ହୋଇପାରିବ ନିଜେ ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ)

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ଉପରୋକ୍ତ ଆଲୋଚନାରୁ ଏହା ସୁସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ, ପ୍ରତ୍ୟେକ ସସୀମ ଦଶମକ ଭଗ୍ନସଂଖ୍ୟା ଏବଂ ଅସୀମ ଓ ପୌନଃପୁନିକ ଦଶମିକ ଭଗ୍ନସଂଖ୍ୟାକୁ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ରୂପରେ ପରିଣତ କରିହେବ ।

ଏହାର ବିପରୀତ ଉକ୍ତିଟି ମଧ୍ୟ ସତ୍ୟ । ପ୍ରତ୍ୟେକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାକୁ ସସୀମ ଦଶମିକ ଭଗ୍ନ ସଂଖ୍ୟାରେ ବା ଅସୀମ ଓ ପୌନଃପୁନିକ ଦଶମକ ଭଗ୍ନ ସଂଖ୍ୟାରେ ପ୍ରକାଶ କରିହେବ ।

ଉଦାହରଣ - 5 : ସରଳ କର : $(1.1\bar{9})^2 + 2 \times 1.1\bar{9} \times 1.7\bar{9} + (1.7\bar{9})^2$

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ପରିପ୍ରକାଶରେ $1.1\bar{9} = 1.2,\ 1.7\bar{9} = 1.8$ । (ନିଜେ ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ)

ଦତ୍ତ ପରିପ୍ରକାଶ $= (1.2)^2 + 2 \times 1.2 \times 1.8 + (1.8)^2 = (1.2 + 1.8)^2 = 3^2 = 9$ (ଉତ୍ତର)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 2 (a)

1. ଭୁଲ୍ ଥିଲେ (F) ଓ ଠିକ୍ ଥିଲେ (T) ଲେଖ ।

(i) -1 ଦ୍ୱାରା -201 ବିଭାଜ୍ୟ (ii) 1 ଦ୍ୱାରା 0 ବିଭାଜ୍ୟ (iii) 0 ଦ୍ୱାରା 5 ବିଭାଜ୍ୟ

(iv) ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ପରିମେୟ ନୁହେଁ (v) $-5 < -3$ (vi) $0.\bar{9}$ ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା

(vii) 0 ଏକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା (viii) $-\frac{1}{2}$ ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା

(ix) $a, b \in N$ ହେଲେ $ab \in N$ (x) $a, b \in N$ ହେଲେ $a - b \in N$

(xii) $a, b \in N$ ହେଲେ $a - b \in Z$ (xii) $a, b \in Z$ ହେଲେ $\frac{a}{b} \in Q$

2. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର :

(i) $\frac{1}{2}$ ର ଯୋଗାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ ..... (ii) -7 ର ଗୁଣନାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ ....

(iii) .... ତା' ନିଜର ଯୋଗାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ (iv) .... ତା' ନିଜର ଗୁଣନାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ ।

(v) ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍‌ରେ ଯୋଗାତ୍ମକ ଅଭେଦ ..... (vi) ଯୁଗ୍ମ ଓ ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟାର ଯୋଗଫଳ ...

(vii) .... ଏକମାତ୍ର ଯୁଗ୍ମ ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟା ଅଟେ । (viii) ସର୍ବନିମ୍ନ ଅଯୁଗ୍ମ ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟାଟି ... ଅଟେ ।

(ix) ଗୁଣନ ପ୍ରକ୍ରିୟା .... ପ୍ରକ୍ରିୟାକୁ ବଣ୍ଟନ କରେ ।

(x) ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍‌ରେ ଦୁଇଟି ପରସ୍ପର ଯୋଗାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ ଉପାଦାନକୁ ମିଶାଇଲେ ଫଳ ..... ଅଟେ ।

(xi) $N \cap N^* =$ .... (xii) Z ସେଟ୍‌ରେ -1 ର ଗୁଣନାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ ......

3. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପ୍ରଶ୍ନ ପାଇଁ ପ୍ରଦତ୍ତ ସମ୍ଭାବ୍ୟ ଉତ୍ତରରୁ ଠିକ୍ ଉତ୍ତରଟିକୁ ବାଛ ।

(i) $n, m \in Z$ ହେଲେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଟି ଅସତ୍ୟ ?

(a) $m + n \in Z$, (b) $m - n \in Z$ (c) $m \times n \in Z$ (d) $n \,.\, m \in Z$

(ii) Z ସେଟ୍‌ରେ କେଉଁଟି ସତ୍ୟ ?

(a) ଯୋଗାତ୍ମକ ଅଭେଦ 0 (b) ଯୋଗାତ୍ମକ ଅଭେଦ 1

(c) ଗୁଣନାତ୍ମକ ଅଭେଦ 0 (d) ଯୋଗାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ (-1)

(iii) ନିମ୍ନଲିଖିତ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଟି ସତ୍ୟ ?

(a) ସବୁଠାରୁ କ୍ଷୁଦ୍ରତମ ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟାଟି 3 (b) ଦୁଇଟି ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟାର ଯୋଗଫଳ ଅଯୁଗ୍ମ

(c) ଦୁଇଟି ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟାର ଗୁଣଫଳ ଅଯୁଗ୍ମ (d) ଦୁଇଟି ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟାର ଗୁଣଫଳ ମୌଳିକ

(iv) ନିମ୍ନଲିଖିତ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଟି ସତ୍ୟ ?

(a) $x < y$ ଓ $y < z$ ହେଲେ $x < z$ ।

(b) $x < y$ ଓ $z \in Q$ ହେଲେ $xz < yz$ ।

(c) $x < y$ ଓ $z \in Q$ ହେଲେ $x + z < y + z$ ନ ହୋଇ ପାରେ ।

(d) ଦୁଇଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ମଧ୍ୟରେ ସସୀମ ସଂଖ୍ୟକ ପରିମେୟ ବିଦ୍ୟମାନ ।

(v) ନିମ୍ନଲିଖିତ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଟି ଠିକ୍ ?

(a) $0.9999.......... < 1.0$ (b) $\frac{1}{5}$ ର ଦଶମିକ ପରିପ୍ରକାଶଟି 0.19999.......

(c) $\frac{1}{3}$ ର ଦଶମିକ ପରିପ୍ରକାଶ ଅସରନ୍ତି ନୁହେଁ ।

(d) n ଏକ ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ $\frac{1}{n}$ ର ଦଶମିକ ପରିପ୍ରକାଶ ସର୍ବଦା ପୌନଃପୁନିକ ।

(vi) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}$ ମଧ୍ୟରେ ବୃହତ୍ତମ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା କେଉଁଟି ?

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{3}{5}$ (d) $\frac{4}{7}$

(vii) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}$ ମଧ୍ୟରେ କ୍ଷୁଦ୍ରତମ ସଂଖ୍ୟା କେଉଁଟି ?

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{3}{5}$ (d) $\frac{4}{7}$

(viii) 1 ର ଯୋଗାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ କେଉଁଟି ?

(a) 1 (b) 0 (c) –1 (d) ଏଥିରୁ କୌଣସିଟି ନୁହେଁ

(ix) ନିମ୍ନଲିଖିତ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁ ଉକ୍ତିଟି ଅସତ୍ୟ ?

(a) p ଓ q ମୌଳିକ ହେଲେ ସେମାନଙ୍କର ଗ.ସା.ଗୁ. = 1 ।

(b) p ଓ q ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ $p + q + pq$ ଏକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ।

(c) p ଓ q ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ $p + q$ ମଧ୍ୟ ଏକ ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟା ।

(d) p ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ଓ q ଏକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ pq ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ।

4. ପ୍ରତି ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା ଯୌଗିକ ଅଟେ କି ? କାରଣ ସହ ଉତ୍ତର ଦିଅ ।

5. କେଉଁ କେଉଁ ବୀଜଗାଣିତିକ ଧର୍ମଗୁଡ଼ିକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ Z ରେ ସତ୍ୟ, ମାତ୍ର ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍‌ରେ ସତ୍ୟ ନୁହେଁ ସେଗୁଡ଼ିକ ଲେଖ ।

6. କେଉଁ କେଉଁ ବୀଜଗାଣିତିକ ଧର୍ମଗୁଡ଼ିକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ Q ରେ ସତ୍ୟ, ମାତ୍ର ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍‌ରେ ଅସତ୍ୟ ସେଗୁଡ଼ିକ ଲେଖ ।

7. x ଓ y ଅଯୁଗ୍ମ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, xy ଅଯୁଗ୍ମ ମାତ୍ର x + y ଯୁଗ୍ମ ।

8. ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟାମାନେ ଯୋଗ ଜନିତ ସଂବୃତ୍ତି ନିୟମ ପାଳନ କରନ୍ତି କି ? କାରଣ ସହ ଉତ୍ତର ଦିଅ ।

9. 15 ଅପେକ୍ଷା ବୃହତ୍ତର ଓ 100 ଠାରୁ କ୍ଷୁଦ୍ରତର ଯେଉଁ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ଗୁଡ଼ିକର ସାଧାରଣ ରୂପ $3n^2+2, n \in Z$ ସେଗୁଡ଼ିକ ଲେଖ ।

10. 0.123 123 123 .... ସଂଖ୍ୟାଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ହେବ କି ? କାରଣ ସହ ଉତ୍ତର ଦିଅ ।

11. 0.131ସଂଖ୍ୟାକୁ $\frac{p}{q}$ ପରିମେୟ ରୂପରେ ପ୍ରକାଶ କର ।

12. $\frac{1}{3}$ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାଟିକୁ ଅସରନ୍ତି ପୌନଃପୁନିକ ଦଶମିକ ରୂପେ ଲେଖ ।

13. $\frac{1}{3}$ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାଟିକୁ ଲଘିଷ୍ଠାକୃତି ନ ହୋଇଥିବା $\frac{100}{q_1}, \frac{p_2}{-102}, \frac{6 \times p_3}{q_3}$ ରୂପରେ ପ୍ରକାଶ କର ।

14. $\{\frac{-15}{n}$: n ଏକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ଓ $n \le 15\}$ ସେଟ୍‌ରେ ବୃହତ୍ତମ ଓ କ୍ଷୁଦ୍ରତମ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟ ଲେଖ ।

15. $\frac{1}{4}$ ଓ $\frac{1}{5}$ ମଧ୍ୟରେ 4 ଗୋଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

16. $-\frac{1}{2}$ ଓ $\frac{1}{3}$ ମଧ୍ୟରେ 3 ଗୋଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

17. $\frac{27}{7}$ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାଟିକୁ ଅସରନ୍ତି ପୌନଃପୁନିକ ଦଶମିକ ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କର ।

18. ପ୍ରମାଣ କର ।

(i) $0.\bar{9} = 1$ (ii) $1.2\bar{9} = 1.3$ (iii) $2.34\bar{9} = 2.35$

19. ପରିମେୟ ରୂପରେ ପ୍ରକାଶ କର ।

(i) $0.\bar{1}$ (ii) $0.\overline{11}$ (iii) $0.\overline{89}$ (iv) $0.\overline{37}$ (v) $0.\overline{123}$ (vi) $0.32\bar{1}$
(vii) $-0.5\bar{4}$ viii) $6.8\bar{9}$ (ix) $-0.\overline{12}$ (x) $0.013\overline{05}$

20. ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର (ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା କିମ୍ବା ଭଗ୍ନ ସଂଖ୍ୟା ରୂପରେ) ।

(i) $0.\bar{6}+0.\bar{3}$ (ii) $0.\bar{6}-(0.\bar{3}) \times 2$ (iii) $(0.\bar{6})^2+(0.\bar{3})^2+2\times(0.\bar{6})\times(0.\bar{3})$

(iv) $(0.\bar{6})^2+(0.\bar{3})^2-2\times(0.\bar{6})\times(0.\bar{3})+0.\bar{6}$ (v) $(0.\bar{6})^2-(0.\bar{3})^2$

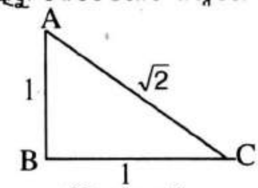
(vi) $(0.\bar{6})^3+(0.\bar{3})^3+3\times(0.\bar{6})\times(0.\bar{3})$

(vii) $(0.\bar{6})^3-(0.\bar{3})^3-3\times(0.\bar{3})(0.\bar{6})\times(0.\bar{6}-0.\bar{3})$

2.5 ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ Q ର ଅଭାବତ୍ୱ (Inadequacy of Rationals) ଏବଂ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା (Irrational numbers) :

ଏକ ଧନାତ୍ମକ ରାଶିର ବର୍ଗମୂଳ ଧନାତ୍ମକ କିମ୍ବା ଋଣାତ୍ମକ ହୋଇପାରେ । ଏଠାରେ ଆମେ କେବଳ ଧନାତ୍ମକ ବର୍ଗମୂଳଟିକୁ ବିଚାର କରୁଛେ । $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$ ଇତ୍ୟାଦି ଆମେ ଜାଣିଛେ । 1, 4, 9, 16,.... ଇତ୍ୟାଦି ବର୍ଗରାଶି (Square number) । ଏହି ବର୍ଗ ରଶିମାନଙ୍କ ପରିବର୍ତ୍ତେ ଆମେ ଯଦି 2, 3, 5,... ଇତ୍ୟାଦି ର ବର୍ଗମୂଳ ନେବା । ଏଗୁଡ଼ିକ ବର୍ଗରାଶି ନ ହୋଇଥିବାରୁ ଏମାନଙ୍କୁ $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ ....ରୂପେ ଲେଖିବା । ଏମାନଙ୍କୁ ମଧ୍ଯ $2^{1/2}$, $3^{1/2}$, $5^{1/2}$ ଭାବେ ଲେଖି ପ୍ରକାଶ କରାଯାଏ । ବର୍ଗମୂଳ ପ୍ରକ୍ରିୟା ସହ ଆମେ ପରିଚିତ । 2 ର ବର୍ଗମୂଳ ନିରୂପଣ କଲେ ଆମେ ଦେଖୁ : $\sqrt{2} = 1.4142135623730950488....$ ସେହିପରି $\sqrt{3} = 1.7320508....$, $\sqrt{5} = 2.236068...$ ଇତ୍ୟାଦି । ବର୍ଗମୂଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟରେ ଦଶମିକ ବିନ୍ଦୁ ପରେ ଯେତେ ଅଧିକ ସ୍ଥାନ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କଲେ ମଧ୍ୟ ଏହି ପ୍ରକ୍ରିୟାର ପରିସମାପ୍ତି ଘଟେ ନାହିଁ । ଅର୍ଥାତ୍ ଦଶମିକ ରାଶିଟି ମଧ୍ୟ କେବେ ହିଁ ପୌନଃପୁନିକ ହେବ ନାହିଁ । ସୁତରାଂ ଏ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ହେବେ ନାହିଁ ।

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $2\sqrt{2}$ ଆଦି ସଂଖ୍ୟା ବିଭିନ୍ନ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଉପୁଜି ଥାଏ । ସେଥିରୁ କେତେଗୋଟି ନିମ୍ନରେ ସୂଚିତ ହେଲା ।



(ଚିତ୍ର 2.2)

(i) ABC ସମକୋଣୀ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜରେ $m\angle B = 90^0$,
$AB = BC = 1$ ଏକକ ହେଲେ, ପିଥାଗୋରସ୍ ଉପପାଦ୍ୟ ଅନୁଯାୟୀ
$AC = \sqrt{2}$ ଏକକ ହେବ । ($\because AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$)

(ii) $x^2 - 3 = 0$ ସମୀକରଣ ର ସମାଧାନ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍‌ରେ ପାଇବା ନାହିଁ । କାରଣ ଏଠାରେ ଆବଶ୍ୟକ ଧନାତ୍ମକ ବର୍ଗମୂଳଟି $\sqrt{3}$ ହେବ ।

ତେଣୁ ବିଭିନ୍ନ ଗାଣିତିକ ପ୍ରଶ୍ନମାନଙ୍କ ସମାଧାନ କରିବା ବେଳେ $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ ଇତ୍ୟାଦି ପରି ସଂଖ୍ୟା ଉପୁଜିବେ । ଯାହା ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ Q ର ଉପାଦାନ ନ ହୋଇ ପାରନ୍ତି । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ : $x^2 - 2 = 0$, $x^2 - 5 = 0$ ଇତ୍ୟାଦିର ସମାଧାନ Q ସେଟ୍‌ରେ ନ ଥାଏ । ତେଣୁ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ Q ର ସଂପ୍ରସାରଣ ଅତ୍ୟନ୍ତ ଆବଶ୍ୟକ।

ବର୍ତ୍ତମାନ $\sqrt{2}$ ସଂଖ୍ୟାଟି ପରିମେୟ ନୁହେଁ ତାହାର ତାର୍କିକ ପ୍ରମାଣ (Logical proof) ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କରିବା ।

$\sqrt{2}$ ସଂଖ୍ୟାଟି ପରିମେୟ ନୁହେଁ ଏହାର ପ୍ରମାଣ ପାଇଁ ନିମ୍ନଲିଖିତ ଧାରଣାଗୁଡ଼ିକ ଆବଶ୍ୟକ।

(i) ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ବ୍ୟାପକ ରୂପ $\frac{p}{q}$ ଯେଉଁଠାରେ p ଓ q ର ସାଧାରଣ ଉତ୍ପାଦକଟି 1 ଓ ଏହା ବ୍ୟତୀତ ଅନ୍ୟ କିଛି ନୁହେଁ। $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$ ଇତ୍ୟାଦି ଲଘିଷ୍ଠାକୃତି ନୁହଁନ୍ତି । ଏମାନଙ୍କର ଲଘିଷ୍ଠାକୃତି ରୂପଟି $\frac{1}{2}$ ।

(ii) ଅନେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଏକ ଉପପାଦ୍ୟର ପ୍ରମାଣ **ବିରୋଧାଭାଷ ପଦ୍ଧତି (Method of contradiction)**ରେ କରାଯାଏ । ଏହି ପଦ୍ଧତିରେ ଆମକୁ ଯଦି ଗୋଟିଏ ଉକ୍ତି ସତ୍ୟ ବୋଲି ପ୍ରମାଣ କରିବାକୁ ଥାଏ, ତେବେ ଆମେ ଉକ୍ତିଟିକୁ ଅସତ୍ୟ ବୋଲି ଗ୍ରହଣ କରି ଅଗ୍ରସର ହେଲେ ଏକ ବିରୋଧାଭାଷ (ଯାହାକି ଗ୍ରହଣୀୟ ନୁହେଁ) ରେ ପହଁଞ୍ଚିବାକୁ ଚେଷ୍ଟା

କରି ଥାଉ । ଏପରି ଅଗ୍ରହଣୀୟ ପରିସ୍ଥିତି ଯଦି ଉପୁଜେ ତେବେ ମୂଳରୁ ସ୍ୱୀକାର କରାଯାଇଥିବା ତଥ୍ୟ, "ଉକ୍ତିଟି ସତ୍ୟ ନୁହେଁ" କୁ ପରିତ୍ୟାଗ କରିବାକୁ ହେବ। ଏଠାରେ ହିଁ ପ୍ରମାଣଟି ସମ୍ପୂର୍ଣ୍ଣ ହୋଇଥାଏ। ଉଚ୍ଚତର ଶ୍ରେଣୀରେ ଏହି ପଦ୍ଧତିରେ ଅନେକ ଉପପାଦ୍ୟର ପ୍ରମାଣ କରିବ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ଗୋଟିଏ ବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟା ଯୁଗ୍ମ କିମ୍ବା ଅଯୁଗ୍ମ ହୋଇପାରେ। 1, 9, 25, ... ବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ ଅଯୁଗ୍ମ ଓ 4, 16, 36 .... ବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟା ଗୁଡ଼ିକ ଯୁଗ୍ମ। ଏହି ସଂଖ୍ୟା ଗୁଡ଼ିକ ଦେଖି ଆମେ କହି ପାରିବା ଯେ "a^2 ଏକ ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ a ମଧ୍ୟ ଯୁଗ୍ମ" ଓ "a^2 ଅଯୁଗ୍ମ ହେଲେ a ଏକ ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା" । ଉକ୍ତ ଉକ୍ତିଗୁଡ଼ିକର ଯୁକ୍ତି ମୂଳକ ପ୍ରମାଣ ଉଚ୍ଚମାଧ୍ୟମିକ ସ୍ତରରେ କରାଯିବ।

ଉପପାଦ୍ୟ-1 : $\sqrt{2}$ ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ନୁହେଁ। (ସୂଚନା : ବିରୋଧାଭାଷ ପଦ୍ଧତିର ପ୍ରୟୋଗରେ ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇଛି ।)

ପ୍ରମାଣ : ମନେକର $\sqrt{2}$ ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ।

$\therefore \sqrt{2} = \frac{p}{q}, (p, q \in Z$ ଓ $q \neq 0)$ ..... (i) (ଯେଉଁଠାରେ p ଏବଂ q ମଧ୍ୟରେ 1 ବ୍ୟତୀତ ଅନ୍ୟ କୌଣସି ସାଧାରଣ ଗୁଣନୀୟକ ନାହିଁ । ଅର୍ଥାତ୍ p ଓ q ପରସ୍ପର ମୌଳିକ ।)

(i) ର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର ବର୍ଗ ନେଲେ $2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2$ ....(ii)

$2q^2$ ଏକ ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା ହୋଇଥିବାରୁ p^2 ମଧ୍ୟ ଏକ ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା।

ସୁତରାଂ p ମଧ୍ୟ ଏକ ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା।

ମନେକର $p = 2n$ .... (iii) (ଯେଉଁଠାରେ n ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା)

(ii) ଓ (iii) ରୁ $2q^2 = (2n)^2 = 4n^2 \Rightarrow q^2 = 2n^2$ ....(iv)

ଅର୍ଥାତ୍ q^2 ଏକ ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା । ତେଣୁ q ଏକ ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା। ଅତଏବ $q = 2m$ .....(v)

(iii) ଓ (v) ଏକତ୍ର ବିଚାର କଲେ ପାଇବା, p ଓ q ପ୍ରତ୍ୟେକେ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା । ଅର୍ଥାତ୍ p ଓ q ମଧ୍ୟରେ 2 ହେଉଛି ଏ ସାଧାରଣ ଗୁଣନୀୟକ । ମାତ୍ର ଏହା ଅସମ୍ଭବ, ଆମେ ପ୍ରଥମରୁ ଧରି ନେଇଛେ p ଓ q ମଧ୍ୟରେ 1 ବ୍ୟତୀତ ଅନ୍ୟ କୌଣସି ସାଧାରଣ ଗୁଣନୀୟକ ନାହିଁ । ତେଣୁ ଆମେ ସ୍ୱୀକାର କରିଥିବା ଉକ୍ତି (i) ଏକ ଅସତ୍ୟ ଉକ୍ତି । ଏହି ବିରୋଧାଭାଷ ହେତୁ ଏହା ସୁସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ "$\sqrt{2}$ ସଂଖ୍ୟାଟି ପରିମେୟ ନୁହେଁ" । (ପ୍ରମାଣିତ)

$\sqrt{2}$ ଇତ୍ୟାଦି ପରି ରାଶିମାନଙ୍କୁ ଆମେ **ଅପରିମେୟ** (irrational) ସଂଖ୍ୟା କହିଥାଉ। ଅନୁରୂପ ଭାବେ ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇ ପାରେ ଯେ $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{11}$ ଇତ୍ୟାଦି **ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ ଅପରିମେୟ** ।

ମନେରଖ ଯେ, **p** ମୌଳିକ ହେଲେ $\sqrt{p}$ ଅପରିମେୟ ହେବ ।

2.6 ଅସୀମ ଓ ଅଣପୌନଃପୁନିକ ଦଶମିକ ରାଶି (Non-terminating and non-recurring decimals) :

ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ, ପ୍ରତ୍ୟେକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାକୁ ଏକ **ସସୀମ** ଦଶମିକ ଭଗ୍ନସଂଖ୍ୟାରେ ବା ଅସୀମ ଓ ପୌନଃପୁନିକ ଦଶମିକ ଭଗ୍ନସଂଖ୍ୟାରେ ପ୍ରକାଶ କରିହେବ । କିନ୍ତୁ **ଅପରିମେୟ** ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକର ଦଶମିକ ରୂପ (ଅନୁଚ୍ଛେଦ 2.5ରେ $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ଓ $\sqrt{5}$ ର ଦଶମିକ ରୂପକୁ ଅନୁଧ୍ୟାନ କର) ଅସୀମ ହେବ ଏବଂ ଅଣ-ପୌନଃପୁନିକ ହେବ ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ : 0.202002000200002000002....,

-1.1181111811111811111181111111118.......,

7.121122111222111122221111122222...... ଇତ୍ୟାଦି ଅପରିମେୟ

କେବଳ ବର୍ଗମୂଳ ଜରିଆରେ (ଯଥା : $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ଓ $\sqrt{5}$ ଇତ୍ୟାଦି) ଯେ, ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଉତ୍ପନ୍ନ ହୁଏ ତାହା ନୁହେଁ । ସମୀକରଣ $x^3 = 2, x^4 = 2$... ଇତ୍ୟାଦି ସମୀକରଣକୁ ସମାଧାନ କରି $\sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{2}$ ...ଇତ୍ୟାଦି ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ପାଇପାରିବା । n-ତମ ମୂଳ ନେଇ ଉତ୍ପନ୍ନ ସଂଖ୍ୟା ବିଷୟରେ ଉଚ୍ଚତର ଶ୍ରେଣୀରେ ପଢ଼ିବ ।

ମନେରଖ : ବାସ୍ତବିକ ଯେତେ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଅଛି ତା'ଠାରୁ ଯଥେଷ୍ଟ ଅଧିକ ସଂଖ୍ୟାର ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ରହିଛି ।

ଉଦାହରଣ - 6 : ଦର୍ଶାଅ ଯେ, (i) $3 + \sqrt{2}$ (ii) $3\sqrt{2}$ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟ ଅପରିମେୟ ।

ସମାଧାନ : (i) ମନେକର $3 + \sqrt{2}$ ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ।

ସୁତରାଂ $3 + \sqrt{2} = \frac{p}{q}$, ଯେଉଁଠାରେ $p, q \in Z$ ଓ $q \neq 0$

$\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{p}{q} - 3 = \frac{p-3q}{q} \in Z$ କାରଣ $p - 3q \in Z$ ଏବଂ $q \in Z$ ଯେଉଁଠାରେ $q \neq 0$ ।

ସୁତରାଂ $\sqrt{2}$ ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଓ ଏହା ଉପପାଦ୍ୟ –1 ର ଏକ ବିରୋଧାଭାଷ । ଅତଏବ ଆମେ ଗ୍ରହଣ କରିଥିବା ତଥ୍ୟ $3 + \sqrt{2}$ ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଗ୍ରହଣୀୟ ନୁହେଁ । ଅର୍ଥାତ୍ $3 + \sqrt{2}$ ଏକ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ।

(ii) $3\sqrt{2}$ ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ହେଉ । ତେଣୁ $3\sqrt{2} = \frac{p}{q}$; $p, q \in Z$ ଓ $q \neq 0$

$\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{p}{3q}$ ଓ ଏଠାରେ $p, 3q \in Z$ ଓ $3q \neq 0$ ହେତୁ $\frac{p}{3q} \in Z$

ସୁତରାଂ $\sqrt{2}$ ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା । ମାତ୍ର ଏହା ଗ୍ରହଣୀୟ ନୁହେଁ । ତେଣୁ $3\sqrt{2}$ ମଧ୍ୟ ଏକ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ।

2.7 ଅପରିମେୟ ରାଶି π (Irrational number π) :

π ସଂଖ୍ୟା ସହ ତୁମେମାନେ ଜ୍ୟାମିତିରେ ପରିଚିତ । π ରାଶିଟି ବୃତ୍ତ ସହ ଓତପ୍ରୋତ ଭାବେ ସମ୍ପର୍କିତ । ଏହାର ସଂଜ୍ଞା ହେଲା : **ଯେକୌଣସି ବୃତ୍ତରେ ପରିଧି ଓ ବ୍ୟାସର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଅନୁପାତ ଏକ ଧ୍ରୁବକ ସଂଖ୍ୟା (Constant); ଯାହାକୁ π ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଇଥାଏ ।** ଅର୍ଥାତ୍ ଯେକୌଣସି ବୃତ୍ତରେ $\frac{\text{ବୃତ୍ତର ପରିଧି}}{\text{ବ୍ୟାସର ଦୈର୍ଘ୍ୟ}} = \pi$ ।

1761 ମସିହାରେ ଗଣିତଜ୍ଞ Lambert ଯୁକ୍ତି ମୂଳକ ପ୍ରମାଣ କରି ଦର୍ଶାଇ ଥିଲେ ଯେ "π ଏକ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା" । ଗ୍ରୀକ୍ ଦାର୍ଶନିକ ଆର୍କିମେଡ଼ିସ୍ (ଖ୍ରୀ.ପୂ. 287-212) ଏହାର ଆସନ୍ନମାନ $\frac{22}{7}$ ବୋଲି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିଥିଲେ । ମନେରଖ ଯେ $\pi \neq \frac{22}{7}$ ମାତ୍ର $\pi \approx \frac{22}{7}$ (ଅର୍ଥାତ୍ $\frac{22}{7}$ ଦଶମିକରେ ଲେଖିଲେ ଲବ୍ଧ ମୂଲ୍ୟ π ର କେବଳ ଦଶମିକ ଦୁଇ ସ୍ଥାନ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଠିକ୍ ଓ $\frac{22}{7}$, π ର ଏକ ପାଖାପାଖି (ଆସନ୍ନ) ମୂଲ୍ୟ) । ବିଭିନ୍ନ କ୍ଷେତ୍ରରେ π ର ଆସନ୍ନ ମାନ $\frac{22}{7}$

ବ୍ୟବହୃତ ହୋଇ ଗାଣିତିକ ହିସାବ ଏବେ ମଧ୍ୟ ଆମେ କରୁଛୁ। ମାତ୍ର $\pi = \frac{22}{7}$ ଲେଖିବା ତ୍ରୁଟିପୂର୍ଣ୍ଣ।

ବିଭିନ୍ନ ସଭ୍ୟତା ଓ ବିଭିନ୍ନ ସମୟରେ π ର ବିଭିନ୍ନ ଆସନ୍ନମାନର ତାଲିକା ନିମ୍ନରେ ଦିଆଗଲା।

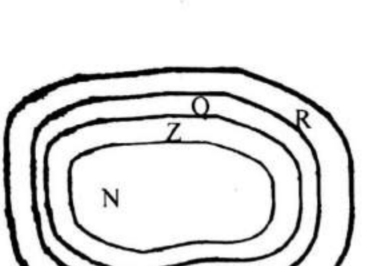
ଗଣିତଜ୍ଞ / ସଭ୍ୟତା	ସମୟ	πର ମାନ
ବେଦ	ସମ୍ଭବତଃ ଖ୍ରୀ.ପୂ. 3000	$\sqrt{10}$
ବେବିଲୋନୀୟ ସଭ୍ୟତା	ସମ୍ଭବତଃଖ୍ରୀ.ପୂ. 3000	$\frac{25}{8}$
ଆର୍କିମେଡ଼ିସ୍	ଖ୍ରୀ.ପୂ. 287-212	$\frac{22}{7}$
ଟଲେମି	ଖ୍ରୀଷ୍ଟାବ୍ଦ 150	3.1416
ଚୁଙ୍ଗ ଚି (ଚୀନ୍)	ଖ୍ରୀଷ୍ଟାବ୍ଦ 480	$\frac{335}{133}$
ଆର୍ଯ୍ୟଭଟ୍ଟ	ଖ୍ରୀଷ୍ଟାବ୍ଦ 530	$\frac{62832}{20000}$
ଭାସ୍କରାଚାର୍ଯ୍ୟ	ଖ୍ରୀଷ୍ଟାବ୍ଦ 1150	$\frac{3927}{1250}$
ରାମାନୁଜନ୍	ଖ୍ରୀଷ୍ଟାବ୍ଦ 1887 - 1919	$\frac{9801}{1103 \times \sqrt{8}}$

ଭାରତ ର ସୁପ୍ରସିଦ୍ଧ ଗଣିତଜ୍ଞ ଶ୍ରୀନିବାସ ରାମାନୁଜନ୍‌ଙ୍କ ପ୍ରଦତ୍ତ ଏକ ସୂତ୍ରର ବ୍ୟବହାର କରି କମ୍ପ୍ୟୁଟର ସହାୟତାରେ π ର ମୂଲ୍ୟ ଦଶମିକ ଚିହ୍ନ ପରେ ସତର ନିୟୁତ ସ୍ଥାନ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ନିରୂପିତ ହୋଇଛି। ଏ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ନିରୂପିତ π ର ମୂଲ୍ୟମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ଏହା ସର୍ବାଧିକ ସଠିକ ମାନ ଅଟେ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ଏଠାରେ ଉଲ୍ଲେଖ ଯୋଗ୍ୟ ଯେ π ପରି ଅନ୍ୟ ଏକ ସଂଖ୍ୟା e ଯାହାର ମୂଲ୍ୟ 2 ରୁ ଅଧିକ ଓ 3 ରୁ କମ୍। ଉକ୍ତ ସଂଖ୍ୟାଟି $1 + 1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \ldots..$ ଏକ ସୀମାହୀନ ସମଷ୍ଟି। π,e, ଇତ୍ୟାଦି ପରି ଅଂସଖ୍ୟ ଅପରିମେୟ ରାଶିର ଗଣିତରେ ବ୍ୟବହାର ଉଚ୍ଚତର ଶ୍ରେଣୀ କୁ ଗଲେ ଦେଖିବାକୁ ପାଇବ ।

2.8 ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା (Real Numbers) :

ସମସ୍ତ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ମାନଙ୍କ ସେଟ୍‌କୁ Q' ସଂକେତ ଦ୍ୱାରା ଲେଖାଯାଏ । ସମସ୍ତ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ Q ଓ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ Q' ର ସଂଯୋଗରୁ ଯେଉଁ ନୂତନ ସେଟ୍ ମିଳେ ତାହାକୁ **ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା (Real number)** ସେଟ୍ କୁହାଯାଏ ଓ ଏହି ସେଟ୍‌ର ସଂକେତ R । ଅତଏବ $\mathbf{Q \cup Q' = R}$ । ଏଠାରେ Q ଏବଂ Q' , R ସେଟ୍‌ର ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଉପସେଟ୍ ଅଟନ୍ତି । ମନେରଖ ଯେ, $\mathbf{Q \cap Q'} = \phi$



(ଚିତ୍ର 2.3)

ଆଲୋଚନାରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ ଯେକୌଣସି ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା x ଏକ ପରିମେୟ କିମ୍ବା ଏକ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ହୋଇପାରେ। ସମ୍ପ୍ରସାରଣ ପ୍ରକ୍ରିୟାରୁ ଆମେ ଦେଖୁଛେ ଯେ, $N \subset Z \subset Q \subset R$ ।

ଭେନ୍ ଚିତ୍ର 2.3 ମାଧ୍ୟମରେ ବିଭିନ୍ନ ସେଟ୍‌ଗୁଡ଼ିକୁ ଦର୍ଶାଯାଇଛି ।

2.8.1 ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କ ବୀଜ ଗାଣିତିକ ଧର୍ମ (Algebraic Properties in Reals) :

ପୂର୍ବ ଅନୁଚ୍ଛେଦଗୁଡ଼ିକରେ ପରିମେୟ ଓ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ଧର୍ମଗୁଡ଼ିକୁ ଆଲୋଚନା କରିଛେ । ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ କେତେକ ନିୟମ ପାଳନ କରନ୍ତି ଯାହା ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ପାଇଁ ସତ୍ୟ ନ ହୋଇପାରେ । ଆମେ ଏଠାରେ କେତେକ ବୀଜଗାଣିତିକ ଧର୍ମର ଅବତାରଣା କରିବା, ଯାହା କି ସମସ୍ତ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ (R) ପାଇଁ ସତ୍ୟ ଅଟେ । ଏଗୁଡ଼ିକର ପ୍ରମାଣ ଏ ପୁସ୍ତକର ପରିସରଭୁକ୍ତ ନ ହୋଇଥିବାରୁ ଆମେ ସେଗୁଡ଼ିକୁ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ରୂପେ ଗ୍ରହଣ କରିବା । $x, y, z \in R$

ଯୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟାର ଧର୍ମ :-

(i) ***ସଂବୃତ୍ତି ଧର୍ମ :*** $x + y \in R$

(ii) ***କ୍ରମବିନିମୟୀ ଧର୍ମ :*** $x + y = y + x$

(iii) ***ସହଯୋଗୀ ଧର୍ମ :*** $x + (y + z) = (x + y) + z$

(iv) ***ଅଭେଦ ଧର୍ମ :*** $x + 0 = x$; 0 (ଶୂନ R ସେଟ୍ ରେ ଯୋଗାତ୍ମକ ଅଭେଦ ଅଟେ ।)

(v) ***ବିଲୋମୀ ଧର୍ମ :*** ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା x ର ଯୋଗାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ (–x) ଓ $x + (-x) = 0$

(x ମଧ୍ୟ (–x) ର ଯୋଗାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ ।)

ଗୁଣନ ପ୍ରକ୍ରିୟାର ଧର୍ମ :

(vi) ***ସଂବୃତ୍ତି ଧର୍ମ :*** $xy \in R$

(vii) ***କ୍ରମବିନିମୟୀ ଧର୍ମ :*** $xy = yx$

(viii) ***ସହଯୋଗୀ ଧର୍ମ :*** $x(yz) = (xy)z$

(ix) ***ଅଭେଦ ଧର୍ମ :*** $x \times 1 = x$; (1 (ଏକ) ସଂଖ୍ୟାଟି ଗୁଣନାତ୍ମକ ଅଭେଦ ।)

(x) ***ବିଲୋମୀ ଧର୍ମ :*** ପ୍ରତ୍ୟେକ $x \neq 0$ ପାଇଁ ଏକ ଅନନ୍ୟ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା $\frac{1}{x}$ ବା x^{-1} ରହିଛି,

ଯେପରିକି $x \,.\, x^{-1} = 1$

($\frac{1}{x}$ ବା x^{-1} କୁ x ର ଗୁଣନାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ କୁହାଯାଏ) । x, x^{-1} ର ମଧ୍ୟ ଗୁଣନାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ ଅଟେ ।

ଯୋଗ ଓ ଗୁଣନ ପ୍ରକ୍ରିୟା ଦ୍ୱୟର ଧର୍ମ :

(xi) ***ବଣ୍ଟନ ନିୟମ :*** $x(y+z) = xy + xz$ (ଗୁଣନ ପ୍ରକ୍ରିୟାଟି ଯୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟା ଉପରେ ବାଣ୍ଟି ହେବ)

ନିମ୍ନରେ ସୂଚିତ ଉକ୍ତିଗୁଡ଼ିକ ପ୍ରଣିଧାନ ଯୋଗ୍ୟ ।

(i) ଦୁଇଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା x ଓ y ର ଯୋଗଫଳ ତଥା ଗୁଣନ ଫଳ ପରିମେୟ (Q ସେଟ୍‌ରେ ସଂବୃତ୍ତି ନିୟମ) ।

$x, y \in Q$ ହେଲେ, $x + y \in Q$ ଏବଂ $xy \in Q$

(ii) ଦୁଇଟି ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା x ଓ y ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିଏ ପରିମେୟ ଓ ଅନ୍ୟଟି ଅପରିମେୟ ହେଲେ ଯୋଗଫଳ x+y ଅପରିମେୟ ଓ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାଟି ଅଣଶୂନ୍ୟ ହେଲେ ଗୁଣଫଳ ମଧ୍ୟ ଅପରିମେୟ । ମାତ୍ର ଗୁଣଫଳ = 0 ହେବ ଯଦି ପରିମେୟ ରାଶିଟି ଶୂନ । ଏଠାରେ ପ୍ରମାଣ କରିବାକୁ ହେବ : **x x 0 = 0 (Zero Law)**

ପ୍ରମାଣ : $0 + 0 = 0$ (ଅଭେଦ ନିୟମ)

$\Rightarrow x(0+0) = x.0$ (ସମାନତା ଧର୍ମ)

$\Rightarrow x.0 + x.0 = x.0$ (ବଣ୍ଟନ ନିୟମ)

କିନ୍ତୁ $x.0 + x.0 - (x.0) = x.0 - (x.0)$ (ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ $-(x.0)$ ଯୋଗ କରି)

$\Rightarrow x.0 + \{-(x.0) + x.0\} = \{-(x.0) + x.0\}$ (ସହଯୋଗୀ ନିୟମ)

$\Rightarrow x.0 + 0 = 0$ (ବିଲୋମୀ ନିୟମ)

$\Rightarrow x.0 = 0$ (ଅଭେଦ ନିୟମ) (ପ୍ରମାଣିତ)

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ଯେକୌଣସି ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା x ସହ 0 କୁ ଗଣନ କଲେ ଗୁଣଫଳ 0 ।

(iii) x ଓ y ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟ ଉଭୟେ ଅପରିମେୟ ହେଲେ ଯୋଗଫଳ $x + y$ କିମ୍ବା ଗୁଣଫଳ xy ପରିମେୟ କିମ୍ବା ଅପରିମେୟ ହୋଇପାରନ୍ତି । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ

$x = \sqrt{2}, y = 3$ ହେଲେ $x + y = \sqrt{2} + 3$ ଓ ଯାହା ଅପରିମେୟ;

$x = 1 + \sqrt{2}, y = 1 - \sqrt{2}$ ହେଲେ, $x + y = 2$ ଯାହା ପରିମେୟ;

$x = \sqrt{2}, y = \sqrt{3}$ ହେଲେ $xy = \sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$ ଯାହା ଅପରିମେୟ;

(ନିଜେ ପ୍ରମାଣ କରି ଦେଖ)

$x = 1 - \sqrt{2}, y = 1 + \sqrt{2}$ ହେଲେ $xy = (1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) = 1 - 2 = -1$ ଯାହା ପରିମେୟ । ଏହି ଆଲୋଚନା ରୁ ଆମେ ଦେଖୁଛେ ଯେ **Q' ସେଟ୍‌ରେ ଯୋଗ ଓ ଗୁଣନ ପ୍ରକ୍ରିୟା ସଂବୃତ୍ତି ଧର୍ମକୁ ପାଳନ କରନ୍ତି ନାହିଁ ।**

$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}, \sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}, \sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$ .... ଇତ୍ୟାଦି ଅପରିମେୟ ।

$\sqrt{4} = 4^{\frac{1}{2}} = 2$ ଓ ଏହା ପରିମେୟ । a^n ରେ a କୁ ଆଧାର (base) ଓ n କୁ ଘାତ (index) କୁହାଯାଏ । ସେହିପରି ନିମ୍ନଲିଖିତ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଆଧାର ଓ ଘାତ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

$2^{\frac{1}{3}}, 3^{\frac{1}{3}}, 4^{\frac{1}{3}}, 5^{\frac{1}{3}}, 6^{\frac{1}{3}}, 7^{\frac{1}{3}}, 9^{\frac{1}{3}}$ ..... ଇତ୍ୟାଦି ($8^{1/3} = 2, = 27^{1/3} = 3$ ଇତ୍ୟାଦିକୁ ଛାଡ଼ି)

$2^{\frac{1}{4}}, 3^{\frac{1}{4}}, 4^{\frac{1}{4}}, 5^{\frac{1}{4}}, 6^{\frac{1}{4}}, 7^{\frac{1}{4}}, 8^{\frac{1}{4}}$ .... ଇତ୍ୟାଦି ($16^{1/4} = 2, 81^{1/4} = 3$ ଇତ୍ୟାଦିକୁ ଛାଡ଼ି)

. . .   .

. . .   .

ସୁତରାଂ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ମାନଙ୍କ ସଂଖ୍ୟା ଅସୀମ। ଆମେ N ସେଟ୍‌ର Z ସେଟ୍‌ର, ଓ Q ସେଟ୍‌ର ଉପାଦାନମାନଙ୍କୁ ଗୋଟି ଗୋଟି କରି ତାଲିକା କରି ଲେଖିବା ସମ୍ଭବ। ମାତ୍ର Q' ସେଟ୍‌ରେ ଏପରି ତାଲିକା କରି ଲେଖିବା ଅସମ୍ଭବ। ଯଦି ଏପରି ତାଲିକା କରିବା ତେବେ ଦୁଇଟି ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ମଧ୍ୟରେ ଅସଂଖ୍ୟ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଅପସାରିତ ହୋଇ ତାଲିକା ଭୁକ୍ତ ହୋଇ ପାରିବେ ନାହିଁ। ଯେହେତୁ R ସେଟ୍‌ରେ Q' ସେଟ୍ ର ସମସ୍ତ ଉପାଦାନ ଅଛନ୍ତି, ତେଣୁ ଆମେ କହି ପାରିବା ଯେ R ସେଟ୍‌ର ସମସ୍ତ ଉପାଦାନମାନଙ୍କ ତାଲିକା କରି ହେବ ନାହିଁ।

2.8.2 R ସେଟ୍‌ରେ ଯୋଗ ଓ ଗୁଣନ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ କିଛି ଅଧିକ ତଥ୍ୟ :

R ସେଟ୍ ରେ ଯୋଗ ଓ ଗୁଣନ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଥିବା ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟମାନଙ୍କୁ ପ୍ରୟୋଗ କରି ନିମ୍ନଲିଖିତ ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ ମାନଙ୍କ ସତ୍ୟତା ଜାଣିହୁଏ। ପ୍ରଶ୍ନମାନଙ୍କର ସମାଧାନ କଲାବେଳେ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟଗୁଡ଼ିକର ମଧ୍ୟ ବ୍ୟବହାର କରାଯାଇଥାଏ। ସେହି ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତଗୁଡ଼ିକ ନିମ୍ନରେ ଆଲୋଚିତ ହୋଇଛି। ଏଠାରେ x,y,z ପ୍ରତ୍ୟେକେ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 1 : $x + y = x + z$ ହେଲେ, $y = z$ ଓ $y+ x = z + x$ ହେଲେ $y = z$

ପ୍ରମାଣ : $x + y = x + z \Rightarrow (-x) + (x + y) = (-x) + (x + z)$

$\Rightarrow (-x + x) + y = (-x + x) + z$

$\Rightarrow 0 + y = 0 + z \Rightarrow y = z$ ।

ସେହିପରି $y + x = z + x \Rightarrow y = z$ ର ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇ ପାରିବ।

ଏ ଦୁଇଟି କୁ ଯୋଗ ର **ବିଲୋପନ ନିୟମ (Cancellation law of addition)** କୁହାଯାଏ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 2 : $x \neq 0$ ଏବଂ $xy = xz$ ହେଲେ, $y = z$ ଓ $yx = zx$ ହେଲେ, $y = z$

ପ୍ରମାଣ : $x \neq 0$ ହେଲେ ଏହାର ଗୁଣନାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ x^{-1} । ଅତଏବ

$xy = xz \Rightarrow x^{-1}(xy) = x^{-1}(xz)$

$\Rightarrow (x^{-1}x)y = (x^{-1}x)z$

$\Rightarrow 1.y = 1.z \Rightarrow y = z$; ସେହି ପରି ଅନ୍ୟଟିର ମଧ୍ୟ ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇ ପାରେ, $yx = zx$ ହେଲେ, $y = z$

ଏହି ଦୁଇଗୋଟିକୁ **ଗୁଣନ ର ବିଲୋପନ ନିୟମ (Cancellation law of multiplication)** କୁହାଯାଏ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 3 : (i) $x \times 0 = 0$ (ii) $-(-x) = x$ (iii) $x \neq 0$ ହେଲେ $(x^{-1})^{-1} = x$

ପ୍ରମାଣ : (i) $0 = 0 + 0$ (ଅଭେଦ ନିୟମ)

$\Rightarrow x \times 0 = x(0+0) \Rightarrow x \times 0 = x \times 0 + x \times 0$ (ବଣ୍ଟନ ନିୟମ)

$\Rightarrow 0 = x \times 0$ (ଯୋଗର ବିଲୋପନ ନିୟମର ପ୍ରୟୋଗ)

$\Rightarrow x \times 0 = 0$ (ପ୍ରମାଣିତ)

(ii) $x \in R$ ହେଲେ $-x \in R$ ଓ $-x$ ର ଯୋଗାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ $-(-x) \Rightarrow -(-x) + (-x) = 0$

$\Rightarrow -(-x) + (-x) = x + (-x)$ $[\because x + (-x) = 0]$

$\Rightarrow -(-x) = x$ (ଯୋଗର ବିଲୋପନ ନିୟମ) (ପ୍ରମାଣିତ)

(iii) $x(x \neq 0)$ ର ଗୁଣନାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ x^{-1}, x^{-1} ର ଗୁଣନାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ $(x^{-1})^{-1}$ ।

କୌଣସି ଏକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା a ପାଇଁ $a \times a^{-1} = 1$ ଯେଉଁଠାରେ $a \neq 0$ ।

a ସ୍ଥାନରେ x^{-1} ସ୍ଥାପନ କଲେ ପାଇବା $(x^{-1}) . (x^{-1})^{-1} = 1$

କିନ୍ତୁ $x . x^{-1} = 1 \quad \therefore (x^{-1}) . (x^{-1})^{-1} = x . x^{-1}$

$\Rightarrow (x^{-1})^{-1} = x$ (ଗୁଣନର ବିଲୋପନ ନିୟମ) (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 4 : (i) $x(-y) = (-x)y = -(xy)$

(ii) $(-x)(-y) = xy$

ପ୍ରମାଣ : (i) $xy + x(-y) = x\{y+(-y)\} = x \times 0 = 0;$

ପୁନଶ୍ଚ $xy + \{-(xy)\} = 0$ ।

$\therefore xy + x(-y) = xy + \{-(xy)\} \Rightarrow x(-y) = -xy$ (ଯୋଗର ବିଲୋପନ ନିୟମ)

ସେହିପରି ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇପାରେ ଯେ, $(-x)y = -(xy)$ (ପ୍ରମାଣିତ)

(ii) $x(-y) = -(xy)$ (i) ରେ ପ୍ରମାଣିତ

x ପରିବର୍ତ୍ତେ $-x$ ଲେଖିଲେ ପାଇବା :

$\Rightarrow (-x)(-y) = -\{(-x) .y\}$

$\Rightarrow (-x)(-y) = -\{(-xy)\}$ $[\because (-x) . y = -(xy)]$ (i) ରୁ ପ୍ରମାଣିତ

$\Rightarrow (-x)(-y) = xy$ $[\because -(-x) = x]$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ପ୍ରତ୍ୟେକ ବୀଜଗାଣିତିକ ଅଭେଦରେ ବ୍ୟବହୃତ ରାଶିଗୁଡ଼ିକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ, ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାର ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟଗୁଡ଼ିକୁ ବ୍ୟବହାର କରି ଅଭେଦ ଗୁଡ଼ିକୁ ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇ ପାରିବ । ଦତ୍ତ ଉଦାହରଣକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ।

ପ୍ରମାଣ କର : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (a, b \in R)$

ବାମପାର୍ଶ୍ୱ $= (a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a(a+b) + b(a+b)$ (ବଣ୍ଟନ ନିୟମ)

$= a . a + a . b + b . a + b . b = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + ab + ab + b^2 (\because ab = ba)$

$= a^2 + 2ab + b^2 =$ ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱ (ପ୍ରମାଣିତ)

2.9 ସଂଖ୍ୟାରେଖା (Number Line) :

ପୂର୍ବ ଅନୁଚ୍ଛେଦ 2.8 ରେ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଛି ଯେ, ପରିମେୟ ଓ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଗୁଡ଼ିକର ସେଟ୍ ଦୁଇଟିର ସଂଯୋଗ (Union) ବାସ୍ତବସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ ଅଟେ । ଏହି ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଗୁଡ଼ିକର ଜ୍ୟାମିତିକ ପରିପ୍ରକାଶ କିପରି କରାଯାଏ, ତାହା ଏଠାରେ ଆଲୋଚନା କରିବା । ଇଉକ୍ଲିଡୀୟ ଜ୍ୟାମିତିର କ୍ରମ ବିକାଶ ଘଟିଛି । ବର୍ତ୍ତମାନ ଜ୍ୟାମିତି କେବଳ ବିନ୍ଦୁ, ରେଖା, କ୍ଷେତ୍ର ବା ଆୟତନର ବିଷୟବସ୍ତୁ ହୋଇ ରହିନାହିଁ । ବୀଜଗାଣିତିକ ରାଶି ଓ ଜ୍ୟାମିତ ସହସଂପର୍କକୁ ନେଇ ବିଶ୍ଳେଷଣାତ୍ମକ ଜ୍ୟାମିତି (analytical geometry)ର ଉଦ୍ଭବ । ଯେ କୌଣସି ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାକୁ ଏକ ସରଳରେଖାର ଏକ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଇପାରିବ । ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାକୁ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରି ସେ ଗୁଡ଼ିକୁ ଛାଡି ଦେଲେ ଗୋଟିଏ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ସରଳରେଖା ସୃଷ୍ଟି ହେବ । ଏହା ବିଖ୍ୟାତ

ଗାଣିତିକ ଡେଡେକିଣ୍ଡ (Dedekind) ଓ କାଣ୍ଟର (Cantor)ର ଙ୍କ ଅବଦାନ ଓ ଏହା ବିଶ୍ଳେଷଣାତ୍ମକ ଜ୍ୟାମିତିର ଅୟମାରମ୍ଭ । ଅର୍ଥାତ୍ ଯେ କୌଣସି ଜ୍ୟାମିତିକ ବିଷୟବସ୍ତୁକୁ ଆମେ ବୀଜଗଣିତ ସାହାଯ୍ୟରେ ସମାଧାନ କରିପାରିବା । ସେ ସବୁ ତୁମେ ପରବର୍ତ୍ତୀ ଅଧ୍ୟାୟରେ ଅଧ୍ୟୟନ କରିବ ।

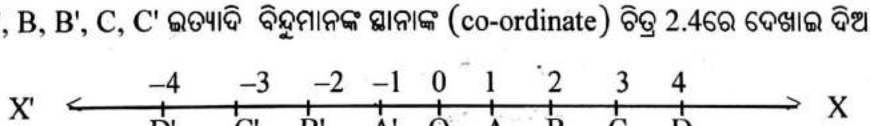
2.9.1 ସଂଖ୍ୟାରେଖାରେ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ସ୍ଥାପନ (Representation of real numbers on the number line) :

ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକର ଜ୍ୟାମିତିକ ପରିପ୍ରକାଶ କରିବାକୁ ହେଲେ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁକୁ O ନିଆଯାଉ । ଏହି ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ $\overleftrightarrow{X'OX}$ ସରଳରେଖା ଅଙ୍କନ କର । O ବିନ୍ଦୁକୁ ମୂଳବିନ୍ଦୁ (Origin) ଓ $\overleftrightarrow{X'X}$ ରେଖାକୁ ସଂଖ୍ୟାରେଖା (Number Line) ବା ବାସ୍ତବ ଅକ୍ଷ (Real axis) କୁହାଯାଏ । O ର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱ $\overrightarrow{OX}$ କୁ ଧନାତ୍ମକ ଦିଗ (positive side) ଓ ଏହାର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱ $\overrightarrow{OX'}$ କୁ ଋଣାତ୍ମକ ଦିଗ (Negative side) କୁହାଯାଏ ।

(a) ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ସ୍ଥାପନ

କୌଣସି ଏକ ରେଖାଖଣ୍ଡ ନେଇ ତାହାର ଦୈର୍ଘ୍ୟକୁ ଏକ ଏକକ ବୋଲି ନିଆଯାଉ । O ବିନ୍ଦୁର ସୂଚକ ସଂଖ୍ୟା (0) ଶୂନ ହେଉ । ଦତ୍ତ ଏକକ ସହ ସମାନ କରି 0 ବିନ୍ଦୁରୁ $\overrightarrow{OX}$ ଦିଗରେ OA ଛେଦ କରାଯାଉ । ଅର୍ଥାତ୍ OA ଏକ ଏକକ ପ୍ରାପ୍ତ A ବିନ୍ଦୁର ସୂଚକ ସଂଖ୍ୟା 1 ହେଲା । ସେହିପରି ବିପରୀତ ଦିଗ $\overrightarrow{OX'}$ ରୁ ଏକ ଏକକ ସହ ସମାନ କରି OA′ ଛେଦ କଲେ, A′ ବିନ୍ଦୁର ସୂଚକ ସଂଖ୍ୟା –1 ହେବ ।

ସେହିପରି $\overrightarrow{OX}$ ରେଖା ଉପରେ A ଠାରୁ ଏକକ ଦୂରରେ B ବିନ୍ଦୁ, B ଠାରୁ ଏକକ ଦୂରରେ C ବିନ୍ଦୁ, C ଠାରୁ ଏକକ ଦୂରରେ D ବିନ୍ଦୁ - ଏହିପରି ପ୍ରତି ଏକକ ଦୂରରେ ବିନ୍ଦୁମାନ ସ୍ଥାପନ କରାଯାଏ । ଏହି ବିନ୍ଦୁ ମାନଙ୍କର ସୂଚକ ସଂଖ୍ୟା ଯଥାକ୍ରମେ 2, 3, 4 ଇତ୍ୟାଦି ହେବ । ସେହିପରି $\overrightarrow{OX'}$ ଦିଗରେ B', C', D' ଇତ୍ୟାଦି ବିନ୍ଦୁ ନେଲେ, ଏହି ବିନ୍ଦୁ ମାନଙ୍କର ସୂଚକ ସଂଖ୍ୟା ଯଥାକ୍ରମେ –2, –3,–4 ଇତ୍ୟାଦି ହେବ । ଏହିପରି ଭାବରେ $\overleftrightarrow{X'X}$ ରେଖା ଉପରେ ସମସ୍ତ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କୁ ସ୍ଥାପନ କରିପାରିବା । $\overleftrightarrow{X'X}$ ରେଖା ଉପରେ ଯଥାକ୍ରମେ O, A, A', B, B', C, C' ଇତ୍ୟାଦି ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କ ସ୍ଥାନାଙ୍କ (co-ordinate) ଚିତ୍ର 2.4ରେ ଦେଖାଇ ଦିଆଯାଇଛି ।



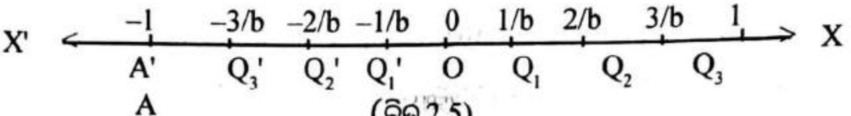
(ଚିତ୍ର 2.4)

(b) ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ସ୍ଥାପନ :

ସଂଖ୍ୟାରେଖା $\overleftrightarrow{X'X}$ ରେ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ ଉପସ୍ଥାପନ ହେବାପରେ ସରଳରେଖା ଉପରେ ଆହୁରି ଅସଂଖ୍ୟ ବିନ୍ଦୁ ରହିଯାଉଛି । ଯେଉଁଗୁଡ଼ିକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ହେବେ ନାହିଁ । ବର୍ତ୍ତମାନ ଭଗ୍ନସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କୁ $\overleftrightarrow{X'X}$ ଉପରେ ସୂଚିତ କରିବା ।

ମନେକର b >1 ଏକ ଧନାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା । ତେଣୁ $\frac{1}{b}$ ଏକ ପ୍ରକୃତ ଭଗ୍ନାଂଶ (proper fraction) ହୋଇଥିବାରୁ, ଏହି ସଂଖ୍ୟାଟି 0 ଠାରୁ ବଡ଼ ଓ 1 ଠାରୁ ଛୋଟ ଅଟେ । ତେଣୁ ଏହି ସଂଖ୍ୟାଟି O ବିନ୍ଦୁର ଧନ ଦିଗରେ O ଓ A ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ କୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ହେବ ।

$\overline{OA}$ (ଅର୍ଥାତ୍ ଏକ ଏକକ) ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ b ସମାନ ଭାଗରେ ବିଭକ୍ତ କଲେ, ପ୍ରତି ସମାନ ଭାଗର ଦୈର୍ଘ୍ୟ $\frac{1}{b}$ ହେବ । ଛେଦ ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକ ଯଥାକ୍ରମେ Q_1, Q_2, Q_3.... ହେଲେ, ଏହି ଛେଦ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଯଥାକ୍ରମେ $\frac{1}{b}$, $\frac{2}{b}$, $\frac{3}{b}$...ହେବ । ସେହିପରି ଋଣାତ୍ମକ ପରିମେୟ ରାଶି $-\frac{1}{b}$, $-\frac{2}{b}$, $-\frac{3}{b}$... ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ବିନ୍ଦୁ ଗୁଡ଼ିକ ରେଖାର ଋଣ ଦିଗ $\overrightarrow{OX'}$ ଉପରେ ଅବସ୍ଥାପିତ ହେବ । ଏହିପରି ଭାବରେ ସମସ୍ତ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ ସଂଖ୍ୟାରେଖା ଉପରେ ସ୍ଥାପନ କରାଯାଇପାରିବ ।



(ଚିତ୍ର 2.5)

(c) ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ସ୍ଥାପନ ।

ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ଏବଂ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ସମୂହକୁ ସଂଖ୍ୟାରେଖା ଉପରେ ସ୍ଥାପନ କଲା ପରେ ଆହୁରି ଅସଂଖ୍ୟ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ରହିଯାଉଛନ୍ତି, ଯେଉଁ ଗୁଡ଼ିକୁ ଆମେ ସଂଖ୍ୟାରେଖା ଉପରେ ଉପସ୍ଥାପନ କରିନାହୁଁ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ ଏକ ଏକକ ବାହୁ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ସମକୋଣୀ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ $\sqrt{1^2+1^2}$ ଅର୍ଥାତ୍ $\sqrt{2}$ ଗୋଟିଏ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା । କିନ୍ତୁ ଏହାକୁ ଏ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ସଂଖ୍ୟାରେଖା ଉପରେ ଉପସ୍ଥାପନ କରିନାହୁଁ ।

$\sqrt{2}$ କୁ ଉପସ୍ଥାପନ କରିବାକୁ ହେଲେ, ମୂଳବିନ୍ଦୁ O ରୁ $\overrightarrow{OX}$ ଉପରିସ୍ଥ A ବିନ୍ଦୁ ନିଆଯାଉ, ଯେପରି OA=1 ଏକକ । A ବିନ୍ଦୁରେ $\overrightarrow{OX}$ ପ୍ରତି $\overline{AB}$ ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କର ଯେପରିକି AB = OA । $\overline{OB}$ ଅଙ୍କନ କରାଯାଉ ।

ପିଥାଗୋରାସ୍‌ଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟ ଅନୁସାରେ $OB = \sqrt{OA^2+AB^2} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

ବର୍ତ୍ତମାନ O କୁ କେନ୍ଦ୍ରକରି ଓ OB କୁ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନେଇ ଚାପ ଅଙ୍କନ କର, ଯାହା $\overrightarrow{OX}$ କୁ P ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବ । ଯେହେତୁ $OP = \sqrt{2}$, ତେଣୁ P ବିନ୍ଦୁ $\sqrt{2}$ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ହେଲା । ଅର୍ଥାତ୍ $\sqrt{2}$, P ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ହେଲା । (ଚିତ୍ର ୨.୬ ଦେଖ) ।

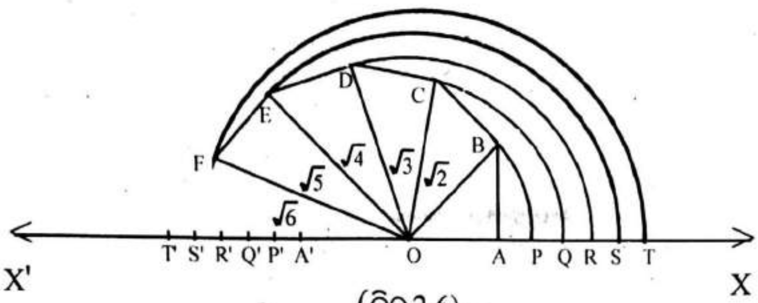
ପୁନଶ୍ଚ $\overline{OB}$ ରେଖାଖଣ୍ଡ ପ୍ରତି B ବିନ୍ଦୁରେ $\overline{BC}$ ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କର, ଯେପରିକି BC = OA ।

$\therefore \quad OC = \sqrt{OB^2+BC^2} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$

O କୁ କେନ୍ଦ୍ରକରି ଓ OC କୁ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନେଇ ଚାପ ଅଙ୍କନ କଲେ, ତାହା $\overrightarrow{OX}$ କୁ Q ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବ । $OQ = \sqrt{3}$ ହେତୁ Q ବିନ୍ଦୁଟି $\sqrt{3}$ ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ହେଲା ।

ଏହିପରି ଆମେ $OD = \sqrt{4}$, $OE = \sqrt{5}$, $OF = \sqrt{6}$ ଇତ୍ୟାଦି ପାଇବା । ପୂର୍ବପରି O କୁ କେନ୍ଦ୍ର ଓ ଯଥାକ୍ରମେ OD, OE, OF କୁ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନେଇ ଚାପ ଅଙ୍କନ କଲେ ଚାପ ଗୁଡ଼ିକ $\overrightarrow{OX}$ କୁ ଯଥାକ୍ରମେ R, S, T ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବ । ବର୍ତ୍ତମାନ R, S, T ବିନ୍ଦୁମାନ ଯଥାକ୍ରମେ $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ହେବ । ସେହି ଦୈର୍ଘ୍ୟ ମାନଙ୍କୁ ନେଇ ଆମେ ପୂର୍ବଭଳି $\overrightarrow{OX'}$ ରେଖା ଉପରେ $-\sqrt{2}$, $-\sqrt{3}$, $-\sqrt{4}$, $-\sqrt{5}$, $-\sqrt{6}$ ସଂଖ୍ୟାମାନ ସ୍ଥାପନ କରିପାରିବା;

ଯାହା ଯଥାକ୍ରମେ P', Q', R', S' ଏବଂ T' ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ହେବ । ଏଗୁଡ଼ିକୁ ସୂଚାଇବା ପାଇଁ ଆମକୁ ସ୍କେଲ୍ ଓ କମ୍ପାସ୍ ବ୍ୟବହାର କରିବାକୁ ପଡ଼ିବ ।



(ଚିତ୍ର 2.6)

ଏହି ସବୁ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଗୁଡ଼ିକୁ $\overleftrightarrow{X'X}$ ସରଳରେଖା ଉପରେ ସ୍ଥାପନ କରିସାରିବା ପରେ ମଧ୍ୟ ଅନ୍ୟ ବିନ୍ଦୁ ରହିବ ଯେଉଁମାନଙ୍କର ସୂଚକ ସଂଖ୍ୟା ଗୁଡ଼ିକ ଅପରିମେୟ । π, $\sqrt{\pi}$, $\pi + \sqrt{2}$, π+e, $\pi^{\sqrt{2}}$ ଇତ୍ୟାଦି ଆହୁରି ଜଟିଳ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଅଛନ୍ତି, ଯେଉଁ ମାନଙ୍କୁ $\overleftrightarrow{X'X}$ ରେଖା ଉପରେ ସୂଚିତ କରିବା କଷ୍ଟକର ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ପ୍ରଶ୍ନ ଉଠେ, ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ସରଳରେଖାସ୍ଥ ($\overleftrightarrow{X'X}$) ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁକୁ ସୂଚାଇବ କି ?

ଏ ପ୍ରଶ୍ନର ଉତ୍ତର ଏ ପୁସ୍ତକର ପରିସରଭୁକ୍ତ ନୁହେଁ । ତେଣୁ ନିମ୍ନ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ଟିକୁ ଗ୍ରହଣ କରିବା ।

ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ - ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ ଓ ଏକ ସରଳରେଖାର ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସେଟ୍‌ଦ୍ୱୟ ସଦୃଶ; ଅର୍ଥାତ୍ ଦୁଇ ସେଟ୍ ମଧ୍ୟରେ ଏକୈକ (ଏକ - ଏକ) ସଂପର୍କ ରହିଛି ।

2.9.2 ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର କ୍ରମ (Order in R) :

ଦୁଇଟି ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା a ଓ b ମଧ୍ୟରେ ଗୋଟିଏ ଅନ୍ୟଠାରୁ ବଡ଼, କିମ୍ବା ସାନ ହୋଇପାରେ । ରାଶିଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଏହି ତୁଳନାତ୍ମକ ସଂପର୍କ ସେମାନଙ୍କର କ୍ରମ ନିର୍ଦ୍ଧାରଣ କରିଥାଏ । ଏହାକୁ $a > b$ ବା $a < b$ ଦ୍ୱାରା ପ୍ରକାଶ କରାଯାଏ ।

ଯଦି $a > b$ ହୁଏ, ତାହାହେଲେ a ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ବିନ୍ଦୁଟି $\overleftrightarrow{X'X}$ ସଂଖ୍ୟାରେଖାର bର ସୂଚକ ବିନ୍ଦୁର ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ରହିବ । ଏହିପରି ବିଭିନ୍ନ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କୁ ତୁଳନା କରି, ସମସ୍ତ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାକୁ ଆମେ କ୍ରମରେ ସଜାଇ ପାରିବା ।

ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ : ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କ କ୍ରମ ନିର୍ଦ୍ଧାରଣ କରିବା ପାଇଁ କେତୋଟି ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ (Axioms) ଦିଆଗଲା ।

a, b, c ତିନୋଟି ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ।

1. **a, b ଦୁଇଟି ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ, ହୁଏତ $a > b$ ବା $a < b$ ବା $a = b$ ହୋଇପାରେ । ଏହାକୁ ତ୍ରିମୁଖୀ ନିୟମ (Law of Trichotomy) କୁହାଯାଏ ।**
2. **a, b, c ତିନୋଟି ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ମଧ୍ୟରେ, $a < b$ ଏବଂ $b < c$ ହେଲେ $a < c$ ହେବ । ଏହାକୁ ସଂକ୍ରମୀ ନିୟମ (Law of Transitivity) କୁହାଯାଏ ।**

3. $a < b$ **ଏବଂ** $c > 0$ **ହେଲେ,** $ac < bc$ **ହେବ ।**

4. **ଯଦି** $a < b$ **ହୁଏ, ତେବେ ସମସ୍ତ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା** c **ପାଇଁ** $a + c < b + c$ **ହେବ ।**

5. $a > 0$ **ଓ** $b > 0$ **ହେଲେ,** $ab > 0$ **।**

ଏହି ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ଗୁଡ଼ିକର ପ୍ରୟୋଗ କରି କେତୋଟି ପ୍ରମେୟର ପ୍ରମାଣ ଦେଖିବା ।

(1) $a > b$ ଏବଂ $c > d$ ହେଲେ, $a + c > b + d$

(2) $a < b$ ଏବଂ $c < 0$ ହେଲେ, $ac > bc$

ପ୍ରମାଣ : (1) $a > b$ (ଦତ୍ତ)

$\Rightarrow a + c > b + c$ .... (i) (ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ - 4)

ପୁନଶ୍ଚ $c > d$ (ଦତ୍ତ)

$\Rightarrow b + c > b + d$ .... (ii) (ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ - 4)

(i) ଓ (ii) ରୁ ପାଉଁ $a + c > b + c > b + d$

$\therefore a + c > b + d$ (ପ୍ରମାଣିତ)

(2) $c < 0$ (ଦତ୍ତ) $\Rightarrow -c > 0$

ପୁନଶ୍ଚ $a < b$ (ଦତ୍ତ) $\Rightarrow b - a > 0$

$\therefore b - a > 0, -c > 0$

ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ - 5 ଦ୍ୱାରା $(b - a)((-c) > 0$

$\Rightarrow -bc + ac > 0 \Rightarrow ac > bc$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : **1.** a ଏକ ବାସ୍ତବ ଧନାତ୍ମକ ସଂଖ୍ୟା ଅର୍ଥାତ୍ $a > 0$ ହୁଏ ତେବେ a, ସଂଖ୍ୟାରେଖାରେ 0 (ଶୂନ)ର ଡାହାଣକୁ ରହେ । ଯଦି a ଏକ ଋଣାତ୍ମକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଅର୍ଥାତ୍ $a < 0$ ହୁଏ, ତେବେ a, 0 (ଶୂନ)ର ବାମ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ରହେ ।

2. ଶୂନ ଏକମାତ୍ର ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଯାହା ଧନାତ୍ମକ ବା ଋଣାତ୍ମକ ନୁହେଁ ।

2.9.3 ସଂଖ୍ୟାରେଖାର ଦୁଇବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତା

ଦୂରତା ଏକ ଦୈର୍ଘ୍ୟର ମାପ । ଏହି ମାପ କେବେ ହେଲେ ଋଣାତ୍ମକ ହୋଇପାରିବ ନାହିଁ । କୌଣସି ସରଳରେଖା ଉପରେ P ଓ Q ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ, ସେମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତାକୁ PQ ଲେଖାଯାଏ । ଅନ୍ୟପ୍ରକାରରେ ପ୍ରକାଶ କଲେ, $\overline{PQ}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ PQ ହେବ ।

ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକୁ ସଂଖ୍ୟାରେଖା ଉପରେ କିପରି ସ୍ଥାପନ କରାଯାଇପାରିବ, ତାହା ଆମେ ପୂର୍ବ ଅନୁଚ୍ଛେଦରେ ଆଲୋଚନା କରିସାରିଛେ । ବସ୍ତୁତଃ ଏହା ଏକ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ପ୍ରଣାଳୀ (Co-ordinate System) । ଏହି ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତିକୁ **ରୈଖିକ ଜ୍ୟାମିତି (Geometry of line)** କୁହାଯାଏ ।

ଯଦି ସଂଖ୍ୟାରେଖା ଉପରେ P ଓ Q ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ 4 ଓ 6 ହୁଏ, ତେବେ P ଓ Q ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତା 4–6 ବା 6–4 ହେବ । ଅର୍ଥାତ୍ –2 ବା 2 ହେବ । କିନ୍ତୁ –2 ଓ 2 ଉଭୟଙ୍କର ସାଂଖ୍ୟିକ ମୂଲ୍ୟ 2 ଅଟେ । –2 ଓ 2 ର ସାଂଖ୍ୟିକ ମାନ ଅଣଋଣାତ୍ମକ ଓ ଏହି ସାଂଖ୍ୟିକ ମୂଲ୍ୟକୁ $|-2|$ ଓ $|2|$ ଲେଖାଯାଏ ।

ଏଠାରେ $|-2| = |2| = 2$

ଅର୍ଥାତ୍ ଧନାତ୍ମକ ହେଉ ବା ଋଣାତ୍ମକ ହେଉ, ଯେ କୌଣସି ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା x ର ସାଂଖ୍ୟିକ ମାନକୁ ଆମେ $|x|$ ଭାବରେ ପ୍ରକାଶ କରୁ । **ଏହି $|x|$ ସର୍ବଦା ଏକ ଧନାତ୍ମକ ବାସ୍ତବ ରାଶି ଓ ଏହାକୁ xର ପରମ ମାନ (Absolute Value) କୁହାଯାଏ ।** ଏହି ସାଂକେତିକ ଚିହ୍ନକୁ ବ୍ୟବହାରର କରି ଆମେ ଉପରୋକ୍ତ ଦୂରତାକୁ ନିମ୍ନ ପ୍ରକାରରେ ଲେଖିପାରିବା ।

$PQ = |6 - 4|$ ବା $PQ = |4 - 6|$

$\therefore PQ = 2$

ଅର୍ଥାତ୍ PQ = | P ଓ Q ର ସ୍ଥାନାଙ୍କଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତର |

ତେଣୁ ସଂଖ୍ୟାରେଖାସ୍ଥିତ P ଓ Q ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟର ସାଂଖ୍ୟିକ ମାନ ବା ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଯଥାକ୍ରମେ a ଓ b ହେଲେ, ଦୂରତା $PQ = |a - b|$

ତେଣୁ x ଧନାତ୍ମକ ବା ଋଣାତ୍ମକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ,

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ଯେତେବେଳେ } x \geq 0 \\ -x, & \text{ଯେତେବେଳେ } x < 0 \end{cases}$$

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ $x = 5$ ହେଲେ, $|x| = |5| = 5 = x$;

$x = 0$ ହେଲେ, $|x| = |0| = 0 = x$;

$x = -7$ ହେଲେ, $|x| = |-7| = 7 = -x$;

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : x ଯେ କୌଣସି ଏକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ,

(i) $|x| = |-x| \geq 0$ (ii) $|x| \geq x$

(iii) $|x| \geq -x$ (iv) $|x| \leq a$ ହେଲେ, $-a \leq x \leq a$ ହେବ ।

(iv) ର ପ୍ରମାଣ :

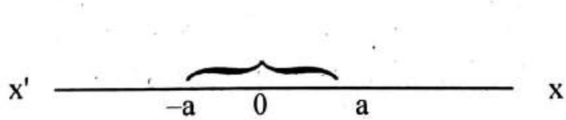
ପ୍ରଥମ ପରିସ୍ଥିତି : $x \geq 0$ ହେଲେ, $|x| = x$

$\therefore |x| \leq a \Rightarrow x \leq a$ ......(i)

ଦ୍ୱିତୀୟ ପରିସ୍ଥିତି : $x < 0$ ହେଲେ, $|x| = -x$

$\therefore |x| \leq a \Rightarrow -x \leq a \Rightarrow x \geq -a$ ......(ii)

$\therefore$ (i) ଓ (ii) ରୁ ପାଇବା $-a \leq x \leq a$



$|x| \leq a$

(ଚିତ୍ର 2.7)

ଉଦାହରଣ - 6

ଏକ ସଂଖ୍ୟାରେଖାରେ A ଓ B ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଦ୍ୱୟ 3 ଏବଂ –7 ହେଲେ, AB କେତେ ?

ସମାଧାନ : $AB = \overline{AB}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ

$= |3 - (-7)| = |3 + 7| = |10| = 10$

ଅଥବା $AB = |-7 - 3| = |-10| = 10$ ଏକକ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ -7 : $|3x - 2| = 4$ ସମାଧାନ କର ।

ସମାଧାନ : ଯଦି $3x - 2 \geq 0$ ହୁଏ, ତେବେ $|3x - 2| = 3x - 2$ ହେବ,

$\therefore\ 3x - 2 = 4 \Rightarrow 3x = 4 + 2$

$\Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$

ଯଦି $3x - 2 < 0$ ହୁଏ, ତେବେ $|3x - 2| = -(3x - 2)$ ହେବ,

$\therefore\ -(3x - 2) = 4 \Rightarrow -3x + 2 = 4$

$\Rightarrow 3x = -2 \Rightarrow x = \frac{-2}{3}$

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମାଧାନ $= \{\frac{-2}{3}, 2\}$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 8 : $|x| < 5$ ହେଲେ x ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ସଂଜ୍ଞାନୁସାରେ $|x| =$ x, ଯଦି $x \geq 0$ ଏବଂ

$-x$, ଯଦି $x < 0$

ଯଦି x ଧନାତ୍ମକ ହୁଏ ତାହେଲେ $x < 5$...................... (i)

ଯଦି x ଋଣାତ୍ମକ ହୁଏ ତାହେଲେ $-x < 5$ କିମ୍ବା $x > -5$...................... (ii)

ତେଣୁ (i) ଓ (ii) ରୁ ପାଇବା $-5 < x < 5$ (ଉତ୍ତର)

ବିଶ୍ଳେଷଣ :ଯଦି x ର ମାନ 5 ଠାରୁ ବଡ଼ ଅର୍ଥାତ୍ 6 ହୁଏ,

ତେବେ $|x| = |6| = 6$, ଯାହାକି $|x| < 5$ ସର୍ତ୍ତକୁ ବିରୋଧ କରିବ ।

ଯଦି x ର ମାନ –5 ଠାରୁ କମ୍ ଅର୍ଥାତ୍ –6 ହୁଏ,

ତେବେ $|x| = |-6| = 6$, ଯାହାକି ପୂର୍ବଭଳି $|x| < 5$ ସର୍ତ୍ତକୁ ବିରୋଧ କରିବ ।

କିନ୍ତୁ –5 ଠାରୁ ଆରମ୍ଭ କରି 5 ରେ ଶେଷ କଲେ, ଯେଉଁ ସମସ୍ତ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ରହିଲା, ତାହା $|x| \leq 5$ ସର୍ତ୍ତକୁ ସିଦ୍ଧ କରିବ । ତେଣୁ $|x| \leq 5 \Rightarrow -5 \leq x \leq 5$

ଉଦାହରଣ - 9 : $|3x - 2| \leq 5$ ହେଲେ, xର ସମସ୍ତ ମାନ ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ : ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ - (iv) ରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ସୂତ୍ର ଅନୁସାରେ $|3x - 2| \leq 5$ ହେଲେ,

$-5 \leq 3x - 2 \leq 5$

$$\Rightarrow\ -5 + 2 \quad \le (3x - 2) + 2 \quad \le 5 + 2$$

$$\Rightarrow\ -3 \quad \le 3x \quad \le 7$$

$\Rightarrow$ 3 ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କଲେ, $-1 \quad \le x \quad \le \frac{7}{3}$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 10 : $|3x-2| > 5$ ଅସମୀକରଣଟି ସମାଧାନ କର ।

ସମାଧାନ :- ଉଦାହରଣ -9 ରେ $|3x-2| \le 5$ ଅସମୀକରଣଟିର ସମାଧାନ କରାଯାଇଛି ।

$|3x-2| \le 5$ ର ଠିକ୍ ବିପରିତ ଉକ୍ତିଟି $|3x-2| > 5$ । ସୁତରାଂ ଉଦାହରଣ -9 ରେ ମିଳିଥିବା ଉତ୍ତରର ବିପରିତ ଦତ୍ତ ଅସମୀକରଣଟିର ସମାଧାନ ହେବ ।

ଅତଏବ $|3x-2| > 5$ ର ସମାଧାନ $x > \frac{7}{3}$ କିମ୍ବା $x < -1$ ।

2.10 ଘାତଙ୍କ ରାଶି (Exponential numbers) :

a ଏକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଓ n ଏକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ a^n ର ଅର୍ଥ $a \times a \times a \times a \times \ldots$ (n ଥର) ଅଟେ । a^n ଏକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଓ ଏହାର କାରଣ ହେଲା ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍‌ରେ ଗୁଣନ ପ୍ରକ୍ରିୟାଟି ସଂବୃତ୍ତି ନିୟମାଧୀନ ।

a^n ରୂପକୁ ଘାତାଙ୍କ ରୂପ (exponential form) କୁହାଯାଏ । ଯେଉଁଠାରେ a ଆଧାର (base) ଓ n ଘାତାଙ୍କ । ଏଠାରେ $\mathbf{n = 0}$ ହେଲେ $\mathbf{a^0 = 1}$ ଓ ଏଠାରେ $\mathbf{a \neq 0}$ । ଏହା ଏକ ସଂଜ୍ଞା ।

ଆମେ ଜାଣିଛେ ଯେ, $a \neq 0$ ହେଲେ, $a^{-1} = \frac{1}{a}$ ଏବଂ $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ $(a \neq 0, m \in N)$

a^n ଘାତାଙ୍କ ରୂପରେ a ଅଣଶୂନ୍ୟ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଓ ଘାତାଙ୍କ n ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା $(n \in Z)$ ହେଲେ ଅଷ୍ଟମ ଶ୍ରେଣୀରେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ଘାତାଙ୍କ ନିୟମ ଗୁଡ଼ିକ ଅଧ୍ୟୟନ କରିଛ ।

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(i) } a^m \times a^n = a^{m+n} & \text{(ii) } a^m \div a^n = a^{m-n} \\ \text{(iii) } (ab)^m = a^m \times b^m & \text{(iv) } (a^m)^n = a^{mn} \end{array}\right\} \quad \ldots(1)$$

ଯେଉଁଠାରେ $a, b \in R$ ଓ $a \neq 0, b \neq 0, m, n \in Z$

$x^n = a\ (x \in R, n \in N)$ ହେଲେ ଆମେ x କୁ a ର n-ତମ ମୂଳ (n-th root) ବୋଲି କହୁ । କୌଣସି ଧନାତ୍ମକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା a ର n ତମ ମୂଳ ରୂପେ ଆମେ ନିଶ୍ଚୟ ଗୋଟିଏ ଧନାତ୍ମକ ମୂଳ ପାଇବା ଓ ଏହି n-ତମ ମୂଳକୁ $\sqrt[n]{a}$ ସଂକେତ ଦ୍ୱାରା ପ୍ରକାଶ କରିପାରିବା । ସେହି ଦୃଷ୍ଟିରୁ a ର ବର୍ଗମୂଳ ଏବଂ a ର ଘନମୂଳକୁ ଯଥାକ୍ରମେ $\sqrt{a}$ ଓ $\sqrt[3]{a}$ ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଏ । '$\sqrt{\ }$' ଚିହ୍ନକୁ କରଣୀ (radical) ଚିହ୍ନ କୁହାଯାଏ ।

$\sqrt{a}$ ଓ $\sqrt[3]{a}$ କୁ ମଧ୍ୟ ଯଥାକ୍ରମେ $a^{\frac{1}{2}}$ ଏବଂ $a^{\frac{1}{3}}$ ରୂପେ ଲେଖାଯାଇପାରିବ । ବ୍ୟାପକ ଭାବେ q ଏକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ $a^{\frac{1}{q}}$ ଏକ ଧନାତ୍ମକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଓ ଏହାକୁ a ର qତମ ମୂଳ (qth root) କୁହାଯାଏ ।

$a^{\frac{1}{q}}$ ରାଶିକୁ p ଥର ଗୁଣନ କଲେ ପାଇବା : $a^{\frac{1}{q}} \times a^{\frac{1}{q}} \times \ldots$ (p ଥର) $= a^{\frac{p}{q}}$

ଏହି ଦୃଷ୍ଟିରୁ ଘାତାଙ୍କ ରାଶିରେ ଘାତାଙ୍କକୁ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ ଆଧାରକୁ ଏକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଭାବେ ଚିନ୍ତାକଲେ ଆମେ ଦେଖି ପାରିବା ଯେ, ପରିମେୟ ଘାତାଙ୍କ ପାଇଁ (1) ରେ ପ୍ରଦତ୍ତ ନିୟମ ଗୁଡ଼ିକ n ଓ m ପରିମେୟ ରାଶି ହେଲେ ମଧ୍ୟ ସତ୍ୟ ହେବେ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମେ ଲେଖିପାରିବା : $a^{\frac{p}{q}} = (a^p)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ ଏବଂ $a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = (\sqrt[q]{a})^p$

ଯଦି ଘାତାଙ୍କ n ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା, ତେବେ ମଧ୍ୟ ଘାତାଙ୍କ ନିୟମ (1) ସତ୍ୟ । ମାତ୍ର ଏହାକୁ ବିଶଦ ଭାବେ ଆଲୋଚନା କରିବା ଏହି ପୁସ୍ତକର ପରିସରର ବହିର୍ଭୂକ୍ତ । ତେଣୁ ବାସ୍ତବ ଘାତାଙ୍କ ପାଇଁ (1) ରେ ପ୍ରଦତ୍ତ ନିୟମ ଗୁଡ଼ିକୁ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ରୂପେ ଗ୍ରହଣ କରାଯାଉଛି ।

ଉଦାହରଣ - 11 : ନିମ୍ନଲିଖିତ ଘାତାଙ୍କ ରାଶିର ମାନ ନିରୂପଣ କର ।

(i) $4^{-\frac{5}{2}}$ (ii) $343^{\frac{1}{3}}$ (iii) $\left(8^{\frac{-3}{4}}\right)^{\frac{4}{9}}$ (iv) $(0.125)^{\frac{1}{3}}$ (v) $(1024)^{1.2}$

ସମାଧାନ :- (i) $4^{-\frac{5}{2}} = (\sqrt{4})^{-5} = 2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$

(ii) $343^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{343} = \sqrt[3]{7^3} = 7$

(iii) $\left(8^{\frac{-3}{4}}\right)^{\frac{4}{9}} = 8^{\frac{-3}{4}\times\frac{4}{9}} = 8^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8^{-1}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$

(iv) $(0.125)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{125}{1000}} = \sqrt[3]{\left(\frac{5}{10}\right)^3} = \frac{5}{10} = 0.5$

(v) $(1024)^{1.2} = (1024)^{\frac{12}{10}} = \left(\sqrt[10]{1024}\right)^{12} = \left(\sqrt[10]{2^{10}}\right)^{12} = 2^{12} = 4096$

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : $a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = (\sqrt[q]{a})^p$ ହେତୁ ଏଠାରେ ଲେଖିପାରିବା : $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p$

ଉଦାହରଣ - 12 : $\frac{2\sqrt{3}+3}{5\sqrt{3}+1} = x + y\sqrt{3}$, ଓ x ଓ y ପରିମେୟ ହେଲେ x ଓ y ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ : $x + \sqrt{3}.y = \frac{2\sqrt{3}+3}{5\sqrt{3}+1} = \frac{(2\sqrt{3}+3)(5\sqrt{3}-1)}{(5\sqrt{3}+1)(5\sqrt{3}-1)}$

(ଲବ ଓ ହରକୁ $(5\sqrt{3}-1)$ ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ କଲେ ହରରେ ଥିବା ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଅପସାରିତ ହୁଏ । ଏହି ପ୍ରକ୍ରିୟାକୁ ହରର ପରିମେୟ କରଣ (rationalization) କୁହାଯାଏ ।)

$\Rightarrow x + \sqrt{3} . y = \frac{30-2\sqrt{3}+15\sqrt{3}-3}{75-1} = \frac{27+13\sqrt{3}}{74} = \frac{27}{74} + \frac{13}{74}\times\sqrt{3}$

ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ ତୁଳନା କଲେ $x = \frac{27}{74}$ ଓ $y = \frac{13}{74}$ । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 13 : ସରଳ କର:-

(i) $\left(\frac{1}{27}\right)^{0.\bar{3}} \times \left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}$ (ii) $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}} \times 64^{\frac{2}{3}} \times \left(1\frac{1}{3}\right)^{-1}$

ସମାଧାନ : (i) ଏଠାରେ $\frac{1}{27} = \left(\frac{1}{3}\right)^3$, $0.\bar{3} = \frac{1}{3}$ ଏବଂ $3\frac{3}{8} = \frac{27}{8} = \left(\frac{3}{2}\right)^3$

$\therefore$ ଦତ୍ତ ରାଶି $= \left\{\left(\frac{1}{3}\right)^3\right\}^{\frac{1}{3}} \times \left\{\left(\frac{3}{2}\right)^3\right\}^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \frac{1}{3} \times \frac{4}{9} = \frac{4}{27}$ (ଉତ୍ତର)

(ii) ଦତ୍ତ ପରିପ୍ରକାଶ $= \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}} \times 64^{\frac{2}{3}} \times \left(1\frac{1}{3}\right)^{-1} = \sqrt{\frac{4}{9}} \times (4^3)^{\frac{2}{3}} \times \left(\frac{4}{3}\right)^{-1}$

$= \frac{2}{3} \times \left(\sqrt[3]{4^3}\right)^2 \times \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \times 4^2 \times \frac{3}{4} = 8$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 14 : $\left\{\frac{\sqrt[3]{24} \times \sqrt{24} \times \sqrt{32}}{\sqrt[3]{12} \times \sqrt{18}}\right\} x = \frac{2^{\frac{5}{6}}}{\sqrt{3}}$ ହେଲେ x ର ମୂଲ୍ୟ ସ୍ଥିରକର।

ସମାଧାନ : x ର ସହଗ $= \frac{2\sqrt[3]{3} \times 2\sqrt{6} \times 4\sqrt{2}}{\sqrt[3]{12} \times 3\sqrt{2}} = \frac{2(3)^{\frac{1}{3}} \times 2 \times (2)^{\frac{1}{2}}(3)^{\frac{1}{2}} \times 4(2)^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}} \times 3 \times 2^{\frac{1}{2}}} = \frac{16}{3^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{6}}}$

$\Rightarrow \frac{16x}{3^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{6}}} = \frac{2^{\frac{5}{6}}}{3^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow 16x = \frac{2^{\frac{5}{6}} \times 2^{\frac{1}{6}} \times 3^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}}$

$\Rightarrow x = \frac{2^{\frac{1}{6}} \times 2^{\frac{5}{6}}}{16} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 15 : ସରଳ କର : (i) $\left|\frac{\sqrt{31}-\sqrt{11}}{\sqrt{31}+\sqrt{11}} - \frac{\sqrt{31}+\sqrt{11}}{\sqrt{31}-\sqrt{11}}\right|$ (ii) $\left|\frac{\sqrt{6}-\sqrt{7}}{\sqrt{6}+\sqrt{7}}\right|$

ସମାଧାନ : (i) $x = \frac{\sqrt{31}-\sqrt{11}}{\sqrt{31}+\sqrt{11}} - \frac{\sqrt{31}+\sqrt{11}}{\sqrt{31}-\sqrt{11}}$

$\Rightarrow x = \frac{\left(\sqrt{31}-\sqrt{11}\right)^2 - \left(\sqrt{31}+\sqrt{11}\right)^2}{\left(\sqrt{31}\right)^2 - \left(\sqrt{11}\right)^2}$

$x = \frac{31+11-2\sqrt{31 \times 11}-31-11-2\sqrt{31 \times 11}}{31-11} = \frac{-4\sqrt{341}}{20} = -\frac{\sqrt{341}}{5}$

$\therefore |x| = \frac{\sqrt{341}}{5}$ । (ଉତ୍ତର)

(ii) $\left|\frac{\sqrt{6}-\sqrt{7}}{\sqrt{6}+\sqrt{7}}\right| = \frac{\left|\sqrt{6}-\sqrt{7}\right|}{\sqrt{6}+\sqrt{7}}$ $(\because \sqrt{6}+\sqrt{7} > 0)$

$= \frac{\sqrt{7}-\sqrt{6}}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}$ $(\because \sqrt{6}-\sqrt{7} < 0)$

$= \frac{\left(\sqrt{7}-\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{6}\right)}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{6}\right)} = \frac{7+6-2\sqrt{42}}{7-6} = 13-2\sqrt{42}$ (ଉତ୍ତର)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 2(b)

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରଶ୍ନମାନଙ୍କରେ ସମ୍ଭାବ୍ୟ ଉତ୍ତର ମଧ୍ୟରୁ ଠିକ୍ ଉତ୍ତରଟି ବାଛ।

(i) ନିମ୍ନଲିଖିତ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଟି ଠିକ୍ ?

(a) $\sqrt{4}$ ଏକ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା। (b) $\sqrt{2}$ ଓ $\sqrt{3}$ ମଧ୍ୟରେ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ନାହିଁ।

(c) $\sqrt{8}$ ଏକ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା। (d) $\pi \in Q$

(ii) ନିମ୍ନଲିଖିତ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଟି ଠିକ୍ ନୁହେଁ ?

(a) p ଓ q ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟ ଯଥାକ୍ରମେ ପରିମେୟ ଓ ଅପରିମେୟ ହେଲେ p+q ଅପରିମେୟ ।

(b) p ଓ q ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟ ଅପରିମେୟ ହେଲେ p+q ଅପରିମେୟ

(c) p ଓ q ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟ ପରିମେୟ ହେଲେ p+q ପରିମେୟ

(d) p ଓ q ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟ ପରିମେୟ ହେଲେ p-q ପରିମେୟ

(iii) ନିମ୍ନଲିଖିତ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଟି ଠିକ୍ ?

(a) p ଓ q ପରିମେୟ ହେଲେ pq ପରିମେୟ

(b) p ଓ q ଅପରିମେୟ ହେଲେ pq ଅପରିମେୟ

(c) p ପରିମେୟ ଓ q ଅପରିମେୟ ହେଲେ pq ପରିମେୟ।

(d) p ଓ q ଅପରିମେୟ ହେଲେ $\frac{p}{q}$ ଅପରିମେୟ।

(iv) ରାଡ଼ିକାଲ (କରଣୀ) ଚିହ୍ନ ବ୍ୟବହାର କଲେ $2^{\frac{1}{2}}$ ରାଶି ଟି କାହା ସହ ସମାନ ?

(a) $\sqrt{2}$ (b) $\sqrt[3]{2}$ (c) $\sqrt{8}$ (d) ଏଥିରୁ କେଉଁଟି ନୁହେଁ

(v) ରାଡ଼ିକାଲ ଚିହ୍ନ ଅପସାରଣ କଲେ $\frac{1}{2\sqrt[5]{x^{-3}}}$ ରାଶିର ସରଳୀକୃତ ମାନ କେଉଁଟି ?

(a) $\frac{x^{\frac{3}{5}}}{2}$ (b) $\frac{1}{2x^{-15}}$ (c) $\frac{x^{15}}{2}$ (d) ଏଥିରୁ କେଉଁଟି ନୁହେଁ

(vi) $9^{-1\frac{1}{2}}$ ରାଶିଟି କେଉଁ ରାଶି ସହ ସମାନ ?

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $3\frac{1}{3}$ (c) $\frac{1}{9}$ (d) $\frac{1}{27}$

(vii) $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$ ର ମୂଲ୍ୟ କାହା ସହ ସମାନ ?

(a) $\sqrt{2}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (d) 2

(viii) କେଉଁଟି ଠିକ୍ ?

(a) $\sqrt[4]{4} > \sqrt[3]{3}$ (b) $\sqrt[3]{4} > \sqrt[4]{3}$ (c) $\sqrt[3]{4} = \sqrt[4]{3}$ (d) $\sqrt[4]{4} = \sqrt[3]{3}$

(ix) Q ସମସ୍ତ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା Q' ସମସ୍ତ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ $Q \cup Q' =$?

(a) N (b) Z (c) R (d) ଏଥିରୁ କେଉଁଟି ନୁହେଁ।

(x) ନିମ୍ନଲିଖିତ ମଧ୍ୟରୁ x ର ମୂଲ୍ୟ କେଉଁଟି ହେଲେ $(\sqrt{5}+\sqrt{2})$ x ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ହେବ ?

(a) $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ (b) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$ (c) $\sqrt{5}$ (d) $\sqrt{2}$

(xi) $x+(1-\sqrt{2})$ ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ହେଉଥିଲେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ମୂଲ୍ୟରୁ xର ମୂଲ୍ୟଟି ବାଛ ।

(a) $1-\sqrt{2}$ (b) $\sqrt{2}-1$ (c) $-1-\sqrt{2}$ (d) $2\sqrt{2}$

(xii) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ ସଂଖ୍ୟାଟି ନିମ୍ନଲିଖିତ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଟି ସହ ସମାନ ନୁହେଁ ?

(a) $\frac{4}{\sqrt{6}}$ (b) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (c) $\frac{2}{\sqrt{6}}$ (d) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{18}}$

(xiii) $3\sqrt{2}$ ଓ $7\sqrt{8}$ ର ଯୋଗଫଳ କେତେ ?

(a) $12\sqrt{2}$ (b) $10\sqrt{2}$ (c) $10\sqrt{8}$ (d) ଏଥିରୁ କେଉଁଟି ନୁହେଁ ।

2. ନିମ୍ନଲିଖିତ ଉକ୍ତି ମଧ୍ୟରୁ ଯେଉଁଗୁଡ଼ିକ ସତ୍ୟ ସେଗୁଡ଼ିକୁ ଚିହ୍ନଟ କର ।

(i) $0 \in R$ (ii) $\sqrt{16} \in Q$ (iii) $\sqrt{5} \in R$ (iv) $-0 = 0$

(v) $-\pi \in Q$ (vi) $2\pi \in Q'$ (vii) $2+\sqrt{2} \in Q$ (viii) $Q \subset R$

(ix) $\pi \in Q'$ (x) $Q \cup Q' = R$ (xi) $Q \subset Q'$ (xii) $R - Q = Q'$

(xiii) $\sqrt{2}$ ଓ $\sqrt{3}$ ମଧ୍ୟରେ ଅସୀମ ସଂଖ୍ୟକ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ବିଦ୍ୟମାନ ।

(xiv) 0.01001000100001.... ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ।

(xv) $x \in R$ ହେଲେ, $x \cdot \frac{1}{x} = 1$

(xvi) ଦୁଇଗୋଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ଯୋଗଫଳ ପରିମେୟ ।

(xvii) ଦୁଇଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ଯୋଗଫଳ ଅପରିମେୟ ।

(xviii) ଦୁଇଟି ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ଯୋଗଫଳ ପରିମେୟ ।

(xix) ଦୁଇଟି ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ଗୁଣଫଳ ଅପରିମେୟ ।

(xx) π ସହ ଯେ କୌଣସି ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଯୋଗ କଲେ ଯୋଗଫଳ ଅପରିମେୟ ।

3. ନିମ୍ନଲିଖିତ ରାଶିମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ ପରିମେୟ ଓ କେଉଁଗୁଡ଼ିକ ଅପରିମେୟ ଲେଖ ।

(i) 3 (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) -10 (iv) $\sqrt{81}$ (v) $\frac{22}{7}$

(vi) π (vii) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (viii) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ix) 0.7 (x) $0.\bar{7}$

(xi) $\sqrt{0.7}$ (xii) 0.07007000700007......

4. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର :

(i) 2 ର ଗୁଣନାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ .... । (ii) $\sqrt{2}$ ରଗୁଣନାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ .... ।

(iii) $\sqrt{2}$ ର ଯୋଗାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ .... । (iv) π ର $\frac{22}{7}$ ଏକ .... ମାନ ଅଟେ ।

(v) $4-\sqrt{3}$ ର ଯୋଗାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ ....

(vi) ......ର ଗୁଣନାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ ଓ ଯୋଗାତ୍ମକ ବିଲୋମୀର ସମଷ୍ଟି ଶୂନ ଅଟେ ।

(vii) $px = py$ ହେଲେ $x = y$ ହେବ କେବଳ ଯଦି ......

(viii) $Q \cup Q' =$ ....

(ix) $-\pi$ ର ପରମ ମାନ .... ।

(x) $x = 0$ ହେଲେ $|x|$ ର ମାନ ....

5. 'କ' ସ୍ତମ୍ଭରେ ଥିବା ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କୁ 'ଖ' ସ୍ତମ୍ଭରେ ଥିବା ପଦ ସହ (ଅର୍ଥ ଭିତ୍ତିକ) ମିଳାଇ ରଖ ।

(କ)	(ଖ)
(i) 0	(i) ଗୁଣନାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ
(ii) 1	(ii) ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟା
(iii) $\sqrt{2}$	(iii) ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା
(iv) 5	(iv) ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା
(v) 6	(vi) ଆସନ୍ନମାନ $\frac{22}{7}$
(vi) $0.\bar{7}$	(vi) ଯୋଗାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ
(vii) x ଓ $-x$	(vii) ଯୋଗାତ୍ମକ ଅଭେଦ
(viii) 2 ଓ $\frac{1}{2}$	(viii) ଭଗ୍ନସଂଖ୍ୟା $\frac{p}{q}$
(ix) π	(ix) ଗୁଣନାତ୍ମକ ଅଭେଦ

6. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଗୋଟିଏ ଲେଖାଏଁ ଉଦାହରଣ ଦିଅ ।

(i) x ଓ y ଅପରିମେୟ ମାତ୍ର $x+y$ ପରିମେୟ ।
(ii) x ଓ y ଅପରିମେୟ ଓ $x+y$ ଅପରିମେୟ
(iii) x ଓ y ଅପରିମେୟ ମାତ୍ର $x-y$ ପରିମେୟ
(iv) x ଓ y ଅପରିମେୟ ମାତ୍ର xy ପରିମେୟ
(v) x ଓ y ଅପରିମେୟ ଓ xy ଅପରିମେୟ
(vi) x ଓ y ଅପରିମେୟ ମାତ୍ର $\frac{x}{y}$ ପରିମେୟ
(vii) x ଓ y ଅପରିମେୟ ଓ $\frac{x}{y}$ ଅପରିମେୟ

7. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରଶ୍ନମାନଙ୍କ ଉତ୍ତର ଦିଅ ।

(i) କେଉଁ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ତା' ନିଜର ଯୋଗାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ ଅଟେ ?

(ii) କେଉଁ ବାସ୍ତବସଂଖ୍ୟା ତା' ନିଜର ଗୁଣନାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ ଅଟେ ?

(iii) $a \times 0 = b \times 0$ ହେଲେ ସର୍ବଦା $a = b$ ହେବ କି ? କାରଣ ସହ ଉତ୍ତର ଦିଅ ।

(iv) ଦୁଇଗୋଟି ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଲେଖ ଯେପରି ସେମାନଙ୍କ ଗୁଣଫଳ ପରିମେୟ ମାତ୍ର ଯୋଗଫଳ ଅପରିମେୟ ହେବ ।

(v) ଦୁଇଗୋଟି ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଲେଖ ଯେପରି ସେମାନଙ୍କ ଯୋଗଫଳ ପରିମେୟ ମାତ୍ର ଗୁଣନଫଳ ଅପରିମେୟ ହେବ ।

(vi) ଏକ ପରିମେୟ ଭଗ୍ନ ସଂଖ୍ୟା ଦଶମିକ ଓ ଏକ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ଦଶମିକ ରୂପରେ ପାର୍ଥକ୍ୟ କ'ଣ ଥାଏ ?

8. ନିମ୍ନଲିଖିତ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କ ଯୋଗଫଳ ସ୍ଥିର କର :

(i) $\sqrt{18}$ ଓ $\sqrt{72}$ (ii) $3\sqrt{2}$ ଓ $7\sqrt{2}$ (iii) $\sqrt{5}$ ଓ $-\sqrt{5}$ (iv) $\sqrt{75}, \sqrt{108}$ ଓ $\sqrt{147}$

9. ନିମ୍ନଲିଖିତ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କ ଗୁଣଫଳ ସ୍ଥିର କର :

(i) $\sqrt{5}$ ଓ $\sqrt{2}$ (ii) $\sqrt{20}$ ଓ $\sqrt{5}$ (iii) $3+\sqrt{2}$ ଓ $3-\sqrt{2}$ (iv) $\sqrt{12}, \sqrt{45}$ ଓ $\sqrt{15}$

10. ନିମ୍ନଲିଖିତ ରାଶିମାନଙ୍କୁ x ସହ ଗୁଣନ କଲେ ଯଦି ଗୁଣଫଳ 1 (ଏକ) ତେବେ x ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯେପରିକି x ର ହର ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ହେବ ।

(i) $\sqrt{3}$ (ii) $3\sqrt{2}$ (iii) $2+\sqrt{3}$ (iv) $\sqrt{5}-1$ (v) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$

11. 0.303003000300003.... ଦଶମିକ ରାଶିଟି ପରିମେୟ କି ଅପରିମେୟ କାରଣ ସହ ଲେଖ ।

12. P ଓ Q ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ ସଂଖ୍ୟାରେଖାରେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ସଂଖ୍ୟା ଯୋଡ଼ି ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ହେଲେ ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ର ପାଇଁ PQ ଦୂରତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) 8 ଓ 15 (ii) -4 ଓ 3.2 (iii) -3.7 ଓ -6.1 (iv) π ଓ -3π

13. ନିମ୍ନଲିଖିତ ରାଶିମାନଙ୍କୁ ପରିମେୟ ହର ବିଶିଷ୍ଟ ରାଶିରେ ପ୍ରକାଶ କର ।

(i) $\frac{2}{3(\sqrt{3}+2)}$ (ii) $\frac{2}{1+\sqrt{2}}$ (iii) $\frac{2}{\sqrt{2}+3}$ (iv) $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$ (v) $\frac{5}{3-\sqrt{2}}$

(vi) $\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ (vii) $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ (viii) $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ (ix) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

14. ସରଳ କର :

(i) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ (ii) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$

15. a ଓ b ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ ନିମ୍ନଲିଖିତ କ୍ଷେତ୍ରରେ ସେମାନଙ୍କ ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=a+b\sqrt{3}$ (ii) $\frac{4+\sqrt{5}}{4-\sqrt{5}}=a+b\sqrt{5}$ (iii) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{8}}=a+b\sqrt{6}$

16. ସଂଖ୍ୟାରେଖା ଅଙ୍କନ କରି କମ୍ପାସ୍ ଓ ସ୍କେଲ୍‌ର ବ୍ୟବହାର ଦ୍ୱାରା ନିମ୍ନଲିଖିତ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କୁ ସଂଖ୍ୟା ରେଖାରେ ଚିହ୍ନଟ କର ।

(i) $\frac{3}{5}$ (ii) $1\frac{1}{3}$ (iii) $\sqrt{2}-1$ (iv) $\sqrt{2}+1$ (v) $2+\sqrt{3}$ (vi) $\sqrt{5}$ (vii) $\sqrt{3}-1$

17. ସଂଖ୍ୟାରେଖାରେ ନିମ୍ନ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କୁ ସ୍ଥାପନ କରି କେଉଁଟି ବୃହତ୍ତର ସ୍ଥିର କର ।

(i) $-\sqrt{3}$ ଓ $-\sqrt{2}$ (ii) $\frac{3}{4}$ ଓ $\frac{2}{3}$ (iii) $\sqrt{2}$ ଓ $1\frac{1}{2}$ (iv) 1.7 ଓ $\sqrt{3}$

18. ସରଳ କର : $\left|\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+1}-\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right|$

19. ଉଦାହରଣ ନେଇ ସତ୍ୟତା ପରୀକ୍ଷା କର (ଯେଉଁଠାରେ x ଓ y ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା) ।

(i) $|x+y| \le |x|+|y|$ (ii) $|x-y| \ge \big||x|-|y|\big|$

20. ସରଳ କର

(i) $\left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}$; $a > 0$ ଓ $n \in N$ (ii) $\left(\sqrt[3]{3}^{\sqrt[3]{3}}\right)^{\sqrt[3]{3^2}}$ (iii) $27^{1\frac{1}{3}} \times \sqrt{\frac{1}{9}} \div 81^{-\frac{1}{4}}$

21. ଗୁଣଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର

(i) $\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)$ $(a > 0, b > 0)$ (ସୂଚନା : $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ ର ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗ କର ।)

(ii) $\left(1 - a^{\frac{1}{4}}\right)\left(1 + a^{\frac{1}{4}}\right)\left(1 + a^{\frac{1}{2}}\right)$ $(a > 0)$

(iii) $\left(1 + a^{\frac{1}{2}}\right)\left(1 + a^{\frac{1}{4}}\right)\left(1 + a^{\frac{1}{8}}\right)\left(1 + a^{\frac{1}{16}}\right)\left(1 + a^{\frac{1}{32}}\right)\left(1 - a^{\frac{1}{32}}\right)$ $(a > 0)$

(iv) $\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}\right)\left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}\right)$ $(x > 0, y > 0)$

(ସୂଚନା : $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3$ ର ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗ କର ।)

(v) $\left(x^{-1} + x^{\frac{-1}{2}}.y^{\frac{-1}{2}} + y^{-1}\right)\left(x^{-1} - x^{\frac{-1}{2}}.y^{\frac{-1}{2}} + y^{-1}\right)$ $(x > 0, y > 0)$

(ସୂଚନା : $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2) = a^4 + a^2b^2 + b^4$ ର ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗ କର ।)

22. ସରଳ କର ।

(i) $\sqrt[3]{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}z^{\frac{1}{3}}} \div (xyz)^{\frac{1}{3}}$ (ii) $\sqrt[3]{x^2y^4z^{-1}} \div \sqrt{x^{-\frac{2}{3}}y^2z^{-\frac{1}{3}}}$

$(x > 0, y > 0, z > 0)$

23. $\{x, y, z, a, b, c\} \subset R$ ଓ $x > 0, y > 0, z > 0$ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,

(i) $\sqrt{x^{-1}y} \times \sqrt{y^{-1}z} \times \sqrt{z^{-1}x} = 1$

(ii) $\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{\frac{1}{ab}} \times \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{\frac{1}{bc}} \times \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{\frac{1}{ca}} = 1$ $(a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0)$

(iii) $\left(x^{\frac{1}{a-b}}\right)^{\frac{1}{b-c}} \times \left(x^{\frac{1}{b-c}}\right)^{\frac{1}{c-a}} \times \left(x^{\frac{1}{c-a}}\right)^{\frac{1}{a-b}} = 1$ (a, b ଓ c ର ମୂଲ୍ୟ ଅସମାନ।)

24. (i) $a = 2^{\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}$ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $2a^3 + 6a = 3$

(ii) $a = x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{1}{3}}$, $x > 0$ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $a^3 + 3a = x - \frac{1}{x}$

25. x ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

(i) $3^{x+1} = 9$ (ii) $2^{2x+1} = 8$ (iii) $\left(\sqrt{2}\right)^{2x-1} = 1$

26. ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାର ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ଓ ଆଲୋଚିତ ଅନ୍ୟ ଧର୍ମ ଗୁଡ଼ିକୁ ନେଇ ନିମ୍ନଲିଖିତ ଅଭେଦ ଗୁଡ଼ିକ ପ୍ରତିପାଦନ କର।

(i) $a(a-b) = a^2 - ab$

(ii) $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

(iii) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

(iv) $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

(v) $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

(vi) $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

27. $x \in R, x \neq 0, a, b, c \in R$ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,

$$\frac{1}{1+x^{b-a}+x^{c-a}}+\frac{1}{1+x^{c-b}+x^{a-b}}+\frac{1}{1+x^{a-c}+x^{b-c}}=1$$

28. ନିମ୍ନଲିଖିତ କ୍ଷେତ୍ରରେ x ର ମାନ ନିରୂପଣ କର :

(i) $|x-3| = 7$ (ii) $|x+1| = 11$

(iii) $|2x-1| = 3$ (iv) $|3x+4| = 5$

29. ନିମ୍ନରେ ପ୍ରଦତ୍ତ ରାଶିମାନଙ୍କୁ ପରିମେୟ ଓ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ର ସମଷ୍ଟି ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କର।

(i) $\frac{3}{3+\sqrt{5}}$ (ii) $\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{8}}$ (iii) $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

30. ନିମ୍ନଲିଖିତ ଅସମୀକରଣମାନଙ୍କୁ ସମାଧାନ କର।

(i) $|x| < \frac{1}{2}$ (ii) $|x| > 1$

(iii) $|3x| \leq 5$ (iv) $|2x| \geq 3$

(v) $|3x-1| \leq 7$ (vi) $|7x+3| \geq 5$