10 सरल आवर्त गति

सरल आवर्त गति

दोलनी गति जिसमें प्रत्यानयन बल विस्थापन के समानुपाती परन्तु दिशा विपरीत है।

प्रत्यानयन बल

$$F = -kx$$

प्रत्यानयन युग्म

$$\tau = -C\theta$$

गति का समीकरण

रेखीय स. आ. ग.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \text{ जहाँ } \omega^2 = \frac{k}{m}$$

कोणीय स. आ. ग.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0, \text{ जहाँ } \omega^2 = \frac{C}{I}$$

स. आ. ग. में विस्थापन

$$x = a \sin(\omega t + \phi)$$

जहाँ a = आयाम, ω = कोणीय आवृत्ति $= 2\pi n = \frac{2\pi}{T}$

$(\omega t + \phi)$ = किसी समय t कला, ϕ = प्रा. कला कोण

स. आ. ग. में वेग

$$v = \frac{dx}{dt} = a\omega \cos(\omega t + \phi)$$

या $v = \omega (a^2 - x^2)^{1/2}$

$v_{max} = a\omega$, जब $x = 0$

तथा $v_{min} = 0$, जब $x = a$

स. आ. ग. में त्वरण

$$f = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 a \sin(\omega t + \phi)$$

या $f = -\omega^2 x$

$f_{max} = \omega^2 a$, उच्चतम स्थिति पर

तथा $f_{min} = 0$, जब $x = 0$

आवर्तकाल एवं आवृत्ति

रेखीय S.H.M.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

और आवृत्ति $$n = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

कोणीय S.H.M.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}},$$

$$n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{C}{I}}$$

स. आ. ग. में गतिज ऊर्जा

$$KE = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2a^2\cos^2(\omega t + \phi)$$

$$= \frac{1}{2}ka^2\cos^2(\omega t + \phi)$$

या $$KE = \frac{1}{2}m\omega^2(a^2 - x^2)$$

$$= \frac{1}{2}k(a^2 - x^2)$$

$$(KE)_{max} = \frac{1}{2}ka^2 = \frac{1}{2}m\omega^2a^2 \quad \text{जब } x = 0.$$

$$(KE)_{min} = 0. \quad \text{जब } x = \pm a.$$

विस्थापन के सापेक्ष औसत गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{3}ka^2$

समय के सापेक्ष औसत गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{4}ka^2$.

स. आ. ग. में स्थितिज ऊर्जा

$$PE = U(x) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

$$= \frac{1}{2}ka^2\sin^2(\omega t + \phi)$$

$$(PE)_{max} = \frac{1}{2}ka^2 = \frac{1}{2}m\omega^2a^2$$

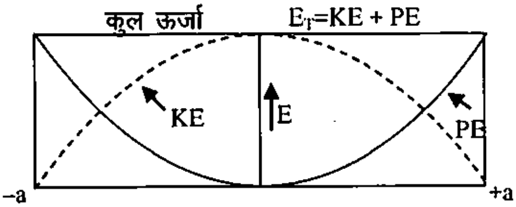
$$= 2\pi^2mn^2a^2, \text{ जब } x = \pm a.$$

$$(PE)_{min} = 0, \quad \text{जब } x = 0.$$

विस्थापन के सापेक्ष औसत स्थितिज ऊर्जा $= \frac{1}{6}ka^2$

समय के सापेक्ष औसत स्थितिज ऊर्जा $= \frac{1}{4}ka^2$.

स. आ. ग. में कुल ऊर्जा

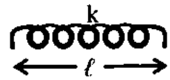


कुल ऊर्जा $\quad E = KE + PE = \frac{1}{2}\ ka^2 = \frac{1}{2}m\omega^2a^2$

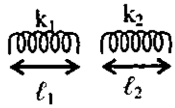
स्प्रिंग से जुड़े द्रव्यमान का आवर्तकाल

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ $\quad k \rightarrow$ बल नियतांक

स्प्रिंग नियतांक k



$$k \propto \frac{1}{\ell}$$

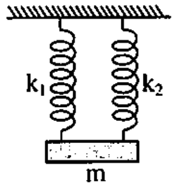


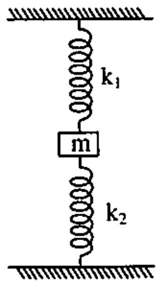
यदि स्प्रिंग को दो भागों ℓ_1 तथा ℓ_2 में काट दिया जाये तो

$k_1 = \frac{\ell}{\ell_1}k = \frac{\ell_1+\ell_2}{\ell_1}k\ , \quad k_2 = \frac{\ell_1+\ell_2}{\ell_2}k$

यदि स्प्रिंग को समान भागों में काटा जाये तो प्रत्येक नये भाग का स्प्रिंग नियतांक $k' = nk$

स्प्रिंगों का समान्तर संयोजन





प्रभावी बल नियतांक

$k' = k_1 + k_2 + \ldots\ldots\ldots + k_n$

$T' = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k'}}$

n एक समान स्प्रिंग के लिए $k' = nk$

$T' = \frac{T}{\sqrt{n}}$

$T \rightarrow$ केवल एक स्प्रिंग के कारण आवर्तकाल

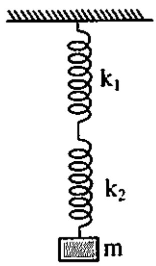
श्रेणी क्रम में संयोजन

प्रभावी बल नियतांक k'हो, तो

$\frac{1}{k'} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{k_n}$

एक समान स्प्रिंगों के लिये $\frac{1}{k'} = \frac{n}{k}$

एवं $\quad T' = T\sqrt{n}$

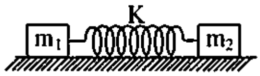


दो स्प्रिंगों के लिये $\dfrac{1}{k'} = \dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2}$ या $k' = \dfrac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{m(k_1+k_2)}{k_1 k_2}}$$

स्प्रिंग के दोनों सिरों से बन्धे दो द्रव्यमान

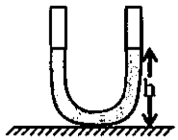
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{k}}$$



जहाँ $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ = समानित द्रव्यमान

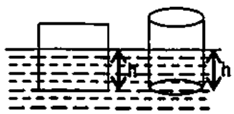
U-ट्यूब में द्रव का दोलन

$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{h}{g}}$ h द्रव स्तम्भ की ऊर्ध्वाधर ऊँचाई है।



तैरती वस्तु का दोलन

बैलनाकार वस्तु $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{adg}}$



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$$

आयताकार वस्तु $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{h}{g}}$

$d \rightarrow$ द्रव का घनत्व

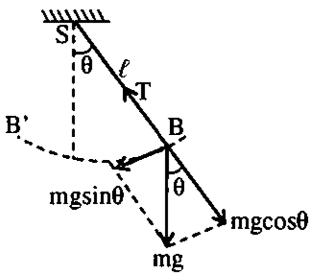
$a \rightarrow$ अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल

$m \rightarrow$ वस्तु का द्रव्यमान

$h \rightarrow$ द्रव के अन्दर डूबी हुई बेलन या ब्लॉक की लम्बाई

सरल लोलक आवर्तकाल

$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$ $(\ell << R)$



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g\left(1+\frac{R}{\ell}\right)}}$$

जहाँ ℓ, R की कोटि का है।

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

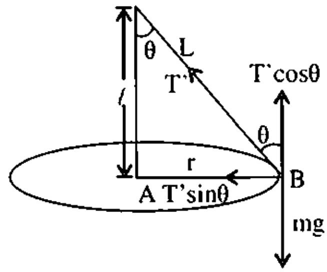
जब $\ell \rightarrow \infty$, T = 84.4 meter

सरल लोलक की गति स. आ. ग. तब ही होगी जबकि कोण θ_0 अल्प होगा।

सेकण्ड सरल लोलक

T = 2 सैकण्ड़ ; ℓ = 96 cm.

शंकुल सरल लोलक



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g\tan\theta}}$$

$$= 2\pi\left[\frac{\sqrt{L^2 - r^2}}{g}\right]^{1/2} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

निर्देश तल में आवर्तकाल, जबकि निर्देश तल स्वयं क्षैतिज में 'a' त्वरण से गतिमान हो

$$T = 2\pi\left[\frac{\ell}{\sqrt{g^2 + a^2}}\right]^{1/2}$$

सरल लोलक की लिफ्ट में गति

जब लिफ्ट a त्वरण से ऊपर जा रही हो,	$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g+a}}$
जब लिफ्ट a तवरण से नीचे जा रही हो,	$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g-a}}$
लिफ्ट स्वतन्त्रता पूर्वक गिर रही है। (a = g),	$T = \infty$
लिफ्ट एक समान वेग से गतिमान हो। (a = 0),	$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$

ρ घनत्व के पिण्ड के सरल लोलक की d घनत्व के द्रव में स. आ. ग.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g\left(1-\frac{d}{\rho}\right)}}$$

एक तार जिसका यंग का प्रत्यास्थता गुणांक Y है से लटकी एक वस्तु को ऊर्ध्वाधर स. आ. ग.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{mL}{YA}}$$

$A \rightarrow$ तार के अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल

$m \rightarrow$ वस्तु का द्रव्यमान

$L \rightarrow$ तार की लम्बाई

$Y \rightarrow$ यंग का प्रत्यास्थता गुणांक

अवतल काँच में स्थित एक छोटी गेंद की स. आ. ग.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$