त्रिकोणमिति (Trigonometry)

अंग्रेजी शब्द Trigonometry की व्युत्पत्ति ग्रीक शब्दों-

(i) Tri

(ii) Gon

(iii) Metron

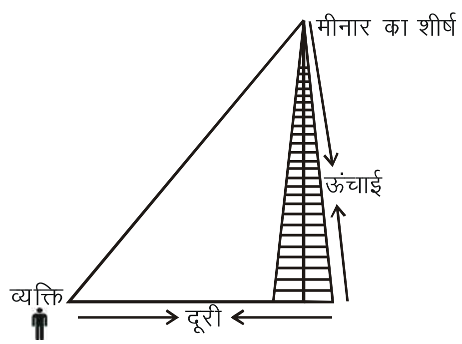
से हुई है। इनका अर्थ क्रमशः है-

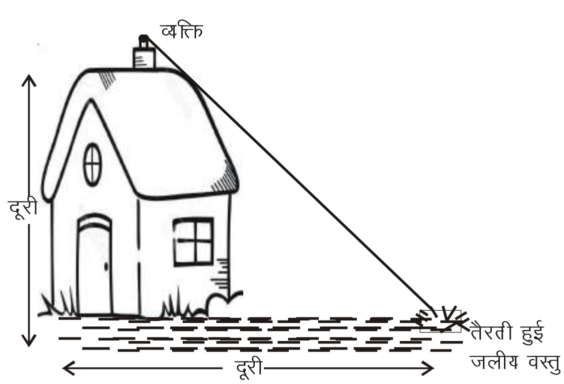
(i) तीन

(ii) भुजा

(iii) माप

वस्तुतः प्राचीन काल के खगोलविद त्रिकोणमिति (Trigonometry) का प्रयोग पृथ्वी से, ब्रह्मांड में स्थित अन्य इकाइयों (जैसे ग्रहों एवं तारों) की दूरियां मापने में करते थे। त्रिकोणमितीय संकल्पनाएं खगोलीय दूरियों के मापन में अत्यंत सहायक होती हैं। आज खगोलीय दूरी मापन की अनेक उत्तम प्रकार की प्रौद्योगिकीय विधियों को भी इन संकल्पनाओं की मदद लेनी पड़ती है। अतः ये संकल्पनाएं खगोलीय दूरी एवं कोण मापन में अत्यंत आधारभूत एवं महत्वपूर्ण होती हैं।

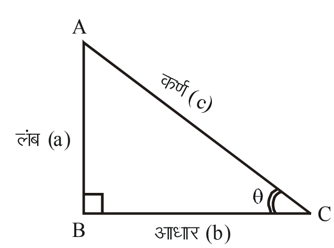




उदाहरण स्वरूप उपर्युक्त चित्र में, चाहे पृथ्वी सतह पर खड़ा कोई व्यक्ति अपने से कुछ दूरी पर खड़ी किसी मीनार स्वरूप किसी वस्तु के उच्चतम शिखर को देख रहा हो या वह मकान की छत से नदी में तैरते किसी जलीय जंतु को देख रहा हो, दोनों ही दशाओं में उस व्यक्ति की आंख से उन वस्तुओं पर बनने वाले कोणों (Angles) तथा विभिन्न दूरियों से बनने वाले काल्पनिक त्रिभुज की संकल्पना तो होती ही है और इसकी आवश्यकता भी पड़ती है कि उस व्यक्ति की आंखों का मीनारनुमा वस्तु की शिखर को देखते समय कितने अंश का कोण बनता है या उस व्यक्ति की उस मीनार से दूरी क्या है आदि-आदि। इन्हीं दूरियों एवं कोणों की जानकारी की आवश्यकता ने गणित की इस विधा का जन्म करवाया। आइए कोणों एवं दूरियों की इन तमाम गणनाओं की इस दुरूहता को विभिन्न भागों (Chapters) में बांटकर अध्ययन करने एवं समझने का प्रयास करते हैं।

❑ त्रिकोणमितीय अनुपात (Trigonometric Ratio)

एक समकोण त्रिभुज के कोणों के संबंध में भुजाओं का अनुपात त्रिकोणमितीय अनुपात कहलाता है। कुल छः त्रिकोणमितीय अनुपात होते हैं- sin, cos, tan, cot, sec एवं cosec समकोण त्रिभुज में इनका मान निम्नवत् होता है।



समकोण त्रिभुज ABC में $\angle ABC = 90^0$, $\angle ACB = \theta^0$ है।

अब $\sin\theta = \dfrac{\text{लंब}}{\text{कर्ण}} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{a}{c}$

$\cos\theta = \dfrac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{b}{c}$

$\tan\theta = \dfrac{\text{लंब}}{\text{आधार}} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{a}{b}$

$\cot\theta = \dfrac{\text{आधार}}{\text{लंब}} = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{b}{a}$

$\sec\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} = \frac{AC}{BC} = \frac{c}{b}$

$\text{cosec}\,\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लंब}} = \frac{AC}{AB} = \frac{c}{a}$

नोट : यदि न्यूनकोण $\angle A$ लिया जाए तो कर्ण समान रहेगा परंतु लंब और आधार परस्पर बदल जाएंगें।

महत्वपूर्ण तथ्य-

$\sin\theta$, $\cos\theta$ एवं $\tan\theta$ का व्युत्क्रम क्रमशः $\text{cosec}\,\theta$, $\sec\theta$ एवं $\cot\theta$ होता है **देखें- कैसे?**

$$\sin\theta = \frac{\text{लंब}}{\text{कर्ण}} = \frac{1}{\frac{\text{कर्ण}}{\text{लंब}}} = \frac{1}{\text{cosec}\,\theta}$$

$$\left(\because \ \frac{\textbf{कर्ण}}{\textbf{लंब}} = \textbf{cosec}\,\theta\right)$$

$$\cos\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{1}{\frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}}} = \frac{1}{\sec\theta}$$

$$\left(\because \ \frac{\textbf{कर्ण}}{\textbf{आधार}} = \textbf{sec}\,\theta\right)$$

$$\text{तथा } \tan\theta = \frac{\text{लंब}}{\text{आधार}} = \frac{1}{\frac{\text{आधार}}{\text{लंब}}} = \frac{1}{\cot\theta}$$

$$\left(\because \ \frac{\textbf{आधार}}{\textbf{लंब}} = \textbf{cot}\,\theta\right)$$

$\sin\theta \,.\, \text{cosec}\,\theta = 1$ होगा

देखें कैसे ?

$\sin\theta = \frac{\text{लंब}}{\text{कर्ण}}$ तथा $\text{cosec}\,\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लंब}}$

$\therefore \ \sin\theta \,.\, \text{cosec}\,\theta = \frac{\text{लंब}}{\text{कर्ण}} \times \frac{\text{कर्ण}}{\text{लंब}} = 1$

$\therefore \ \sin\theta \,.\, \text{cosec}\,\theta = 1$

इसी प्रकार $\cos\theta \,.\, \sec\theta = 1$ तथा $\tan\theta \,.\, \cot\theta = 1$ होगा।

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$ होगा

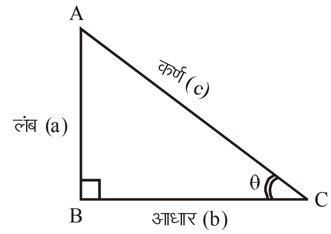
देखें कैसे ?

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{\text{लंब}}{\text{कर्ण}}}{\frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}}} = \frac{\text{लंब}}{\text{कर्ण}} \times \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} = \frac{\text{लंब}}{\text{आधार}}$$

$$\therefore \ \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta \quad \left(\because \ \frac{\textbf{लंब}}{\textbf{आधार}} = \textbf{tan}\,\theta\right)$$

इसी प्रकार $\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta$ होगा।

☞ **त्रिकोणमितीय अनुपातों पर कुछ और महत्वपूर्ण सूत्र-देखें-**



समकोण त्रिभुज ABC में $\angle B = 90^0$ तथा $\angle C = \theta^0$ है

$\sin\theta = \frac{\text{लंब (a)}}{\text{कर्ण (c)}}$ (ज्ञात है)

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$\sin^2\theta = \frac{a^2}{c^2}$ ....(i)

$\cos\theta = \frac{\text{आधार(b)}}{\text{कर्ण (c)}}$ (ज्ञात है)

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$\cos^2\theta = \frac{b^2}{c^2}$ ....(ii)

समीकरण (i) और (ii) को जोड़ने पर

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = \frac{a^2 + b^2}{c^2}$ ....(iii)

समकोण त्रिभुज में $(\text{लंब})^2 + (\text{आधार})^2 = (\text{कर्ण})^2$

$\therefore (a)^2 + (b)^2 = (c)^2$

समीकरण (iii) में $a^2 + b^2 = c^2$ रखने पर

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = \frac{c^2}{c^2} = 1$

$\therefore \ \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\therefore \ \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$\therefore \ \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

दोनों पक्षों में $\cos^2\theta$ से भाग देने पर

$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$

$\tan^2\theta + 1 = \text{Sec}^2\theta$

$$\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta, \therefore \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \tan^2\theta\right.$$

$$\left.\text{तथा } \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta \ \therefore \frac{1}{\cos^2\theta} = \sec^2\theta\right)$$

$\therefore \tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$

या $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

$\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

दोनों पक्षों में $\sin^2\theta$ से भाग देने पर

$$\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta}$$

$1 + \cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta$

$$\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta, \because \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \cot^2\theta\right.$$

$$\text{तथा } \left.\frac{1}{\sin\theta} = \text{cosec}\,\theta, \therefore \frac{1}{\sin^2\theta} = \text{cosec}^2\theta\right)$$

$\therefore \cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta - 1$

या $\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

इस प्रकार

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

$\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$

$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$

$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

$\cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta - 1$

तथा $\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

उदाहरणार्थ प्रश्न देखें-

प्रश्न 1. किसी समकोण त्रिभुज ABC जिसका कोण B समकोण है AB =24 सेमी. और BC = 7 सेमी. है, तो Sin A, Cos A का मान परिकलित कीजिए।

हल : समकोण त्रिभुज ABC बनाने पर

समकोण त्रिभुज में

कर्ण^2 = लंब^2 + आधार^2

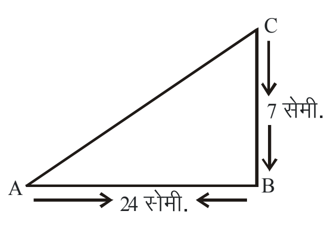
$AC^2 = 7^2 + 24^2$

$AC^2 = 49 + 576$

$AC^2 = 625$

$AC = \sqrt{625}$

= 25 सेमी.



$\therefore \sin A = \frac{\text{लंब}}{\text{कर्ण}} = \frac{7}{25}$

तथा $\cos A = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{24}{25}$ $\Rightarrow$ **उत्तर**

प्रश्न 2. यदि $\tan\theta = \frac{8}{15}$ हो तो अन्य त्रिकोणमिति अनुपात परिकलित कीजिए।

हल : माना एक समकोण त्रिभुज ABC है।

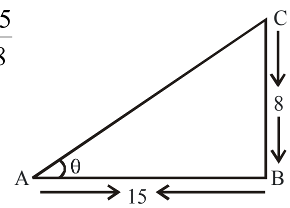
$\therefore \tan\theta = \frac{\text{लंब}}{\text{आधार}} = \frac{8}{15}$ ($\because$ लंब = 8 तथा आधार = 15)

$\therefore$ कर्ण^2 = लंब^2 + आधार^2

$= 8^2 + 15^2$

$= 64 + 225 = 289$

$\therefore$ कर्ण $= \sqrt{289} = 17$



$\therefore \cot\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{लंब}} = \frac{15}{8}$

$\sin\theta = \frac{\text{लंब}}{\text{कर्ण}} = \frac{8}{17}$

$\text{cosec}\,\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लंब}} = \frac{17}{8}$

$\cos\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{15}{17}$

$\sec\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} = \frac{17}{15}$ $\Rightarrow$ **उत्तर**

प्रश्न 3. यदि $3\tan A = 4$, तो $\frac{1-\cot^2 A}{1+\cot^2 A}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\tan A = \frac{4}{3}$ **($\because$ 3 tanA = 4)**

$\therefore \cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$

$\therefore \frac{1-\cot^2 A}{1+\cot^2 A} = \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}$ **(cotA = $\frac{3}{4}$ रखा गया)**

$= \frac{1-\frac{9}{16}}{1+\frac{9}{16}}$

$= \frac{\frac{16-9}{16}}{\frac{16+9}{16}} = \frac{\frac{7}{16}}{\frac{25}{16}} = \frac{7}{25}$ $\Rightarrow$ **उत्तर**

प्रश्न 4. $\tan^2\theta - \sec^2\theta$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\tan^2\theta - \sec^2\theta$

$= \tan^2\theta - (1 + \tan^2\theta)$

$(\because\ \mathbf{1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta})$

$= \tan^2\theta - 1 - \tan^2\theta$

$= -1 \Rightarrow$ **उत्तर**

प्रश्न 5. $\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1 + \cot^2\theta - \cot^2\theta$

(सूत्र- $\mathbf{1 + \cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta}$)

$= 1 \Rightarrow$ **उत्तर**

प्रश्न 6. $\dfrac{\cot^2 A - 1}{1 - \tan^2 A}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $$\frac{\cot^2 A - 1}{1 - \tan^2 A} = \frac{\frac{\cos^2 A}{\sin^2 A} - \frac{1}{1}}{\frac{1}{1} - \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}}$$

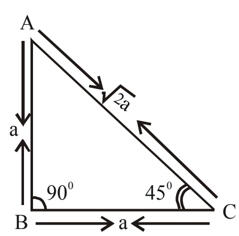
$$\left(\because \cot^2 A = \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}\ \text{lde}\ \tan^2 A = \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}\right)$$

$$= \frac{\frac{\cos^2 A - \sin^2 A}{\sin^2 A}}{\frac{\cos^2 A - \sin^2 A}{\cos^2 A}}$$

$$= \frac{\cos^2 A - \sin^2 A}{\sin^2 A} \times \frac{\cos^2 A}{\cos^2 A - \sin^2 A}$$

$$= \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A} = \cot^2 A \Rightarrow \text{उत्तर}$$

त्रिकोणमितीय अनुपात से संबंधी कुछ तथ्य देखें



मान लीजिए ΔABC में $\angle ACB = 45^0$ अर्थात $\theta = 45^0$ हो इसलिए $\angle A = \angle C$

अर्थात $AB = BC = a$ (माना)

अतः पाइथागोरस सिद्धांत से,

$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$

$= a^2 + a^2 = 2a^2$

$\therefore\ AC = \sqrt{2}a$

अब ΔABC में

$$\sin\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}$$

$$\sin 45^0 = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45^0 = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45^0 = \frac{a}{a} = 1$$

$$\cot 45^0 = \frac{a}{a} = 1$$

$$\sec 45^0 = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$$

$$\text{cosec}\, 45^0 = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$$

❑ **विभिन्न कोणों का त्रिकोणमितीय अनुपात**

कोण	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
cot	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	∞
sec	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	-1
cosec	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞

नोट : ∞ (Infinity) एक ग्रीक अक्षर है जिससे अपरिमित अथवा अनंत का बोध होता है।

ऊपर दी गई सारणी के अवलोकन से स्पष्ट है कि 0 से 90^0 तक $\sin\theta$, $\sec\theta$, $\tan\theta$ का मान बढ़ रहा है तथा $\text{cosec}\,\theta$, $\cos\theta$ और $\cot\theta$ का मान घट रहा है।

सदैव ध्यान दें-

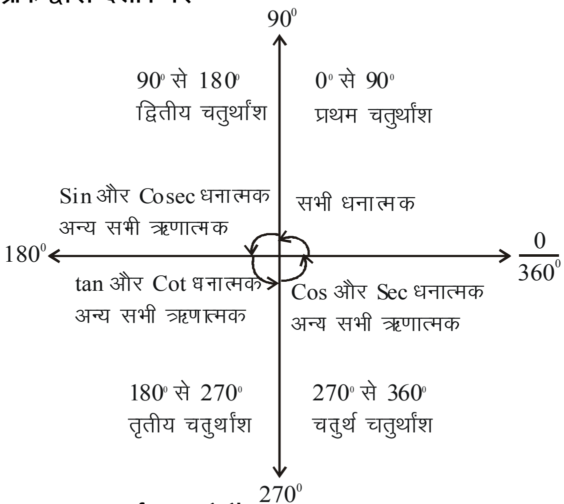
0^0 से 90^0 तक सभी त्रिकोणमितीय अनुपातों का मान धनात्मक होता है।

90^0 से 180^0 तक $\sin\theta$ और $\text{cosec}\,\theta$ का मान धनात्मक तथा अन्य सभी त्रिकोणमितीय अनुपातों का मान ऋणात्मक होता है।

180^0 से 270^0 तक $\tan\theta$ और $\cot\theta$ का मान धनात्मक तथा अन्य सभी त्रिकोणमितीय अनुपातों का मान ऋणात्मक होता है।

270^0 से 360^0 में $\cos\theta$ और $\sec\theta$ का मान धनात्मक तथा अन्य सभी त्रिकोणमितीय अनुपातों का मान ऋणात्मक होता है।

ग्राफ द्वारा दर्शाने पर



अब उदाहरणार्थ प्रश्न देखें-

प्रश्न 1. $\sin 30^0 . \cos 60^0$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$ तथा $\cos 60^0 = \frac{1}{2}$

$\therefore \ \sin 30^0 . \cos 60^0 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{4}$

प्रश्न 2. $\cos 30^0 + \sin 60^0$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\cos 30^0 + \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2}$

($\cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ तथा $\sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ रखा गया)

$= \frac{2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sqrt{3}$

प्रश्न 3. $\tan^2 30^0 + \tan^2 45^0$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\tan^2 30^0 + \tan^2 45^0 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + (1)^2$

$\left(\because \mathbf{\tan 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}} \textbf{ ldee } \mathbf{\tan 45^0 = 1}\right)$

$= \frac{1}{3} + 1 \Rightarrow \frac{4}{3}$

प्रश्न 4. $4\sin^2 30^0 + \tan^2 60^0 + \sec^2 45^0$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $4\sin^2 30^0 + \tan^2 60^0 + \sec^2 45^0$

$= 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2$

$= 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + 3 + 2$

($\because \sin 30^0 = \frac{1}{2}$, $\tan 60^0 = \sqrt{3}$ तथा $\sec 45^0 = \sqrt{2}$ रखा गया)

$= 1 + 3 + 2 \Rightarrow 6$

प्रश्न 5. $A = 15^0$ के लिए $\text{cosec}\, 2A$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\text{cosec}\, 2A = \text{cosec}\,(2 \times 15^0)$

$= \text{cosec}\, 30^0$ ($\because \text{cosec}\, 30^0 = 2$ **रखा गया**)

$= 2$

प्रश्न 6. $\frac{\cos 45^0}{\sec 30^0 + \text{cosec}\, 30^0}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\frac{\cos 45^0}{\sec 30^0 + \text{cosec}\, 30^0} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{2}{\sqrt{3}} + 2}$

($\because \cos 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sec 30^0 = \frac{2}{\sqrt{3}}$ तथा $\text{cosec}\, 30^0 = 2$)

$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{2+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}+1)\times\sqrt{2}}$

$= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$

($\sqrt{3}$ -1 से अंश और हर में गुणा करने पर)

$= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}(3-1)}$

$= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{4\sqrt{2}}$

प्रश्न 7. यदि $\sin(A+B) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos(A-B) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ जहां $0 < A + B \le 90^0$, $A > B$ तो A और B ज्ञात कीजिए।

हल : $\sin(A+B) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin(A+B) = \sin 60^0 \quad \left(\because \mathbf{\sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}}\right)$

$A + B = 60^0$ ....(i)

$\cos(A-B) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos(A-B) = \cos 30^0 \quad \left(\because \mathbf{\cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}}\right)$

$A - B = 30^0$ ....(ii)

समी. (i) और समी. (ii) को जोड़ने पर

$A + B = 60^0$
$A - B = 30^0$

$2A = 90^0$

$A = \frac{90^0}{2} = 45^0$

$\therefore \; B = 60 - 45 \Rightarrow 15^0$ (समी. (i) से)

अतः A का मान 45^0 और B का मान 15^0 है।

कोण $(90^0 - \theta)$, $(90^0 + \theta)$, $(180^0 - \theta)$ एवं $(180^0 + \theta)$ के त्रिकोणमितीय अनुपात निम्नवत होते हैं-

कोण $(90^0 - \theta)$ के त्रिकोणमितीय अनुपात

$\sin(90^0 - \theta) = \cos\theta$
$\cos(90^0 - \theta) = \sin\theta$
$\tan(90^0 - \theta) = \cot\theta$
$\cot(90^0 - \theta) = \tan\theta$
$\sec(90^0 - \theta) = \text{cosec}\,\theta$
$\text{cosec}(90^0 - \theta) = \sec\theta$

कोण $(90^0 + \theta)$ के त्रिकोणमितीय अनुपात

$\sin(90^0 + \theta) = \cos\theta$
$\cos(90^0 + \theta) = -\sin\theta$
$\tan(90^0 + \theta) = -\cot\theta$
$\cot(90^0 + \theta) = -\tan\theta$
$\sec(90^0 + \theta) = -\text{cosec}\,\theta$
$\text{cosec}(90^0 + \theta) = \sec\theta$

कोण $(180^0 - \theta)$ के त्रिकोणमितीय अनुपात

$\sin(180^0 - \theta) = \sin\{90^0 + (90^0 - \theta)\}$
$= \cos(90^0 - \theta) = \text{Sin}\,\theta$
$\cos(180^0 - \theta) = \cos\{90^0 + (90^0 - \theta)\}$
$= -\sin(90^0 - \theta) = -\text{Cos}\,\theta$
$\tan(180^0 - \theta) = \tan\{90^0 + (90^0 - \theta)\}$
$= -\cot(90^0 - \theta) = -\tan\theta$

इसी प्रकार $\cot(180^0 - \theta) = -\cot\theta$
$\sec(180^0 - \theta) = -\sec\theta$
$\text{cosec}(180^0 - \theta) = \text{cosec}\,\theta$

कोण $(180^0 + \theta)$ के त्रिकोणमितीय अनुपात

$\sin(180^0 + \theta) = \sin\{90^0 + (90^0 + \theta)\} = \cos(90^0 + \theta)$
$= -\sin\theta$
$\cos(180^0 + \theta) = \cos\{90^0 + (90^0 + \theta)\} = -\sin(90^0 + \theta)$
$= -\cos\theta$
$\tan(180^0 + \theta) = \tan\{90 + (90^0 + \theta)\} = -\cot(90^0 + \theta)$
$= -(-\tan\theta) = \tan\theta$

इसी प्रकार, $\cot(180^0 + \theta) = \cot\theta$
$\sec(180^0 + \theta) = -\sec\theta$
$\text{cosec}(180^0 + \theta) = -\text{cosec}\,\theta$

पूरक कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात

$\sin(360 - \theta) = -\sin\theta$
$\cos(360 - \theta) = \cos\theta$
$\tan(360 - \theta) = -\tan\theta$
$\cot(360 - \theta) = -\cot\theta$
$\sec(360 - \theta) = \sec\theta$
$\text{cosec}(360 - \theta) = -\text{cosec}\,\theta$
$\sin(360 + \theta) = \sin\theta$
$\cos(360 + \theta) = \cos\theta$
$\tan(360 + \theta) = \tan\theta$
$\cot(360 + \theta) = \cot\theta$
$\sec(360 + \theta) = \sec\theta$
$\text{cosec}(360 + \theta) = \text{cosec}\,\theta$

प्रश्न 1. : $\sin 135^0$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\sin(135^0) = \sin(90^0 + 45^0)$

$[\because \sin(90^0 + \theta) = \cos\theta]$

$\therefore \sin 135^0 = \cos 45^0$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}$

प्रश्न 2. : $\cos 120^0$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\cos 120^0 = \cos(180^0 - 60^0)$

$[\because \cos(180 - \theta) = -\cos\theta]$

$= -\cos 60^0$

$= -\frac{1}{2}$

प्रश्न 3. : $\tan 225^0$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\tan 225^0 = \tan(180^0 + 45^0)$

$\{\because \tan(180^0 + \theta) = \tan\theta\}$

$= \tan 45^0$
$= 1$

प्रश्न 4. : $\sin 150^0 . \sec 150^0$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\sin 150^0 . \sec 150^0 = \sin(90^0 + 60^0).\sec(180 - 30^0)$

$= \cos 60^0 . (-\sec 30^0)$

$\{\because \sin(90 + \theta) = \cos\theta$ तथा $\sec(180^0 - \theta) = -\sec\theta$ का प्रयोग किया गया$\}$

$= \frac{1}{2}.\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

$= -\frac{1}{\sqrt{3}}$

प्रश्न 5. : व्यंजक $\frac{\tan 37^0}{\cot 53^0}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\frac{\tan 37^0}{\cot 53^0} = \frac{\tan 37^0}{\cot(90^0 - 37^0)}$

$\{\because 53^0 = 90^0 - 37^0$ तथा $\cot(90 - \theta) = \tan\theta$ का प्रयोग किया गया$\}$

$= \frac{\tan 37^0}{\tan 37^0}$
$= 1$

कुछ महत्वपूर्ण सूत्र—

$\sin(A + B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$
$\sin(A - B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$
$\cos(A + B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$
$\cos(A - B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$

$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}$

$\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\tan B}$

$\sin 2A = 2\sin A\cos A$
$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

$$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = (1-\sin^2 A) - \sin^2 A = 1 - 2\sin^2 A$$

या $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = \cos^2 A - (1-\cos^2 A) = 2\cos^2 A - 1$

अब उदाहरणार्थ प्रश्न देखें—

प्रश्न 1. $\tan 390^0$ का मान क्या होगा?

हल : ऊपर दिए गए सूत्र के अनुसार $\tan(360^0 + \theta)$ का मान $\tan \theta$ होता है।

$\therefore \tan 390^0 = \tan(360^0 + 30^0)$

$= \tan 30^0$

$\tan 30^0$ का मान $\frac{1}{\sqrt{3}}$ होता है।

$\therefore \tan 390^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

प्रश्न 2. Sin 1500^0 का मान ज्ञात कीजिए।

हल : सबसे पहले कोण लेने पर

$1500^0 = 360^0 \times 4 + 60^0$

(360^0 से अधिक के सभी कोण को 360^0 के गुणज में लिखते हैं)

$\therefore \sin 1500^0 = \sin(360^0 \times 4 + 60^0)$

$= \sin 60^0$

नोट : सभी त्रिकोणमितीय अनुपातों में 360^0 के गुणज को छोड़कर जो शेष बचता है वही त्रिकोणमितीय अनुपात का मान होता है।

$\sin 60^0$ का मान $\frac{\sqrt{3}}{2}$ होता है

इसलिये

$\sin 1500^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

प्रश्न 3. $\sin 75^0$, $\sin 15^0$, का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\because$ सारणी द्वारा 45^0 का मान ज्ञात है इसलिये

$\sin 75^0 = \sin(45^0 + 30^0)$

$= \sin 45^0 \cos 30^0 + \cos 45^0 \sin 30^0$

हम जानते हैं $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ होता है। सभी त्रिकोणमितीय मानों को रखने पर

$$\therefore \sin 75^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

इसी प्रकार $\sin 15^0$ का मान छात्र स्वयं निकालें [sin (A-B) के सूत्र पर] जिसका उत्तर $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ होगा।

प्रश्न 4. $\cos 75^0$, $\cos 15^0$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\cos 75^0 = \cos(45^0 + 30^0)$

$\because$ $\cos(A+B)$ का मान $\cos A \cos B - \sin A \sin B$ होता है।

$\therefore \cos 75^0 = \cos 45^0 \cos 30^0 - \sin 45^0 \sin 30^0$

सभी त्रिकोणमितीय अनुपातों का मान रखने पर-

$$\cos 75^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

इसी प्रकार $\cos 15^0$ का मान निकाला जाएगा जिसका उत्तर $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ होगा।

नोट : $\sin 15^0$ और $\cos 75^0$ का मान हमेशा समान होता है तथा $\cos 15^0$ अैार $\sin 75^0$ का मान हमेशा समान होता है।

प्रश्न 5. $\tan 75^0$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\tan 75^0 = \tan(45^0 + 30^0)$ करने पर

$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$ होता है।

$$\therefore \tan(45^0 + 30^0) = \frac{\tan 45^0 + \tan 30^0}{1 - \tan 45^0 \tan 30^0}$$

त्रिकोणमितीय मान रखने पर

$$= \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - 1.\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}-1)}$$

कुछ महत्वपूर्ण त्रिकोणमितीय सूत्र

1. $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$
2. $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$
3. $\tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$
4. $\sin C + \sin D = 2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$
5. $\sin C - \sin D = 2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}$

6. $\cos C + \cos D = 2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$

7. $\cos C - \cos D = -2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}$

या $2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2}$

Cosine सूत्र

$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

याद करने योग्य त्रिकोणमितीय मान

$\cos 72^0 = \sin 18^0 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

$\cos 18^0 = \sin 72^0 = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

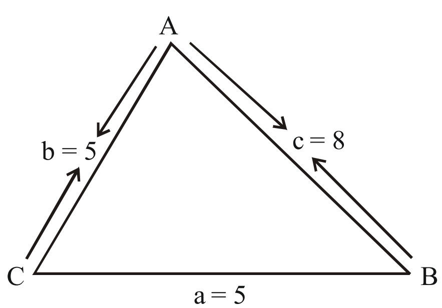
$\sin 36^0 = \sin 54^0 = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

$\cos 36^0 = \sin 54^0 = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$

उदाहरणार्थ प्रश्न देखें-

प्रश्न 1. यदि किसी त्रिभुज में AB = 8 सेमी. है BC तथा AC = 5 सेमी. है तो cos B का मान कितनी होगी?

हल : हम जानते है-



$\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

त्रिभुज से मान रखने पर

$\cos B = \frac{8^2+5^2-5^2}{2.8.5}$

$= \frac{64+25-25}{80}$

$= \frac{64}{80} = \frac{4}{5}$

नोट : कोण A के सामने की भुजा a, कोण B के सामने की भुजा b तथा कोण C के सामने की भुजा c होती है।

कुछ महत्वपूर्ण सूत्र और देखें-

$$\sin\theta . \sin 2\theta . \sin 4\theta = \frac{1}{4}\sin 3\theta$$

देखें कैसे ?

$\sin 3\theta = 4\sin\theta\sin 2\theta\sin 4\theta$ ....(i)

$= 2\sin\theta(2\sin 2\theta\sin 4\theta)$

$[\because 2\sin A\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)]$

$= 2\sin\theta[\cos(2\theta-4\theta) - \cos(2\theta+4\theta)]$

$= 2\sin\theta[\cos 2\theta - \cos 6\theta]$

$[\because \cos(-\theta) = \cos\theta]$

$= 2\sin\theta\cos 2\theta - 2\sin\theta\cos 6\theta$

$[\because 2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)]$

$= \sin(\theta+2\theta) + \sin(\theta-2\theta) - \sin(\theta+6\theta) - \sin(\theta-6\theta)$

$= \sin 3\theta + \sin(-\theta) - \sin 7\theta - \sin(-5\theta)$

$[\because \sin(-\theta) = -\sin\theta]$

$\sin 3\theta = \sin 3\theta - \sin\theta - \sin 7\theta + \sin 5\theta$.......(ii)

$-\sin\theta - \sin 7\theta + \sin 5\theta = 0$ ....(iii)

समी. (i) और समी. (ii) से

$\sin 3\theta - \sin\theta - \sin 7\theta + \sin 5\theta = 4\sin\theta\sin 2\theta\sin 4\theta$

समी. (iii) से मान रखने पर

$\sin 3\theta = 4\sin\theta\sin 2\theta\sin 4\theta$

$\frac{1}{4}\sin 3\theta = \sin\theta\sin 2\theta\sin 4\theta$

$$\cos\theta . \cos 2\theta . \cos 4\theta = \frac{1}{4}\cos 3\theta$$

देखें कैसे ?

$\cos 3\theta = 4\cos\theta\cos 2\theta\cos 4\theta$ ....(i)

$= 2\cos\theta(2\cos 2\theta\cos 4\theta)$

$[\because 2\cos A\cos B = \cos(A-B) + \cos(A+B)]$

$= 2\cos\theta[\cos(2\theta-4\theta) + \cos(2\theta+4\theta)]$

$= 2\cos\theta[\cos(2\theta + \cos 6\theta]$

$= 2\cos\theta\cos 2\theta + 2\cos\theta\cos 6\theta$

$= \cos(\theta-2\theta) + \cos(\theta+2\theta) + \cos(\theta-6\theta) + \cos(\theta+6\theta)$

$\cos 3\theta = \cos\theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta + \cos 7\theta$ ....(ii)

$\Rightarrow \cos\theta + \cos 5\theta + \cos 7\theta = 0$ ....(iii)

समी. (i) और समी. (ii) से

$\cos\theta + \cos 5\theta + \cos 7\theta + \cos 3\theta = 4\cos\theta\cos 2\theta\cos 4\theta$

(समी. (iii) से मान रखने पर)

$\cos 3\theta = 4\cos\theta\cos 2\theta\cos 4\theta$

$\frac{1}{4}\cos 3\theta = \cos\theta\cos 2\theta\cos 4\theta$

$$\tan\theta . \tan 2\theta . \tan 3\theta = \tan 3\theta$$

देखें कैसे ?

$\because \tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

L.H.S.= $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\dfrac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}\cdot\dfrac{\sin 4\theta}{\cos 4\theta}$

{$\because \sin\theta \,.\, \sin 2\theta \,.\, \sin 4\theta = \dfrac{1}{4}\sin 3\theta$

और $\cos\theta \,.\, \cos 2\theta \,.\, \cos 4\theta = \dfrac{1}{4}\cos 3\theta$}

L.H.S. = $\dfrac{\frac{1}{4}\sin 3\theta}{\frac{1}{4}\cos 3\theta}$

= $\dfrac{\sin 3\theta}{\cos 3\theta} \Rightarrow \tan 3\theta$

= R.H.S.

अतः $\tan\theta \,.\, \tan 2\theta \,.\, \tan 3\theta = \tan 3\theta$

उदाहरणार्थ एक प्रश्न देखें-

प्रश्न 1. $\cos 10^0 \cos 20^0 \cos 40^0 \sin 60^0$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\cos 10^0 \cos 20^0 \cos 40^0 \sin 60^0 = (\cos 10^0 \cos 20^0 \cos 40^0)\sin 60^0$

हम जानते हैं कि $\cos\theta \cos 2\theta \cos 4\theta = \dfrac{1}{4}\cos 3\theta$

$\therefore \cos 10^0 \cos 20^0 \cos 40^0 = \dfrac{1}{4}\cos 3\times 10^0$

$= \dfrac{1}{4}\cos 30^0$

$= \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \cos 10^0 . \cos 20^0 . \cos 40^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{8}$ ……..(i)

$\cos 10^0 \cos 20^0 \cos 40^0 \sin 60^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{8}\times \sin 60^0$

(समी. (i) से मान रखने पर)

$= \dfrac{\sqrt{3}}{8}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\quad \left(\because \sin 60^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= \dfrac{3}{16}$

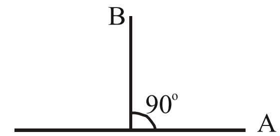
❑ कोण का माप (Measurement of Angles)

कोण को मापने की मुख्यतः दो पद्धतियां प्रचलित हैं :

(1) षाष्टिक पद्धति (Sexagesimal System)

(2) वृत्तीय पद्धति (Circular System)

(1) षाष्टिक पद्धति- इस पद्धति में एक क्षैतिज रेखा और दूसरी ऊर्ध्व रेखा के मध्य बनने वाले कोण को समकोण कहते हैं, समकोण के 90वें भाग को एक अंश अथवा (1^o) कहते हैं। एक अंश के कोण को 60 भागों में बांटते हैं, जिसके एक भाग को एक मिनट ($1'$) कहते हैं एक मिनट के कोण को 60 भागों में बांटते हैं जिसके एक भाग को एक सेकंड ($1''$) कहते हैं।

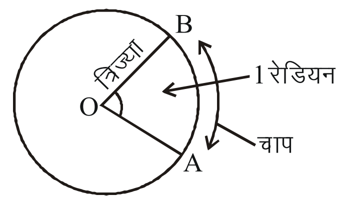


1 समकोण = 90^o (90 अंश)

$1^o = 60'$ (60 मिनट)

$1' = 60''$ (60 सेकंड)

(2) वृत्तीय पद्धति- इस माप की इकाई रेडियन (radian) है। वृत्त के उस चाप द्वारा, जो लम्बाई में वृत्त की त्रिज्या के बराबर हो, उसी वृत्त के केन्द्र पर बना कोण एक रेडियन कहलाता है। साथ की आकृति में वृत्त का केन्द्र O है और AB वृत्त की त्रिज्या के बराबर है। अतः कोण AOB की माप एक रेडियन है।

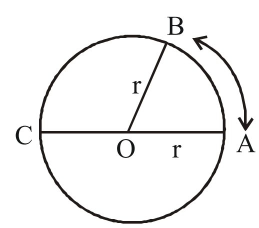


षष्टिक माप और वृत्तीय माप का परस्पर संबंध (Relation Mutually of Sexagesimal Measure and Circular Measure)

ज्यामिति से हम जानते हैं कि वृत्त के केंद्र पर बने कोण अपने चाप की (जिन पर वे बने हैं) लंबाई के अनुपात में होते हैं।

देखें-

$\dfrac{\angle AOB}{2\,\text{समकोण}} = \dfrac{\text{चाप } AB}{\text{चाप } ABC} = \dfrac{\text{त्रिज्या}}{\text{अर्द्ध-परिधि}}$



अथवा

$\dfrac{1\,\text{रेडियन}}{2\,\text{समकोण}} = \dfrac{r}{\pi r} = \dfrac{1}{\pi}$

$\therefore 1$ रेडियन $= \dfrac{2\,\text{समकोण}}{\pi}$

$= \dfrac{180^o}{\pi}$

[इससे यह सिद्ध होता है कि रेडियन का माप अचर होता है तथा यह वृत्त की त्रिज्या पर निर्भर नहीं है।]

इस सूत्र द्वारा हम किसी कोंण के अंश में माप को रेडियनों में तथा रेडियन के माप को अंशों में बदल सकते हैं। इस प्रकार,

$\frac{\pi}{3}$ (रेडियन) $= \frac{180^o}{\pi} \times \frac{\pi}{3} = 60^0$

$\frac{\pi}{15}$ (रेडियन) $= \frac{180^o}{\pi} \times \frac{\pi}{15} = 12^0$

$90^0 = \frac{\pi}{180^0} \times 90^0 = \frac{\pi}{2}$ (रेडियन)

$1^0 = \frac{\pi}{180^0}$ (रेडियन)

$45^0 = \frac{\pi}{180^0} \times 45^0 = \frac{\pi}{4}$ (रेडियन)

सूत्र- कोंण की अंशों में माप को रेडियन में बदलने के लिये अंश में कोण को $\frac{\pi}{180^0}$ से गुणा कर दें तथा रेडियन से अंशों में परिवर्तन के लिए π के स्थान पर 180^0 रख दें।

इस प्रकार किसी वृत्त के केंद्र पर त्रिज्या और चाप द्वारा अंतरित कोण ज्ञात करने का सूत्र :

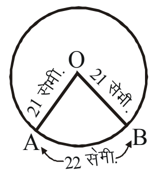
केंद्र पर बना कोण $= \left(\frac{\text{चाप की लंबाई}}{\text{त्रिज्या की लंबाई}}\right)$ रेडियन

उदाहरण स्वरूप एक प्रश्न देखें—

प्रश्न : 21 सेमी त्रिज्या के केंद्र पर 22 सेमी लंबाई का चाप कितना कोण अंतरित करेगा ?

हल : केंद्र पर बना कोण $= \left(\frac{\text{चाप की लम्बाई}}{\text{त्रिज्या की लंबाई}}\right)$ रेडियन

$= \frac{22}{21}$ रेडियन



चूंकि π रेडियन $= 180^0$ है,

इसलिए 1 रेडियन $= \frac{180^0}{\pi}$ होगा।

तथा $\frac{22}{21}$ रेडियन $= \frac{180^0}{\pi} \times \frac{22}{21}$

अतः केंद्र पर बना कोण $= \frac{180}{\frac{22}{7}} \times \frac{22}{21}$

$= \frac{180 \times 7}{21} \Rightarrow 60^0$

सदैव ध्यान दें—

बहुभुज के सभी अंतःकोणों का योग

= (भुजाओं की संख्या × 2 – 4) × एक समकोण

$= (2n - 4) \times 90^0 = (n - 2) \times 180^0$

जहां n = बहुभुज में कुल भुजाओं की संख्या

तथा एक समकोण $= 90^0$ है।

जैसे-

त्रिभुज के तीनों अंतः कोणों का योग $= (2 \times 3 - 4) \times 90^0$
$= 2 \times 90^0 \Rightarrow 180^0$

चतुर्भुज के चारों अंतः कोणों का योग $= (2 \times 4 - 4) \times 90^0$
$= 4 \times 90^0 \Rightarrow 360^0$

पंचभुज के पाचों अंतः कोणों का योग $= (2 \times 5 - 4) \times 90^0$
$= 6 \times 90^0 \Rightarrow 540^0$

इसी प्रकार 6, 7, 8 इत्यादि भुजाओं की आकृतियों के अंतः कोणों का मान ज्ञात किया जा सकता है।

परीक्षोपयोगी प्रश्न

1. यदि $\sin 2\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, तो $\sin 3\theta$ का मान किसके बराबर होगा? (माना $0^0 \le \theta \le 90^0$)

(a) 0 (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(c) 1 (d) $\frac{1}{2}$

उत्तर—(c)

$\sin 2\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin 2\theta = \sin 60^0$

$2\theta = 60^0$

$\theta = 30^0$

$\therefore \sin 3\theta = \sin 3 \times 30^0$

$= \sin 90^0$

$= 1$

2. यदि A, B और C एक त्रिभुज के कोण हैं, तो निम्नलिखित में से गलत संबंध कौन-सा है?

(a) $\tan\left(\frac{A+B}{2}\right) = \sec\frac{C}{2}$

(b) $\cot\left(\frac{A+B}{2}\right) = \tan\frac{C}{2}$

(c) $\sin\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cos\frac{C}{2}$

(d) $\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) = \sin\frac{C}{2}$

उत्तर—(a)

यदि ΔABC में $\angle A, \angle B, \angle C$ हैं, तो

$\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$

$\angle A + \angle B = 180^0 - \angle C$......(i)

विकल्प (a) से

$\tan\left(\frac{A+B}{2}\right) = \tan\left(\frac{180^0 - C}{2}\right)$

$$= \tan\left(90^0 - \frac{C}{2}\right)$$

$$= \cot\frac{C}{2} \quad [\because \tan(90^0 - \theta) = \cot\theta]$$

विकल्प (b)से

$$\cot\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cot\left(\frac{180^0 - C}{2}\right)$$

$$= \cot\left(90^0 - \frac{C}{2}\right)$$

$$= \tan\frac{C}{2} \quad [\because \cot(90^0 - \theta) = \tan\theta]$$

विकल्प (c)से

$$\sin\left(\frac{A+B}{2}\right) = \sin\left(\frac{180^0 - C}{2}\right)$$

$$= \sin\left(90^0 - \frac{C}{2}\right)$$

$$= \cos\frac{C}{2} \quad [\because \sin(90^0 - \theta) = \cos\theta]$$

विकल्प (d)से

$$\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cos\left(\frac{180^0 - C}{2}\right)$$

$$= \cos\left(90^0 - \frac{C}{2}\right)$$

$$= \sin\frac{C}{2} \quad [\because \cos(90^0 - \theta) = \sin\theta]$$

अत: स्पष्ट है कि विकल्प (a) में दिया गया संबंध गलत है।

3. यदि $3\tan\theta = 4$, तो $\frac{4\sin\theta - 3\cos\theta}{3\sin\theta + 2\cos\theta}$ का मान क्या होगा?

(a) $\frac{18}{7}$ (b) $\frac{7}{18}$

(c) $\frac{25}{18}$ (d) $\frac{18}{25}$

उत्तर—(b)

$$3\tan\theta = 4$$

$$\tan\theta = \frac{4}{3}$$

या $$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{4}{3}$$

अब $$\frac{4\sin\theta - 3\cos\theta}{3\sin\theta + 2\cos\theta} = \frac{4\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - 3\frac{\cos\theta}{\cos\theta}}{3\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + 2\frac{\cos\theta}{\cos\theta}}$$

$$= \frac{4 \times \frac{4}{3} - 3 \times 1}{3 \times \frac{4}{3} + 2 \times 1}$$

$$= \frac{\frac{16}{3} - 3}{\frac{12}{3} + 2}$$

$$= \frac{\frac{7}{3}}{\frac{18}{3}} \Rightarrow \frac{7}{18}$$

4. यदि $\frac{x - x\tan^2 30^0}{1 + \tan^2 30^0} = \sin^2 30^0 + 4\cot^2 45^0 - \sec^2 60^0$, तो x का मान होगा?

(a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (b) $\frac{1}{5}$

(c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{1}{2}$

उत्तर—(d)

$$\frac{x - x\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4(1)^2 - (2)^2$$

$$\frac{x - \frac{x}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{1}{4} + 4 - 4$$

$$\frac{\frac{3x - x}{3}}{\frac{3+1}{3}} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{2x}{4} = \frac{1}{4}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

5. $(1 + \sec 20° + \cot 70°)(1 - \text{cosec } 20° + \tan 70°)$ का मान कितना है?

(a) 0 (b) 2

(c) –1 (d) 1

उत्तर—(b)

$(1 + \sec 20° + \cot 70°)(1 - \text{cosec } 20° + \tan 70°)$
$= [1 + \sec 20° + \cot(90° - 20°)][1 - \text{cosec } 20° + \tan(90° - 20°)]$
$= (1 + \sec 20° + \tan 20°)(1 - \text{cosec } 20° + \cot 20°)$
$(\because \tan(90° - \theta) = \cot\theta, \cot(90° - \theta) = \tan\theta)$

$$= \left(1+\frac{1}{\cos 20°}+\frac{\sin 20°}{\cos 20°}\right)\left(1-\frac{1}{\sin 20°}+\frac{\cos 20°}{\sin 20°}\right)$$

$$= \left(\frac{\cos 20°+1+\sin 20°}{\cos 20°}\right)\left(\frac{\sin 20°-1+\cos 20°}{\sin 20°}\right)$$

$$= \frac{(\cos 20°+\sin 20°+1)(\cos 20°+\sin 20°-1)}{\sin 20° \cos 20°}$$

$$= \frac{(\cos 20°+\sin 20°)^2-1^2}{\sin 20° \cos 20°}$$

$$= \frac{\cos^2 20°+\sin^2 20°+2\sin 20°\cos 20°-1}{\sin 20° \cos 20°}$$

$(\because$ **$(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$**)

$$= \frac{1+2\sin 20°\cos 20°-1}{\sin 20° \cos 20°} \quad (\because \sin^2\theta+\cos^2\theta=1)$$

$$= \frac{2\sin 20°\cos 20°}{\sin 20° \cos 20°}$$

$= 2$

6. यदि $3\sin\theta+5\cos\theta=5$ हो, तो $5\sin\theta-3\cos\theta$ किसके बराबर होगा?

(a) ± 2 (b) ± 3

(c) ± 5 (d) 1

उत्तर—(b)

$3\sin\theta+5\cos\theta=5$

वर्ग करने पर

$(3\sin\theta+5\cos\theta)^2=5^2$

$9\sin^2\theta+25\cos^2\theta+30\sin\theta\cos\theta=25$

$9(1-\cos^2\theta)+25(1-\sin^2\theta)+30\sin\theta\cos\theta=25$

$9-9\cos^2\theta+25-25\sin^2\theta+30\sin\theta\cos\theta=25$

$9=9\cos^2\theta+25\sin^2\theta-30\sin\theta\cos\theta$

$9=(3\cos\theta)^2+(5\sin\theta)^2-2\times3\cos\theta\times5\sin\theta$

$9=(5\sin\theta-3\cos\theta)^2$ **$[\because a^2+b^2-2ab=(a-b)^2]$**

$\therefore\ 5\sin\theta-3\cos\theta=\pm3$

7. $(1+\cos A)(1-\cos A)(1+\cot^2 A)$ का मान है—

(a) $\frac{1}{2}$ (b) 2

(c) 1 (d) 0

उत्तर—(c)

$(1+\cos A)(1-\cos A)(1+\cot^2 A)$

$$=(1+\cos A)(1-\cos A)\left(1+\frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}\right)$$

$$=(1-\cos^2 A)\left(\frac{\sin^2 A+\cos^2 A}{\sin^2 A}\right)$$

$=\sin^2 A\times\frac{1}{\sin^2 A}$ **$(\because 1-\cos^2 A=\sin^2 A, \sin^2 A+\cos^2 A=1)$**

$=1$

8. यदि $\sqrt{2}\,\text{Cos}\,(5x+5°)=\text{Cot}\,45°$ हो, तो x का मान कितने अंश होगा?

(a) 10 (b) 8

(c) 11 (d) 0

उत्तर—(b)

$\sqrt{2}\cos(5x+5°)=\cot 45°$

$\cos(5x+5°)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ (**$\cot 45°=1$**)

$\cos(5x+5°)=\cos 45°$

$\therefore\ 5x+5°=45°$

$\therefore\ 5x=40°$

$\therefore\ x=\frac{40^0}{5}=8°$

9. यदि $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}=a, \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=b$ हो, तो $\sin^2\beta$ किसके बराबर होगा?

(a) $\frac{a^2-1}{a^2+b^2}$ (b) $\frac{a^2+1}{a^2-b^2}$

(c) $\frac{a^2-1}{a^2-b^2}$ (d) $\frac{a^2+1}{a^2+b^2}$

उत्तर—(c)

$\cos\alpha=a\cos\beta$ ....(i)

$\sin\alpha=b\sin\beta$ ....(ii)

समी. (i) और (ii) का वर्ग करके जोड़ने पर

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=b^2\sin^2\beta+a^2\cos^2\beta$

$=b^2\sin^2\beta+a^2(1-\sin^2\beta)$

$(a^2-b^2)\sin^2\beta=a^2-1$

$$\sin^2\beta=\frac{a^2-1}{a^2-b^2}$$

10. यदि $x=a(\sin\theta+\cos\theta)$ और $y=b(\sin\theta-\cos\theta)$, तो $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ का मान क्या होगा?

(a) 3 (b) 4

(c) 2 (d) 1

उत्तर—(c)

$x=a(\sin\theta+\cos\theta)$, $y=b(\sin\theta-\cos\theta)$

$\frac{x}{a}=\sin\theta+\cos\theta$, $\frac{y}{b}=\sin\theta-\cos\theta$

वर्ग करने पर

$\therefore\ \left(\frac{x}{a}\right)^2=(\sin\theta+\cos\theta)^2$, $\left(\frac{y}{b}\right)^2=(\sin\theta-\cos\theta)^2$

$\frac{x^2}{a^2} = \sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta$

तथा $\frac{y^2}{b^2} = \sin^2\theta + \cos^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta$

$\therefore \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta +$

$\cos^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta$

$= 1 + 1$ ($\because$ **$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$**)

$= 2$

11. यदि $x\cos\theta = 3$ और $4\tan\theta = y$, तो x और y का संबंध जो θ से स्वतंत्र है, किस प्रकार निर्धारित किया जाएगा?

(a) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ (b) $\frac{9}{x^2} - \frac{16}{y^2} = 1$

(c) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ (d) $\frac{9}{x^2} + \frac{16}{y^2} = 1$

उत्तर–(c)

$x\cos\theta = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{\cos\theta}$

$x = 3\sec\theta$

तथा $4\tan\theta = y$

अतः $(3\sec\theta, 4\tan\theta)$ किसी बिंदु का निर्देशांक है।

हम जानते हैं कि अति परवलय पर किसी बिंदु का प्राचलिक निर्देशांक $(a\sec\theta, b\tan\theta)$ होता है।

$\therefore a = 3$ तथा $b = 4$ (तुलना करने पर)

अति परवलय का समी. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\therefore \frac{x^2}{(3)^2} - \frac{y^2}{(4)^2} = 1$

$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

12. यदि $\sin(A+B) = 1$ और $\cos(A-B) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, जहां A तथा B धनात्मक न्यूनकोण हैं और $A > B$, तो A तथा B हैं-

(a) $A = 75^o, B = 15^o$ (b) $A = 60^o, B = 30^o$

(c) $A = 45^o, B = 45^o$ (d) इनमें से कोई भी नहीं

उत्तर–(b)

$\sin(A+B) = 1 = \sin 90^o$

$\therefore A + B = 90^o$ ....(i) तथा

$\cos(A-B) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^o$

$\therefore A - B = 30^o$ ....(ii)

समी. (i) और समी. (ii) को हल करने पर

$A = 60^o, B = 30^o$

13. यदि $a\cos\theta + b\sin\theta = p$ और $a\sin\theta - b\cos\theta = q$, तो a, b, p और q के बीच क्या संबंध है?

(a) $a^2 - b^2 = p^2 - q^2$ (b) $a^2 + b^2 = p^2 + q^2$

(c) $a + b = p + q$ (d) $a - b = p - q$

उत्तर–(b)

$a\cos\theta + b\sin\theta = p$

वर्ग करने पर

$a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta + 2ab\sin\theta\cos\theta = p^2$ ...... (i)

$\because a\sin\theta - b\cos\theta = q$

पुनः वर्ग करने पर

$a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta - 2ab\sin\theta\cos\theta = q^2$ ...... (ii)

समी. (i) व (ii) को जोड़ने पर,

$a^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + b^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = p^2 + q^2$

$a^2 + b^2 = p^2 + q^2$ ($\because$ **$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$**)

14. यदि त्रिभुज ABC में $\sin A = \cos B$ में हो, तो $\cos C$ का मान कितना है?

(a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) 0

(c) 1 (d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

उत्तर–(b)

$\sin A = \cos B$

या $\sin A = \sin(90^0 - B)$ [$\because$ **$\sin(90^0 - \theta) = \cos\theta$**]

$A = 90^0 - B$

या $A + B = 90^0$.........(i)

अब त्रिभुज ABC में

$A + B + C = 180^0$ ....(ii)

समी. (ii) में से (i) को घटाने पर

$C = 90^0$

$\therefore \cos C = \cos 90^0$

$= 0$

15. समीकरण $\tan^2\theta + 3 = 3\sec\theta$, $0° \le \theta < 90°$ को संतुष्ट करने वाले θ का मान है -

(a) 45° व 0° (b) 60° व 0°

(c) 15° व 0° (d) 30° व 0°

उत्तर–(b)

$\tan^2\theta + 3 = 3\sec\theta$

$\sec^2\theta - 1 + 3 = 3\sec\theta$ ($\because$ **$\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$**)

$\therefore \sec^2\theta - 3\sec\theta + 2 = 0$

$\therefore \sec^2\theta - 2\sec\theta - \sec\theta + 2 = 0$

$\therefore \sec\theta(\sec\theta - 2) - 1(\sec\theta - 2) = 0$

$\therefore (\sec\theta - 2)(\sec\theta - 1) = 0$

$\therefore \sec\theta = 2$, या 1

$\therefore \sec\theta = 2 = \sec 60°$ ($\because$ **$\sec 60° = 2$**)

$\therefore \theta = 60°$

तथा $\sec\theta = 1 = \sec 0°$ ($\because$ **$\sec 0° = 1$**)

$\theta = 0°$

$\therefore \theta = 60°, 0°$