अध्याय

10

क्षेत्रमिति
(Mensuration)

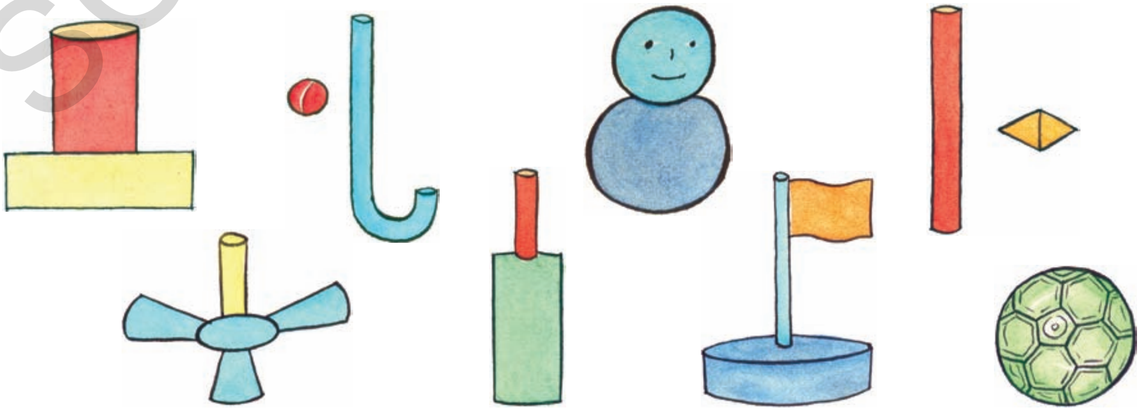
10.1 प्रस्तावना

8 वीं और 9 वीं कक्षाओं में हमने साधारण ठोस आकृतियों के क्षेत्रफल और आयतन का अध्ययन किया है। उनका अर्थ समझने के लिये हमने अनेक अध्ययन किये हैं। हमने उन्हें वास्तविक जीवन की घटनाओं में उपयोग किया है और मापन का अनुमान लगाने की आवश्यकता को पहचाना है। उदाहरण के लिये, एक कमरे को चूना लगाने के लिये आवश्यक पेंट की जानकारी के लिये हमें उसके समतल का क्षेत्रफल चाहिए और आयतन नहीं। कुछ अनाज़ की मात्रा कितने डिब्बों में भरी जायेगी, यह संख्या आयतन से ज्ञात होगी और क्षेत्रफल से नहीं।

प्रयास कीजिए।

1. निम्न परिस्थितियों पर विचार कीजिए। प्रत्येक में यह ज्ञात कीजिए कि क्षेत्रफल या आयतन आवश्यक है। क्यों?
   i. एक बोतल में पानी की मात्रा।
   ii. तम्बू बनाने के लिये आवश्यक कॉनवास
   iii. एक लॉरी में बस्तों की संख्या।
   iv. सिलंडर में भरी गई गैस
   v. माचिस के डिब्बे में तीलियों की संख्या।
   vi. गिफ्ट पैक का पेपर
2. इसी तरह 5 उदाहरण तैयार (Compute) कीजिए और अपने मित्रों से उसकी आवश्यकता पूछिये।

हम अपने आस-पास विभिन्न आकृतियों (दो या दो से अधिक) की वस्तुएँ देखते हैं। खंभो पर खडे मकान, पानी की टंकी, बेलनाकार है और वह घनाभाकार के आधार पर हैं, एक क्रिकेट का हैंडल बेलनाकार है जो एक चपटे लकडी पर है, आदि। आप अपने आस-पास के विभिन्न वस्तुओं के बारे में सोचिये। इनमें से कुछ नीचे बताये गये हैं।

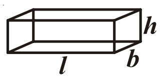
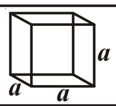
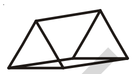
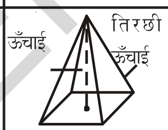
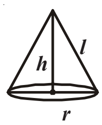
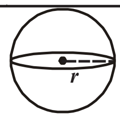
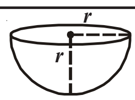


प्रयास कीजिए।

1. पिछले पृष्ट पर जो चित्र हैं उनको तोडकर ठोस आकृति में विभाजित कीजिए।
2. अन्य 5 वस्तुओं के विषय में सोचिये जो आकृतियों का संयोजन है। उन आकृतियों का नाम बताइये जिसको जोडकर वह बनाया गया है।

आइये हम ठोस आकृतियों के समतल क्षेत्रफल और आयतन का स्मरण करेंगे।

आपने पढा है कि साधारण ठोस वस्तुओं का तलीय क्षेत्रफल और आयतन कैसे ज्ञात किया जाता है। प्रायः हमने कुछ अन्य वस्तुओं को देखा है जो ठोस आकृतियों का संयोजन है। इसलिये, अब हम उनका समतल क्षेत्रफल और आयतन ज्ञात करेंगे।

क्र. सं.	ठोस का नाम	चित्र	पार्श्व/ वक्र क्षेत्रफल	संपूर्णतल क्षेत्रफल	आयतन	शब्दावली
1.	घनाभ		$2h(l+b)$	$2(lb+bh+hl)$	lbh	l:लम्बाई b:चौडाई h:ऊँचाई
2.	घन		$4a^2$	$6a^2$	a^3	a:घन की भुजा
3.	लम्ब प्रिज्म		आधार की परिमिति $\times$ ऊँचाई	पार्श्व तल का क्षेत्रफल+2(अंत समतलों का क्षेत्रफल)	आधार का क्षेत्रफल $\times$ ऊँचाई	-
4.	वृत्ताकार लम्ब बेलन		$2\pi rh$	$2\pi r(r+h)$	$\pi r^2 h$	r:आधार की त्रिज्या h:ऊँचाई
5.	लम्ब पिरामिड		$\frac{1}{2}$ (आधार की परिमिति) $\times$ तिरछी ऊँचाई	पार्श्वतल का क्षेत्रफल +आधार का क्षेत्रफल	$\frac{1}{3}$ (आधार का क्षेत्रफल $\times$ ऊँचाई	-
6.	वृत्तकार लम्ब शंकु		πrl	$\pi r(l+r)$	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$	r:आधार की त्रिज्या h:ऊँचाई l:तिरछी ऊँचाई
7.	गोला		$4\pi r^2$	$4\pi r^2$	$\frac{4}{3}\pi r^3$	r:त्रिज्या
8.	अर्ध गोला		$2\pi r^2$	$3\pi r^2$	$\frac{2}{3}\pi r^3$	r:त्रिज्या

अब, हम तालिका में दिये गये आकृतियों के पार्श्व धरातल के क्षेत्रफल (CSA) तथा संपूर्ण धरातल के क्षेत्रफल (TSA) को विस्तार रूप से समझने के लिये कुछ उदाहरण देखेंगे।

उदाहरण-1. एक शंकु आकार के तंबू की त्रिज्या 7 मी है और उसकी ऊँचाई 10 मी. है। तंबु बनाने के लिये कैनवस (canvas) की लम्बाई ज्ञात कीजिए यदि उसकी चौडाई 2 मी हो। $\left[\text{Use } \pi = \frac{22}{7}\right]$

हल : शंकु आकार के तंबू की त्रिज्या $(r) = 7$ मी.

शंकु आकार के तंबू की ऊँचाई $(h) = 10$ मी.

$\therefore$ शंकु की तिरछी लम्बाई $\quad l^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow l = \sqrt{r^2 + h^2}$

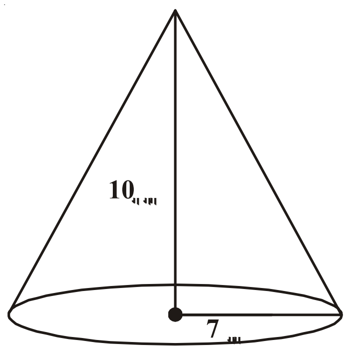
$$= \sqrt{49 + 100}$$

$$= \sqrt{149} = 12.2 \text{ मी}$$

अब, तंबू का समतल क्षेत्रफल $= \pi r l$

$$= \frac{22}{7} \times 7 \times 12.2 \text{ मी}^2$$

$$= 268.4 \text{ मी}^2.$$

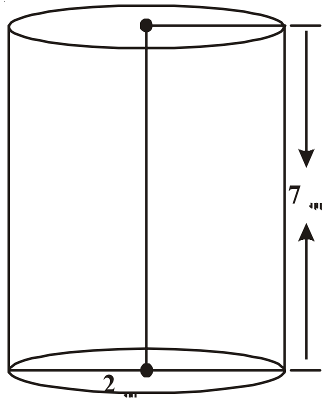


कैनवस का क्षेत्रफल $= 268.4$ मी^{2}

कैनवस की चौड़ाई दी गई है $= 2$m

कैनवस की लम्बाई $= \dfrac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{चौडाई}} = \dfrac{268.4}{2} = 134.2$ मी.

उदाहरण-2. एक तेल का ड्रम बेलनाकार का है जिसको ड्रम को पेंट करने का खर्च ₹3 प्रति मी^{2} है। पेंटर को कितनी राशी देनी होगी यदि वह 10 ड्रम पेंट करे?



हल : तेल के ड्रम (बेलन) का व्यास $= 2$ मी.

बेलन की त्रिज्या $= \dfrac{d}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$ मी

बेलनाकार ड्रम का संपूर्ण तल का क्षेत्रफल $= 2 \times \pi r (r + h)$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 1(1 + 7) = 2 \times \frac{22}{7} \times 8$$

$$= \frac{352}{7} \text{ मी}^2 = 50.28 \text{ मी}^2$$

ड्रम के संपूर्ण तल का क्षेत्रफल $= 50.28$ मी^{2}

पेंट करने का खर्च $=$ ₹ 3 प्रति 1 मी^{2}

10 ड्रम को पेंट करने का खर्च $= 50.28 \times 3 \times 10 =$ ₹ 1508.40

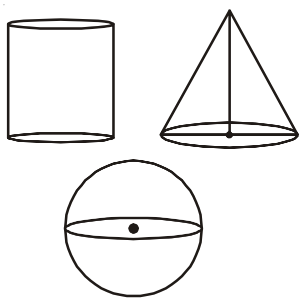
उदाहरण-3. एक गोला, एक बेलन और एक शंकु समान त्रिज्या और समान ऊँचाई के है। उनके वक्रतल के क्षेत्रफल का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल: मान लीजिए, गोला, बेलन और शंकु की त्रिज्या r है।

गोले की ऊँचाई $=$ उसका व्यास $= 2r$.

तब, शंकु की ऊँचाई $=$ बेलन की ऊँचाई $=$ गोले की ऊँचाई.

$= 2r$.



मान लीजिए शंकु की तिरछी ऊँचाई l है। तब $l = \sqrt{r^2 + h^2}$

$$= \sqrt{r^2 + (2r)^2} = \sqrt{5}r$$

$S_1 =$ गोले के वक्रतल का क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$

$S_2 =$ बेलन के वक्रतल का क्षेत्रफल, $2\pi rh = 2\pi r \times 2r = 4\pi r^2$

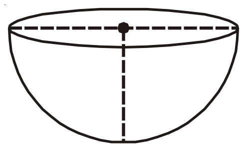
$S_3 =$ शंकु के वक्रतल का क्षेत्रफल $= \pi rl = \pi r \times \sqrt{5}\, r = \sqrt{5}\, \pi r^2$

तीनों के वक्रतल के क्षेत्रफल का अनुपात $=$

$$S_1 : S_2 : S_3 = 4\pi r^2 : 4\pi r^2 : \sqrt{5}\, \pi r^2$$

$$= 4 : 4 : \sqrt{5}$$

उदाहरण-4. एक कंपनी एक पतली स्टील की चादर से 1000 अर्धगोलाकार बेसिन बनाना चाहती है। यदि प्रत्येक बेसिन की त्रिज्या 21 से.मी. है तो उपरोक्त बेसिन बनाने के लिये कुल कितने क्षेत्रफल की स्टील की चादर की आवश्यकता होगी?



हल: अर्धगोलाकार बेसिन की त्रिज्या (r) $= 21$ से.मी.

अर्धगोलाकार बेसिन का समतल क्षेत्रफल $= 2\pi r^2$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 = 2772 \text{ से.मी.}^2$$

इसलिये, एक अर्धगोलाकार बेसिन के लिये आवश्यक स्टील की चादर का क्षेत्रफल $= 2772$ से.मी.^{2}

1000 बेसिन के लिये आवश्यक स्टील की चादर का क्षेत्रफल $= 2772 \times 1000$

$= 2772000$ से.मी.^{2}

$= 277.2$ मी.^{2}

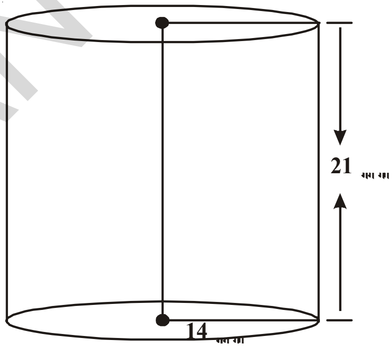
उदाहरण-5. एक वृत्ताकार लम्ब बेलन के आधार की त्रिज्या 14 से.मी. और ऊँचाई 21 से.मी. है। ज्ञात कीजिए: (i) आधार का क्षेत्रफल (ii) वक्रतल का क्षेत्रफल (iii) संपूर्ण तल का क्षेत्रफल (iv) आयतन

हल: बेलन की त्रिज्या (r) = 14 से.मी.

बेलन की ऊँचाई (h) = 21 से.मी.

अब (i) वक्रतल का क्षेत्रफल (प्रत्येक सिरे) का क्षेत्रफल

$\pi r^2 = \frac{22}{7}(14)^2 = 616$ से.मी.^{2}



(ii) वक्रतल का क्षेत्रफल $= 2\pi rh = 2 \times \frac{22}{7} \times 14 \times 21$

$= 1848$ से.मी.^{2}

(iii) संपूर्ण तल का क्षेत्रफल = $2 \times$ आधार का क्षेत्रफल + वक्रतल का क्षेत्रफल

$= 2 \times 616 + 1848 = 3080$ से.मी.^{2}

(iv) बेलन का आयतन $= \pi r^2 h =$ आधार का क्षेत्रफल $\times$ ऊँचाई

$= 616 \times 21 = 12936$ से.मी.^{3}

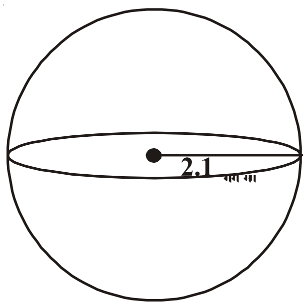
उदाहरण-6. 2.1 से.मी. त्रिज्या वाले गोले का आयतन और क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = \frac{22}{7}$)

हल: गोले की त्रिज्या (r) = 2.1 से.मी.

गोले के समतल का क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$

$$= 4 \times \frac{22}{7} \times (2.1)^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times \frac{21}{10} \times \frac{21}{10}$$

$$= \frac{1386}{25} = 55.44 \text{ से.मी.}^2$$

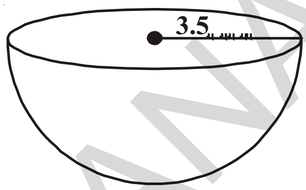


गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times (2.1)^3$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 2.1 \times 2.1 \times 2.1 = 38.808\, cm^3.$$

उदाहरण-7. 3.5 से.मी. त्रिज्या वाले अर्धगोले का आयतन और संपूर्ण तल का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए.

हल: अर्धगोले की त्रिज्या (r) 3.5 से.मी. $= \frac{7}{2}$ से.मी. है।



अर्धगोले का आयतन $= \frac{2}{3}\pi r^3$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} = \frac{539}{6} = 89.83 \text{ से.मी.}^2$$

संपूर्ण तल का क्षेत्रफल $= 3\pi r^2$

$$= 3 \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} = \frac{231}{2} = 115.5 \text{ से.मी.}^2$$

अभ्यास - 10.1

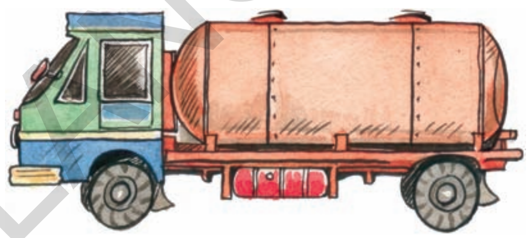
1. एक जोकर की टोपी वृत्ताकार लम्ब शंकु के आकार में है जिसकी त्रिज्या 7 से.मी. है और ऊँचाई 24 से.मी. है। ऐसी 10 टोपियाँ बनाने के लिये आवश्यक शीट का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
2. खेल की समाग्री बनाने वाली कंपनी को शटल कॉक के 100 कागज़ के बेलन बनाने का आदेश प्राप्त हुआ। बेलन के आवश्यक माप 35 से.मी. की ऊँचाई और 7 से.मी. की त्रिज्या है। 100 बेलन के लिये आवश्यक मोटे कागज़ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
3. 6 से.मी. त्रिज्या और 7 से.मी. ऊँचाई के वृत्ताकार लम्ब शंकु का आयतन ज्ञात कीजिए।
4. एक बेलन के पार्श्वतल का क्षेत्रफल, शंकु के वक्रतल के क्षेत्रफल के समान है। आधारों को समान लेते हुए, बेलन की ऊँचाई और शंकु की तिरछी ऊँचाई का अनुपात ज्ञात कीजिए।
5. एक स्वयं-सेवक-संस्था, 3 से.मी. त्रिज्या और 4 से.मी. ऊँचाई के जोकर की टोपियाँ बनाना चाहती है। यदि आवश्यक कागज़ की शीट 1000 से.मी.^{2} की है तो इस शीट से कितनी टोपियाँ बनाई जायेंगी?
6. एक बेलन और शंकु के आधार की त्रिज्यायें समान हैं और उनकी ऊँचाइयाँ भी समान हैं। बताइए कि उनके आयतन का अनुपात 3:1 है।
7. एक ठोस धातु की छड बेलनाकार की है। उसकी ऊँचाई 11 से.मी. है और उसके आधार का व्यास 7 से.मी. है। तब ऐसे 50 छडों का कुल आयतन ज्ञात कीजिए।
8. चावल का ढेर शंकु के आकार का है जिसका व्यास 12 मी. और ऊँचाई 8 मी. है। उसका आयतन ज्ञात कीजिए। इस ढेर को ढंकने के लिये कितने क्षेत्रफल कानवास-कपडे की आवश्यकता होगी? $(\pi = 3.14)$

9. शंकु के वक्रतल का क्षेत्रफल 4070 से.मी.^{2} है और उसका व्यास 70 से.मी. है। उसकी तिरछी ऊँचाई क्या है?

10.2 ठोसों के संयोजन का समतलीय क्षेत्रफल (Surface Area of the Combination of Solids)

हमने कुछ ठोस वस्तुएँ देखी हैं जो कुछ ठोस वस्तुओं के संयोजन से तैयार किये गये हैं जैसे गोला, बेलन और शंकु। वास्तविक जीवन में भी हम कुछ लकडी की वस्तुएँ, घरेलू उपकरण, दवाई के केपसूल, बोतल, तेल के टैंकर आदि देखते हैं। हम अपने दैनिक जीवन में आइस-क्रीम खाते हैं। क्या आप बतायेंगे कि उसमें कितनी ठोस आकृतियाँ हैं? यह साधारणतः एक शंकु और अर्धगोलाकार से बनी है।

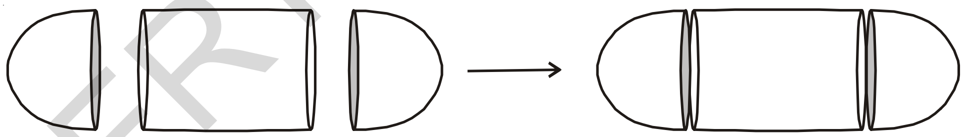
हम एक अन्य उदाहरण जैसे तेल का टेंकर/पानी के टेंकर लेंगे। यह एक ही आकृति की वस्तु है। आप अनुमान लगायेंगे कि वह एक बेलन और दो अर्धगोले से बनी है।



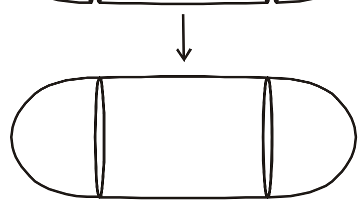
यदि कोई कारण से आप ऐसे वस्तुओं का समतलीय क्षेत्रफल या आयतन ज्ञात करना चाहते हैं तो आप क्या करेंगे? अब तक अध्ययन किये गये कोई भी ठोस आकृति से ये मेल नहीं रखते हैं।

जैसा कि हमने देखा है, तेल का टेंकर एक बेलन के दोनो सिरों पर अर्धगोले लगाकर बनाया गया है। वह निम्न आकृति जैसा दिखाई देगा। :

नये ठोस का संपूर्ण धरातल का क्षेत्रफल = एक अर्धगोले का वक्रतल का क्षेत्रफल + बेलन के

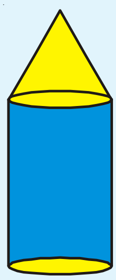


वक्रतल का क्षेत्रफल + दूसरे अर्धगोले का क्षेत्रफल



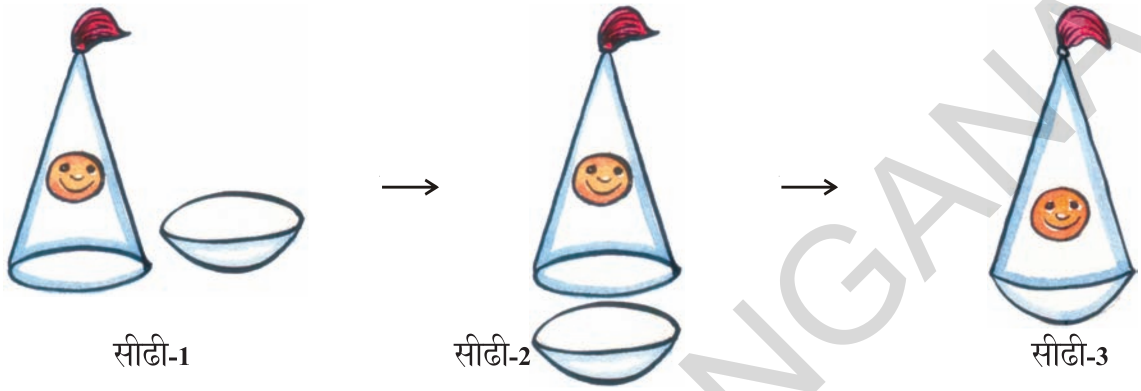
अब, एक अन्य उदाहरण को देखिये :

सोचिए - चर्चा कीजिए।



सोनिया ने एक खिलोंना बनाया। उसने बेलन पर शंकु आकार का है। उसकी वृत्ताकार की ज्या समान है। उसने अर्चना से कहा खिलोने को संपुर्ण धरातल का क्षेत्रफळ शंकु तथा बेलन के संपुर्ण धरातल के योग बराबर होगा क्या आप इससे सहमत है? आपके उत्तर का औचित्य बताईए।

यदि हमें एक खिलोना बनाना हो जिसमें अर्धवृत्त तथा शंकु को मिलाना है। चलिए अब उसके चरणों को देखेंगे। पहले वह शंकु और अर्धगोले के चपटे समतलों को निकट लाना होगा। यहाँ वह प्रायः उसके लिये शंकु और अर्धगोला समान त्रिज्या का लेना होगा, जिससे उस खिलौने का एक चिकना धरातल हो। अतः इसकी सीढियाँ निम्न प्रकार से होंगी।



सीढी-1 सीढी-2 सीढी-3

अंत में उसे एक गोल पेंदी वाला खिलोना प्राप्त हुआ। अब, यदि वह यह उठाना चाहता है कि उस खिलोने को पेंट करने के लिये कितने पेंट की आवश्यकता है, तो उसे इसके लिए उस खिलौने का समतलीय क्षेत्रफल ज्ञात होना चाहिये? उसे उस खिलौने का संपूर्णतल का क्षेत्रफल ज्ञात होना चाहिये जो अर्धगोले का संपूर्णतल का क्षेत्रफल और शंकु के संपूर्णतल का क्षेत्रफल का सम्मिश्रण है।

खिलौने का संपूर्ण तल का क्षेत्रफल

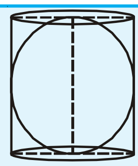
= अर्धगोले के वक्रतल का क्षेत्रफल + शंकु के वक्र तल का क्षेत्रफल

प्रयास कीजिए।

- आपको जिन आकृतियों की जानकारी है उनका उपयोग करते हुए अपने दैनिक जीवन में अत्यधिक वस्तुएँ को बनाइए। (दो से अधिक वस्तुओं के संयोजन से)
  [संकेत: चिकनी मिट्टी, गेंद, पैप, कागज़ के शंकु, घन और घनाभ के जैसे डिब्बे आदि का उपयोग करें।]

सोचिए - चर्चा कीजिए।

एक बेलन के भीतर एक गोला है। क्या गोले के धरातल का क्षेत्रफल,



* बेलन तथा गोले संपुर्ण धरातल के क्षेत्रफळ का अनुपात क्या होगा?

उदाहरण - 8. कौशिक को उसके जन्म दिवस पर एक खिलौना तोहफे में मिला, उस पर कोई रंग नहीं था। वह उसे अपने क्रेयान से रंगना चाहता है। उसका उपरी हिस्सा शंकु आकार का है, जो एक अर्धगोलाकार पर रखा गया है। उसके ऊपरी भाग की ऊँचाई 5 से.मी. है तथा उसकी त्रिज्या 3.5 से.मी. हो तो रंगने वाले भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। $\left(\text{Take } \pi = \frac{22}{7}\right)$

हल : यह खिलौना उस वस्तु की तरह है। जिसमें शंकु तथा अर्धगोलाकार का सम्मिलन किया गया है, जिनकी त्रिज्यायें वृत्ताकार आधार के समान है।

अर्थात,

संपूर्ण धरातल का क्षेत्रफल= अर्धगोले के पार्श्वधरातल का क्षेत्रफल+शंकु के पार्श्वधरातल का क्षेत्रफल

अब, अर्धगोले के पार्श्वधरातल का क्षेत्रफल=

$$= \frac{1}{2}\left(4\pi r^2\right) = 2\pi r^2$$

$$= \left(2\times\frac{22}{7}\times\frac{3.5}{2}\times\frac{3.5}{2}\right) = cm^2$$

अर्थात, शंकु की ऊँचाई = खिलौने की ऊँचाई - अर्धगोले की ऊँचाई

$$= \left(5-\frac{3.5}{2}\right) = cm = 3.25cm$$

इसलिए शंकु की तिर्यक ऊँचाई

$$l = \sqrt{r^2+h^2} = \sqrt{\left(\frac{3.5}{2}\right)^2 + (3.25)^2}\, cm = 3.7cm \quad \text{(लगभग)}$$

इसलिए शंकु के पार्श्वधरातल का क्षेत्रफल $= \pi rl = \left(\frac{22}{7}\times\frac{3.5}{2}\times 3.7\right)cm^2$

यह हमें खिलौने के संपुर्ण धरातल का क्षेत्रफल देता है।

$$= \left(2\times\frac{22}{7}\times\frac{3.5}{2}\times\frac{3.5}{2}\right)cm^2 + \left(\frac{22}{7}\times\frac{3.5}{2}\times 3.7\right)cm^2$$

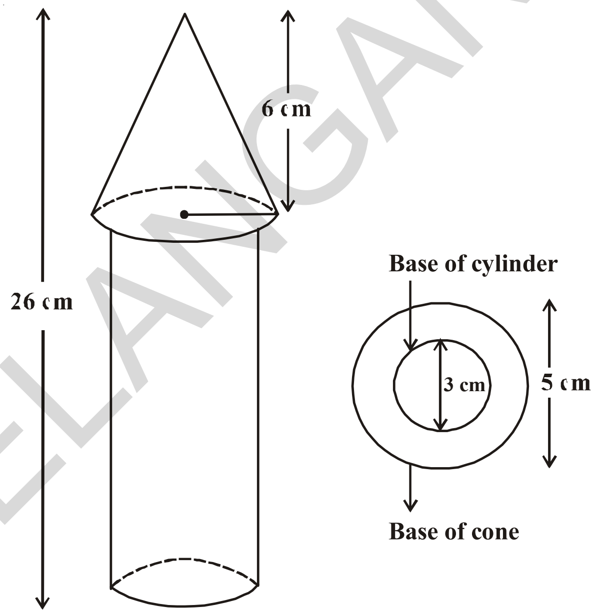
$$= \frac{22}{7}\times\frac{3.5}{2}\left(3.5+3.7\right)cm^2 = \frac{11}{2}\times(3.5+3.7)cm^2$$

$$= 39.6\text{cm}^2 \text{ (लगभग)}$$

नोट : आप यह ध्यान दिजिए की खिलौने के संपूर्ण धरातल का क्षेत्रफल शंकु तथा अर्धगोले के संपूर्ण धरातल के क्षेत्रफलों का योग नही है।

उदाहरण-9. एक खिलोने का राकेट चित्र में दिखाये अनुसार (एक बेलन पर शंकु) जुडा हुआ है। राकेट की संपूर्ण ऊँचाई 26 से.मी. है। जब कि शंकु की ऊँचाई 6 से.मी. है। शंकु आकार का व्यास 5 से.मी. है जबकि बेलन का व्यास 3 से.मी. है। यदि राकेट का शंकु आकार का भाग आरेंज रंग के पेंट से और बेलनाकार भाग पीले रंग से पेंट करना है तो बताइए इनमें से प्रत्येक रंग से रंगे गये भाग का क्षेत्रफल क्या होगा? ($\pi = 3.14$ से.मी.)

हल: मान लीजिए 'r' शंकु के आधार की त्रिज्या है और 'l' उसकी तिरछी ऊँचाई है। आगे, मान लीजिए . r_1 बेलन की त्रिज्या है और h_1 उसकी ऊँचाई है।



हमें प्राप्त है,

$r = 2.5$ से.मी., $h = 6$ सेमी.

$r_1 = 1.5$ से.मी. $h_1 = 20$ से.मी.

अब, $l = \sqrt{r^2 + h^2}$

$\Rightarrow \quad l = \sqrt{(2.5)^2 + 6^2}$

$l = \sqrt{6.25 + 36} = \sqrt{42.25} = 6.5$

अब, आरेंज रंग से पेंट करने का क्षेत्रफल

शंकु का वक्रतल का क्षेत्रफल + शंकु के आधार का क्षेत्रफल - बेलन के आधार का क्षेत्रफल

$= \pi r l + \pi r^2 - \pi r_1^2$

$= \pi\{(2.5 \times 6.5) + (2.5)^2 - (1.5)^2\}$ से.मी.^{2}

$= \pi(20.25)$ से.मी.$^2 = 3.14 \times 20.25$ से.मी.^{2}

$= 63.585$ से.मी.^{2}

पीले रंग से पेंट करने का क्षेत्रफल

= बेलन के वक्रतल का क्षेत्रफल + बेलन के आधार का क्षेत्रफल

$= 2\pi r_1 h_1 + \pi r_1^2 = \pi r_1 (2h_1 + r_1)$

$= 3.14 \times 1.5\ (2\times20+1.5)$ से.मी.^{2}

$= 3.14 \times 1.5 \times 41.5$ से.मी.^{2}

$= 4.71 \times 41.5$ से.मी.^{2}

$= 195.465$ से.मी.^{2}.

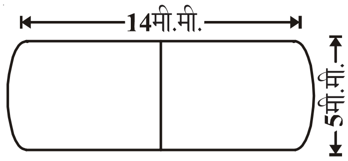
पीले रंग का क्षेत्रफल $= 195.465$ से.मी.^{2}

अभ्यास - 10.2

1. एक खिलौना ऐसा है कि अर्धगोले पर शंकु चिपका हुआ है। शंकु के आधार का व्यास और ऊँचाई क्रमशः 6 से.मी. और 4 से.मी. है। खिलोने के धरातल का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। [$\pi = 3.14$]

2. एक ठोस वस्तु इस प्रकार है कि वृत्ताकार लम्ब बेलन के एक ओर अर्धगोला है और दूसरी ओर शंकु है। सामान्य आधार की त्रिज्या 8 से.मी. है और बेलनाकार और शंकु आकार के भाग की ऊँचाइयाँ क्रमशः 10 से.मी. और 6 से.मी. है। इस ठोस का संपूर्णतल का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। [$\pi = 3.14$]

3. एक दवाई के केपसूल का आकार ऐसा है कि बेलन के दोनों ओर अर्धगोले चिपके हुये हैं। केपसूल की लम्बाई 14 मि.मी. है और चौडाई 5 मि. मी. है। इसके धरातल का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

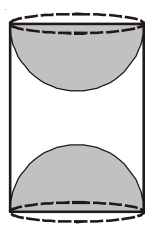


4. दो घन जिसके आयतन प्रत्येक 64 से.मी.^{3} उनके सिरे से जुडे हैं। इस तरह बनने वाले घनाभ का संपूर्णतल का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

5. एक संग्रहित टंकी वृत्तकार बेलन के आकार में है जिसके दोनो ओर अर्धगोले लगे हुए हैं। यदि उसका बाहर का व्यास 1.4 मी. और लम्बाई 8 मी., तो बाहर की ओर पेंट करने का खर्च ₹20 प्रति मी^{2} की दर से ज्ञात कीजिए।

6. एक गोला, बेलन और शंकु की त्रिज्या और ऊँचाई समान है। उनके आयतन का अनुपात ज्ञात कीजिए। (सूचना : गोले की ज्या बेलन तथा शंकु की ऊँचाई के बराबर होती है।)

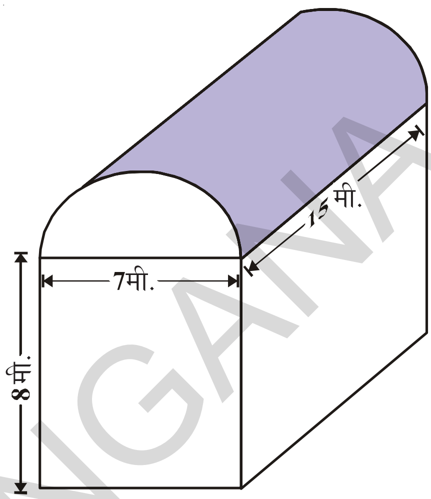
7. एक घनाकार लकडी के टुकडे से एक अर्धगोला काटा गया जिसका व्यास घन की लम्बाई के बराबर है। शेष लकडी के टुकडे का समतलीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



8. एक लकडी के बेलन के भीतर से दो अर्धगोले काटे गये जैसा कि चित्र में दिखाया गया है। यदि बेलन की ऊँचाई 10 से.मी. है और उसके आधार की त्रिज्या 3.5 से.मी. है तो वस्तु का संपूर्ण तल का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

10.3 ठोस वस्तुओं के संयोजन का आयतन (Combination of Solids)

आइए हम आयतन को एक उदाहरण द्वारा समझेंगे।



सुरेश अपना कारखाना एक गोदाम में चलाता है जो घनाभ के ऊपर अर्धबेलनाकार की आकृति में है। गोदाम के आधार के माप 7 मी $\times$ 15 मी है और घनाभाकार की ऊँचाई 8 मी है। वायु का आयतन ज्ञात कीजिए जो गोदाम में है? गोदाम में मशीनरी 300 मी^{3} का स्थान घेरे हुये है और वहाँ 20 कर्मचारी हैं जो प्रत्येक औसत से 0.08 मी^{3} का स्थान घेरे हुए है। गोदाम में कितनी वायु है?

गोदाम में वायु का आयतन (जब वहाँ मशीन और कर्मचारी नहीं है।) घनाभ और अर्धबेलन के आयतन से प्राप्त होता है। घनाभ की लम्बाई, चौडाई और ऊँचाई क्रमशः 15 मी., 7 मी. और 8 मी. है। अर्धबेलन का व्यास 7मी. है और ऊँचाई 15 मी.।

आवश्यक आयतन $= \text{घनाभ का आयतन} + \frac{1}{2}\text{बेलन का आयतन}$

$$= \left[15\times7\times8+\frac{1}{2}\times\frac{22}{7}\times\frac{7}{2}\times\frac{7}{2}\times15\right] \text{ मी}^3$$

$$= 1128.75\text{मी}^3$$

इसके पश्चात, मशीनों (यंत्रों) से घिरा हुआ स्थान $= 300$ मी^{3}

और कर्मचारियों द्वारा घिरा हुआ स्थान $= 20\times0.08$ मी^{3}

$= 1.6$ मी^{3}

इसलिये वायु का आयतन, जब वहाँ यंत्र और कर्मचारी हैं $= 1128.75 - (300.00 + 1.60)$

$= 1128.75 - 301.60 = 827.15$ मी^{3}

नोट : ठोस वस्तुओं के संयोजन से बनी वस्तुओं के आयतन की गणना करने के लिये, हम दो ठोस वस्तुओं का समतलीय क्षेत्रफल जोड नही पायेंगे क्योंकि इस प्रक्रिया में, उनको जोडते समय कुछ भाग अदृश्य हो जाते है। लेकिन आयतन ज्ञात करते समय ऐसा नहीं होगा। मौलिक ठोस (basic solids) वस्तुओं को जोडकर बने वस्तुओं का आयतन, उपरोक्त उदाहरण में दर्शाये अनुसार उन दो वस्तुओं के आयतन के योग के समान होगा।

प्रयास कीजिए।

1. एक तार के लम्ब-काट का व्यास 5% कम किये जाने पर उसकी लम्बाई कितने प्रतिशत कम करनी चाहिए जिससे उसका आयतन समान हो?
2. गोले और घन का समतलीय क्षेत्रफल समान है। उनके आयतनों का अनुपात ज्ञात कीजिए?

आइए, हम कुछ और उदाहरण देखें।

उदाहरण -10. एक ठोस खिलौना इस प्रकार है कि वह वृत्ताकार लम्ब बेलन के एक ओर अर्धगोला और दूसरी ओर शंकु है। उनका सामान्य व्यास 4.2 से.मी. और बेलनाकार और शंकु आकार के भागों की लम्बाई क्रमशः 12 से.मी. और 7 से.मी. है। उस ठोस खिलौने का आयतन ज्ञात कीजिए। $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$.

हल : मान लीजिए शंकु आकार के भाग की ऊँचाई $h_1 = 7$ से.मी.

और बेलनाकार भाग की ऊँचाई $h_2 = 12$ से.मी.

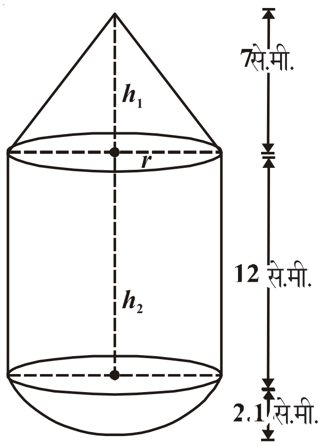
त्रिज्या $(r) = \frac{4.2}{2} = 2.1 = \frac{21}{10}$ से.मी.

ठोस खिलौने का आयतन

= शंकु का आयतन + बेलन का आयतन + अर्धगोले का आयतन

$$= \frac{1}{3}\pi r^2 h_1 + \pi r^2 h_2 + \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$= \pi r^2\left[\frac{1}{3}h_1 + h_2 + \frac{2}{3}r\right]$$



$$= \frac{22}{7} \times \left(\frac{21}{10}\right)^2 \times \left[\frac{1}{3}\times 7 + 12 + \frac{2}{3}\times\frac{21}{10}\right]$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{441}{100} \times \left[\frac{7}{3} + \frac{12}{1} + \frac{7}{5}\right]$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{441}{100} \times \left[\frac{35 + 180 + 21}{15}\right]$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{441}{100} \times \frac{236}{15} = \frac{27258}{125} = 218.064 \text{ से.मी.}^3$$

उदाहरण-11. एक बेलनाकार पात्र में आइस-क्रीम है जिसका व्यास 12 से.मी. और ऊँचाई 15 से.मी. है। वह आइस-क्रीम 10 बच्चों में इस तरह बाँटा गया कि प्रत्येक छात्र के आइस-क्रीम का आकार शंकु आकार पर अर्धगोला है जैसे चित्र में दिखाया गया है। यदि शंकु आकार के भाग की ऊँचाई उसके आधार के व्यास का दुगुना है, तो आइस-क्रीम के शंकु का व्यास ज्ञात कीजिए।

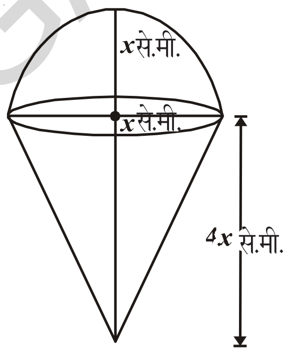
हल : मान लीजिए आइसक्रीम शंकु के आधार की त्रिज्या x से.मी. है।

$\therefore$ व्यास $= 2x$ से.मी.

तब, शंकु आकार के आइस-क्रीम की ऊँचाई $= 2$ (व्यास) $= 2(2x) = 4x$ से.मी. है।

आइसक्रीम शंकु का आयतन = शंकु आकार के भाग का आयतन + अर्धगोलाकार भाग का आयतन

$$= \frac{1}{3}\pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3$$



$$= \frac{1}{3}\pi x^2(4x) + \frac{2}{3}\pi x^3$$

$$= \frac{4\pi x^3 + 2\pi x^3}{3} = \frac{6\pi x^3}{3}$$

$= 2\pi x^3$ से.मी^{3}

बेलनाकार पात्र का व्यास $= 12$ से.मी.

उसकी ऊँचाई $(h) = 15$ से.मी.

$\therefore$ बेलनाकार पात्र का आयतन $= \pi r^2 h$

$= \pi(6)^2\, 15$

$= 540\pi$ से.मी.^{3}

$$\frac{\text{बेलनाकार पात्र का आयतन}}{\text{आइसक्रीम शंकु का आयतन}} = 10$$

$$\Rightarrow \quad \frac{540\pi}{2\pi x^3} = 10$$

$$2\pi x^3 \times 10 = 540\pi$$

$$\Rightarrow \quad x^3 = \frac{540}{2\times 10} = 27$$

$$\Rightarrow \quad x^3 = 27$$

$\Rightarrow \quad x^3 = 3^3$

$\Rightarrow \quad x = 3$

$\therefore$ आईसक्रीम के शंकु का व्यास $2x = 2(3) = 6$ से.मी.

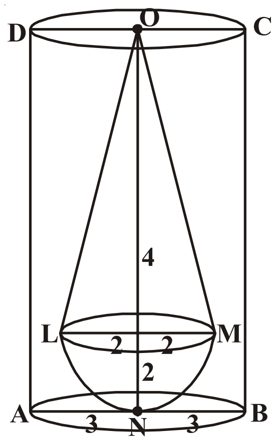
उदाहरण-12. एक ठोस ऐसा बना हुआ है कि अर्धगोले पर वृत्ताकार लम्ब शंकु चिपका हुआ है, और वह पानी से भरे हुए वृत्ताकार बेलन में उसके आधार को छूने तक डुबोया गया। बेलन में शेष पानी का आयतन ज्ञात कीजिए जब कि उस अर्धगोले की त्रिज्या 3 से.मी. और ऊँचाई 6 से.मी. है। अर्धगोले की त्रिज्या 2 से.मी. और शंकु की ऊँचाई 4 से.मी. है।

$\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

हल : दिये गये चित्र में,

ABCD एक बेलन है और LMN अर्धगोला है।

OLM एक शंकु है। हम जानते हैं कि एक शंकु और अर्धगोले से बना हुआ एक ठोस पिंड, जब पानी से भरे हुये बेलन में डुबोया जाता है तो, ठोस के आयतन के बराबर का पानी विस्थापित (displaced) होता है।



बेलन का आयतन $= \pi r^2 h = \pi \times 3^2 \times 6 = 54\,\pi$ से.मी.^{3}

अर्धगोले का आयतन $= \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3} \times \pi \times 2^3 = \frac{16}{3}\pi$ से.मी.^{3}

शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \pi \times 2^2 \times 4 = \frac{16}{3}\pi$ से.मी.^{3}

शंकु और अर्धगोले का आयतन $= \frac{16}{3}\pi + \frac{16}{3}\pi$

$= \frac{32}{3}\pi$

बेलन में शेष पानी का आयतन

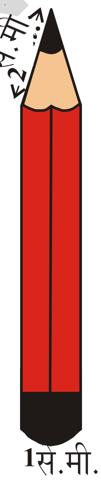
= बेलन का आयतन - अर्धगोला का आयतन

$= 54\pi - \frac{32\pi}{3}$

$= \frac{162\pi - 32\pi}{3} = \frac{130\pi}{3}$

$$= \frac{130}{3} \times \frac{22}{7} = \frac{2860}{21} = 136.19 \text{ से.मी.}^3$$

उदाहरण-13. एक बेलनाकार पेंसिल की लम्बाई को नहीं बदलते हुए एक सिरे पर शंकु आकार के रूप में छिली गई। पेंसिल का व्यास 1 से.मी. है और उसकी शंकु आकार की लम्बाई 2 से.मी. है। पेंसिल के छिले हुये बुरादे का आयतन ज्ञात कीजिए। आप का उत्तर, दशमलव के 2 स्थान तक दीजिए। $\left[\pi = \frac{355}{113}\right]$.



हल : पेंसिल का व्यास = 1से.मी.

अतः पेंसिल की त्रिज्या $(r) = 0.5$ से.मी.

शंकु आकार के भाग की लम्बाई $= h = 2$ से.मी.

पेंसिल के छिलके का आयतन = बेलन का आयतन – बेलन पर बने शंकु का आयतन

$$= \pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{2}{3}\pi r^2 h$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{355}{113} \times (0.5)^2 \times 2 \text{ से.मी.}^3 = 1.05 \text{ से.मी.}^3$$

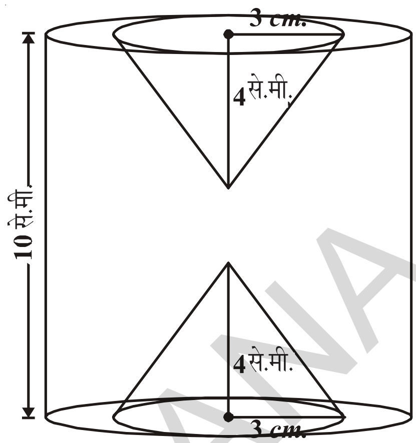
अभ्यास -10.3

1. एक लोहे का खंभा नीचे से बेलनाकार और उपरी भाग शंकु आकार है। बेलनाकार भाग की ऊँचाई और व्यास क्रमशः 2.8 मी और 20 से.मी. है और शंकु का व्यास 42 से.मी. है। खंभे का भार ज्ञात कीजिए। यदि 1 से.मी.^{3} लोहे का भार 7.5 ग्राम है।

2. एक खिलौना अर्धगोले पर शंकु के आकार का बना हुआ है जिसका वृत्ताकार समतल जुडा हुआ है। शंकु के आधार की त्रिज्या 7 से.मी. है और उसका आयतन अर्धगोले का $\frac{3}{2}$ भाग है। शंकु की ऊँचाई और खिलौने का समतलीय क्षेत्रफल दशमलव के दो स्थान तक ज्ञात कीजिए। $\left(\pi = 3\frac{1}{7}\right)$.

3. 7 से.मी. भुजा वाले घन से काटे गये वृत्ताकार लम्ब शंकु का आयतन ज्ञात कीजिए।

4. एक टब जिसकी त्रिज्या 5 से.मी. और लम्बाई 9.8 से.मी. है, पानी से भरा हुआ है। एक अर्धगोला जिस पर लम्ब शंकु जुडा हुआ है, टब में डुबाया गया। अर्धगोले की त्रिज्या 3.5 से.मी. है और शंकु की ऊँचाई अर्धगोले के बाहर 5 से.मी. है। टब में शेष पानी का आयतन ज्ञात कीजिए। $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$.



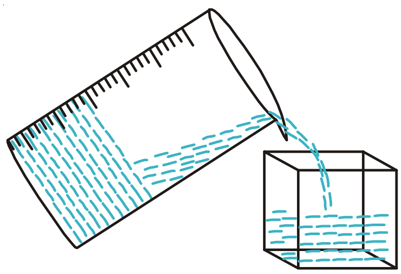
5. संलग्न चित्र में ठोस बेलन की ऊँचाई 10 से.मी. है और व्यास 7 से.मी. है। चित्र में दर्शाए अनुसार 3 से.मी. अर्धव्यास और 4 से.मी. ऊँचाई वाले दो शंकु आकार छिद्र काटे गये। शेष ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए।
6. 1.4 से.मी. व्यास वाले कंचे (marbles), 7 से.मी. व्यास वाले एक बीकर में डाले गये जिसमें थोडा पानी है। बीकर में पानी का स्तर 5.6 से.मी. बढने के लिये कितने कंचे डालना चाहिये?
7. धनाभाकार के लकड़ी के पेन-स्टैण्ड में पेन रखने के लिये तीन शंकु आकार के गड्ढे हैं। घनाभ का माप 15 से.मी., 10 से.मी. और 3.5 से.मी. है। प्रत्येक गड्ढे की त्रिज्या 0.5 से.मी. है और उसकी गहराई 1.4 से.मी. है। संपूर्ण स्टैण्ड में कुल कितने आयतन लकडी है?

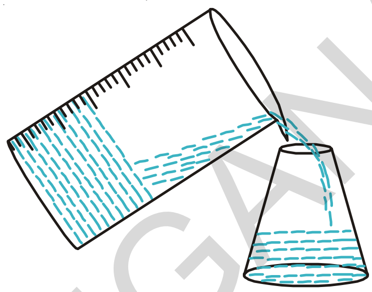
10.4 ''ठोस'' का एक आकृति से दूसरे में रूपांतरण (Conversion of Solid from One Shape to Another)

(DWACRA) नामक महिलाओं की स्वयं सेवी संस्था घनाभाकार मोम को पिघलाकार मोमबत्तियाँ बनाती है। कारखानों में घनाकार लेड को पिघलाकर बुल्लेट बनाये जाते हैं। सुनार घनाभाकार सोने के बिस्कुट को पिघलाकर विभिन्न आभूषणों को बनाता है। इन सभी स्थितियों में ठोस आकृतियों को अन्य आकृतियों में रूपांतरित किया गया है। इस प्रक्रिया में आयतन सदा समान रहता है।

उदाहरण के लिये, हम एक ठोस बेलनाकार की मोमबत्ती लेंगे और उसको पिघलाकार, संपूर्ण द्रवित मोम को गोलाकार पात्र में डालेंगे।

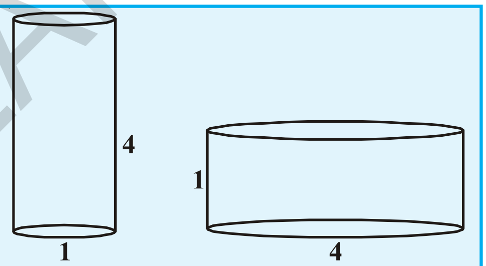
ठंडा होने पर आपको गोलाकार मोमबत्ती प्राप्त होगी। नये मोमबत्ती का आयतन, पुराने मोमबत्ती के आयतन के समान होगा। हमें यही याद रखना चाहिये कि जब भी हम इसतरह की वस्तुओं का सामना करते हैं जिसका एक आकार से दूसरे आकार में ''रूपांतरण'' हुआ है या एक द्रव जो विशिष्ट आकार के पात्र में पहले से भरा हुआ है और उसे विभिन्न आकार के अन्य पात्र में डाला जा रहा है उसका आयतन समान होगा, जैसा कि नीचे के चित्रों में बताया गया है।





सोचिए - चर्चा कीजिए।

संलग्न चित्र में बताये गये कौनसे टंकी में अधिक पानी समायेगा? अपने मित्रों से चर्चा कीजिए।



जो चर्चा की गई उसको समझने के लिये, आइये हम कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण -14. चिकनी मिट्टी से एक शंकु बनाया गया जिसकी ऊँचाई 24 से.मी. है और त्रिज्या 6 से.मी. है। एक लडकी उसको गोले में रूपांतरण करती है। गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल: शंकु का आयतन $= \frac{1}{3} \times \pi \times 6 \times 6 \times 24$ से.मी.^{3}

यदि r गोले की त्रिज्या है, तब उसका आयतन $\frac{4}{3}\pi r^3$ है।

शंकु और गोले के रूप में, चिकनी मिट्टी का आयतन समान होने के कारण हमें प्राप्त है,

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}\pi \times 6 \times 6 \times 24$$

$$r^3 = 3 \times 3 \times 24 = 3 \times 3 \times 3 \times 8$$

$$r^3 = 3^3 \times 2^3$$

$$r = 3 \times 2 = 6$$

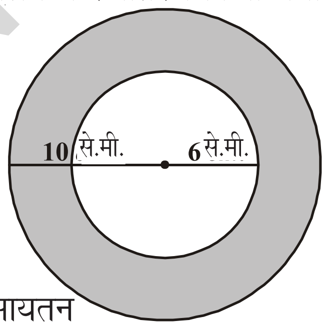
गोले की त्रिज्या 6 से.मी. है।

यह कीजिए।

1. एक ताँबे की छड को, जिसका व्यास 1 से.मी. और लम्बाई 8 से.मी. है, 18 मी. लम्बी समान मोटाई वाली तार में रूपांतरण किया गया है। तार की मोटाई ज्ञात कीजिए।

2. प्रवली के घर की छत पर बेलनाकार पानी की टंकी है। इस टंकी को संप (जमीन के नीचे का टेंक) से पानी पम्प किया जाता है। संप के माप 1.57 मी. $\times$1.44 मी. $\times$ 9.5 से.मी. है। पानी की टंकी की त्रिज्या 60 से.मी. और ऊँचाई 95 से.मी. है। पानी की टंकी में संप से भरपूर पानी भरने के पश्चात, संप में शेष पानी की ऊँचाई ज्ञात कीजिए। टंकी और संप की क्षमता की तुलना कीजिए। ($\pi = 3.14$)

उदाहरण-15. एक अर्धगोलाकार खोखले वलय (shell) का भीतरी और बाहरी व्यास क्रमशः 6 से.मी. और 10 से.मी. है। उसको पिघलाकर 14 से.मी. व्यास वाले एक ठोस बेलन में रूपांतरण किया गया है। बेलन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।



हल : खोखले अर्धगोलाकार वलय की त्रिज्या R = $\frac{10}{2}$ = 5 से.मी.

खोखले अर्धगोलाकार वलय की अंदर की त्रिज्या (r) = $\frac{6}{2}$ = 3 से.मी.

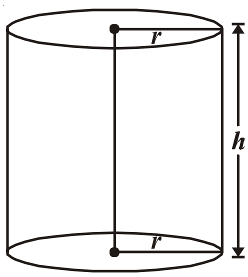
खोखले अर्धगोलाकार वलय का आयतन = बाहरी आयतन - भीतरी आयतन

$$= \frac{2}{3}\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{2}{3}\pi (R^3 - r^3)$$

$$= \frac{2}{3}\pi (5^3 - 3^3)$$

$$= \frac{2}{3}\pi (125 - 27)$$



$= \frac{2}{3}\pi \times 98$ से.मी.^{3} $= \frac{196\pi}{3}$ से.मी.^{3} ...(1)

क्योंकि, यह खोखले अर्धगोलाकार वलय को पिघलाकर ठोस बेलन बनाया गया है, इसलिये उनके आयतन समान रहने चाहिए।

बेलन का व्यास = 14 से.मी. (दिया गया है।)

अतः बेलन की त्रिज्या = 7 से.मी.

मान लीजिये बेलन की ऊँचाई $= h$

$\therefore$ बेलन का आयतन $= \pi r^2 h$

$= \pi \times 7 \times 7 \times h \text{ cm}^3 = 49\pi h$ से.मी.^{3} ...(2)

दिये गये नियम के अनुसार

खोखले अर्धगोलाकार वलय का आयतन = ठोस बेलन का आयतन

$$\frac{196}{3}\pi = 49\,\pi h \qquad \text{[समीकरण (1) और (2) से]}$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{196}{3 \times 49} = \frac{4}{3} \text{ से.मी.}$$

अतः बेलन की ऊँचाई = 1.33 से.मी.

उदाहरण -16. एक अर्धगोलाकार कटोरे में पानी है जिसकी त्रिज्या 15 से.मी. है। यह पानी 5 से.मी. व्यास और 6 से.मी. ऊँचाई वाले कुछ बोतलों में भरना है। कटोरे को खाली करने के लिये कितने बोतलों की आवश्यकता है?

हल: अर्धगोले का आयतन $= \frac{2}{3}\pi r^3$

अर्धगोले की भीतरी त्रिज्या $r = 15$ से.मी.

$\therefore$ अर्धगोलाकार कटोरे में, पानी का आयतन $= \frac{2}{3}\pi(15)^3$ से.मी.^{3}

$= 2250\,\pi$ से.मी.^{3}

यह द्रव बोतलों में भरना है जिसकी ऊँचाई $(h) = 6$ से.मी.

और त्रिज्या $R = \frac{5}{2}$ से.मी.

$\therefore$ 1 बेलनाकार बोतल का आयतन $= \pi R^2 h$

$$= \pi \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 \times 6$$

$$= \pi \times \frac{25}{4} \times 6 \text{ से.मी.}^3 = \frac{75}{2}\pi \text{ से.मी.}^3$$

आवश्यक बेलनाकार बोतलो की संख्या

$$= \frac{\text{अर्धगोलाकार कटोरे का आयतन}}{\text{1 बेलनाकार बोतल का आयतन}}$$

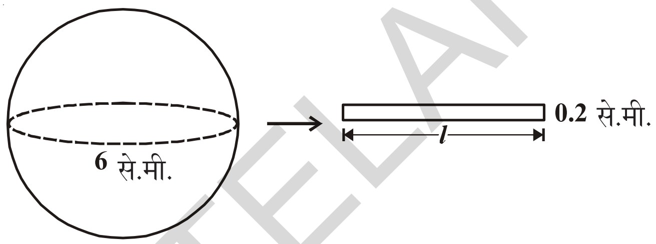
$$= \frac{2250\pi}{\frac{75}{2}\pi} = \frac{2\times 2250}{75} = 60.$$

उदाहरण-17. एक धातु के गोले का व्यास 6 से.मी. है। इसको पिघलाकार 0.2 से.मी. व्यास (ज्या) के तिरछे-काट (cross–section) वाली लम्बी तार बनाई गई। तार की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल : पता है, धातुवीय गोले का व्यास = 6 से.मी.

$\therefore$ धातुवीय गोले की त्रिज्या = 3 से.मी.

और हमें यह भी पता है कि



बेलनाकार तार के तिरछे-काट का व्यास = 0.2 से.मी.

बेलनाकार तार के तिरछे - काट की त्रिज्या = 0.1 से.मी.

मान लीजिए तार की लम्बाई = l से.मी.

क्यों कि धातुवीय गोले को बेलनाकार तार में रूपांतरण हुआ है,

$\therefore$ तार में उपयोग किया गया धातु = गोले का आयतन

$$\pi\times(0.1)^2\times h = \frac{4}{3}\times\pi\times 3^3$$

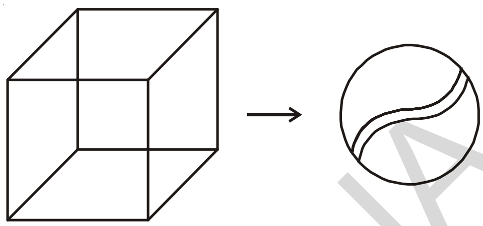
$$\pi\times\left(\frac{1}{10}\right)^2\times h = \frac{4}{3}\times\pi\times 27$$

$$p\,' \frac{1}{100}\,' h = 36p$$

$$h = \frac{36\pi\times 100}{\pi} \text{ से.मी.} = 3600 \text{ से.मी.} = 36 \text{ मी.}$$

$\therefore$ तार की लम्बाई = 36 मी.

उदाहरण-18. 44 से.मी. भुजा के घनाकार ठोस लेड (शीश) से, 4 से.मी. व्यास वाले कितने गोलाकार गेंद बनाये जायेंगे?



हल : लेड (शीश) के घन की भुजा = 44 से.मी.

गोलाकार गेंद की त्रिज्या $= \frac{4}{2}$ से.मी. = 2 से.मी.

अब, गोलाकार गेंद का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$$= \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 2^3 \text{ से.मी.}^3 = \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 8 \text{ से.मी.}^3$$

मान लीजिए गेंदों की संख्या x होगी।

x गोलाकार गेंदों का आयतन $= \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 8\times x$ से.मी.^{3}

यह सत्य है कि x गोलाकार गेंदों का आयतन = लेड के घन का आयतन

$$\Rightarrow \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 8\times x = (44)^3$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 8\times x = 44\times 44\times 44$$

$$\Rightarrow x = \frac{44\times 44\times 44\times 3\times 7}{4\times 22\times 8}$$

$$x = 2541$$

अतः गोलाकार गेंदों की संख्या = 2541.

उदाहरण -19. एक महिला स्वयं सेवी संस्था को 4.2 से.मी. व्यास, और 2.8 से.मी. ऊँचाई वाली मोमबत्ती बनाने के लिये 66 से.मी., 42 से.मी., 21 से.मी. माप वाला घनाभाकार ठोस मोम दिया गया। तो मोमबत्तियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल: घनाभाकार ठोस का आयतन $= lbh$

$= (66\times 42\times 21)$ से.मी.^{3}

बेलनाकार मोमबत्ती की त्रिज्या $= \frac{4.2}{2}$ से.मी. = 2.1 से.मी.

बेलनाकार मोमबत्ती की ऊँचाई = 2.8 से.मी.

मोमबत्ती का आयतन $= \pi r^2 h \ = \frac{22}{7} \times (2.1)^2 \times 2.8$

मान लीजिए मोमबत्तियों की संख्या x होगी।

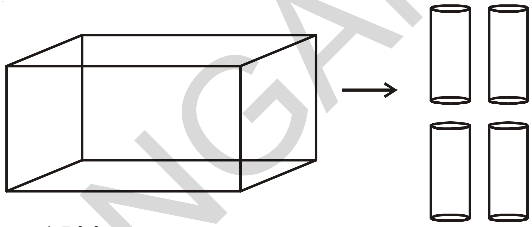
x मोमबत्ती का आयतन $= \frac{22}{7} \times 2.1 \times 2.1 \times 2.8 \times x$

$\because$ x मोमबत्तियों का आयतन = घनाभाकर मोम का आयतन

$$\therefore \frac{22}{7} \times 2.1 \times 2.1 \times 2.8 \times x = 66 \times 42 \times 21$$

$$x = \frac{66 \times 42 \times 21 \times 7}{22 \times 2.1 \times 2.1 \times 2.8}$$

$$= 1500$$



अतः निर्मित बेलनाकार मोमबत्तियों की संख्या = 1500.

अभ्यास - 10.4

1. 4.2 से.मी. त्रिज्या के धातुवीय गोले को पिघलाकर 6 से.मी. त्रिज्या के बेलन में रूपांतरण किया गया है। बेलन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
2. 6 से.मी. 8 से.मी. और 10 से.मी. के तीन धातुवीय गोलो को एक साथ पिघलाकर एक बडा ठोस गोला बनाया गया। परिणामी गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।
3. 7 मी. व्यास और 20 मीटर गहरे कुँए (well) को खोदकर निकाली गई मिट्टी से घनाभाकर प्लाटफार्म बनाया गया जिसकी लम्बाई और चौडाई 22 मी. और 14 मी. है। प्लाटफार्म की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
4. 14 मी. व्यास और 15 मी. गहरा एक कुँआ खोदा गया और निकाली गई मिट्टी से वलयाकार बांध (तट) बनाया गया जिसकी चौडाई 7मी. है। बाँध की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
5. 12 से.मी. व्यास और 15 से.मी. ऊँचाई के वृत्ताकार लम्ब बेलन के आकार के पात्र में भरपूर आइस-क्रीम है। यह आइस-क्रीम 12से.मी. ऊँचाई और 6 से.मी. व्यास के शंकुओं में भरी गई जिसके शिखर अर्धगोलाकार हैं। ऐसे कितने शंकुओं में आइस-क्रीम भरी जाएगी?
6. 1.75 से.मी. व्यास तथा 2मि.मि. मोटाई के कितने सिक्के पिघलाने पर, 5.5 से.मी. $\times$ 10 से.मी. $\times$ 3.5 से.मी. माप का घनाभ बनेगा?
7. एक बर्तन शंकु आकार है उसकी ऊँचाई 8 से.मी. और त्रिज्या 5से.मी. है। उसमें भरपूर पानी है। 0.5से.मी. त्रिज्या के गोले जब उसमें डाले जायेंगे तो $\frac{1}{4}$ पानी बाहर छलक जायेगा। पानी में डाले गये गोलों की संख्या ज्ञात कीजिए।
8. 28 से.मी. व्यास के एक ठोस गोले को पिघलाकर $4\frac{2}{3}$ से.मी. और 3 से.मी. ऊँचाई के अनेक शंकु बनाये गये। शंकुओं की संख्या ज्ञात कीजिए।

विकल्प अभ्यास : (Optional Exercise)

[यह अभ्यास परीक्षा में सम्मिलित नहीं है।]

1. एक गोल्फ का गेंद 4.1 से.मी. व्यास का है। उसके समतल पर 2 मि. मी. त्रिज्या के 150 अर्धगोलाकार डिम्पल्स (खड्डे) हैं। गेंद पर बचे हुये संपूर्ण तल का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। $\left[\pi = \frac{22}{7}\right]$

2. 12 से.मी. त्रिज्या और 20 से.मी गहराई के बेलन में पानी है। जब एक लोहे का गोला उसमें डाला गया तो पानी का स्तर 6.75 से.मी. बढ गया। गेंद की त्रिज्या ज्ञात कीजिए। $\left[\pi = \frac{22}{7}\right]$

3. एक ठोस खिलौना वृत्ताकार लम्ब बेलनाकार के रूप में है जिसके एक सिरे पर अर्धगोला है और दूसरे शीर्ष पर शंकु है। उनका सामान्य व्यास 4.2 से.मी. है, और बेलनाकार और शंकु आकार के भाग की ऊँचाई क्रमशः 12 से.मी. और 7 से.मी. है। उस ठोस खिलौने का आयतन ज्ञात कीजिए। $\left[\pi = \frac{22}{7}\right]$

4. तीन धातुवीय घन जिसके किनारे क्रमशः 15 से.मी., 12 से.मी. और 9 से.मी. है। पिघलाकर एक साधारण घन बनाया गया। इस घन का कर्ण ज्ञात कीजिए।

5. एक अर्धगोलाकार कटोरे के अंदर का व्यास 36 से.मी. है। उसमें द्रव है। यह द्रव 3 से.मी. त्रिज्या और 6 से.मी. ऊँचाई के बेलनाकार बोतलों में भरना है। इस कटोरे को खाली (empty) करने के लिये कितने बोतल आवश्यक हैं।

प्रस्तावित परियोजना

पार्श्व धरातल/संपूर्ण धरातल (T.S.A./L.S.A) तथा आयतन (तैयार करना)

- संपुर्ण धरातल का क्षेत्रफल (TSA) पार्श्व धरातल का क्षेत्रफल (LSA) तथा आयतन
- समान आयतन तथा भिन्न संपुर्ण धरातल के क्षेत्रफल वाले घनाभ

हमने क्या चर्चा की है?

1. दो मूल ठोस वस्तुओं को जोडने पर बने परिणामी ठोस का आयतन, उन दो मौलिक (basic) ठोसों के आयतनों के योग के समान होगा।
2. ठोस वस्तुओं के संयोजन से बने नये ठोस वस्तुओं के समतलीय क्षेत्रफल की गणना करते समय हम उनके समतलीय क्षेत्रफल को नही जोडेंगे क्योंकि उनको जोडते समय उनका कुछ भाग लुप्त हो जाता है।