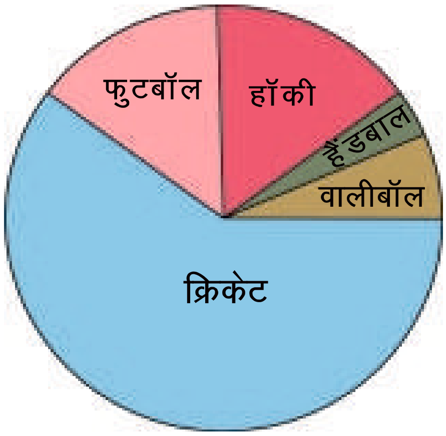
ग्राफीय निरूपण –



चित्र 6.5

उपर्युक्त उदाहरणों में आंकड़ों को वृत्त के माध्यम से दर्शाया गया है।

> यदि आंकड़ों को वृत्त के त्रिज्याखण्डों द्वारा दिखाया जाता है तो इसे पाई चार्ट (वृत्त चित्र या वृत्ताकार लेखाचित्र) कहा जाता है।

क्रियाकलाप 3.

आप कक्षा सातवीं की परीक्षा में विभिन्न विषयों के आपके प्राप्तांकों का पाई चार्ट बनाइये।

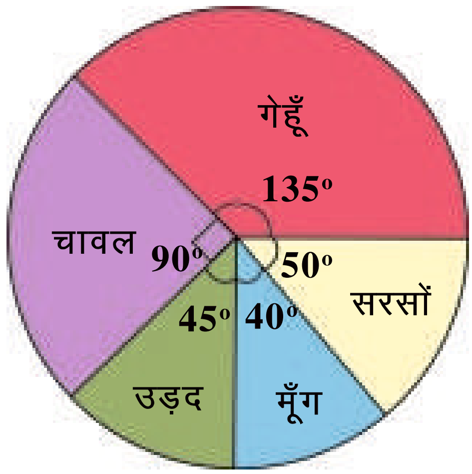
उदाहरण 10. एक किसान के खेत में गत वर्ष पैदा हुई फसलों को वृत्ताकार लेखाचित्र द्वारा दर्शाया गया। यदि फसलों की कुल पैदावार 720 क्विंटल हुई हो तो प्रत्येक फसल की पैदावार का मान ज्ञात कीजिए।

हल: फसल की कुल पैदावार = 720 क्विंटल

$\therefore \quad 360^\circ = 720$ क्विंटल

$\therefore \quad 1^\circ = \frac{1^\circ}{360^\circ} \times 720$ क्विंटल

$\therefore \quad 135^\circ = \frac{135^\circ}{360^\circ} \times 720$ क्विंटल



चित्र 6.6

अतः गेहूँ की पैदावार $= \frac{135^\circ}{360^\circ} \times 720 = 270$ क्विंटल

चावल की पैदावार $= \frac{90^\circ}{360^\circ} \times 720 = 180$ क्विंटल

उड़द की पैदावार $= \frac{45^\circ}{360^\circ} \times 720 = 90$ क्विंटल

मूंग की पैदावार $= \frac{40^\circ}{360^\circ} \times 720 = 80$ क्विंटल

सरसों की पैदावार $= \frac{50^\circ}{360^\circ} \times 720 = 100$ क्विंटल

प्रश्नावली 6.2

प्र.1. गीता द्वारा गणित की छः माहों की मासिक जांच परीक्षा में प्राप्तांक निम्नानुसार हैं –

महीनों के नाम	जुलाई	अगस्त	सितम्बर	अक्टूबर	नवम्बर	दिसम्बर
प्राप्तांक 100 में	40	45	65	35	55	60

उपर्युक्त आंकड़ों से पाई–चार्ट (वृत्ताकार लेखाचित्र) बनाइये।

प्र.2. एक परिवार की मासिक आय 12000 रु. है। परिवार को मासिक खर्च निम्नानुसार है, दिये गये आंकड़ों से पाई चार्ट बनाइये।

क्र.सं.	मद	खर्च किये जाने वाली राशि (रूपयों में)
1.	मकान किराया	1500
2.	भोजन	6000
3.	शिक्षा	1200
4.	मनोरंजन	1800
5.	स्वास्थ्य	1500

प्रायिकता

आज स्कूल की छुट्‌टी होने वाली थी कि अचानक तेज बारिश शुरू हो गई। बच्चे सोच रहे थे कि ऐसी तेज बारिश में घर कैसे जाए। तभी मीना ने अनु से कहा कि अक्टूबर माह में इस बारिश की संभावना तो नहीं थी। अनु ने कहा कि संभावना नहीं थी ऐसी बात नहीं है, संभावना कम थी। जैसे जुलाई के महिने में बारिश होने की संभावना ज्यादा होती है वैसे ही अक्टूबर या अप्रेल में बारिश की सम्भावना बहुत कम होती है।

दैनिक जीवन में कई स्थानों पर संभावना का उपयोग किया जाता है, जैसे दो दलों के बीच खेल में कौन जीतेगा, यह मालूम नहीं होता परन्तु अच्छे दल के जितने की संभावना अधिक होती है। नीचे कुछ परिस्थितियाँ दी गई हैं। उनके घटने की संभावना अधिक है या कम, लिखिए–

1. पोलियो की दवा पिलाने पर पोलिया होने की संभावना . . . .
2. धूम्रपान से फेफड़े का केन्सर होने की संभावना . . . .
3. जहाँ वृक्ष अधिक होते हैं वहाँ वर्षा होने की संभावना . . . .

4. गाड़ी धीरे चलाने पर दुर्घटना होने की संभावना . . . .
5. वर्षा ऋतु में साँप दिखने की संभावना . . . .

ऊपर की सभी संभावनाओं का पता आपने या किसी और व्यक्ति ने आँकड़ों की सहायता से लगाया है। जैसे पोलियो की दवा नहीं पिलाने पर पोलियो होने की सम्भावना अधिक होती है। आँकड़े बताते हैं कि अधिकतर दुर्घटना गाड़ी की तेज रफ्तार के कारण होती है।

आइए, संभावना का अनुमान लगाने का प्रयास करें–

क्रियाकलाप 4.

दो डिब्बे लीजिए। उनमें क्रमशः A और B लिखिए। कागज के समान आकार के 25 टुकड़े लीजिए। उनमें से 10 टुकड़ों पर Y लिखिए तथा 15 टुकड़ों पर X लिखिए। सभी टुकड़ों को एक समान मोड़कर अलग–अलग ढेरी में रखिए। एक डिब्बे में X लिखे पाँच व Y लिखे पाँच टुकड़े तथा दूसरे डिब्बे में 5, X तथा 10, Y लिखे हुए टुकड़े लें।

डिब्बे में टुकडों को डालकर अच्छी तरह से हिलाएँ, जिससे दोनों प्रकार के टुकड़े भली भांति मिल जाए। अब अपने साथियों से दोनों डिब्बों में से एक–एक कागज का मुड़ा हुआ टुकड़ा आँख बंद कर उठाने को कहिए तथा उसके द्वारा निकाले गए टुकड़ों में X लिखा है या Y, नोटकर पुनः उस टुकड़े को वापस वैसा ही मोड़ कर डिब्बे में डालकर अच्छी तरह से हिलाएँ तथा दूसरे सभी साथियों के लिए यही प्रक्रिया दोहरायें तथा प्राप्त परिणाम नीचे दी गई सारणी में भरिए–

सारणी–6.3

क्र.सं.	नाम	A डिब्बे में से निकाले गए कागज के टुकड़े पर लिखा गया अक्षर	B डिब्बे में से निकले गए कागज के टुकड़े पर लिखा गया अक्षर
1			
2			
3			
4			
		A डिब्बे से निकले कुल $X=$ A डिब्बे से निकले कुल Y =	B डिब्बे से निकले कुल $X=$ B डिब्बे से निकले कुल Y =

अब सारणी देखकर बताइये कि –

किस डिब्बे में से X लिखा हुआ टुकड़ा आने की संभावना अधिक है? तथा क्यों?

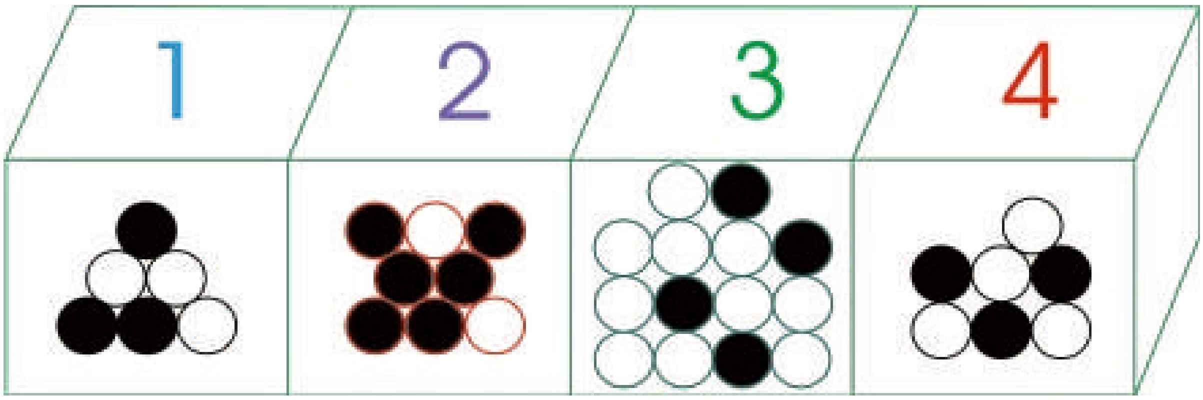
प्रश्न को हल करते हुए सुरेश ने कहा– B डिब्बे में कुल 15 कागज़ के टुकड़े हैं जिनमें से 5 में X लिखे हैं और 10 में Y, चूँकि Y लिखे हुए टुकड़े अधिक हैं, इसलिए Y के आने की संभावना अधिक है।

तभी रानी ने पूछा ''तो क्या A डिब्बे में से X और Y आने की संभावना समान है?''

रानी के प्रश्न का उत्तर आप भी सोचिए और सोचकर कारण सहित उत्तर अपनी कॉपी में लिखिए।

क्रियाकलाप 5.

चित्र में दिए गए बॉक्सों में सफेद (W) और काले (B) रंग की गेंदें रखी हुई हैं। बॉक्स में से यदि बिना देखे कोई एक गेंद निकालनी हो, तो नीचे दिए गए संभावनाओं से संबंधित प्रश्नों के उत्तर दीजिए।



चित्र 6.7

प्र.1 गेंद सफेद हो, इस बात की संभावना किस बाक्स में सर्वाधिक है?

प्र.2 गेंद काली हो, इस बात की संभावना किस बाक्स में सर्वाधिक है?

प्रश्नों के उत्तर ज्ञात करने के लिए रानी ने एक सारणी बनायी–

सारणी 6.4

बाक्स क्र.	सफेद गेंदों की संख्या	काले गेंदों की संख्या	कुल गेंदों की संख्या
1	3	3	6
2	2	6	8
3	10	4	14
4	4	3	7

रानी द्वारा बनाए गए सारणी को देखकर सुरेश ने कुछ इस प्रकार निष्कर्ष निकाले–

1. बाक्स क्र. 1 में कुल 6 गेंदों में से 3 गेंदें काली हैं और 3 गेंदें सफेद हैं इसलिए दोनों गेंदों के आने की संभावना समान है।
2. बाक्स क्र. 2 में कुल 8 गेंदों में से 2 गेंदें सफेद हैं तथा 6 गेंदें काली हैं, इसलिए काली गेंद आने की संभावना अधिक है।
3. बाक्स क्र. 3 में कुल 14 गेंदों में से 10 गेंदें सफेद हैं तथा 4 गेंदें काली हैं, अतः सफेद गेंद आने की संभावना अधिक है।
4. बाक्स क्र. 4 में कुल 7 गेंदों में से 4 गेंदें सफेद है तथा 3 गेंदें काली है, अतः सफेद गेंद के आने की संभावना अधिक है।

सुरेश द्वारा सोचा गया उत्तर तो सही है, परंतु उसे यह समझ में नहीं आ रहा था कि बॉक्स क्र. 3 में कुल 14 में से 10 सफेद गेंदे है तथा बाक्स क्र. 4 में कुल 7 में से 4 सफेद गेंदे है, तो किस बॉक्स में से सफेद गेंद खींचने की संभावना ज्यादा है?

मेरी ने सुझाया – इसे अगर भिन्न के रूप में देखा जाए तो कैसा रहेगा, जैसे कि – 14 में से 10 = $\frac{10}{14}$ और 7 में से 4 = $\frac{4}{7}$, इन दोनों भिन्न संख्याओं की तुलना करने पर–

$\frac{10}{14} = \frac{10}{14}$ और $\frac{4}{7} = \frac{4 \times 2}{7 \times 2} = \frac{8}{14}$ (सम हर बनाने पर) इस प्रकार

$\frac{10}{14}$ और $\frac{8}{14}$ में से $\frac{10}{14}$ बड़ी संख्या है। अतः कुल 14 गेंदों में से 1 गेंद खींचने पर सफेद आने की संभावना कुल 7 में से 1 गेंद खींचने पर सफेद आने की संभावना से ज्यादा होगी।

फैसला सिक्का उछाल कर करना–

आपने देखा होगा कि क्रिकेट मैच के प्रारंभ में कप्तान सिक्को की उछाल (Toss) अपने पक्ष में आने पर पहले बल्लेबाजी या गेंदबाजी का निर्णय लेते हैं।

क्या आप कुछ ऐसे उदाहरण सोच सकते हैं जिनमें निर्णय सिक्का उछालकर कर लिया जा सकता हो?

क्रियाकलाप 6.

आइए एक क्रियाकलाप करके देखें–

एक सिक्का लीजिए और बारी–बारी से आप सभी उछालिए तथा सिक्का जमीन में गिरने के बाद चित आता है या पट निम्न तालिका में नोट कीजिए–

सारणी 6.5

क्र.सं.	विद्यार्थी का नाम	क्या आया चित/पट
1		
2		
3		
4		

तालिका देख कर बताइए–

1. क्या चित और पट लगातार एक के बाद एक आते हैं?
2. क्या चित और पट की कुल संख्या लगभग समान है?
3. किसी सिक्के को उछालने पर चित या पट में से किसके आने की संभावना ज्यादा है?

आपने ध्यान दिया होगा कि एक सिक्के में दो पक्ष होते है– एक चित और दूसरा पट। इस प्रकार कुल दो पक्ष में से चित के आने की संभावना 2 में से 1 है या $\frac{1}{2}$ है। उसी प्रकार कुल दो पक्षों में से पट के आने की संभावना भी 2 में से 1 अर्थात $\frac{1}{2}$ होगी।

किसी बाक्स में यदि 3 गेंदे क्रमशः लाल, पीला और सफेद रंग की हों और उनमें से आँख बंद कर एक गेंद निकाली जाए तो गेंद के लाल होने की संभावना कुल तीन गेंदों में से 1 लाल गेंद के आने की संभावना के तुल्य होगी अर्थात् यह $\frac{1}{3}$ होगी। इसी प्रकार निकाली गई एक गेंद पीली हो, उसकी संभावना भी $\frac{1}{3}$ होगी और उसके सफेद होने की संभावना भी $\frac{1}{3}$ होगी।

अब तो आप समझ ही चुके होंगे कि संभावना को भी मापा जा सकता है तथा "**किसी घटना के घटित होने की संभावना को मापना प्रायिकता कहलाता है।**

आइए, कुछ उदाहरणों के माध्यम से और अधिक जानें –

उदाहरण 11. ताश की गड्डी से यदि आपको आँख बंद कर हुकुम का एक पत्ता निकालने को कहा जाए, तो उसको निकालने की प्रायिकता (संभावना) क्या होगी?

हल: चूँकि ताश की गड्डी में कुल 52 पत्ते होते हैं, जिनमें से 13 पत्ते हुकुम के होते हैं,

अतः हुकुम का एक पत्ता निकालने की प्रायिकता = 52 में से 13 अर्थात् $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

उदाहरण 12. किसी पासे के एक उछाल में शीर्ष पर तीन आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल: पासे में कुल 6 फलक होते हैं जिनमें क्रमशः 1, 2, 3, 4, 5 व 6 बिन्दु अंकित होते है।

अतः शीर्ष पर तीन आने की प्रायिकता = 6 में से 1

$$= \frac{1}{6}$$

(क्योंकि छः फलकों में से केवल एक फलक में ही तीन बिन्दु अंकित होता है।)

उदाहरण 13. एक थैले में तीन सफेद, पाँच लाल और आठ काली गेंदे हैं। उनमें से एक लाल गेंद निकालने की संभावना क्या होगी?

हल: थैले में कुल गेंद = 3 सफेद + 5 लाल + 8 काली = 16

थैले में से एक लाल गेंद निकालने की संभावना 16 में से 5 होगी, क्योंकि थैले में कुल 5 गेंदे लाल हैं, अर्थात्

एक लाल गेंद निकालने की प्रायिकता (संभावना) $= \frac{5}{16}$

उदाहरण 14. ताश की गड्डी में से बिना देखे एक पत्ता खींचा जाता है। उस पत्ते के बादशाह होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल: ताश की गड्डी में कुल पत्तों की संख्या = 52

ताश की गड्डी में बादशाह की संख्या = 4

ताश की गड्डी से एक पत्ता खींचने पर चारों बादशाह में से कोई भी एक बादशाह बाहर आ सकता है।

अतः बादशाह होने की प्रायिकता = 52 में से 4

$$= \frac{4}{52}$$

$$= \frac{1}{13}$$

प्रश्नावली 6.3

1. ताश की गड्डी से ईंट का एक पत्ता खींचने की प्रायिकता क्या होगी?
2. एक थैले में 6 सफेद, 11 लाल और 7 नीले रंग की गेंदे हैं। उस थैले में से एक सफेद गेंद निकालने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए?
3. एक घुड़दौड़ प्रतियोगिता में कुल पाँच प्रतिभागी हैं। उनके जीतने की संभावना ज्ञात कीजिए?
4. एक टोकरी में 10 सेब, 8 अनार और 12 अमरूद हैं तो टोकरी में से एक सेब निकालने की प्रायिकता क्या होगी?
5. पासे के एक उछाल में उसके शीर्ष पर सम संख्या आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए?
6. यदि एक सिक्का उछालें तो उसमें चित आने की संभावना ज्ञात कीजिए और पट आने की संभावना भी ज्ञात कीजिए।

हमने सीखा

1. औसत (माध्य) वह एकमात्र अंक है, जो आंकड़ों के समूहन को प्रदर्शित करता है।
2. $$\text{समान्तर माध्य} = \frac{\text{समस्त आंकड़ों का योगफल}}{\text{आंकड़ों की कुल संख्या}}$$
3. माध्यिका ज्ञात करते समय आंकड़ों को घटते या बढ़ते क्रम में रखा जाता है।
4. माध्यिका घटते या बढ़ते क्रम में व्यवस्थित आंकड़ों के समूहन के मध्य का अंक होता है।
5. (i) $M_d = \frac{N+1}{2}$ वाँ पद (जब N विषम संख्या हो)

   (ii) $$M_d = \frac{\left[\left(\frac{N}{2}\right) \text{वाँ पद} + \left(\frac{N}{2}+1\right) \text{वाँ पद}\right]}{2}$$ (जब N सम संख्या हो)
6. आंकड़ों में सर्वाधिक बारम्बारता वाला आंकड़ा बहुलक होता है।
7. किसी घटना के घटित होने की संभावना ही उसकी प्रायिकता है।

9GBILV

अध्याय–7
अनुक्रमानुपाती एवं व्युत्क्रमानुपाती विचरण
DIRECT AND INVERSE VARIATION

भूमिका

कभी कभी ऐसी चर्चाएँ सुनने में आती हैं कि जिस वर्ष अधिक पानी गिरता है उस वर्ष तालाब और कुँओं में जल स्तर अधिक बढ़ जाता है। जनसंख्या बढ़ने के साथ पानी की खपत भी बढ़ जाती है। जैसे–जैसे तालाबों की संख्या कम हो रही है इससे जल इकट्ठा करने की क्षमता भी कम हो रही है। बिजली का उत्पादन कम होने से उद्योगों में वस्तुओं का उत्पादन कम हो जाता है।

चित्र–7.1

उपरोक्त कथनों पर विचार करें तो हम देखते हैं कि दो राशियाँ किस प्रकार एक दूसरे पर निर्भर है तथा किसी एक का मान बदलने से दूसरे का मान भी बदल जाता है।

इस प्रकार दो संबंधित राशियों में से एक राशि का मान बदलने पर दूसरी राशि का मान बदलने को गणित में **विचरण** कहते हैं तथा जब एक के बढ़ने से दूसरा बढ़े या एक के घटने से दूसरा घटे तो इस प्रकार के विचरण को **अनुक्रमानुपाती** विचरण कहते हैं।

आप भी अपने आसपास इस तरह के परिवर्तन से संबंधित उदाहरण सोचिए और लिखिए।

राजू ने लिखा कि यदि खेती की जमीन अधिक रहेगी तो फसल भी ज्यादा पैदा होगी अर्थात् यदि एक एकड़ में 24 बोरा धान उत्पन्न होता है तो 3 एकड़ में 72 बोरा धान उत्पन्न होगा।

सुधा ने अनाज की मात्रा और उसके मूल्य के बीच संबंध को लिखा। उसने लिखा कि यदि 1 किलो चावल का मूल्य 9 रु. है तो 2 किलो का मूल्य 18 रु. एवं 5 किलो चावल का मूल्य 45 रु. होगा।

इन उदाहरणों को पढ़कर मेरी ने कहा कि "परन्तु हमेशा ऐसा तो नहीं होता कि दो राशियों में एक का मान बढ़ने से दूसरा भी एक निश्चित अनुपात में बढ़े अथवा एक का कम होने से दूसरा भी उसी अनुपात में कम हो। कभी–कभी एक के बढ़ने से दूसरा कम होता है या एक के कम होने से दूसरा

बढ़ता है,'' जैसे उद्योगों के बढ़ने से बेरोजगारी कम होती है, गर्मी ज्यादा होने से तालाबों में पानी का स्तर कम हो जाता है, ज्यादा मजदूर लगाने से काम के समाप्त होने में समय कम लगता है।

इस प्रकार के सम्बन्धों को अनुक्रमानुपाती सम्बन्ध तो नहीं कहेंगे, फिर उन्हें क्या कहेंगे?

चित्र–7.2

राजू, मेरी की बात को ध्यान से सुन रहा था, उसने कहा ''अनुक्रमानुपात में दो परस्पर सम्बन्धित मानों में एक के बढ़ने से दूसरा बढ़ता है या एक के कम होने से दुसरा घटता है परन्तु जब एक के घटने से दूसरा बढ़े या एक के बढ़ने से दूसरा घटे अर्थात् अनुक्रमानुपात का उल्टा हो तो क्या इसे **व्युत्क्रमानुपात** कह सकते हैं?

राजू ने ठीक सोचा अनुक्रमानुपात के विपरीत विचरण को **व्युत्क्रमानुपात** कहते हैं। आइए, पहले अनुक्रमानुपाती विचरण को कुछ और उदाहरणों से समझें।

9GUAQ6

अनुक्रमानुपाती विचरण

उदाहरण 1. 5 पेनों का मूल्य 20 रू. है तो क्या आप बता सकते हैं कि उसी प्रकार के 10, 15, 20, 25 और 30 पेनों का मूल्य कितना होगा?

हल यदि पेनों की संख्या को x तथा संगत मूल्य को y से व्यक्त करें तो, **ऐकिक विधि** से इस उदाहरण को हल करके निम्नांकित सारणी बना सकते हैं।

पेनों की संख्या x	5	10	15	20	25	30
पेनों का मूल्य (रू.में) y	20	40	60	80	100	120
अनुपात $\frac{x}{y}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{10}{40}$	$\frac{15}{60}$	$\frac{20}{80}$	$\frac{25}{100}$	$\frac{30}{120}$
अनुपात $\frac{x}{y}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

उपर्युक्त सारणी से स्पष्ट है कि जैसे–जैसे पेनों की संख्या बढ़ रही है वैसे–वैसे उनके संगत मूल्य भी बढ़ रहे हैं। किन्तु प्रत्येक स्थिति में पेनों की संख्या और उनके संगत मूल्य का अनुपात एक समान (यहाँ ¼) रहता है। इस प्रकार के पेनों को संख्या में वृद्धि से पेनों की मूल्य में आनुपातिक वृद्धि को **अनुक्रमानुपाती विचरण** कहते हैं।

क्रियाकलाप–1

नीचे सारणी में कुछ गेदों के संख्या के लिए उनके मूल्य दिए गए है, इस आधार पर सारणी के खाली खण्डों को भरिए एवं सारणी के नीचे दिए गऐ प्रश्नों का जवाब ढूँढिए।

गेंदों की संख्या x	10	6	4	3	2	1
मूल्य (रू.में) y	30			9		3
अनुपात $\frac{x}{y}$	$\frac{10}{30}$			$\frac{3}{9}$		$\frac{1}{3}$
अनुपात $\frac{x}{y}$	$\frac{1}{3}$			$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$

(1) 6 गेदों का मूल्य क्या है? (2) 4 गेंदो का मूल्य क्या हैं?

(3) 2 गेंदों का मूल्य क्या है?

(4) गेंदो की संख्या और मूल्य के बीच में कौन सा अनुपात है?

यहाँ गेंदों की संख्या घटने से उनका संगत मूल्य एक स्थिर अनुपात में घट रहा है। अर्थात् गेंदों की संख्या व उनके संगत मूल्य साथ–साथ बदल रहे हैं तथा उनका अनुपात एक समान या 1/3 है अतः इनके बीच के संबंध को अनुक्रमानुपाती सम्बन्ध कहेंगे।

क्रियाकलाप–2

नीचे दी गई सारणी में प्रत्येक x के लिए एक y का मान दिया गया है उनमें से किन–किन मानों के बीच अनुक्रमानुपाती सम्बन्ध है, उन्हें छाँट कर लिखिए।

x	4	9	12	15	20	7	13
y	28	63	72	105	100	49	91
$\frac{x}{y}$	–––	–––	–––	–––	–––	–––	–––

अपने दैनिक जीवन से संबंधित अनुक्रमानुपाती विचरण के पाँच उदाहरण सोचकर लिखिए।

जिन दो चरों में अनुक्रमानुपाती विचरण का संबंध होता है, उनके बीच का अनुपात सदैव एक समान होता है। प्राप्त समान अनुपात को स्थिरांक या अचर राशि कहते हैं।

अर्थात् यदि x और y अनुक्रमानुपात में विचरण करते हैं तो $\frac{x}{y} = k$

यदि वही अनुपात x_1 और y_1 तथा x_2 और y_2 के बीच भी हो तो $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = k$ होगा।

क्रियाकलाप–3

यदि x और y के बीच अनुक्रमानुपाती सम्बन्ध हों, तो निम्नांकित सारणी में रिक्त स्थानों को भरिए–

क्र.स.	x	y	$\frac{x}{y}$
(1)	3	18	....
(2)	25	....	$\frac{1}{6}$
(3)	9	....	$\frac{1}{6}$

क्र.सं.	x	y	$\frac{x}{y}$
(4)	....	24	$\frac{1}{6}$
(5)	7	42	....
(6)	....	66	$\frac{1}{6}$

उदाहरण 2. यदि 3 किग्रा. गेहूँ का मूल्य 36 रु. है तो 18 किग्रा. गेहू का मूल्य ज्ञात कीजिए।

हलः चूंकि गेहूँ की मात्रा बढ़ने से संगत मूल्य भी बढ़ रहा है। अतः यहाँ अनुक्रमानुपाती विचरण का सम्बन्ध है।

माना कि 18 किग्रा. गेहूँ का मूल्य x रु. है।

तो इसे हम निम्नांकित सारणी के रूप में लिखते हैं–

गेहूँ की मात्रा (किग्रा में)	3	18
मूल्य (रू. में)	36	x

यहाँ 18 और x के बीच वही अनुपात होनी चाहिए जो 3 और 36 के बीच है या

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$$

$$\therefore \quad \frac{3}{36} = \frac{18}{x}$$

या $\quad 3 \times x = 18 \times 36$ (तिर्यक गुणा से)

या $\quad x = \frac{18 \times 36}{3}$

$\therefore \quad \boxed{x = 216 \text{ रू.}}$

अर्थात् 18 किग्रा. गेहूँ का मूल्य 216 रू. है।

उदाहरण 3. एक रेलगाड़ी 2 घण्टे में 120 किमी. दूरी तय करती है। उसी चाल से वह 5 घण्टे में कितनी दूरी तय करेगी?

हल: चूंकि समय में वृद्धि के साथ तय की गई दूरी भी अधिक होगी, अतः यहाँ अनुक्रमानुपाती विचरण का सम्बन्ध है।

माना कि 5 घंटे में x किमी. दूरी तय करेगी।

तो उसे हम निम्नांकित सारणी के रूप में लिख सकते हैं–

समय (घण्टे में)	2	5
तय की गई दूरी (किमी. में)	120	x

यहाँ 5 और x के बीच वही अनुपात होनी चाहिए, जो 2 और 120 के बीच है।

या $\quad \dfrac{x_1}{y_1} = \dfrac{x_2}{y_2}$

$\therefore \quad \dfrac{2}{120} = \dfrac{5}{x}$

या $\quad 2 \times x = 5 \times 120$ (तिर्यक गुणा से)

या $\quad x = \dfrac{5 \times 120}{2}$

$\therefore \quad x = 300$ किमी.

अर्थात् वह रेलगाड़ी 5 घण्टे में 300 किमी. दूरी तय करेगी।

उदाहरण 4. यदि 4 घण्टे काम करने पर 32 रू. मजदूरी मिलती हो, तो 7 घण्टे काम करने पर कितनी मजदूरी मिलेगी?

हल: चूंकि अधिक समय काम करने पर अधिक मजदूरी मिलेगी, अतः यहाँ अनुक्रमानुपाती विचरण का संबंध है।

माना कि 7 घण्टे काम करने पर x रू. मजदूरी मिलेगी। तो सारणी इस प्रकार होगी–

समय (घण्टे में)	4	7
मजदूरी (रूपये में)	32	x

यहाँ 7 और x के बीच वही अनुपात होनी चाहिए, जो 4 और 32 के बीच है।

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$$

$\therefore$ $$\frac{4}{32} = \frac{7}{x}$$

या $4 \times x = 7 \times 32$ (तिर्यक गुणा से)

या $$x = \frac{7 \times 32}{4}$$

$\therefore$ $x = 56$ रुपये

अर्थात् 7 घण्टे काम करने पर 56 रुपये मज़दूरी मिलेगी।

उदाहरण 5. यदि कागज के 6 पत्रों का भार 45 ग्राम हो, तो ऐसे कितने पत्रों का भार $1\frac{1}{2}$ किग्रा. होगा?

हल: चूंकि पत्रों की संख्या बढ़ने से उसका भार भी उसी अनुपात में बढ़ेगा, अतः यहाँ अनुक्रमानुपाती विचरण का संबंध है।

माना कि x पत्रों का भार $1\frac{1}{2}$ किग्रा. या 1500 ग्राम है।

(यहाँ पर भार को समान इकाइयों (ग्राम) में बदला गया है)

सारणी इस प्रकार होगी–

पत्रों की संख्या	6	x
भार (ग्राम में)	45	1500

यहाँ x और 1500 के बीच वही अनुपात होना चाहिए, जो 6 और 45 के बीच है।

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$$

$\therefore$ $$\frac{6}{45} = \frac{x}{1500}$$

या $6 \times 1500 = 45 \times x$ (तिर्यक गुणा से)

या $$\frac{6 \times 1500}{45} = x$$ या $$x = \frac{6 \times 1500}{45}$$

$\therefore$ $\boxed{x = 200 \text{ पत्र}}$

अर्थात् 200 पत्रों का भार $1\frac{1}{2}$ किग्रा. होगा।

प्रश्नावली 7.1

प्र.1 नीचे दी गई किन सारणियों में x और y अनुक्रमानुपात में विचरण करते हैं? स्थिरांक का मान भी ज्ञात कीजिए।

सारणी (i)

x	7	9	13	21	25	30	41
y	21	27	39	63	75	90	123

सारणी (ii)

x	2.5	7.5	11	17.5	19
y	2.5	7.5	11	17.5	19

सारणी (iii)

x	5	6	7	8	9	11
y	25	24	35	40	50	66

सारणी (iv)

x	1	2	3	4	5
y	2	1	2/3	½	2/5

प्र.2 निम्नांकित अनुक्रमानुपाती विचरण सारणी में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए–

मजदूरों की संख्या	1	2	....	4	5	....
मजदूरी (रूपये में)	50	....	150	200	....	300

प्र.3 निम्नांकित सारणी में x और y अनुक्रमानुपात में विचरण करते हैं। स्थिरांक k का मान ज्ञात कीजिए–

x	2	4	8	16	32
y	14	28	56	112	224
$k = \frac{x}{y}$	....	....	....	....	....

प्र.4 एक कार 3 घण्टे में 600 किमी. चलती है, तो 5 घण्टे में कितनी दूरी चलेगी?

प्र.5 यदि x और y परस्पर अनुक्रमानुपात में विचरण करते हैं, तो निम्नलिखित सारणी में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए–

x	4	24	....	....	44	52
y	10	......	70	90	....	....

प्र.6 निम्नलिखित अनुक्रमानुपाती विचरण सारणी में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए–

समय (मिनटों में)	3	4	–	25	–
तय की गई दूरी (किमी. में)	–	48	84	–	1860

प्र.7 निम्नलिखित में से कौन–कौन सी राशियाँ अनुक्रमानुपात में विचरती हैं ?

(i) वस्तुओं की संख्या और उनका मूल्य

(ii) कक्षा–7 वीं के गणित की किताबों की संख्या और उनका मूल्य

(iii) खेत का क्षेत्रफल और उसका मूल्य

(iv) दूध की लीटर में मात्रा और उसका मूल्य

(v) श्रमिकों की संख्या और कार्य समाप्त होने में दिनों की संख्या

(vi) चाल और समय जबकि तय की गई दूरी वही रहे।

प्र.8 समान मूल्य वाले 15 टिकटों का मूल्य 18 रु. है। 72 रुपये में उसी मूल्य वाले कितने टिकट खरीदे जा सकते हैं?

प्र.9 एक कार 48 लीटर पेट्रोल में 432 किलोमीटर चलती है। 20 लीटर पेट्रोल में वह कितनी दूरी चलेगी?

प्र.10 2 दर्जन संतरे का मूल्य 48 रू. है। 108 संतरे का मूल्य ज्ञात कीजिए।

प्र.11 एक मशीन 5 मिनट में 200 पन्ने छापती है। उसी प्रकार 2×10^3 पन्नों को छापने में कितना समय लगेगा?

प्र.12 एक साइकिल चालक 3 घण्टे में 12 किमी. चलता है। कितने घण्टे में वह 20 किमी. की दूरी तय करेगा?

प्र.13 25 मजदूरों की मजदूरी 1250 रूपये है। 40 मजदूरों के लिए कितनी मजदूरी चाहिए?

प्र.14 एक मजदूर को 13 दिनों के काम के लिए 806 रूपये मिलता है। यदि उसे 1798 रूपये मिले, तो बताइये कि उन्होंने कितने दिनों तक काम किया?

प्र.15 100 मीटर की दूरी तय करने में नम्रता 1225 कदम चलती हैं 2835 कदम चलने पर वह कितनी दूरी तय करेगी?

प्र.16 1000 रू. का सामान बेचने पर एक दलाल को 73 रू. कमीशन मिलता है। 100 रू. का सामान बेचने पर उसे कितना कमीशन मिलेगा?

प्र.17 यदि कागज के 500 पत्रों की मोटाई 3.5 सेमी है, जो उस कागज के 275 पत्रों की मोटाई ज्ञात कीजिए।

प्र.18 एक व्यक्ति 1 मिनट में 180 शब्द पढ़ सकता है, तो 768 शब्द पढ़ने में उसे कितना समय लगेगा?

प्र.19 सुनीता एक घंटे में 1080 शब्द टाइप करती है। इसके टाइप करने की दर शब्द प्रति मिनट में ज्ञात कीजिए।

प्र.20 25 मजदूर एक सप्ताह में 7.5 किमी लम्बी सड़क बनाते हैं। कितने मजदूर एक सप्ताह में 10.2 किमी. लम्बी सड़क तैयार कर लेंगे?

प्र.21 10 बोरी सीमेंट का वजन 4.50 क्विंटल है। ऐसी ही 35 बोरियों का वजन बताइये।

प्र.22 एक कार 60 किमी. प्रति घण्टा की चाल से चलती है। नीचे दी गई सारणी में तय की गई दूरियाँ और समय अनुक्रमानुपाती विचरण में दिये गये हैं तो दूरी तथा समय का सही सम्बन्ध जोड़िए–

	दूरी (किमी.)	समय (घण्टे में)
(i)	120	(a) 3
(ii)	180	(b) 2
(iii)	210	(c) 4
(iv)	240	(d) 3½

व्युत्क्रमानुपाती विचरण

9H46RT

दैनिक जीवन में हम कुछ स्थानों पर यह देखते हैं कि एक राशि के बढ़ने

चित्र–7.3

से दूसरी राशि एक स्थिर अनुपात में घटने लगती है अथवा पहली राशि के घटने से दूसरी राशि एक स्थिर अनुपात में बढ़ने लगती है। इस प्रकार के आनुपातिक सम्बन्धों को **व्युत्क्रमानुपात** कहते है।

आइए, एक उदाहरण देखें–

एक सड़क पर मिट्टी डालने के काम को पूरा करने के लिए आवश्यक मजदूरों और दिनों की संख्या नीचे सारणी में दी हुई हैं–

मजदूरों की संख्या (x)	5	10	15	20	30
दिनों की संख्या (y)	60	30	20	15	10

ऊपर सारणी में मजदूरों की संख्या (x) है तथा दिनों की संख्या (y) है क्या आप प्रत्येक x के लिए दिए गए y के मध्य कोई सम्बन्ध प्राप्त कर सकते हैं? जो x, y के प्रत्येक मान के लिए स्थिर हैं।

उदाहरण को देखकर आशु सोच रही थी कि मजदूरों की संख्या दुगनी होने पर दिनों की संख्या आधी हो गई तथा आगे मजदूरों की संख्या तीन गुनी हो जाने पर दिनों की संख्या 1/3 गुनी हो गई। उसी प्रकार मजदूरों की संख्या यदि 10 गुनी कर दी जाए तो दिनों की संख्या 1/10 गुनी हो जायेगी। यदि x और y के मानों को गुणा किया जाए तो एक स्थिरांक प्राप्त होगा। जिस प्रकार अनुक्रमानुपाती सम्बन्ध में $\frac{x}{y}$ या x:y स्थिरांक होता है उसी प्रकार यहाँ $x \times y$ या $\frac{x}{1/y}$ या $x:\frac{1}{y}$ स्थिरांक होता है। जो कि अनुक्रमानुपात का व्युत्क्रम है इसलिए हम इसे व्युत्क्रमानुपात कहते हैं।

क्या आप आशु से सहमत है? यहाँ हम पाते है कि मजदूरों की संख्या जिस अनुपात में बढ़ती है, ठीक उसके उल्टे या विपरीत अनुपात में दिनों की संख्या घटती है और जिस अनुपात में मजदूरों की संख्या घटती है, ठीक उसके उल्टे या विपरीत अनुपात में दिनों की संख्या बढ़ती है। ऐसे अनुपात को विलोम अनुपात या **व्युत्क्रमानुपात** कहते हैं। जैसे उपरोक्त उदाहरण में मजदूरों की संख्या और दिनों की संख्या में व्युत्क्रमानुपात है।

अर्थात् दोनों राशियों में विचरण व्युत्क्रम अनुपात में है।

क्रियाकलाप–4

एक यात्री गाड़ी 12 किमी./घण्टा की चाल से चलकर कोई दूरी 4 घण्टे में तय करती है। बताइए–

(i) चाल बढ़ाकर 24 किमी./घण्टा कर देने से उस दूरी को पार करने में कितना समय लगेगा?

(ii) चाल बढ़ाकर 36 किमी./घण्टा कर देने से उस दूरी को पार करने में कितना समय लगेगा?

साथ ही निम्नांकित सारणी को भी पूर्ण करें–

चाल (किमी/घण्टा में) क्रमशः बढ़ाने पर	12	24	36	48
समय (घण्टे में)	4	.....	.....	.....
चाल × समय = दूरी	48	48	48	48

निष्कर्ष : चाल बढ़ाने पर समय .... लगता है।

चाल किमी प्रतिघंटा में क्रमशः कम करने पर	48	32	16	6
समय (घंटे में)	1	.....	.....	.....
चाल × समय = दूरी	48	.....	.....	.....

निष्कर्ष– चाल .... होने पर समय अधिक लगता है।

आप भी दैनिक जीवन से संबंधित ऐसे पांच उदाहरण लिखिए, जो परस्पर व्युत्क्रम अनुपात में हो।

आइए, एक और उदाहरण देखें:– प्रतिदिन 16 पृष्ठ पढ़ने पर एक पुस्तक 15 दिनों में पूर्णतः पढ़ी जा सकती है। यदि प्रतिदिन 8 पृष्ठ पढ़ें, तो पुस्तक को पूर्णतः पढ़ने में कितने दिन लगेंगे? यदि 12, 15 तथा 24 पृष्ठ प्रतिदिन पढ़ें तो पुस्तक को कितने दिनों में पढ़ा जा सकता है।

यदि प्रतिदिन पढ़े गये पृष्ठों की संख्या x तथा पढ़ने में लगे संगत दिनों की संख्या y से व्यक्त करें, तो हल करने से प्राप्त उत्तरों को निम्नानुसार सारणी में लिखा जा सकता है–

पृष्ठों की संख्या (x)	16	8	12	15	24
दिनों की संख्या (y)	15	30	20	16	10

यहाँ $\frac{1}{y} = \frac{1}{15} = \frac{1}{30} = \frac{1}{20} = \frac{1}{16} = \frac{1}{10}$

$$x:\frac{1}{y} = \frac{x}{1/y} = \frac{16}{1/15} = \frac{8}{1/30} = \frac{12}{1/20} = \frac{15}{1/16} = \frac{24}{1/10}$$

मानक रूप में $x \times y = 16\times15 = 8\times30 = 12\times20 = 15\times16 = 24\times10$

$=240 \quad =240 \quad =240 \quad =240 \quad =240$

$$x:\frac{1}{y} = \frac{x}{\frac{1}{y}} = xy = 240 = k \text{ (माना)}$$

यहाँ पृष्ठों की संख्या, दिनों की संख्या के व्युत्क्रम अनुपात में है। चूँकि पृष्ठों की संख्या के प्रत्येक मान के लिए आवश्यक दिनों की संख्या के मध्य व्युत्क्रम अनुपाती संबंध हर जगह एक स्थिर मान देता है। इसलिए पृष्ठों की संख्या के सभी दिनों की संख्याओं के संगत मानों के व्युत्क्रम समानुपाती है। दूसरे शब्दों में कह सकते हैं कि पृष्ठों की संख्या x और संगत दिनों की संख्या y का गुणनफल एक नियत राशि है अर्थात् $xy=k$

अब यदि xy के एक से अधिक मान k के बराबर हैं तो वे आपस में भी बराबर होंगे $x_1y_1=x_2y_2$

निष्कर्ष: हम पाते हैं कि **"जब दो चर राशियों में परस्पर इस प्रकार का संबंध हो कि उनमें से एक राशि का मान बढ़ाने से दूसरी राशि का मान कम हो या पहली राशि का मान कम करने से दूसरी राशि का मान बढ़ता है तथा प्रत्येक स्थिति में दोनों राशियों का गुणनफल नियत रहे, तो उनके बीच के सम्बन्ध को व्युत्क्रमानुपाती विचरण कहते हैं।"**

गणितीय रूप में, यदि x और y व्युत्क्रमानुपाती विचरण में हो तो $\boxed{xy = k}$

यदि x के दो मान x_1 एवं x_2 के लिए y के दो संगत मान y_1 एवं y_2 हो तो $\boxed{\mathbf{x_1y_1=x_2y_2}}$

क्रियाकलाप–5

नीचे दी गई किन सारणियों में x और y व्युत्क्रमानुपाती विचरण में है–

(i)

x	6	2	3	18
y	3	9	6	1

(ii)

x	40	20	16	10	2.5
y	2	4	5	8	32

(iii)

x	10	5	2	4
y	3	6	15	8

(iv)

x	9	10	12	15
y	5	4.5	3.75	3

क्रियाकलाप–6

यदि x और y व्युत्क्रमानुपात में विचरण करते हैं, तो निम्नांकित सारणी में आवश्यकतानुसार रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए–

(i)

x	9	18	20	---	30
y	4	---	---	1.5	----

(ii)

x	16	8	--	---
y	3	---	12	24

(iii)

x	20	50	25	----
y	---	4	----	5

आइए, व्युत्क्रमानुपाती विचरण के कुछ उदाहरणों को देखें–

उदाहरण 6. 12 मजदूर एक दीवार को 10 दिन में बना सकते हैं। उसी दीवार को 20 मजदूर कितने दिनों में बना लेंगे?

हल चूंकि मजदूरों की संख्या बढ़ाने से काम पूरा होने में कम समय लगेगा, अतः यहाँ व्युत्क्रमानुपाती विचरण की स्थिति है।

माना कि 20 मजदूर उस दीवार को y दिनों में बना लेंगे। तो सारणी इस प्रकार होगी–

मजदूरों की संख्या(x)	12	20
दिनों की संख्या (y)	10	y

व्युत्क्रमानुपाती विचरण में–

$$x_1y_1 = x_2y_2$$
$$12\times10 = 20\times y$$
$$\Rightarrow \frac{12\times10}{20} = y$$
$$\Rightarrow \quad 6 = y$$
$$\Rightarrow \quad y = 6$$

अर्थात् 20 मजदूर उस दीवार को 6 दिन में बना लेंगे।

उदाहरण 7. एक छात्रावास में 200 छात्रों के लिए 24 दिन की खाद्य सामग्री है। यदि छात्रावास में 100 छात्र और शामिल हो जाएँ, तो खाद्य सामग्री कितने दिनों में समाप्त हो जाएगी?

हल 100 छात्रों के और शामिल हो जाने से छात्रावास में छात्रों की संख्या= 200+100 =300

चूंकि खाद्य सामग्री निश्चित है और छात्रों की संख्या बढ़ने से खाद्य सामग्री कम समय में समाप्त हो जाएगी, अतः यहाँ व्युत्क्रमानुपाती सम्बन्ध है।

माना कि खाद्य सामग्री y दिनों में समाप्त हो जाएगी। तो सारणी इस प्रकार होगी–

छात्रों की संख्या (x)	200	300
दिनों की संख्या (y)	24	y

व्युत्क्रमानुपाती विचरण में –

$$x_1y_1 = x_2y_2$$
$$\therefore \quad 200 \times 24 = 300 \times y$$
या $$\frac{200\times24}{300} = y$$
या $$16 = y \Rightarrow y = 16$$

अर्थात् खाद्य सामग्री 16 दिनों में समाप्त हो जायेगी।

उदाहरण 8. शालू 12 किमी/घण्टा की औसत चाल से साइकिल चलाकर घर से स्कूल जाती है। वह 20 मिनट में स्कूल पहुँच जाती है। यदि वह 15 मिनट में स्कूल पहुँचना चाहे, तो उसकी औसत चाल क्या होनी चाहिए?

हल: चूंकि कम समय में स्कूल पहुँचने के लिए चाल बढ़ानी होगी, अतः यहाँ व्युत्क्रमानुपाती विचरण की स्थिति है।

माना कि अभीष्ट औसत चाल x किमी/घण्टा है।

तो यहाँ सारणी इस प्रकार होगी–

चाल (किमी./घण्टा में) (x)	12	x
समय (मिनटो में) (y)	20	15

व्युत्क्रमानुपाती विचरण में–

$$x_1y_1 = x_2y_2$$

या $12 \times 20 = x \times 15$

या $\frac{12\times20}{15} = x$

या $16 = x$

$\therefore$ $x = 16$ किमी/घण्टा

अर्थात् 15 मिनट में स्कूल पहुँचने के लिए शालू की औसत चाल 16 किमी/घण्टा होनी चाहिए।

प्रश्नावली 7.2

1. यदि x और y व्यत्क्रमानुपाती विचरण में हों, तो आवश्यकतानुसार रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए–

x	8	6	4	-----	36
y	9	12	-----	10	----

2. निम्नांकित विचरण सारणी में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए–

चाल (किमी/घण्टा में)	4	8	....	.....	64
लगा समय (मिनटों में)	.....	40	20	10	......

3. 10 मजदूर किसी काम को 2 दिन में करते हैं। उसी काम को 2 मजदूर कितने दिनों में करेंगे?

4. 45 मजदूर एक काम को 27 दिनों में पूरा करते हैं, तो कितने मजदूर उसी काम को 15 दिनों में पूरा करेंगे?

5. एक बस 30 किमी/घण्टा की चाल से 6 घण्टे में एक निश्चित दूरी तय करती है। उसी दूरी को वह बस किस चाल से केवल 4 घण्टे में तय कर लेगी?

6. 40 घोड़े एक क्विंटल चने को 7 दिनों में खाते हैं। कितने घोड़े उतने ही चने को 28 दिनों में खायेंगे?

7. एक छात्रावास में 300 छात्रों के लिए 15 दिनों की राशन सामग्री है। यदि अवकाश के कारण 200 छात्र बाहर चले जायें तो वह सामग्री कितने दिनों तक चलेगी?

8. एक छावनी में 700 सैनिकों के लिए 25 दिनों की पर्याप्त खाद्य सामग्री है। किन्तु कुछ और सैनिकों के आ जाने के कारण वह खाद्य सामग्री केवल 20 दिनों में समाप्त हो जाती है। बताइये कि बाद में छावनी में और कितने सैनिक आये?

9. एक व्यक्ति प्रतिदिन किसी पुस्तक के 8 पृष्ठों को पढ़कर उसे 15 दिनों में पूरा पढ़ लेता है।यदि वह प्रतिदिन 12 पृष्ठ पढ़े तो तो पूरे पुस्तक को वह कितने दिनों में पढ़ लेगा?

10. एक सैनिक शिविर में 105 सैनिकों के लिए 21 दिनों की रसद सामग्री है। यदि शिविर में 42 सैनिक और शामिल हो जाये, तो रसद सामग्री कितने दिनों में समाप्त हो जायेगी?

11. निम्नलिखित में से कौन–कौन सी व्युत्क्रमानुपात में विचरण करती है?
    (i) खरीदी गई पुस्तकों की संख्या और प्रत्येक पुस्तक की कीमत।
    (ii) बस द्वारा तय की गई दूरी और खपत पेट्रोल की कीमत।
    (iii) साइकिल द्वारा किसी निश्चित दूरी को पार करने में लगा समय और उसकी चाल।
    (iv) एक पुल बनाने में लगाये गये मजदूरों की संख्या और पुल बनने मे लगने वाला समय।
    (v) छात्रों की संख्या और प्रतिछात्र वितरित मिठाई का वजन। (यदि 40 किग्रा. मिठाई बाटनी है)।
    (vi) मजदूरी और कार्य के घण्टे।
    (vii) वस्तुओं की संख्या और उनका कुल मूल्य।

12 26 जनवरी को एक विद्यालय के 800 छात्रों में 100 ग्राम प्रति छात्र के हिसाब से मिठाई बांटी गई। उतनी ही मिठाई यदि 1000 छात्रों में बराबर–बराबर बांटी जाये, तो प्रत्येक छात्र को कितने ग्राम मिठाई मिलेगी?

13. जब एक नल एक घंटे में 640 लीटर पानी भरता है तो एक पानी टंकी को भरने में 10 घण्टे का समय लगता है। यदि उसी टंकी को दूसरे नल से 8 घण्टे में भरा गया हो, तो दूसरे नल ने प्रतिघंटा कितना पानी भरा?

हमने सीखा

1. जब दो चर राशियाँ इस प्रकार संबंधित हो कि एक चर का मान बढ़ने या घटने से दूसरे चर का मान भी उसी अनुपात में बढ़ या घट जाता है, तो वे अनुक्रमानुपाती कहलाती है।

2. जब दो चर राशियों x और y अनुक्रमानुपात में होती हैं तो उनका अनुपात एक स्थिरांक होता है अर्थात् $\boxed{\frac{x}{y} = k}$

3. यदि दो राशियाँ अनुक्रमानुपात में हों तथा एक राशि के दो मानों x_1 और x_2 के लिए दूसरी राशि के संगत मान क्रमशः y_1 एवं y_2 हों तो $\boxed{\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}}$

4. जब दो चर राशियाँ इस प्रकार संबंधित हों कि एक चर का मान बढ़ने (या घटने से) दूसरे चर के मान में उसी अनुपात में कमी (वृद्धि) हो तो राशियाँ व्युत्क्रमानुपात में होती हैं।

5. जब दो राशियाँ x और y व्युत्क्रमानुपात में होती हैं तो उनका गुणनफल एक स्थिरांक होता है, अर्थात् $\boxed{x.y = k}$ जहाँ k एक स्थिरांक है।

6. यदि दो राशियाँ व्युत्क्रमानुपात में हों तथा एक राशि के दो मानों x_1 और x_2 के लिए दूसरी राशि के संगत मान क्रमशः y_1 और y_2 हो तो

$$\boxed{x_1 \times y_1 = x_2 \times y_2}$$

9HD2TG

अध्याय–8

बीजीय व्यंजकों के गुणनखण्ड एवं गुणनखण्डन (FACTORS & FACTORIZATION OF ALGEBRAIC EXPRESSIONS)

9HLXV4

भूमिका

एक शिक्षिका गणतंत्र दिवस के अवसर पर कक्षा 8 वीं के छात्रों को टॉफियाँ बाँट रही थीं। उनकी थैली में 60 टॉफियाँ थीं। सभी छात्रों का ध्यान इस ओर लगा था कि किसी को ज्यादा न मिले और सारी टॉफियाँ बँट भी जावें। तभी लता ने सोचना शुरू किया हमारी कक्षा में 10 छात्र हैं प्रत्येक छात्र को 6 टॉफियाँ मिलेंगी और शेष कुछ नहीं बचेगा। यदि कक्षा में 15 छात्र होते तब प्रत्येक को 4 टॉफियाँ मिलतीं। लता ने अपनी कॉपी निकालकर हिसाब लिखना शुरू किया कि कितने छात्र हों तो 60 टॉफियों को इस प्रकार बराबर–बराबर बाँटा जा सकता है कि कोई टॉफी शेष न बचे।

उसने देखा कि 60 टॉफियों को 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 एवं 60 बच्चों में बाँटा जाए तो कोई भी टॉफी शेष नहीं बचेगी।

रमा, जो बहुत देर से लता की इस उधेड़बुन को देख रही थी, ने लता को बताया कि ऊपर लिखीं गई सभी संख्याओं का 60 में पूरा–पूरा भाग जाता है, अतः ये सभी संख्याएँ 60 के गुणनखण्ड (factors) हैं। इसे सर्व सम्भव गुणनखण्ड भी कहते हैं।

आखिर कितने गुणनखण्ड

उसी समय उमेश ने लता से पूछा कि क्या इसी तरह बीजीय व्यंजक 5 ab के गुणनखण्ड (Factors) निकाले जा सकते हैं। लता ने लिखकर बताया कि 5ab में 5, a एवं b का पूरा–पूरा भाग जाता है। रमा भी यह सुन रही थी उसने बताया कि पूर्व में हम पढ़ चुके हैं कि प्रत्येक संख्या 1 व स्वयं से पूरी–पूरी विभाजित होती है अतः1 और 5ab भी 5ab के गुणनखण्ड होंगे तथा 5a एवं 5b से भी 5ab पूरी विभाजित होती है। इस प्रकार

5ab के गुणनखंड = 1, 5, a, b, 5a, 5b व 5ab होंगे।

रेखा ने कहा "तुमने एक गुणनखण्ड छोड़ दिया है।" सब सोचने लगे कौनसा, तभी रमेश बोला हाँ, ab भी तो एक गुणनखण्ड होगा। इस प्रकार 5ab के गुणनखण्ड बने 1, 5, a, b, ab, 5a, 5b व 5ab

रमा ने कहा चलो, हम सब गुणनखंड निकालने का खेल खेलें। रोहित ने अपनी कॉपी में $12x^2$ के गुणनखण्ड लिखकर बताए कि $12x^2$ के गुणनखण्ड = 1, 2, 3, 4, 6, $2x^2$, $3x^2$, $4x^2$, $6x^2$, $12x^2$ होगे।

रमा ने रोहित को बताया कि अभी भी $12x^2$ के सभी गुणनखण्ड नहीं लिखे गये है। रमा

ने पहले गुणांकों के, तत्पश्चात् बीजांकों के गुणनखण्ड लिखकर $12x^2$ के सम्पूर्ण गुणनखण्ड इस प्रकार लिखे।

12 के गुणनखण्ड $= 1, 2, 3, 4, 6$ एवं 12

x^2 का गुणनखण्ड $= 1, x, x^2$

अतः $12x^2$ के सभी गुणनखण्ड $= 1, 2, 3, 4, 6, 12, x, 2x, 3x, 4x, 6x, 12x, x^2, 2x^2, 3x^2, 4x^2, 6x^2$ एवं $12x^2$

सभी गुणनखण्ड कैसे पहचानें

रोहित ने कहा – ठीक है परन्तु किसी एक पदीय बीजीय व्यंजक के इतने सारे गुणनखण्डों को लिखने का कोई तरीका तो होगा जिससे यह पता चल सके कि सभी गुणनखण्डों को लिखा गया है।

लता ने कहा – "चलो गणित की शिक्षिका से पूछें और उनसे रमा के द्वारा निकाले गए $12x^2$ के गुणनखण्डों की जाँच भी करवा लें।"

शिक्षिका ने कहा : $12x^2$ के सभी गुणनखण्डों को आपने लिख लिया है और इस प्रकार के व्यंजकों के सभी गुणनखण्डों को लिखने के लिए स्थिरांक के गुणनखण्डों को आड़ी पंक्ति में लिखें तथा चरांक के सभी गुणनखण्डों को खड़े स्तंभों में लिखें। इस प्रकार हमें एक गुणन तालिका प्राप्त होगी। इस तालिका को भरने पर एक पदीय बीजीय व्यंजक (monomial) के सभी गुणनखण्ड प्राप्त हो जाएंगे। शिक्षिका ने गुणनखण्डों को इस प्रकार तालिकाबद्ध किया।

सारणी 8.1

$\times$	1	2	3	4	6	12
1	1	2	3	4	6	12
x	x	$2x$	$3x$	$4x$	$6x$	$12x$
x^2	x^2	$2x^2$	$3x^2$	$4x^2$	$6x^2$	$12x^2$

शिक्षिका ने छात्रों से पूछा कि क्या तालिका में लिखे गये सभी व्यंजकों का पूरा–पूरा भाग $12x^2$ में जाता है? आप भी जांच कीजिए कि क्या तालिका में रमा द्वारा लिखे गये सभी गुणनखण्ड आ गए हैं?

कुछ और उदाहरण

शिक्षिका ने लता से $10ab^2$ के गुणनखण्ड ऊपर बताए गए तरीके से निकालने के लिए कहा। लता ने बोर्ड पर निम्नानुसार $10ab^2$ के गुणनखण्ड की तालिका बनाई और सभी छात्रों से जाँच करने को कहा।

10 के गुणनखण्ड = 1, 2, 5, 10

ab^2 के गुणनखण्ड = 1, a, b, b^2, ab, ab^2

अतः 10 ab^2 के सभी संभावित गुणनखण्ड

सारणी 8.2

×	1	2	5	10
1	1	2	5	10
a	a	2a	5a	10a
b	b	2b	5b	10b
b^2	b^2	$2b^2$	$5b^2$	$10b^2$
ab	ab	2ab	5ab	10ab
ab^2	ab^2	$2ab^2$	$5ab^2$	$10ab^2$

तालिका में लिखे गये प्रत्येक व्यंजक का पूरा–पूरा भाग $10ab^2$ में जाता है और शून्य बचता है। अब छात्रों को एक तरीका मिल गया जिससे वे सभी एकपदीय बीजीय व्यंजकों के गुणनखण्ड ज्ञात कर सकते थे।

क्रियाकलाप 1.

आप भी अपनी कॉपी में उपरोक्त सारणी के अनुसार नीचे दिये गये बीजीय व्यंजकों के गुणनखण्ड लिखिए।

$8x$, $4a^2$, 6ab, xy , $3x^2y$, $6y^2$

समान गुणनखण्ड पहचानें

रोहित द्वारा लिखे गए 6ab के गुणनखण्ड को शिक्षिका ने ब्लैक बोर्ड पर लिखा।

6ab के गुणनखण्ड हैं = 1, 2, 3, 6, a, 2a, 3a, 6a, b, 2b, 3b, 6b, ab, 2ab, 3ab, 6ab

राजेश द्वारा लिखे गए $4a^2$ के गुणनखण्ड को शिक्षिका ने 6ab के गुणनखण्ड के नीचे लिखा।

$4a^2$ के गुणनखण्ड = 1, 2, 4, a 2a, 4a, a^2, $2a^2$, $4a^2$

अब शिक्षिका ने पूछा कि क्या दोनों व्यंजकों के गुणनखण्डों में कोई समानता है? रमा ने बताया कि 6ab एवं $4a^2$ के गुणनखण्डों की कुल संख्या तो अलग–अलग है परन्तु कुछ गुणनखण्ड दोनों में एक समान हैं। ये उभयनिष्ठ गुणनखंड (common factor) 1, 2, a, 2a हैं।

शिक्षिका ने कहा बिल्कुल ठीक और इनमें से सबसे बड़ा उभयनिष्ठ गुणनखण्ड 2a है। जैसा तुम जानते हो सबसे बड़ा उभयनिष्ठ गुणनखण्ड ही महत्तम समापवर्तक होता है अतः इसे 6ab और $4a^2$ का महत्तम समापवर्तक (Highest Common Factor) कहते हैं।

दो या दो से अधिक एकपदीय बीजीय व्यंजकों का महत्तम समापवर्तक वह बड़े से बड़ा

व्यंजक है जिसका दिए गए सभी बीजीय व्यंजकों में पूरा–पूरा भाग चला जाता है।

अब शिक्षिका ने $3x^2y$ एवं $6y^2$ के सभी गुणनखण्डों को ब्लैक बोर्ड पर लिखा तथा प्रवीण से उभयनिष्ठ गुणनखण्डों को छांट कर लिखने कहा।

$3x^2y$ के गुणनखण्ड = 1, 3, x, $3x$, x^2, $3x^2$, y, 3y, xy, $3xy$, x^2y, $3x^2y$

$6y^2$ के गुणनखण्ड = 1, 2, 3, 6, y, 2y, 3y, 6y, y^2, $2y^2$, $3y^2$, $6y^2$

प्रवीण ने उभयनिष्ठ गुणनखण्डों को छाँट कर लिखा = 1, 3, y, 3y

अब महत्तम समापवर्तक पूछे जाने पर सभी ने पहचान लिया कि महत्तम समापवर्तक3y है।

एक और तरीका

यह विधि छात्रों को कुछ बड़ी लग रही थी। रमा ने शिक्षिका से पूछा कि दो या दो से अधिक बीजीय व्यंजकों के महत्तम समापवर्तक निकालने की क्या कोई संक्षिप्त विधि नहीं है शिक्षिका ने कहा है, जरा इसे देखो :

माना हमें $6x^2y$ एवं $8xy^2$ का महत्तम समापवर्तक ज्ञात करना है तो

सर्वप्रथम गुणांकों (Coefficients) 6 एवं 8 का म.स. = 2

x एवं x^2 का म.स. = x (x का न्यूनतम घात वाला पद)

y एवं y^2 का म.स. = y (y का न्यूनतम घात वाला पद)

अतः $6x^2y$ एवं $8xy^2$ का म.स. = $2xy$ (ऊपर निकाले गए सभी म.स. का गुणनफल)

उदाहरण 1. $12s^3t^2u^3$ एवं $16s^4tu^2$ का म.स. ज्ञात कीजिए।

हल : 12 एवं 16 का म.स. = 4

s^3 एवं s^4 का म.स. = s^3

t^2 एवं t का म.स. = t

u^3 एवं u^2 का म.स. = u^2

अतः $12s^3t^2u^3$ एवं $16s^4tu^2$ का म.स. = $4s^3tu^2$

उदाहरण 2 $20a^2b$ एवं ab^3c का म.स. ज्ञात कीजिए।

हल : यहां बीजीय व्यंजकों के गुणांक क्रमशः 20 एवं 1 है।

20 एवं 1 का म.स. = 1

a^2 एवं a का म.स. = a

b एवं b^3 का म.स. = b

यहाँ c केवल दूसरे पद में है पहले पद में c नहीं है।

अतः $20a^2b$ एवं ab^3c का म.स. = 1 ab = ab

प्रश्नावली 8.1

1. निम्न व्यंजकों के सभी गुणनखण्डों को लिखिए :–

(i) $5t^2$ (ii) $7x\ y$ (iii) $14\ l^2m$ (iv) $39\ lmn$

2. निम्न व्यंजकों के सभी संभावित गुणनखण्ड लिखकर म.स. ज्ञात कीजिए।

(i) $5s\ ,\ 2s^2$ (ii) $9m^2, 3t$ (iii) $6a^2, 8ab$ (iv) $7m^3, 6m$

3. निम्न व्यंजकों का म.स. ज्ञात कीजिए।

(i) $6m^2l, 12ml^3$ (ii) $24a^2bc, 20bc^2$ (iii) $xy^3z, 10x^2y$

(iv) $14x^3y, 21$ (v) $22p^2q^2r, 33pq^2r^2$ (vi) $3xy, 23x^2z$

(vii) $6pqr, 23xyz$

द्विपदीय व्यंजक के गुणनखण्ड

एकपदीय व्यंजकों के गुणनखण्ड ज्ञात करना तो आपने सीख लिया है। क्या आप अपने अनुभवों के आधार पर किसी द्विपदीय व्यंजक (Binomial) के गुणनखण्ड ज्ञात कर सकते हैं?

जैसे, यदि किसी कक्षा के लड़कों की संख्या के तीन गुने में लड़कियों की संख्या के तीन गुने को जोड़ दिया जाये तो योगफल क्या प्राप्त होगा? क्या यह योगफल लड़के एवं लड़कियों की संख्या के योग के तीन गुने के बराबर होगा? लड़कों एवं लड़कियों की संख्या आप अपनी इच्छानुसार रखकर उत्तर की जाँच कीजिए। माना लड़कों की संख्या 15 है और लड़कियों की संख्या 18 है। लड़कों की संख्या का तीन गुना हुआ 45, इसी तरह से लड़कियों की संख्या का 3 गुना हुआ 54 और यह कुल मिलाकर 99 हुआ। जबकि लड़के और लड़कियों की संख्या जोड़ने पर 33 प्राप्त हुआ। जिसका 3 गुना भी 99 है।

अर्थात् यदि लड़कों की संख्या को x एवं लड़कियों की संख्या को y मान लिया जावे तो लड़कों की संख्या का तीन गुना $3x$ और लड़कियों की संख्या का तीन गुना 3y होगा। दोनों का योगफल $3x + 3y$ प्राप्त होगा।

लड़के एवं लड़कियों की संख्या का योग $x + y$ है। इसका तीन गुना $3(x + y)$ प्राप्त होगा।

और $3(x + y) = 3x + 3y$ होता है।

यहाँ $3x$ तथा 3y दोनों में 3 उभयनिष्ठ है।

इसी प्रकार आइए $9 + 3y$ पर विचार करें।

यहाँ 9 एवं 3y दोनों में गुणनखंड 3 उभयनिष्ठ है।

अतः $9 + 3y = 3 \times 3 + 3 \times y$

$= 3(3 + y)$

इस प्रकार ऊपर $3x + 3y$ के गुणनखण्ड $3\ (x + y)$ एवं $3x + 3y$ है, परन्तु 3 तथा $(x + y)$ ऐसे गुणनखण्ड हैं जिनका गुणनफल $3x + 3y$ के बराबर है। इसी प्रकार $9 + 3y$ के गुणनखण्ड 3 एवं $(3 + y)$ एवं $9 + 3y$ है परन्तु 3 तथा $(3 + y)$ दो ऐसे गुणनखण्ड हैं जिनका गुणनफल $9 + 3y$ के बराबर है।

इसे भी करके देखें

क्या आप $12 + 18y$ को दो गुणनखण्डों के गुणनफल के रूप में लिख सकते हैं?

यहाँ 12 एवं $18y$ के गुणनखण्ड में 2, 3 एवं 6 उभयनिष्ठ हैं।

1. 2 उभयनिष्ठ लेने पर $12 + 18y = 2 \times 6 + 2 \times 9y = 2\ (6 + 9y)$ है। परन्तु यहां $6 + 9y$ में से पुनः 3 उभयनिष्ठ निकाला जा सकता है अतः

   $12 + 18\ y = 2\ \{3\ (2 + 3y)\}$ या

   $12 + 18\ y = 6\ (2 + 3y)$

2. $12 + 18y$ में पहले यदि 3 उभयनिष्ठ है तो

   $12 + 18\ y = 3\ (4 + 6y)$ (परन्तु यहाँ $4 + 6y$ में पुनः 2 उभयनिष्ठ है अतः)

   $12 + 18\ y = 3\ \{2(2 + 3y)\}$

   $= 6\ (2 + 3y)$

3. यदि $12 + 18\ y$ में 6 को उभयनिष्ठ लेवें तो

   $12 + 18\ y = 6 \times 2 + 6 \times 3y$

   $= 6\ (2 + 3y)$

यहां $12 + 18\ y$ में 2, 3 एवं 6 उभयनिष्ठ गुणनखण्ड हैं परन्तु 6 सबसे बड़ा उभयनिष्ठ गुणनखण्ड है।

क्रियाकलाप 2.

नीचे दिए गए द्विपदीय व्यंजकों का सबसे बड़ा उभयनिष्ठ गुणनखण्ड निकालकर सारणी में दिए गए उदाहरणों के अनुसार तालिका में पूर्ति कीजिए। **सारणी 8.3**

क्र.स.	द्विपदीय व्यंजक	दोनों पदों को अलग–अलग लिखने पर	दोनों पदों का सबसे बड़ा उभयनिष्ठ गुणनखण्ड	द्विपदीय व्यंजक को उभयनिष्ठ गुणनखण्ड के गुणक के रूप में लिखने पर
1.	$36x + 27y$	$36x$ और $27\ y$	9	$9\ (4x + 3y)$
2.	$33y^2 - 11xy$			
3.	$15xz + 90x^2$			
4.	$8\ ab + 9\ ac$			

ऐसे और भी सवाल बनाइए तथा अपने साथियों को हल करने को दें।

गुणनखण्डन

द्विपदीय (Binomial) एवं बहुपदीय व्यंजक (Polynomial) को उभयनिष्ठ गुणनखण्ड के गुणक के रूप में लिखने के लिए, दिए गए द्विपदीय या बहुपदीय व्यंजक के प्रत्येक पद के सबसे बड़े उभयनिष्ठ गुणनखण्ड (म.स.) को कोष्ठक के बाहर लिखते हैं। इस प्रकार किसी व्यंजक को उसके गुणनखण्डों के गुणनफल के रूप में लिखने को गुणनखण्डन (Factorization) कहते हैं।

जैसे $2ab + 2ac$ में सबसे बड़ा उभयनिष्ठ गुणनखंड $2a$ है।

$2ab + 2ac = 2axb + 2axc = 2a\ (b + c)$

इस प्रकार $2ab + 2ac$ का गुणनखण्डन करने पर $2a$ व $(b + c)$ प्राप्त होंगे, जिनका गुणनफल $2ab + 2ac$ होगा।

उदाहरण 3. $4x^2y^2 - 18\,xy$ का गुणनखण्डन कीजिए।

हल : यहां $4x^2y^2 - 18\,xy$ का सबसे बड़ा उभयनिष्ठ गुणनखण्ड $2xy$ है।

$$4x^2y^2 - 18\,xy = 2xy \times 2xy - 2xy \times 9$$
$$= 2xy\ (2xy - 9)$$

उदाहरण 4. $6ab^2 + 9\,a^2b^3 + 12a^2b^2$ का गुणनखण्डन कीजिए।

हल : यहां $6ab^2$, $9\,a^2b^3$ तथा $12a^2b^2$ का सबसे बड़ा उभयनिष्ठ गुणनखण्ड $3ab^2$ है।

$$6ab^2 + 9a^2b^3 + 12a^2b^2 = 3ab^2 \times 2 + 3ab^2 \times 3ab + 3ab^2 \times 4a$$
$$= 3ab^2\ (2 + 3ab + 4a)$$

बहुपदीयय व्यंजकों का गुणनखण्डन

रमा द्विपदीय व्यंजकों का गुणनखण्डन करना सीख गई थी। वह सोच रही थी कि उन बीजीय व्यंजकों का गुणनखण्ड किस प्रकार ज्ञात करेंगे जिसमें कई पद हों?

क्या आपके पास रमा के सवाल का जवाब है?

शिक्षिका ने बताया : ऐसे बीजीय व्यंजकों का गुणनखण्डन करने के लिए समूहीकरण की क्रिया अपनाते हैं। व्यंजकों के उपयुक्त समूह बनाकर, उभयनिष्ठ गुणनखण्ड ज्ञात करते हैं। इसके बाद इन्हें गुणनखण्डों के गुणनफल के रूप में लिखा जाता है।

जैसे :– $ax + by + ay + bx$ का गुणनखण्डन कीजिए।

यहाँ a वाले पदों को व b वाले पदों को एक साथ करना उचित रहेगा।

a वाले पदों एवं b वाले पदों को एक साथ लिखने पर

$= ax + ay + bx + by$

$= a\ (x + y) + b\ (x + y)$ [यहाँ $(x + y)$ दोनों पदों में उभयनिष्ठ है।]

$= (x + y)\ (a + b)$

इसी प्रश्न को x वाले पदों एवं y वाले पदों को एक साथ लिखकर भी गुणनखण्डन किया जा सकता है। इसे आप स्वयं हल करके देखिए। क्या दोनों में उत्तर एक ही आया?

उदाहरण 5. $2x^2 - 6y + 4x^2y - 12y^2$ का गुणनखण्डन कीजिए।

हल : $2x^2 - 6y + 4x^2y - 12y^2$ में

$2x^2$ व $4x^2y$ को एक साथ लेने से प्रक्रिया सबसे सरल होगी।

$2x^2 + 4x^2y$ में $2x^2$ उभयनिष्ठ है।

$(2x^2 + 4x^2y) = 2x^2\ (1 + 2\,y)$

इसी प्रकार $-6y - 12y^2$ में उभयनिष्ठ $-6y$ लेने पर $-6y - 12y^2 = -6y\,(1 + 2y)$

$(1 + 2y)$ दोनों में उभयनिष्ठ हैं।

अतः गुणनखण्ड बने $(1 + 2y)\,(2x^2 - 6y)$

परन्तु $(2x^2 - 6y)$ के भी गुणनखण्ड हो सकते हैं? इनमें 2 उभयनिष्ठ है। अतः इसके गुणनखण्ड बने 2 तथा $(x^2 - 3y)$

अतः $2x^2 - 6y + 4x^2y - 12y^2 = 2(x^2 - 3y)\,(1 + 2\,y)$

उदाहरण 6. $2xy + y + 4x + 2$ के गुणनखण्डन कीजिए।

हल : $2xy + y + 4x + 2$

$= y(2x + 1) + 2(2x + 1)$ [$(2x + 1)$ दोनों में उभयनिष्ठ है।]

$= (2x + 1)\ (y + 2)$

इसी प्रश्न को पहले पद को तीसरे पद तथा दूसरे पद को चौथे पद के साथ लेकर हल कीजिए।

प्रश्नावली 8.2

प्रश्न 1 रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :–

(a) $x^2 + 5x^3 =$ .... $(1 + 5x)$

(b) $10a^2 - 12b^2 = 2\ ($ .... $- 6b^2)$

(c) $27ab^2 + 18abc =$ $9ab\,(3b +$ .... $)$

(d) $16xz - 9z^2 = z\ ($ .... $-$ .... $)$

(e) $12ab^2c + 8abc^2 - 10a^2c = 2ac\ [$ .... $+$ .... $-$ .... $]$

प्रश्न 2 गुणनखण्डन कीजिए :–

(a) $4ax + 6a^2y$ (b) $a^5y + ab^3$

(c) $pq^2r - 2q^2t$ (d) $-5\ell m^2 - 10\ell^2 mn$

(e) $5m^2 - 5n^2$

प्रश्न 3 समूहीकरण विधि से गुणनखण्डन कीजिए :–

(a) $2x^2y + 6x^2y + 4x + 12y$ (b) $5m^2n - 10mn^2 + 12m - 24n$

(c) $6x^3 + 8x^2 + 9xy + 12y$ (d) $15x^4 + 10x^2y^2 + 12x^2y + 8y^3$

(e) $x(x + 3) + 8(x + 3)$ (f) $3x(x - 4) - 5(x - 4)$

(g) $2m(\ell - m) + 3(\ell - m)$

प्रश्न 4 निम्न को हल कीजिए –

(a) $x(1 - 3y^2)$ = _________ – _________

(b) $-17x^2(3x - 9)$ = _________ + _________

(c) $2a^2(3a - 4a^2)$ = _________ – _________

(d) $9m(m - n)$ = _________ – _________

(e) $9t^2(t - 7t^3)$ = _________ – _________

हमने सीखा

1. यदि एक व्यंजक को दो या अधिक व्यंजकों के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जाए तो वे व्यंजक, दिए हुए व्यंजक के गुणनखण्ड कहलाते हैं तथा व्यंजक को इस तरह से व्यक्त करने का तरीका गुणनखण्डन कहलाता है।
2. किसी द्विपदीय बीजीय व्यंजकों का गुणनखण्डन पदों के म.स. को उभयनिष्ठ निकालकर किया जाता है।
3. बीजीय व्यंजकों का म.स. उन बीजीय व्यंजकों का सबसे बड़ा उभयनिष्ठ भाजक होता है।
4. तीन से अधिक पदों वाले बीजीय व्यंजकों का गुणनखंडन समूहन विधि से करते हैं।

9HVTHR

9I5PYE

अध्याय – 9
सर्वसमिकाएं
IDENTITIES

सर्वसमिकाएं (Identities)

दो द्विपदीय व्यंजकों के गुणा से सम्बन्धित अभ्यास का हल करते हुए फातिमा ने सोचा कि अगर दोनों द्विपदीय व्यंजक के प्रथम एवं द्वितीय पद अलग अलग न हो कर एक ही हों तब क्या होगा? क्या उन्हें गुणा करने पर कोई नया परिणाम प्राप्त होगा ? जैसे यदि x+y का गुणा x +y के साथ किया जाए–

$$(x+y)(x+y) = x(x+y) + y(x+y) = x^2+xy+yx+y^2$$
$$= x^2+xy+xy+y^2 \qquad (\because xy = yx)$$
$$= x^2+2xy+y^2$$

फातिमा को गुणा करते देख अनु ने भी ऐसा ही गुणा किया–

$$(r+s)\ (r+s) = r(r+s)+s\ (r+s) = r^2+rs + sr +s^2$$
$$= r^2+rs+rs+s^2 \qquad (\because rs = sr)$$
$$= r^2+2rs+s^2$$

फातिमा और अनु के परिणाम कुछ मिलते–जुलते हैं। आप भी नीचे दिए गए द्विपदों का गुणा कर देखिए कि क्या आप को भी ऐसे ही परिणाम मिलते हैं ?

(1) $(p+q)\ (p+q) =$

(2) $(u+r)\ (u+r) =$

(3) $(m+n)\ (m+n) =$

(4) $(r+w)\ (r+w) =$

दो समान द्विपदीय व्यंजकों के गुणा से आप किस निष्कर्ष पर पहुंचते हैं? लिखिए।

आप ने देखा कि दो समान द्विपदों का गुणा करने पर प्राप्त गुणन फल = (प्रथम पद)^2+2 (प्रथम पद) (द्वितीय पद) + (द्वितीय पद)^2 होता है। $(a+b)\ (a+b) = a^2 + 2ab + b^2$

अर्थात् $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

अतः यह विशेष गुणन सम्बन्ध a एवं b के प्रत्येक मान के लिए सत्य है। इसे सर्वसमिका कहते हैं।

सर्वसमिका–1 $\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$

अर्थात्

[(प्रथम पद) + (द्वितीय पद)]^2 = (प्रथम पद)^2 + 2 (प्रथम पद) (द्वितीय पद) + (द्वितीय पद)^2

इसे निम्न प्रकार से भी समझा जा सकता है–

×	a	b
a	a^2	ab
b	ab	b^2

$(a+b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

a एवं b की जगह भिन्न–भिन्न संख्याओं को ले कर नियम की सत्यता की जांच कीजिए।

उदाहरण 1. $(3x + 4y)^2$ को सर्वसमिका की सहायता से हल कीजिए।

हल हम जानते हैं कि $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(3x + 4y)^2$ की तुलना $(a+b)^2$ से करने पर $a = 3x$, $b = 4y$

अतः $(3x + 4y)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(4y) + (4y)^2$

$= 9x^2 + 24xy + 16y^2$

उदाहरण 2. $(2a + 3)^2$ को सर्वसमिका की सहायता से हल कीजिए।

हल हम जानते हैं कि $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$(2a+3)^2$ से तुलना करने पर $x = 2a$, $y = 3$

$(2a + 3)^2 = (2a)^2 + 2(2a)(3) + (3)^2$

$= 4a^2 + 12a + 9$

उदाहरण 3. $\left(\frac{1}{2}p + 2q\right)^2$ को सर्वसमिका की सहायता से हल कीजिए।

हल $\left(\frac{1}{2}p + 2q\right)^2$ की तुलना $(a + b)^2$ से करने पर $a = \frac{1}{2}p$, $b = 2q$

$$\left(\frac{1}{2}p + 2q\right)^2 = \left(\frac{1}{2}p\right)^2 + 2\left(\frac{1}{\cancel{2}}p\right)(\cancel{2}q) + (2q)^2 \qquad \left[(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2\right]$$

$$= \frac{1}{4}p^2 + 2pq + 4q^2$$

उदाहरण 4. 101^2 का मान ज्ञात कीजिए।

हल: यहां $101^2 = (100+1)^2$

अब $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ से तुलना करने पर

$a = 100$ एवं $b = 1$

अतः $101^2 = (100+1)^2 = 100^2 + 2(100)(1) + 1^2$

$= 10000 + 200 + 1$

$= 10201$

अब यदि a + b के स्थान पर a–b लिया जाये तो क्या होगा?

$(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$

$= a\,(a-b) - b\,(a-b)$
$= a^2 - ab - ba + b^2$
$= a^2 - 2ab + b^2 \; (\because\; ab = ba)$

सारणी द्वारा

$\times$	a	$-b$
a	a^2	$-ab$
$-b$	$-ba$	$(-b)^2$

सर्वसमिका–2 $\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$

अर्थात् [(प्रथम पद) – (द्वितीय पद)]^2 = (प्रथम पद)^2 – 2 (प्रथम पद) (द्वितीय पद) + (द्वितीय पद)^2

क्या (a–b) के स्थान पर (p–q) या (r–s) या कोई और इसी प्रकार के द्विपदीय व्यंजक लेने पर भी ऊपर की सर्वसमिका सत्य होगी? जाँच कीजिए।

उदाहरण 5. $(3x-8y)^2$ सर्वसमिका की सहायता से हल कीजिए।

हल: हम जानते हैं कि $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(3x-8y)^2$ की तुलना $(a-b)^2$ से करने पर

$a = 3x,\; b = 8y$

$(3x-8y)^2 = (3x)^2 - 2\,(3x)\,(8y) + (8y)^2$
$= 9x^2 - 48xy + 64y^2$

उदाहरण 6. $\left(x-\frac{2}{5}\right)^2$ को सर्वसमिका की सहायता से हल कीजिए।

हल: $\left(x-\frac{2}{5}\right)^2$ की तुलना $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ से करने पर

$a = x,\; b = \frac{2}{5}$

$$\left(x-\frac{2}{5}\right)^2 = (x)^2 - 2\,(x)\left(\frac{2}{5}\right) + \left(\frac{2}{5}\right)^2$$

$$= x^2 - \frac{4x}{5} + \frac{4}{25}$$

उदाहरण 7. $(2x-3y)^2$ को सर्वसमिका की सहायता से हल कीजिए।

तथा $x = 4$ एवं $y = 2$ के लिए उत्तर की जाँच भी कीजिए।

हल: $(2x-3y)^2$ की तुलना $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ से करने पर

$a = 2x,\; b = 3y$

$(2x-3y)^2 = (2x)^2 - 2(2x)\,(3y) + (3y)^2$
$= 4x^2 - 12xy + 9y^2$

जाँच –

बायाँ पक्ष $(2x - 3y)^2 = (2 \times 4 - 3 \times 2)^2 = (8 - 6)^2 = (2)^2 = 4$

दायाँ पक्ष $4x^2 - 12xy + 9y^2 = 4(4)^2 - 12(4)(2) + 9(2)^2$

$= 64 - 96 + 36 = 100 - 96 = 4$

बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

उदाहरण 8. सर्वसमिका के उपयोग से 98^2 का मान ज्ञात कीजिए।

हलः– यहाँ $98^2 = (100-2)^2$

अब $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ से तुलना करने पर $a = 100, b= 2$

$98^2 = (100-2)^2 = 100^2 - 2 \times 100 \times 2 + 2^2$

$= 10000 - 400 + 4$

$= 9604$

सर्वसमिका–3 $\boxed{(a+b)\,(a-b) = a^2-b^2}$

दो द्विपदीय व्यंजकों के प्रथम व द्वितीय व्यंजकों में यदि समान प्रथम पद समान चिन्ह के हों तथा समान द्वितीय पद विपरीत चिन्ह के हों तो क्या होगा? जैसे यदि $(a + b)$ का गुणा $(a - b)$ के साथ किया जाए।

$(a + b)\,(a - b) = a\,(a - b) + b\,(a - b)$

$= a^2 - ab + ab - b^2 \qquad (\because ab = ba)$

$(a + b)\,(a - b) = a^2 - b^2$

अर्थात् **(प्रथम पद + द्वितीय पद) (प्रथम पद – द्वितीय पद) = (प्रथम पद)^2 – (द्वितीय पद)^2**

सारणी द्वाराः–

×	a	b
a	a^2	ab
–b	–ab	$-b^2$

$(a+b)\,(a-b) = a^2 + ab - ab - b^2$

$= a^2 - b^2$

अब $(p + q)$ को $(p - q)$ से, $(R + S)$ को $(R - S)$ से गुणा किया जाए तो क्या परिणाम ऊपर जैसे ही आएँगे? जाँच कीजिए–

उदाहरण 9. $(7x + 2y) \times (7x - 2y)$ को सर्वसमिका की सहायता से हल कीजिए।

हलः $(7x+2y)\,(7x-2y)$ की तुलना $(a+b)\,(a-b) = a^2-b^2$ से करने पर $a = 7x, b = 2y$

अतः $(7x + 2y)\,(7x-2y) = (7x)^2-(2y)^2$

$= 49x^2-4y^2$

उदाहरण 10. $\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{5}\right)\left(\frac{x}{3}-\frac{y}{5}\right)$ को सर्वसमिका की सहायता से हल कीजिए।

हल $\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{5}\right)\left(\frac{x}{3}-\frac{y}{5}\right)$ की तुलना $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ से करने पर $a = \frac{x}{3}$, $b = \frac{y}{5}$

$$\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{5}\right)\left(\frac{x}{3}-\frac{y}{5}\right) = \left(\frac{x}{3}\right)^2 - \left(\frac{y}{5}\right)^2$$

$$= \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25}$$

उदाहरण 11. सर्वसमिका के प्रयोग से 52×48 का मान ज्ञात कीजिए

हल: $52\times48 = (50+2)(50-2)$

अब $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ से तुलना करने पर $a = 50, b = 2$

$(50+2)(50-2) = 50^2 - 2^2$

$= 2500 - 4$

$= 2496$

प्रश्नावली 9.1

1. उपयुक्त सर्वसमिका के प्रयोग से गुणनफल ज्ञात कीजिए –

   (i) $(2a + 3)(2a + 3)$ (ii) $\left(\frac{2}{5}m+\frac{3}{4}\right)\left(\frac{2}{5}m+\frac{3}{4}\right)$

2. उपयुक्त सर्वसमिका का प्रयोग कर गुणनफल ज्ञात कीजिए–

   (i) $(x - 5)(x - 5)$ (ii) $\left(\frac{3}{2}x-\frac{4}{5}y\right)\left(\frac{3}{2}x-\frac{4}{5}y\right)$

   (iii) $\left(2a-\frac{1}{2}\right)\left(2a-\frac{1}{2}\right)$ (iv) $(x^2 - y^2)(x^2 - y^2)$

3. उपयुक्त सर्वसमिका का प्रयोग कर मान निकालिए –

   (i) $(4x + 5)(4x - 5)$ (ii) $\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)$

   (iii) $(-a^2 + b^2)(a^2 + b^2)$ (iv) $(x^3 + y^3)(x^3 - y^3)$

4. सर्वसमिका का प्रयोग कर हल कीजिए –

   (i) $(2a + 5)^2$ (ii) $\left(\frac{2}{3}m^2+\frac{5}{6}n^2\right)^2$

   (iii) $(-8x^3 + 5y^3)^2$

5 उपयुक्त सर्वसमिका का उपयोग कर मान ज्ञात कीजिएः–

(i) $(41)^2$ (ii) $(69)^2$

(iii) $(97)^2$ (iv) $(84)^2$

6. उपयुक्त सर्वसमिका का उपयोग कर मान ज्ञात कीजिए।

(i) 105×95 (ii) 92×88

(iii) 503×497

7. x का मान ज्ञात कीजिए यदि

(i) $6x = (28)^2 - (22)^2$ (iii) $19x = 3^2 - 16^2$

(ii) $3x = (17)^2 - (14)^2$ (iv) $43x = 28^2 - 15^2$

8. $(3x - 5y)^2$ को हल कीजिए तथा $x = 4$ एवं $y = 2$ के लिए उत्तर की जाँच कीजिए।

9. $\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}\right)^2$ को हल कीजिए तथा $x = 9$ एवं $y = 12$ के लिए उत्तर की जाँच कीजिए।

इन्हें भी देखें

1. $(7-5) \times (7-5) = 2\times2 = 4$

$(5-7) \times (5-7) = (-2) \times (-2) = 4$

2. $(8-4) \times (8-4) = 4\times4 = 4 \times 4 = 16$

$(4-8) \times (4-8) = -4 \times -4 = 16$

$(x-y)\,(x-y) = (y-x)\,(y-x)$ है। इस प्रकार कोई भी दो संख्याए लेकर जांच करें कि क्या $(x-y)^2 = (y-x)^2$ है?

सर्वसमिकाओं (Identities) का उपयोग कर गुणनखण्डन करना

बीजीय व्यंजकों के गुणनफल के अध्याय में आपने सर्व समिकाओं के बारे में पढ़ा है। सर्वसमिकाएं ऐसे कथन होते हैं जो प्रत्येक चरांक के लिए सत्य होते हैं। आप गुणनखण्डन करने के लिए सर्वसमिकाओं का भी प्रयोग कर सकते हैं।

(I) $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

$= (a + b)\,(a + b)$

(II) $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

$= (a - b)\,(a - b)$

(III) $a^2 - b^2 = (a + b)\,(a - b)$

आईए, देखें इन सर्वसमिकाओं का गुणनखण्डन करने के लिए किस प्रकार उपयोग किया जाता है।

उदाहरण 7. $9x^2 + 24xy + 16y^2$ का गुणनखण्डन कीजिए।

हल : यहाँ प्रथम पद एवं तृतीय पद क्रमशः $3x$ एवं $4y$ के वर्ग हैं एवं मध्य पद $3x$ एवं $4y$ के गुणनफल के दुगुने के बराबर है।

अतः $9x^2 + 24xy + 16y^2$

$= (3x)^2 + 2\,(3x)\,(4y) + (4y)^2$

$= (3x + 4y)^2$ (सर्वसमिका I $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ के प्रयोग से)

$= (3x + 4y)\,(3x + 4y)$

उदाहरण 8. $p^2 - 4\,pq + 4q^2$ का गुणनखण्डन कीजिए।

हल : यहाँ प्रथम एवं तृतीय पद क्रमशः p एवं 2 q के वर्ग हैं और मध्य पद ऋणात्मक है व p एवं 2q के गुणनफल के दुगुने के बराबर है।

अतः $p^2 - 4\,pq + 4q^2$

$= (p)^2 - 2\,(p)\,(2q) + (2q)^2$ (सर्वसमिका II $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ के प्रयोग से)

$= (p - 2q)^2$

$= (p-2q)\,(p-2q)$

उदाहरण 9. $16m^2 - 25n^2$ का गुणनखण्डन कीजिए।

हल : यहाँ प्रथम पद 4m तथा द्वितीय पद 5n का वर्ग है एवं इनके बीच ऋण चिन्ह है।

अतः $16m^2 - 25n^2$

$= (4m)^2 - (5n)^2$

$= (4m + 5n)\,(4m - 5n)$ (सर्वसमिका III $a^2 - b^2 = (a + b)\,(a - b)$ के प्रयोग से)

सर्वसमिका III का प्रयोग उस स्थिति में करते हैं जब व्यंजक के दो पद हो तथा दोनों पद पूर्ण वर्ग के रूप में हो व उनके मध्य ऋण चिन्ह हो।

उदाहरण 10. $(4x - 3y)^2 - 100$ का गुणनखण्डन कीजिए।

हल : यहाँ प्रथम पद $(4x - 3y)$ का वर्ग है तथा द्वितीय पद 10 का वर्ग है।

अतः $(4x - 3y)^2 - 100$

$= (4x - 3y)^2 - (10)^2$

$= (4x - 3y + 10)\,(4x - 3y - 10)$ (सर्वसमिका III $a^2 - b^2 = (a + b)\,(a - b)$ के प्रयोग से)

प्रश्नावली 9.2

प्रश्न 1 सर्वसमिकाओं का उपयोग कर गुणनखण्डन कीजिए :–

(a) $4x^2 + 20xy + 25y^2$ (b) $25a^2 + 70ab + 49b^2$

(c) $9x^2 + 6x + 1$ (d) $1 + 18a + 81a^2$

(e) $p^2 + p + \frac{1}{4}$ (f) $36a^2 + 132ab + 121b^2$

प्रश्न 2 सर्वसमिकाओं का उपयोग कर गुणनखण्डन कीजिए :–

(a) $a^2 - 10ab + 25b^2$ (b) $16x^2 - 104x + 169$

(c) $121x^2 - 88xy + 16y^2$ (d) $x^2 - 30x + 225$

(e) $36a^2 - 12a + 1$

प्रश्न 3 सर्वसमिकाओं का उपयोग कर गुणनखण्डन कीजिए :–

(a) $25a^2 - 49b^2$ (b) $9x^2 - 121y^2$

(c) $64a^2 - 1$ (d) $1 - 16b^2$

(e) $\frac{16}{25}k^2 / \frac{4}{9}n^2$

प्रश्न 4 सर्वसमिकाओं का उपयोग कर गुणनखण्डन ज्ञात कीजिए :–

(a) $(x + 4y)^2 - 49$ (b) $100 - (2a + 3b)^2$

(c) $(4x^2 + 20xy + 25y^2) - 36$ (d) $9x^2 - (4x - 5y)^2$

(e) $x^2y^2 - 16$

प्रश्न 5 निम्नलिखित में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए : –

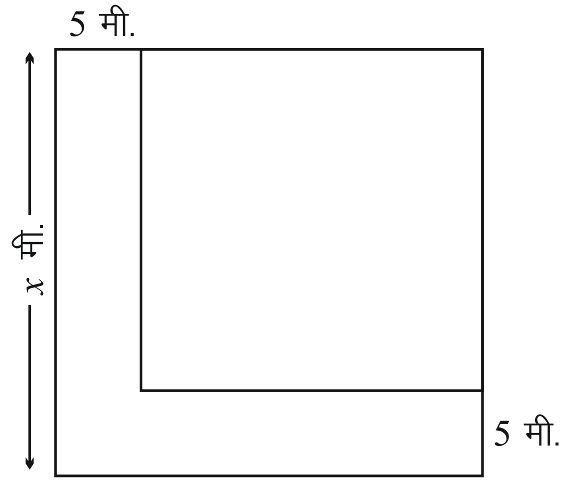
(a) $x^2 - 25y^2 = (x + 5y)$ (----------)

(b) $x^2 + 6x + 9 = (x +$ ---) (--- $+ 3)$

(c) $4x^2 - 28x + 49 = (2x -$ ---) $(2x -$ ---)

(d) $(a + b)^2 - 4 = (a + b + 2)$ (----------)

प्रश्न 6. राम के पास x मीटर भुजा की वर्गाकार जमीन है। उसने स्कूल के रास्ते के लिए लंबाई और चौड़ाई के समांतर 5–5 मीटर जगह छोड़ दी। अब राम के पास बची जमीन का क्षेत्रफल कितना है ?



प्रश्न 7. एक मंदिर में जितनी मूर्तियाँ थी, पुजारी उतने ही फूल प्रत्येक मूर्ति पर चढ़ाता था। उस मंदिर में 2 मूर्तियाँ और स्थापित की गईं। मंदिर का पुजारी अभी भी प्रत्येक मूर्ति पर उतने ही फूल चढ़ाता है जितनी मंदिर में मूर्तियाँ है, परन्तु अब उसे पहले की तुलना में 24 फूल अधिक लाने पड़ते हैं। बताइए कि मंदिर में पहले कितनी मूर्तियाँ थीं?

प्रश्न 8. एक आयताकार खेत का क्षेत्रफल (x^2-25) वर्गमीटर है। यदि इस खेत की लंबाई (x+5) मीटर है तो खेत की चौड़ाई कितनी होगी?

प्रश्न 9. एक आयताकार आइने की चौड़ाई और लंबाई फीट में नापने पर दो क्रमागत संख्याएँ प्राप्त होती हैं। इन संख्याओं के वर्गों का अंतर 05 है। आइने की लंबाई और चौड़ाई बताइए।

हमने सीखा

(i) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

(ii) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

(iii) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

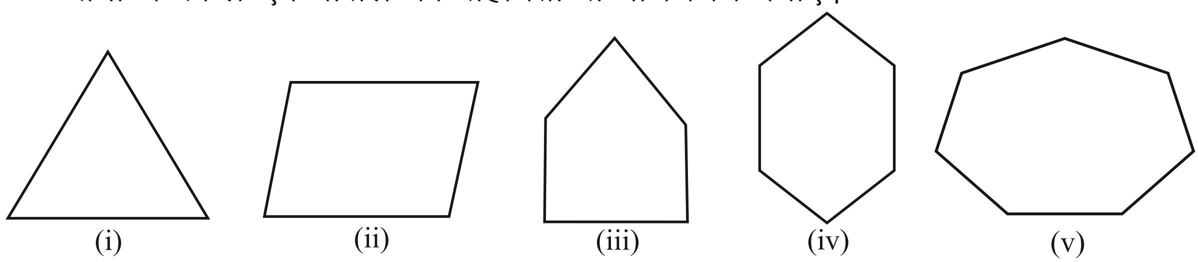
(iv) बीजीय व्यंजकों के गुणनखंडन में सर्वसमिकाओं का प्रयोग आवश्यकतानुसार करते हैं।

9IEL12

अध्याय –10
बहुभुज
POLYGON

9USUGL

रानी ने स्केल एवं पेंसिल की सहायता से पाँच चित्र बनाए।



चित्र – 10.1

उसने अपनी सहेली शैली से पूछा क्या तुम इन आकृतियों को पहचान रही हो?

शैली ने कहा– पिछली कक्षा में हमने सीखा है कि भुजाओं की संख्या के आधार पर आकृतियों को नाम देते हैं।

जैसे आकृति 10.1(i) में तीन भुजाओं से बनी आकृति त्रिभुज, आकृति 10.1(ii) में चार भुजा से बनी आकृति चतुर्भुज, आकृति 10.1(iii) में पाँच भुजा से बनी आकृति पंचभुज हैं।

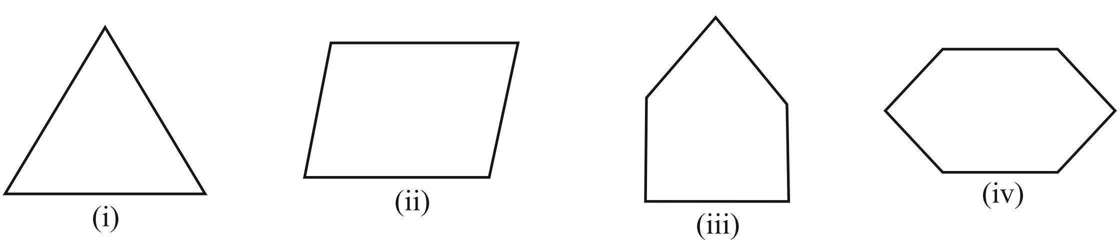
मेरी ने रानी से कहा– सही पहचाना परन्तु आकृति 10.1(iv) तथा आकृति 10.1(v) को क्या नाम दोगी?

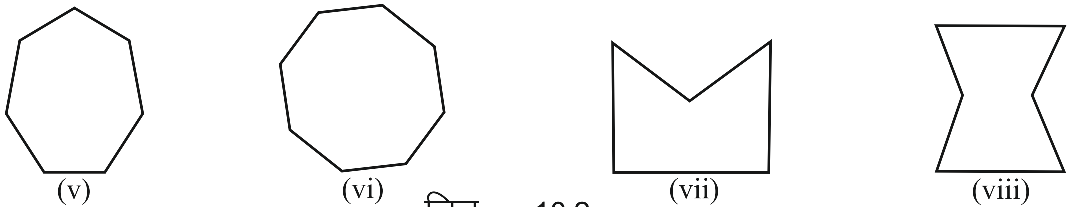
रानी ने उत्तर दिया आकृति 10.1(iv) को षट्भुज और आकृति 10.1(v) को सप्तभुज कहेंगे।

ये सभी बन्द आकृतियाँ कई भुजाओं से मिलकर बनी है अतः ''तीन या तीन से अधिक भुजाओं से बनी बंद आकृतियों को बहुभुज कहते हैं।''

क्रियाकलाप 1

निम्न आकृतियों को ध्यान से देखिए तथा तालिका में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।





चित्र – 10.2

सारणी 10.1

क्र.सं.	चित्र संख्या	आकृति का नाम	शीर्षों की संख्या	भुजाओं की संख्या	कोणों की संख्या
1	10.2 (i)	त्रिभुज	3	3	3
2	10.2 (ii)				
3	10.2 (iii)				
4	10.2 (iv)				
5	10.2 (v)				
6	10.2 (vi)				
7	10.2 (vii)				
8	10.2 (viii)				

क्रियाकलाप (1) से हम क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?

अवलोकन कर उससे निष्कर्ष निकालिए–

अवलोकन पश्चात हम निम्न निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि किसी भी बहुभुज में शीर्षों की संख्या, भुजाओं की संख्या एवं कोणों की संख्या समान होती है।

इस क्रियाकलाप में हमने देखा कि बहुभुज (iii) व (vii) दोनों पंचभुज एवं (iv) एवं (viii) दोनों षट्भुज है, लेकिन क्या क्रमांक (iii) व (vii) तथा (iv) व (viii) के बहुभुजों में कोई अंतर है?

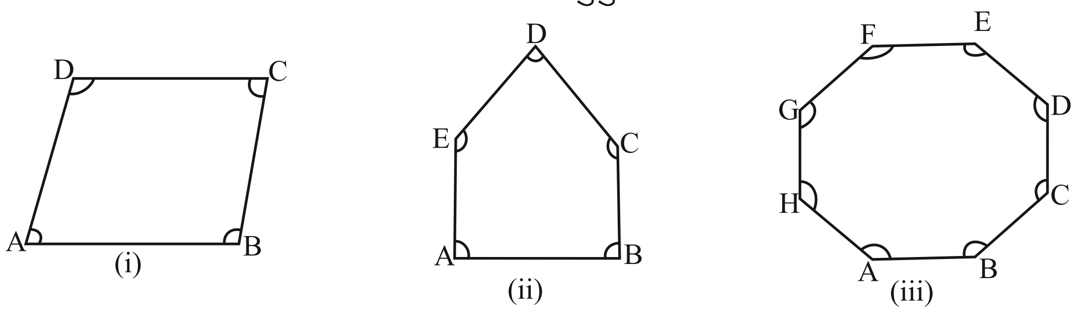
सोचिए और अपने साथियों एवं शिक्षकों से इस सम्बंध में चर्चा कर निष्कर्ष लिखिए–

————————————————————————————————————

————————————————————————————————————

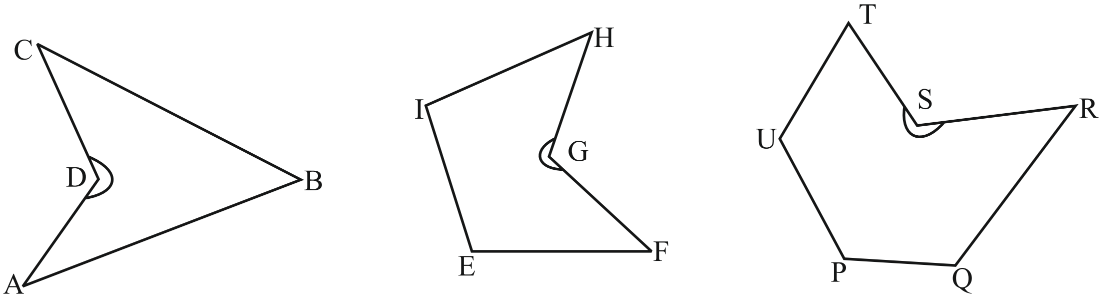
चित्र (vii) एवं (viii) के कुछ शीर्ष अंदर की ओर धंसे हुए हैं, परन्तु बाकी चित्रों के सभी शीर्ष बाहर उभरे हुए हैं। इस तरह हमें दो प्रकार के बहुभुज प्राप्त होते हैं–

(1) उत्तल बहुभुज (Convex polygon)– ऐसे बहुभुज जिनके सभी शीर्ष बाहर उभरे हुए हों और प्रत्येक अंतःकोण 180^0 से कम हों, उत्तल बहुभुज कहलाते हैं। जैसे–



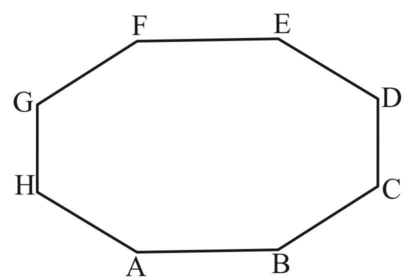
चित्र – 10.3

(2) अवतल बहुभुज (concave polygon) –ऐसा बहुभुज जिसका कम से कम एक शीर्ष अंदर की ओर धंसा हुआ हो और कम से कम एक अतः कोण 180^0 से अधिक हो, अवतल बहुभुज कहलाता है।



चित्र – 10.4

आकृति 10.5 एक अष्टभुज है। इसमें शीर्ष A से अन्य शीर्षों को मिलाकर भुजाओं तथा विकर्णों को पहचानिए तथा सारणी की पूर्ति कीजिए –



चित्र–10.5

सारणी 10.2

क्रमांक	शीर्ष का नाम जहाँ से अन्य शीर्षों को मिलाया गया	रेखाखंडों के नाम	
		भुजाएँ	विकर्ण
1	A	AB, AH	AC, AD, AE, AF, AG
2	B	BC, BA	BD, BE, BF, BG, BH
3	C	----------	---------------------------
4			

इस क्रियाकलाप के आधार पर आप बहुभुज के विकर्ण की परिभाषा लिखिए –

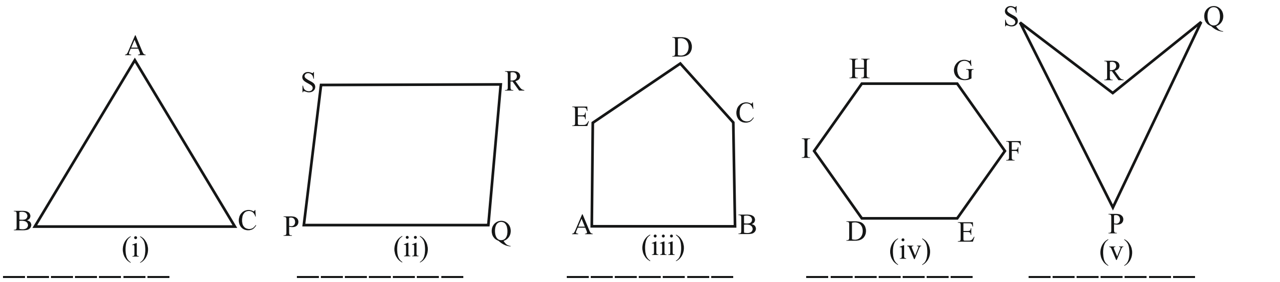
———————————————————————————————————

———————————————————————————————————

———————————————————————————————————

क्रियाकलाप 2

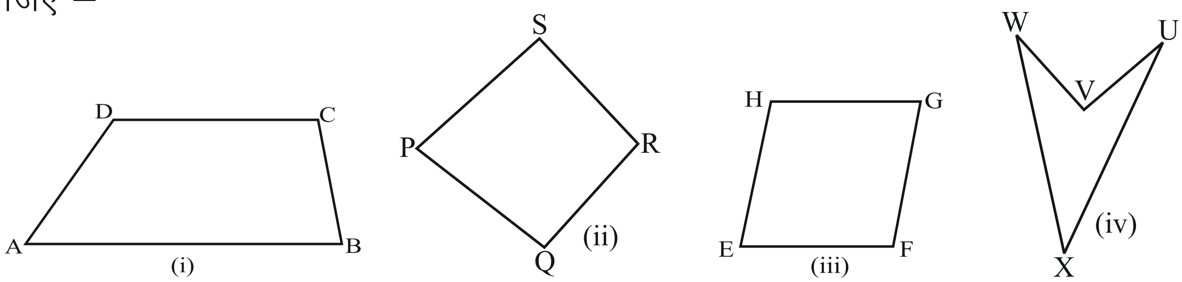
नीचे दी गई आकृतियों में किसी एक शीर्ष से विकर्ण खींचकर रिक्त स्थानों में उनकी संख्या लिखिए –



चित्र – 10.6

क्रियाकलाप 3

नीचे कुछ चतुर्भुज दिये गये हैं उनमें एक विकर्ण खीचिंए और नीचे दिए गए प्रश्नों के उत्तर दीजिए –

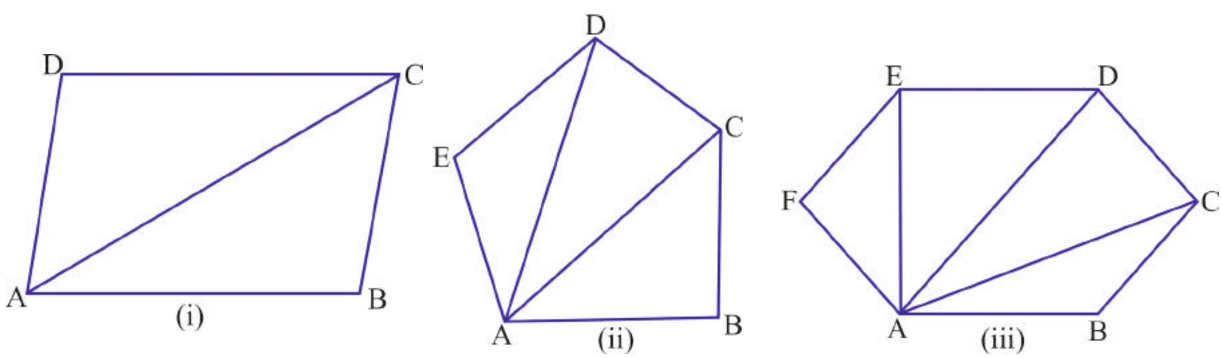


चित्र – 10.7

1. चतुर्भुज कितने त्रिभुजों में बंट गया है?
2. क्या दोनों त्रिभुजों के अंतः कोणों का योग चतुर्भज के अंतः कोणों के योग के बराबर होगा?
3. त्रिभुज के अंतः कोणों का योग कितने अंश के बराबर है?
4. चतुर्भज के अंतः कोणों का योग बताइए?

क्रियाकलाप 4

नीचे दिए गये चित्रों में किसी एक बिंदु से विकर्ण खींचे गये हैं।



चित्र – 10.8

चित्रों को ध्यान से देखिए एवं निम्न तालिका को भरिए–

सारणी – 10.3

क्रमांक	बहुभुज के नाम	बहुभुज में भुजाओं की संख्या	बहुभुज में बने कुल त्रिभुजों की संख्या	बहुभुज के आंतरिक कोणों का योग = त्रिभुजों की संख्या $\times 180°$	अंत:कोणों का योग
1.	चतुर्भज	04	02 या (4–2)	2×180^0	360^0
2.	पंचभुज	05	03 या (5–2)	3×180^0	540^0
3.	षष्ठभुज	.....	....	....	....
4.	सप्तभुज	.....	....	....	....
5.	द्वादशभुज	.....	....	....	....

उपरोक्त क्रियाकलाप 4 को हल करते वक्त शैली ने कहा कि बहुभुज में त्रिभुज की संख्या भुजाओं की संख्या से 2 कम है।

यदि **किसी बहुभुज में भुजाओं की संख्या n हो तो बहुभुज में त्रिभुजों की संख्या (n-2) होगी।**

तभी रानी बोली (n-2) त्रिभुज होने पर बहुभुज के अंतः कोणों का योग $= (n-2) \times 180°$ होगा।

अतः **n भुजा वाले बहुभुज में अंतः कोणों का योग $= (n-2) \times 180^0$**

उदाहरण 1. एक बहुभुज में भुजाओं की संख्या 15 है तो अंतः कोणों का योग ज्ञात कीजिए–

हल: बहुभुज के अंतः कोणों का योग $= (n - 2) \times 180^0$ जहाँ n भुजाओं की संख्या है।

$$= (15 - 2) \times 180^0$$
$$= 13 \times 180^0$$
$$= 2340^0$$

नियमित एवं अनियमित बहुभुज

आप जानते है कि जिस त्रिभुज में भुजाएँ बराबर होती हैं, उसे समबाहु त्रिभुज कहते हैं। समबाहु त्रिभुज में सभी कोण बराबर होते हैं। चतुर्भुज में जब प्रत्येक अंत:कोण 90^0 का होता है एवं प्रत्येक भुजा आपस में बराबर होती है तो उस आकृति को क्या कहते हैं? क्या अन्य बहुभुज में भी सभी भुजाएँ एवं कोण बराबर हो सकते हैं?

"जब बहुभुज में सभी भुजाएँ एवं कोण आपस में बराबर होते हैं उसे समबहुभुज या नियमित बहुभुज कहते हैं।"

जिस पंचभुज की सभी भुजाएँ एवं कोण बराबर होते हैं तो उसे समपंचभुज कहते हैं।

"ऐसे बहुभुज जिनकी भुजाओं एवं अंतःकोणों की माप अलग–अलग होती हैं अनियमित बहुभुज कहलाते हैं।"

चर्तुभुजाकार बहुभुजों में वर्ग एक नियमित बहुभुज है शेष बहुभुज अनियमित बहुभुज है।

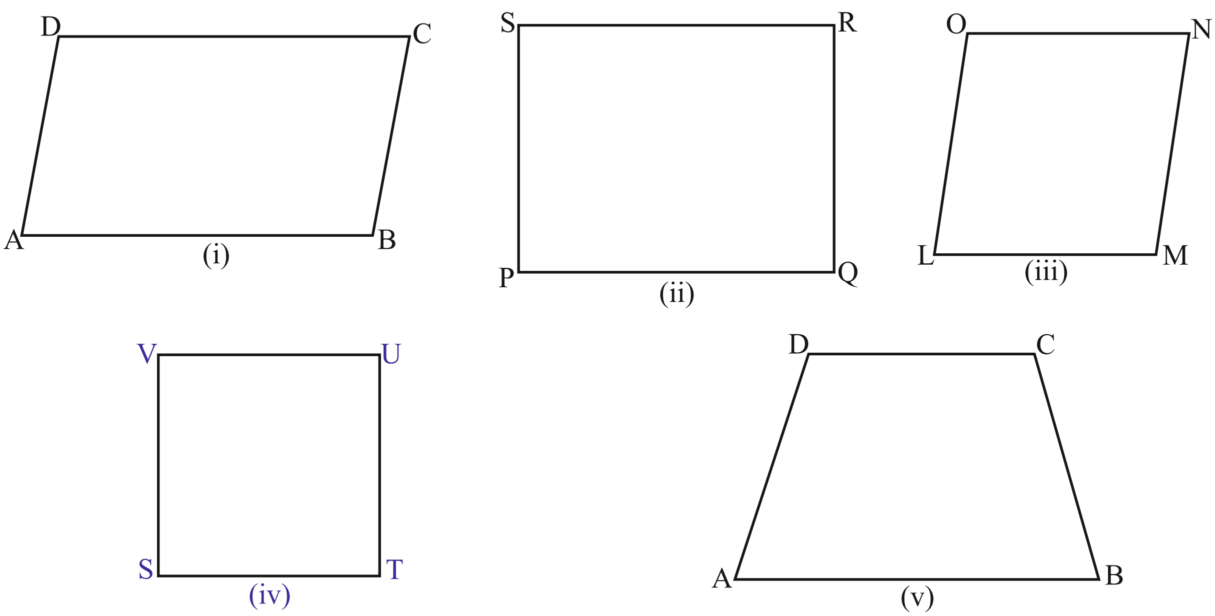
गुणों के आधार पर विभिन्न प्रकार के चतुर्भुज

कक्षा VII में आपने चतुर्भुज की भुजा, बहिष्कोण, सम्मुखकोण, आसन्न कोण तथा अंतःकोणों का योग तथा चतुर्भुज के प्रकार के बारे में अध्ययन किया है।

आइए एक क्रियाकलाप के माध्यम से हम विभिन्न प्रकार के चतुर्भुजों की पहचान कर लें–

क्रियाकलाप 5

प्रथम उदाहरण के अनुसार सारणी पूर्ण कीजिए–



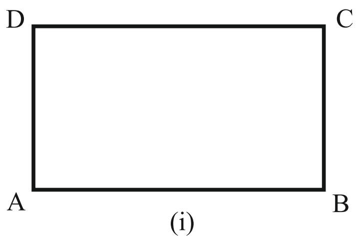
चित्र – 10.9

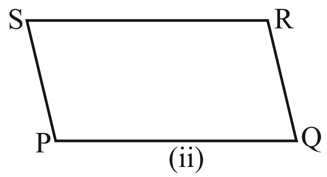
सारणी – 10.4

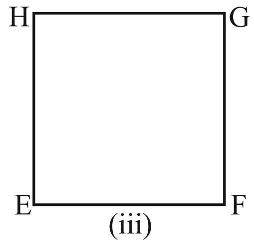
चित्र	समान्तर भुजाओं के नाम	बराबर भुजाओं के नाम	चतुर्भुज का प्रकार
10.9(i)	AB||CD, BC||AD	AB=CD, BC=AD	समान्तर चतुर्भुज
10.9(ii)			
10.9(iii)			
10.9(iv)			
10.9(v)			

क्रियाकलाप 6

नीचे समान्तर चतुर्भुज के तीन चित्र दिए गए हैं, तालिका में दर्शाये अनुसार मापकर रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए–







चित्र – 10.10

सारणी – 10.5

क्र.	समांतर चतुर्भुज का नाम	भुजाओं की माप (सेमी में)	कोणों की माप (अंश में)
1	चतुर्भुज ABCD	AB= ......सेमी BC=...सेमी CD=......सेमी DA=...सेमी	$\angle$A=.....$\angle$B=..... $\angle$C=.....$\angle$D=.....
2.	चतुर्भुज PQRS	PQ= ......सेमी QR=...सेमी RS=......सेमी SP=...सेमी	$\angle$P=......$\angle$Q=..... $\angle$R=.....$\angle$S=.....
3.	चतुर्भुज EFGH	EF= ......सेमी FG=...सेमी GH=......सेमी HE=...सेमी	$\angle$E=......$\angle$F=..... $\angle$G=.....$\angle$H=.....

सारणी में प्राप्त परिणाम के आधार पर आपने देखा कि समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं तथा सम्मुख कोणों के माप बराबर है।

इस आधार हम कह सकते हैं कि **समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजा व सम्मुख कोणों की माप आपस में बराबर होती है।**

अभ्यास–1

1. कोई दो समान्तर चतुर्भुज बनाइए तथा सम्मुख भुजाओं एवं कोणों को मापकर लिखिए। क्या सम्मुख भुजा व कोण बराबर है?

उदाहरण 3. ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है जिसमें $\angle C=75^0$ है तो शेष कोण ज्ञात कीजिए।

हल: दिया है $\angle C=75^0$

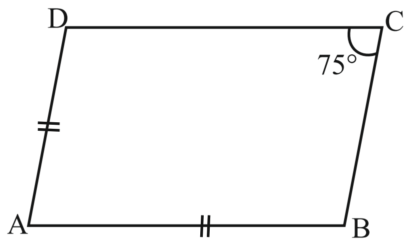
इसलिए $\angle A=75^0$

(क्योंकि सम्मुख कोण बराबर होते हैं।)

चूँकि $\angle A+\angle C+\angle B+\angle D=360°$ (क्यों?)

$\Rightarrow 75^0+75^0+\angle B+\angle D=360°$

$\Rightarrow 150°+\angle B+\angle D=360°$



चित्र–10.11

$$\angle B + \angle D = 360^\circ - 150^\circ$$

$$\angle B + \angle D = 210^\circ$$

$$\angle B + \angle B = 210^\circ \quad [\therefore \angle D = \angle B]$$

$$\angle B = \frac{210^0}{2} \quad \text{या} \quad \angle B = 105^0$$

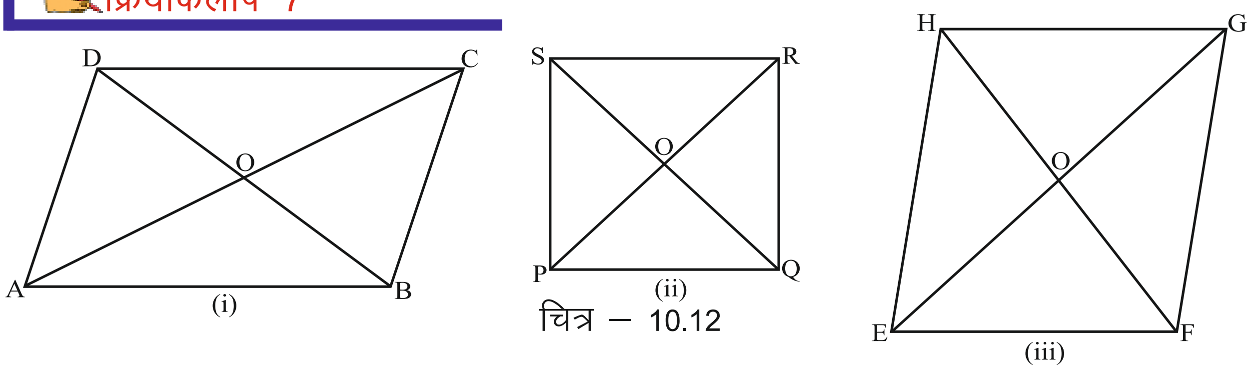
इसी प्रकार $\angle D = 105^0$

समान्तर चतुर्भुज में खींचे गए विकर्णों के गुण–

किसी बहुभुज में विकर्ण खींचना आप सीख चुके हैं। आप यह भी जानते हैं कि एक चतुर्भुज में खींचे गए विकर्ण एक दूसरे को काटते हैं।

आइए समान्तर चतुर्भुज में खींचे गए विकर्णों के गुणों को जाँचें –

क्रियाकलाप 7



चित्र – 10.12

ऊपर दिए गए सभी समान्तर चतुर्भुजों के विकर्ण एक दूसरे को O पर काटते हैं। नीचे तालिका में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए एवं निष्कर्ष निकालिये।

सारणी – 10.6

क्र.	समान्तर चतुर्भुज का नाम	रेखाखण्डों की माप सेमी में	क्या प्रतिच्छेद बिन्दु O विकर्णों का मध्य बिन्दु है?
1.	समान्तर चतुर्भुज ABCD	AO=....सेमी OC=....सेमी OB=....सेमी OD=....सेमी	
2.	समान्तर चतुर्भुज PQRS	OP=....सेमी OR=....सेमी OQ=....सेमी OS=....सेमी	
3.	समान्तर चतुर्भुज EFGH	OE=....सेमी OG=....सेमी OF=....सेमी OH=....सेमी	

निष्कर्ष ....

....

ऐसे ही और कई समान्तर चतुर्भुज बनाकर अपने निष्कर्ष की जाँच कीजिए कि समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

नीचे दिए गए प्रश्नों के उत्तर ढूँढ़िए तथा अपने उत्तर के पक्ष में तर्क दीजिए–

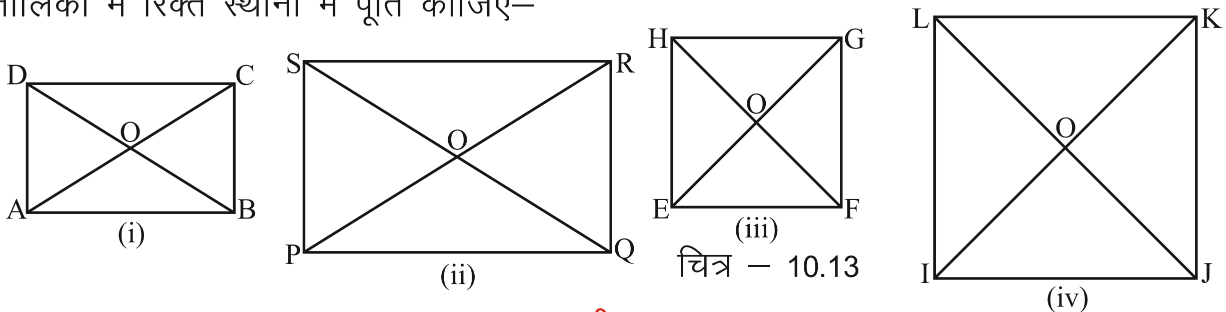
1. क्या प्रत्येक वर्ग एक समान्तर चतुर्भुज है?
   ——————————————————————————
2. क्या प्रत्येक आयत एक समान्तर चतुर्भुज है?
   ——————————————————————————
3. क्या प्रत्येक समचतुर्भुज एक समान्तर चतुर्भुज है?
   ——————————————————————————
4. तो क्या उपरोक्त सभी चतुर्भुजों के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करेगें?
   ——————————————————————————

अभ्यास 2

1. एक ऐसा चतुर्भुज बनाइए जिसके विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करे।

क्रियाकलाप 8

नीचे आयत व वर्ग के कुछ चित्र दिए गए हैं। इन चित्रों में दोनों विकर्णों को मापिए एवं तालिका में रिक्त स्थानों में पूर्ति कीजिए–



चित्र – 10.13

सारणी–10.7

चित्र क्र	चतुर्भुज का नाम	विकर्णों की माप (सेमी में)	रेखाखंडों की माप (सेमी में)	क्या विकर्ण आपस में बराबर हैं ? (हाँ या नहीं)	क्या विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं?(हाँ/नहीं)
10.13 (i)	आयत ABCD	AC=....BD=...	OA=...OC=... OB=...OD=...		
10.13 (ii)	आयत PQRS	PR=....QS=...	OP=...OR=... OQ=...OS=...		
10.13 (iii)	वर्ग EFGH	EG=....FH=...	OE=...OG=... OF=...OH=...		
10.13 (iv)	वर्ग IJKL	IK=....JL=...	OI=...OK=... OJ=...OL=...		

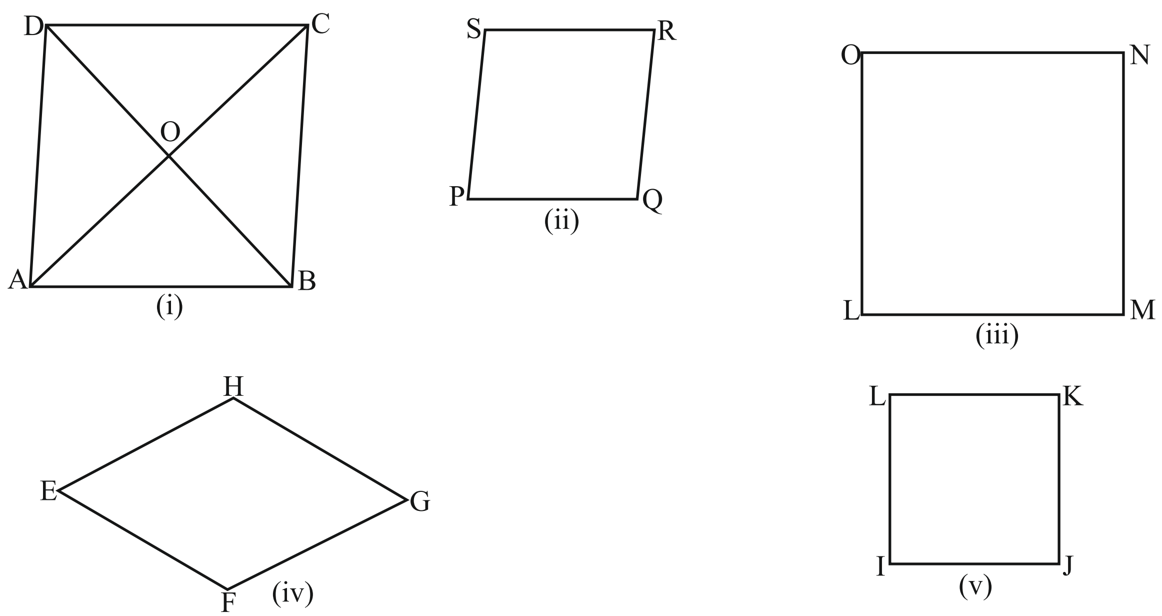
अतः हम प्रत्येक स्थिति में यह निष्कर्ष निकालते हैं कि आयत एवं वर्ग के विकर्ण की लम्बाई आपस में बराबर होती हैं एवं वे एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

अभ्यास–3

आप अपनी कापी में अलग–अलग माप के दो आयत एवं दो वर्ग बनाकर उनके विकर्ण खींचिए एवं उनके गुणों की जाँच कीजिए।

क्रियाकलाप 9

नीचे समचतुर्भुज तथा वर्ग के कुछ चित्र दिए गए हैं इनके विकर्णों को मिलाइए तथा इनके प्रतिच्छेद बिन्दु पर बनने वाले कोणों को मापिए।



चित्र – 10.14

सारणी–10.8

क्र.	चित्र क्रमांक	चतुर्भुज का नाम	विकर्णों के प्रतिच्छेद बिन्दु पर बने कोणों की माप
1.	10.14(i)	समचतुर्भुज ABCD	∠AOB= ....∠BOC=....∠COD=....∠DOA....
2.	10.14(ii)		
3.	10.14(iii)		
4.	10.14(iv)		
5.	10.14(v)		

विकर्णों के प्रतिच्छेद बिन्दु पर बनने वाले कोणों का मान कितना है?

इस प्रकार आप पाते हैं कि समचतुर्भुज तथा वर्ग के विकर्ण समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

सारणी–10.9

क्रं	चतुर्भुज के प्रकार	भुजाएँ	कोण	विकर्ण
1.	समान्तर चतुर्भुज	सम्मुख भुजाएँ समान्तर व बराबर होती हैं।	सम्मुख कोण बराबर होते हैं।	विकर्ण एक दूसरे को प्रतिच्छेद बिन्दु पर समद्विभाजित करते हैं।
2.	आयत	सम्मुख भुजाएँ समान्तर व बराबर होती हैं।	सम्मुख कोण बराबर होते हैं (प्रत्येक कोण 90^0 होता है।)	विकर्ण बराबर एवं एक दूसरे को प्रतिच्छेद बिन्दु पर समद्विविभाजित करते है।
3.	वर्ग	सभी भुजाएँ बराबर होती हैं,सम्मुख भुजाएँ समान्तर होती है।	सम्मुख कोण बराबर होते है (प्रत्येक कोण 90^0 का होता है।)	विकर्ण एक दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं तथा विकर्ण आपस में बराबर होते हैं
4.	समचतुर्भुज	सभी भुजाएँ बराबर होती हैं,सम्मुख भुजाएँ समान्तर होती हैं।	सम्मुख कोण बराबर होते हैं।	विकर्ण एक दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

प्रश्नावली–10

1. प्रत्येक प्रश्न में 4 संभावित उत्तर दिए गए हैं जिनमें एक सही है सही उत्तर चनुकर लिखिए–

(अ) दोनों विकर्ण बराबर होते हैं–

(i) समान्तर चतुर्भुज (ii) समचतुर्भुज

(iii) आयत (iv) समलंब चतुर्भुज

(ब) किस चतुर्भुज में सभी कोण आपस में बराबर होते हैं।

(i) समलंब चतुर्भुज (ii) सम चतुर्भुज

(iii) समान्तर चतुर्भज (iv) आयत

(स) समान्तर चतुर्भुज का एक कोण यदि 60^0 का हो तो उसके सम्मुख कोण का मान होगा।

(i) 60^0 (ii) 120^0 (iii) 90^0 (iv) 180^0

(द) किसी समान्तर चतुर्भुज की संलग्न भुजाओं की लम्बाई क्रमशः 8 सेमी व 6 सेमी हो तो उसका परिमाप होगा।

(i) 14 सेमी (ii) 28 सेमी (iii) 56 सेमी (iv) 60 सेमी

2. निम्नलिखित रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए–

1. ऐसा चतुर्भुज जिसके विकर्ण बराबर होते हैं तथा प्रतिच्छेद बिन्दु पर समकोण बनाते हैं, उस चतुर्भुज को –––––––– कहते हैं।
2. वह चतुर्भुज जिसमें केवल एक सम्मुख भुजा समान्तर हो –––––––– चतुर्भुज कहलाता है।
3. किसी बहुभुज में यदि 6 शीर्ष हो तो उसमें भुजाओं की संख्या –––––– होगी।
4. यदि किसी बहुभुज में भुजाओं की संख्या n हो तो किसी एक शीर्ष से सभी विपरीत शीर्षों को मिलाने पर बनने वाले त्रिभुजों की संख्या ––––––– होगी।

3. एक वर्गाकार कागज के चारो शीर्षों को कैंची से काटा गया है प्राप्त आकृति कौन सा बहुभुज क्षेत्र बनाती है? अपने साथियों से चर्चा कीजिए।

4. एक बहुभुज में भुजाओं की संख्या 8 है तो उसके अंतः कोणों का योग कितना होगा।

5. एक समान्तर चतुर्भुज का एक कोण 120^0 हो तो अन्य कोणों की माप ज्ञात कीजिए।

6. एक समान्तर चतुर्भुज के दो कोणों का अनुपात 4:5 है समान्तर चतुर्भुज के सभी कोण ज्ञात कीजिए।

7. किसी समान्तर चतुर्भुज की संलग्न भुजाएँ 3:4 के अनुपात में है यदि समान्तर चतुर्भुज का परिमाप 84 सेमी हो तो उसकी भुजाएँ ज्ञात कीजिए।

8. इनमें कौन से कथन सही नहीं है उन्हें सुधारकर लिखिए

(i) सभी वर्ग समलंब चतुर्भुज होते हैं।

(ii) आयत के विकर्ण बराबर होते हैं।

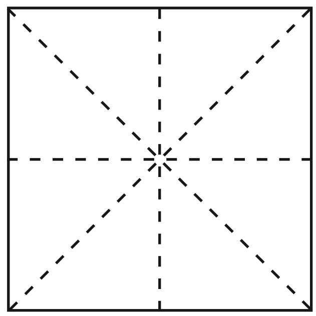
(iii) सभी आयत समान्तर चतुर्भुज नहीं होते।

(iv) समचतुर्भुज के विकर्ण समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

(v) सभी वर्ग आयत होते हैं।

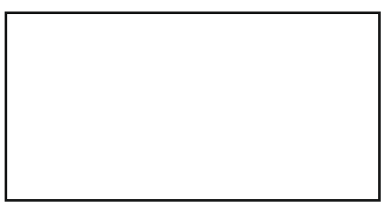
बहुभुजों में समरूपता

चतुर्भुजाकार आकृतियों से तो आप भलीभाँति परिचित हो चुके हैं। कक्षा 7वीं में आपने यह सीखा था कि किसी आकृति को यदि इस प्रकार से दो भागों में मोड़ा जा सके कि मोड़ने पर दोनों भाग एक–दूसरे को पूरी तरह से ढँक ले तो जिस रेखा के सापेक्ष इस आकृति को मोड़ा जाता है उस रेखा को सममिति की रेखा कहते हैं। जैसे – एक वर्ग काटिए उस वर्ग को नीचे चित्र में दी गई टूटी हुई रेखाओं के सापेक्ष मोड़कर आप चार सममित रेखाएँ प्राप्त कर सकते हैं।

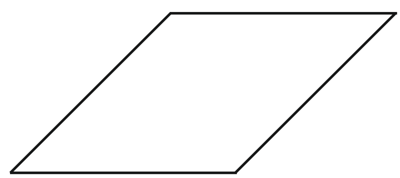


चित्र क्र. 10.

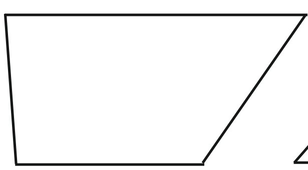
इसी प्रकार आप भी नीचे दी गई आकृतियों के समान आकार का कागज काटकर प्रत्येक आकृति के लिए सममित रेखाएँ प्राप्त कीजिए एवं जिन आकृतियों में संभव हो उन आकृतियों में पुस्तक में ही पेंसिल द्वारा खींची गई टूटी हुई रेखाओं से दर्शाइए तथा रिक्त स्थानों पर सममित रेखाओं की संख्याएँ भी लिखिए।



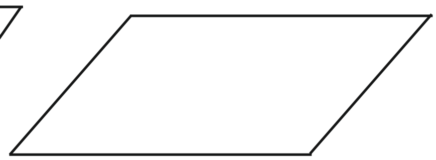
आयत ....



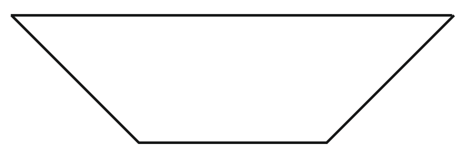
समचतुर्भुज ....



समलम्ब ....



समान्तर चतुर्भुज ....



दो समान भुजाओं वाली समलम्ब ....

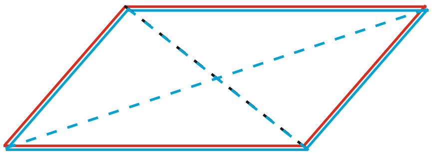
समान्तर चतुर्भुज जो न वर्ग है न आयत और न ही समचतुर्भुज में कोई भी सममित रेखा नहीं है फिर भी देखने से ऐसा लगता है कि इनमें एक प्रकार का संतुलन है। आइए, इसे ढूँढें–

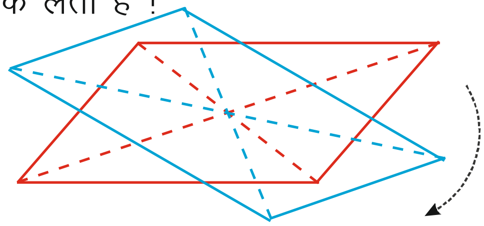
एक कागज को बीच से दो बराबर भागों में मोड़िए तथा ऊपरी भाग पर एक समान्तर चतुर्भुज बनाइए। अब दोनों कागजों को इस प्रकार काटें कि दो समान आकार के समान्तर चतुर्भुज प्राप्त हो।

दोनों समान्तर चतुर्भुज में विकर्ण खींचकर उनका कटन बिन्दु प्राप्त कीजिए।

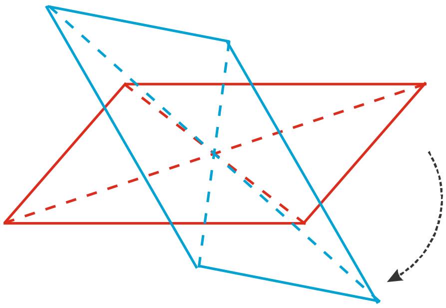
कटन बिन्दु पर एक पिन लगाकर ऊपर वाले समांतर चतुर्भुज को नीचे वाले समान्तर चतुर्भुज

के ऊपर घुमाइए तथा यह देखिए कि किन–किन स्थितियों में केन्द्र पर घुमाने से ऊपर का समान्तर चतुर्भुज नीचे के समान्तर चतुर्भुज को पूरी तरह ढँक लेता है ?

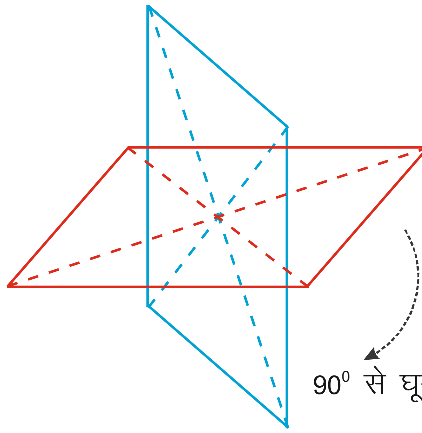




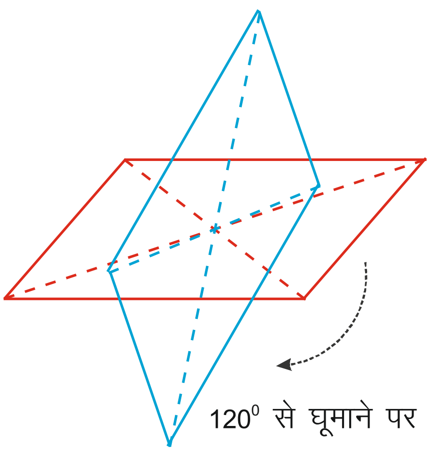
30^0 से घूमाने पर



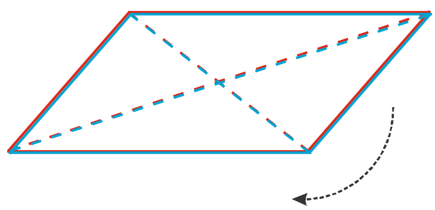
60^0 से घूमाने पर



90^0 से घूमाने पर

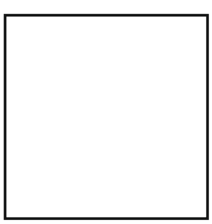


120^0 से घूमाने पर

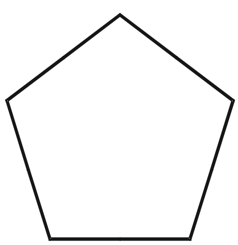


180^0 से घूमाने पर

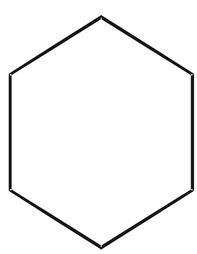
इस प्रकार आप देखते हैं कि पहले 180^0 के कोण पर एवं पुनः 360^0 के कोण पर ऊपर वाले समान्तर चतुर्भुज को घूमाने पर ऊपर वाला समान्तर चतुर्भुज नीचे वाले समान्तर चतुर्भुज पूरी तरह ढँक लेता है। इस प्रकार की सममिति को घूर्णन सममिति कहते हैं तथा जिस बिन्दु के सापेक्ष घुमाते हैं उसे घूर्णन केन्द्र कहते हैं। घूर्णन केन्द्र के सापेक्ष एक पूरा चक्कर लगाने पर एक आकृति अपने आप को जितनी बार ढँक लेती है उसे घूर्णन का क्रम कहते हैं। निम्न आकृतियों का घूर्णन क्रम ज्ञात कीजिए –



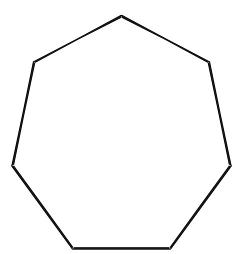
चतुर्भुज



पंचभुज

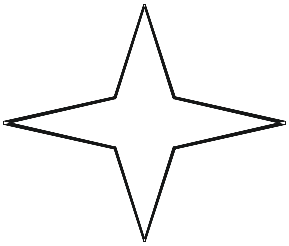


षटभुज

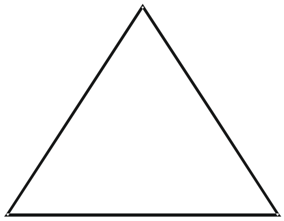


सप्तभुज

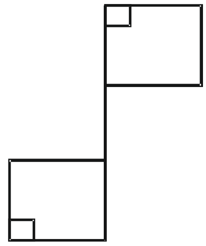
क्रियाकलाप : नीचे दी गई आकृतियों में बहुभुज को पहचानिये तथा उनके घूर्णन का क्रम एवं सममिति अक्षों की संख्या ज्ञात कीजिए एवं सारणी में भरिए –



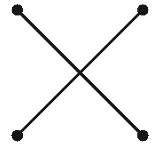
चित्र क्र. 10.



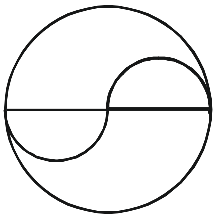
चित्र क्र. 10.



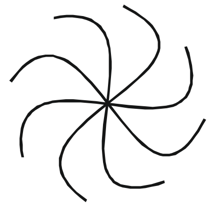
चित्र क्र. 10.



चित्र क्र. 10.



चित्र क्र. 10.



चित्र क्र. 10.

चित्र क्र.	बहुभुज है या नहीं	घूर्णन का क्रम	सममित अक्षों की संख्याएँ

क्या घूर्णन क्रम का सममित अक्षों की संख्या से कोई संबंध है ?

इससे आप क्या निष्कर्ष निकालते हैं ?

अभ्यास–4

1. अपने दैनिक जीवन में घूर्णन सममिति कहां–कहां दिखती है ? कोई पांच उदाहरण लिखिए।
2. क्या आप और किसी प्रकार की सममिति के बारे में सोच सकते हैं ? सोचिए एवं अपने साथियों से चर्चा कीजिए।

प्रश्नावली 10.1

1. एक चतुर्भुज के तीन कोण क्रमशः $80^\circ, 110^\circ, 120^\circ$ हैं तो चौथा कोण कितने अंश का होगा?
2. यदि किसी चतुर्भुज के तीन कोण समान हैं और चौथा कोण 75° का है तो बताइए समान कोण कितने अंश के हैं?
3. समान्तर चतुर्भुज के आसन्न कोणों का अनुपात 2 : 3 है तो कोणों के मान क्या होंगे?

4. किसी चतुर्भुज का एक कोण समकोण है और अन्य कोणों का अनुपात 2 : 3 : 4 है तो उन कोणों के मान क्या होंगे?
5. एक चतुर्भुज के चार कोणों का अनुपात 1 : 2 : 3 : 4 है तो प्रत्येक कोण का मान ज्ञात कीजिए।
6. एक समान्तर चतुर्भुज के आसन्न कोण क्रमशः x और $x + 20$ हैं तो प्रत्येक कोण का मान बताइए।

हमने सीखा

1. तीन या तीन से अधिक रेखाखंडों से घिरी हुई बंद आकृति बहुभुज कहलाती है।
2. बहुभुज के सभी भुजाओं की लम्बाई एवं सभी कोण बराबर हों तो उसे सम बहुभुज क्षेत्र या नियमित बहुभुज क्षेत्र कहते हैं।
3. जिन बहुभुज में भुजाओं की लम्बाई भिन्न–भिन्न होती है उसे अनियमित बहुभुज क्षेत्र कहते हैं।
4. यदि किसी बहुभुज क्षेत्र में भुजाओं की संख्या n है तो एक शीर्ष से सभी विपरीत शीर्षों को मिलाने पर क्षेत्र (n-2) त्रिभुजों में बँट जाता है।
5. किसी बहुभुज क्षेत्र के सभी अंतःकोणो का योग $(n-2)\times 180^0$ होता है।
6. समान्तर चतुर्भुज, आयत, वर्ग एवं समचतुर्भुज के विकर्ण प्रतिच्छेद बिन्दु पर समद्विविभाजित होते हैं।
7. वर्ग एवं आयत के दोनों विकर्ण आपस में बराबर होते हैं।
8. वर्ग एवं समचतुर्भुज के विकर्ण समकोण पर समद्विभाजित होते हैं।
9. वह बहुभुज क्षेत्र जिसका प्रत्येक कोण 180^0 से कम हो उसे उत्तल बहुभुज कहते हैं।
10. वह बहुभुज क्षेत्र जिसमें कम से कम एक अंतःकोण 180^0 से अधिक हो अवतल बहुभुज क्षेत्र कहलाता है।

9V2QI9

अध्याय–11
चतुर्भुज की रचना
CONSTRUCTION OF QUADRILATERAL

9VBLJH

कमला, दिये गये मापों के आधार पर त्रिभुज की रचना करना जान चुकी है।

वह चतुर्भुज के बारे में भी जानती है, उसके मन में चतुर्भुज की रचना करने की इच्छा हुई। वह सोचने लगी कि क्या चार भुजाएं ज्ञात होने पर चतुर्भुज बनाया जा सकता है?

कमला झाड़ू की चार सीकें क्रमशः 3 सेमी, 4 सेमी, 5 सेमी और 13 सेमी लम्बाई माप की लेकर चतुर्भुज बनाने की कोशिश कर रही है, लेकिन चतुर्भुज नहीं बना पा रही है। क्या आप इन सींकों को चतुर्भुज का आकार दे सकते हैं?

यदि चतुर्भुज नहीं बन सकता तो क्यों? कारण सोचिए।

अब आप भी चतुर्भुज की भुजाओं के लिए कोई भी चार माप सोचिए तथा सोचे गए मापों के समान माप की चार सींकें लीजिए तथा सींकों से चतुर्भुज बनाइए।

नीचे कुछ बच्चों द्वारा सोचे गए माप एवं निष्कर्ष लिखे गए है इनके आगे आपके द्वारा सोची गई मापों को लिखिए तथा निष्कर्ष निकालिए।

सारणी 11.1

क्र.सं.	नाम	भुजाओं की माप (सेमी. में)				निष्कर्ष
		पहली	दूसरी	तीसरी	चौथी	
1.	मयंक	3	4	5	6	चतुर्भुज बनता है
2.	नीरज	3	3	4	10	चतुर्भुज नहीं बनता है
3.	नम्रता	2	4	5	7	चतुर्भुज बनता है
4.	रजिया	3	5	6	15	चतुर्भुज नहीं बनता है
5.	गुरप्रीत	4	6	7	8	चतुर्भुज बनता है
6.	--------	-----	-----	-----	-----	------------------

तालिका को ध्यान पूर्वक देखिए और सोचिए कि नीरज एवं रजिया के मापों से चतुर्भुज क्यों नहीं बन रहे हैं।

चतुर्भुज बनने की शर्तें

चतुर्भुज की रचना तभी संभव है, **जब इनकी तीन भुजाओं का योग चौथी (सबसे बड़ी) भुजा से अधिक हो।**

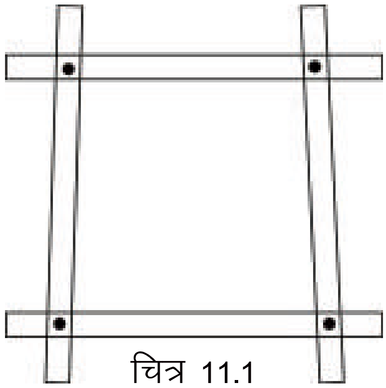
हमीदा ने पाया कि भुजाओं के मध्य झुकाव में परिवर्तन करने पर चतुर्भुज की आकृति बदल रही है और ऐसे बहुत से चतुर्भुज बन सकते हैं।

तब तो चतुर्भुज की चार भुजाएं ज्ञात होने पर भी एक विशिष्ट चतुर्भुज नहीं बनाया जा सकता। ऐसा क्यों?

आइये, इसे एक क्रियाकलाप की सहायता से समझते हैं :–

क्रियाकलाप 1.

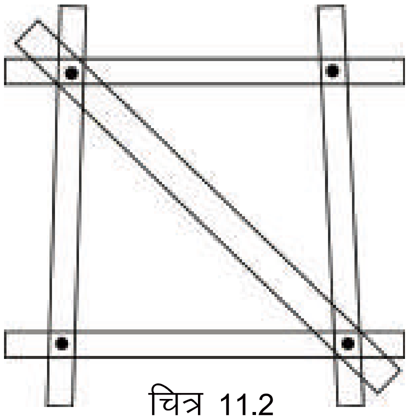
चार उपयुक्त लम्बाइयों की लकड़ी की पटि्टयाँ लीजिए, इन्हें पिन की सहायता से जोड़कर चतुर्भुज बना लीजिए।


चित्र 11.1

अब इन चतुर्भुज के आमने सामने के कोनों को दबाइये। क्या कोनों को दबाने से चतुर्भुज की आकृति बदल रही है?

इस प्रकार आप देख रहे हैं कि इन्हीं चार भुजाओं से अनेक चतुर्भुज बन रहे हैं। अब एक और पट्टी लीजिए और इसे दो सम्मुख कोणों में लगाकर विकर्ण का रूप दीजिए।

अब चतुर्भुज की आकृति को बदलने का प्रयास कीजिए। क्या कोनों को दबाकर चतुर्भुज की आकृति बदली जा सकती है? आप पायेंगे कि विकर्ण लगा देने से चतुर्भुज की आकृति नहीं बदली जा सकती।


चित्र 11.2

इस प्रकार चार भुजाएं और एक विकर्ण की सहायता से एक विशिष्ठ चतुर्भुज बनाया जा सकता है।

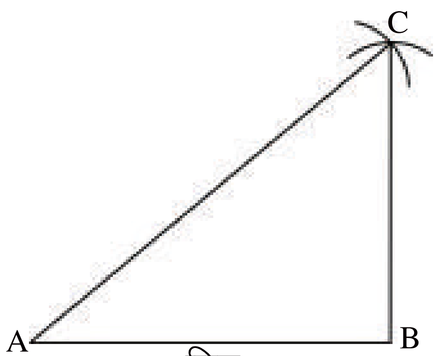
अनु सोच रही थी कि चार भुजाओं से प्राप्त चतुर्भुज के कोनों को दबाने पर कई चतुर्भुजों की आकृतियाँ प्राप्त होती है। परन्तु यदि किसी कोण को स्थिर कर दिया जाए तो दो भुजाएँ स्थिर हो जाएगी और चतुर्भुज भी एक ही प्राप्त होगा।

आइए, एक चतुर्भुज बनाने की कुछ और परिस्थितियों पर विचार करें।

क्रियाकलाप 2.

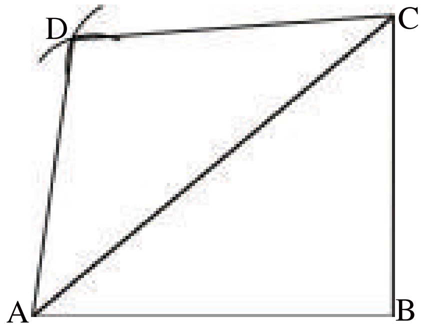
उपयुक्त माप वाले एक त्रिभुज की रचना करते हैं –

रचना के पश्चात् हमें त्रिभुज के तीन शीर्ष तो मिल जाते है। चूंकि चतुर्भुज में चार शीर्ष होते हैं, इसलिए इस त्रिभुज को चतुर्भुज का स्वरूप देने में एक और शीर्ष की जरूरत होगी। सोचिए कि एक और शीर्ष के लिए कितने मापों की आवश्यकता हो सकती है?



चित्र 11.3

निश्चित रूप से चौथे शीर्ष के लिए दो मापों की आवश्यकता है।



चित्र 11.4

इस प्रकार हम कह सकते है कि चतुर्भुज की रचना के लिए कम से कम पाँच अवयव आवश्यक होते हैं।

हम यहाँ चतुर्भुज की रचना सम्बन्धी निम्न सरल स्थितियों पर अध्ययन करेंगे :

I. यदि किसी चतुर्भुज की चार भुजाएं व एक विकर्ण दिया हो।
II. यदि किसी चतुर्भुज की तीन भुजाएं व दो विकर्ण दिये हों।
III. यदि किसी चतुर्भुज की चार भुजाएं व एक कोण दिया हो।
IV. यदि किसी चतुर्भुज की तीन भुजाएं व दो अन्तःकोण दिये हों।
V. यदि किसी चतुर्भुज की दो आसन्न भुजाएं व तीन कोण दिये हों।
VI. विशेष प्रकार के चतुर्भुज की रचना।

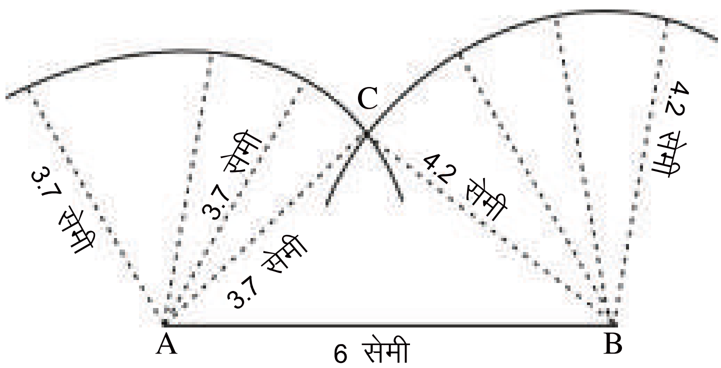
हम चाप क्यों काटते हैं?

क्रियाकलाप 3.

6 सेमी लंबा एक रेखाखण्ड $\overline{AB}$ खींचते हैं। अब हमें एक ऐसा बिन्दु C प्राप्त करना है जो A से 3.7 सेमी व B से 4.2 सेमी दूरी पर हो।

क्या आप स्केल की सहायता से ऐसे बिन्दु निश्चित कर पायेंगे?

आप पायेंगे कि स्केल की सहायता से एक निश्चित बिन्दु प्राप्त करना मुश्किल होगा।



चित्र 11.5

आइये A को केन्द्र मानकर 3.7 सेमी त्रिज्या का एक चाप खींचते हैं। (अब आप चाप के विभिन्न बिन्दुओं से बिन्दु A की दूरी नापिये, क्या ये बराबर हैं?)

चाप के प्रत्येक बिन्दु से A की दूरी बराबर है क्योंकि ये वृत्त की त्रिज्याएँ है और एक वृत्त की सभी त्रिज्याएँ बराबर होती हैं। इस प्रकार A से 3.7 सेमी की दूरी पर कई बिन्दु हो सकते हैं।

इसी प्रकार बिन्दु B को केन्द्र मान कर 4.2 सेमी त्रिज्या का एक अन्य चाप खींचते हैं। इस चाप के भी प्रत्येक बिन्दु से B बिन्दु की दूरी बराबर है। इस तरह B से भी 4.2 सेमी की दूरी पर कई बिन्दु हो सकते हैं।

दोनों चापों का कटान बिन्दु C ही A से 3.7 सेमी व B से 4.2 सेमी दूरी पर है। इस प्रकार चाप काटकर दो बिन्दुओं से निश्चित दूरी पर एक बिन्दु का निर्धारण करना आसान होता है।

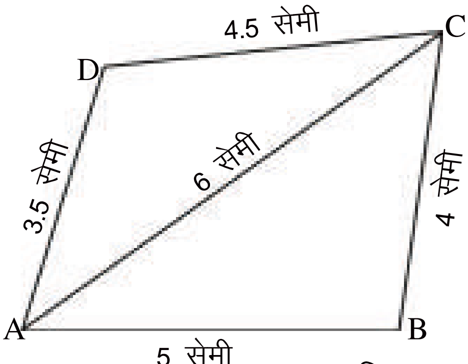
I. <u>चतुर्भुज की रचना जबकि उसकी चारों भुजाएँ एवं एक विकर्ण दिया हो –</u>

उदाहरण 1.

चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए, जिसमें AB = 5 सेमी, BC = 4 सेमी, CD = 4.5 सेमी, AD = 3.5 सेमी तथा AC = 6 सेमी।

हल: सर्वप्रथम बिना नापे, दिये गये प्रश्न को ध्यान में रखते हुए कच्चा चित्र (Rough diagram) बनाते हैं और कौनसी भुजा किस लम्बाई की बनानी है सम्बन्धित भुजा के साथ लिख देते हैं।

9VKHLJ

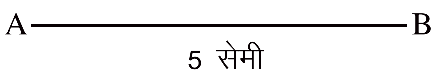


कच्चा चित्र

चित्र 11.6

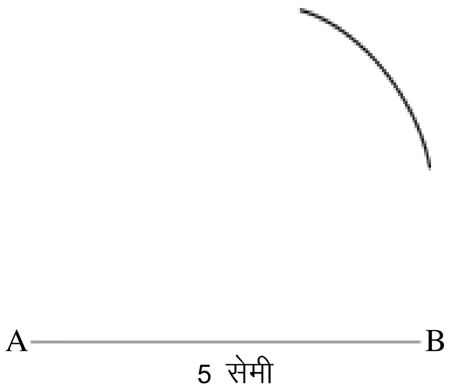
रचना के पद:

1. सर्वप्रथम AB = 5 सेमी का एक रेखाखण्ड खींचिए।



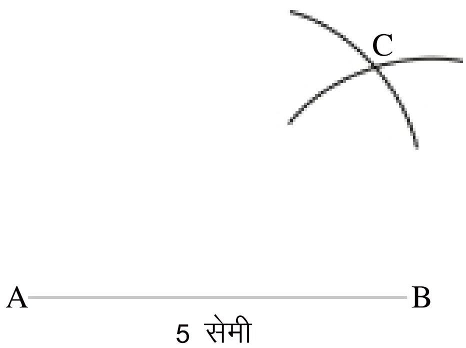
चित्र 11.7(i)

2. बिन्दु A को केन्द्र मानकर 6 सेमी त्रिज्या का चाप ऊपर की ओर काटिए।



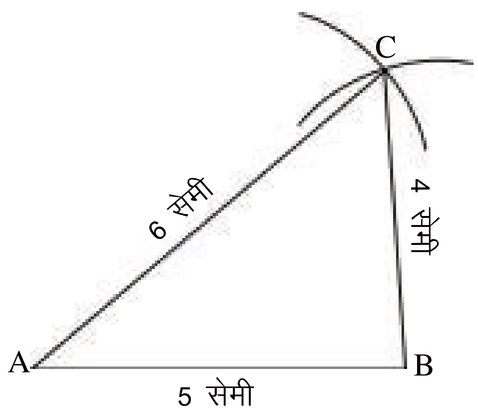
चित्र 11.7(ii)

3. अब बिन्दु B को केन्द्र मानकर 4 सेमी त्रिज्या का चाप, दूसरे चरण में बनाए गए चाप पर काटिए। इस प्रकार कटान बिन्दु C प्राप्त होगा।



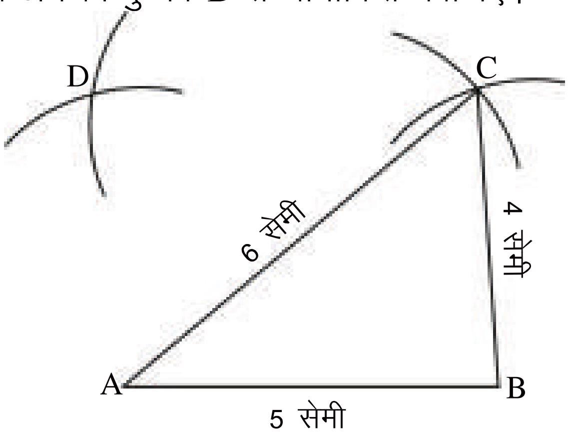
चित्र 11.7(iii)

4. बिन्दु A व बिन्दु B को बिन्दु C से स्केल (पटरी) की सहायता से मिलाइए।



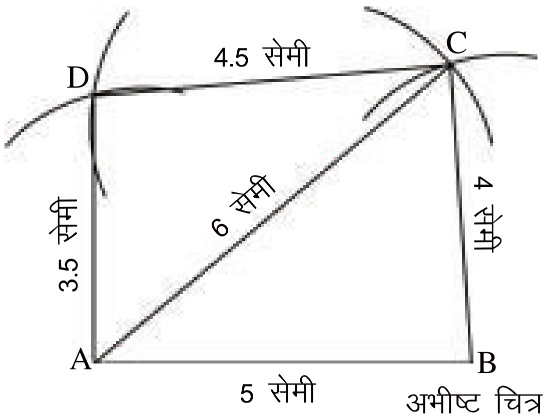
चित्र 11.7(iv)

5. अब बिन्दु A व बिन्दु C को केन्द्र मानकर परकार की सहायता से क्रमशः 3.5 सेमी व 4.5 सेमी का चाप काटिए। कटान बिन्दु को D से नामांकित कीजिए।



चित्र 11.7(v)

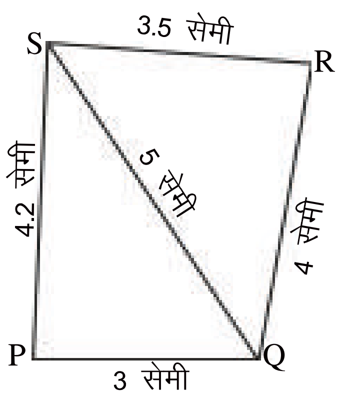
6. बिन्दु D को बिन्दु A व बिन्दु C से पटरी की सहायता से मिलाइए।



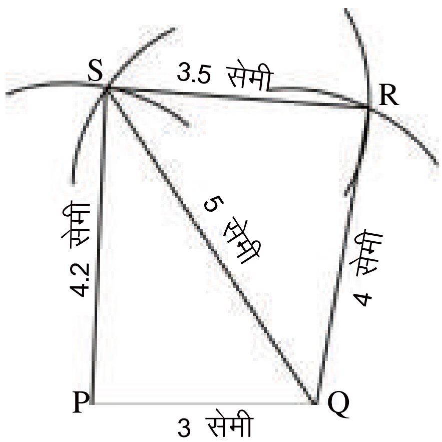
चित्र 11.7(vi)

इस प्रकार अभीष्ट चतुर्भुज ABCD प्राप्त हुआ।

उदाहरण 2. चतुर्भुज PQRS की रचना कीजिए जिसमें PQ = 3 सेमी, QR = 4 सेमी, RS = 3.5 सेमी, PS = 4.2 सेमी और QS = 5 सेमी हो।



कच्चा चित्र



अभीष्ट चित्र

चित्र 11.8

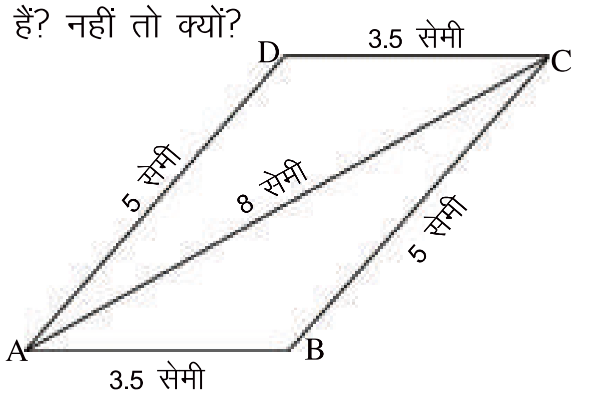
रचना के पद

1. सर्वप्रथम PQ = 3 सेमी का रेखाखण्ड खींचिए।
2. बिन्दु Q को केन्द्र मानकर 5 सेमी त्रिज्या का एक चाप काटिए।
3. अब बिन्दु P को केन्द्र मानकर 4.2 सेमी त्रिज्या का चाप चरण 2 में बनाए गये चाप पर काटिए। जहाँ ये चाप काटते हैं, उसे S द्वारा नामांकित करते हैं।
4. बिन्दु S को बिन्दु P तथा बिन्दु Q से पटरी की सहायता से मिलाइए।
5. बिन्दु Q व बिन्दु S को केन्द्र मानकर परकार की सहायता से क्रमशः 4 सेमी व 3.5 सेमी त्रिज्या का चाप काटिए। जहाँ वे एक दूसरे को काटते हैं, उस बिन्दु को R से नामांकित कीजिए।
6. बिन्दु R को बिन्दु S व बिन्दु Q से मिलाइए। इस प्रकार अभीष्ट चतुर्भुज PQRS प्राप्त हुआ।

उदाहरण 3. समान्तर चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसमें AB = 3.5 सेमी, BC = 5 सेमी तथा विकर्ण AC = 8 सेमी।

हलः

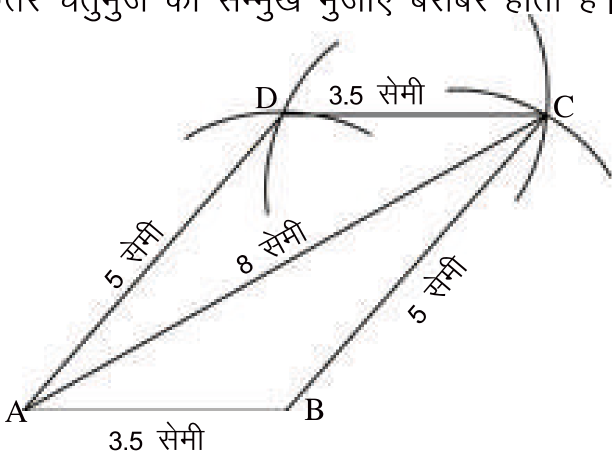
सर्वप्रथम दिए गए मापों को ध्यान में रखकर कच्चा चित्र बनाइए। क्या आप इन दिए गए मानों से समान्तर चतुर्भुज बना सकते हैं? नहीं तो क्यों?



कच्चा चित्र

चित्र 11.9

हम जानते है कि समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएं बराबर होती है।



अभीष्ट चित्र चित्र 11.10

रचना:

1. सर्वप्रथम AB = 3.5 सेमी का एक रेखाखण्ड खींचिए।
2. बिन्दु A से 8 सेमी त्रिज्या का चाप काटिए।
3. बिन्दु B से 5 सेमी त्रिज्या का चाप चरण 2 के चाप पर काटिए। जहाँ ये चाप कटते हैं वह C बिन्दु है।
4. बिन्दु C को बिन्दु A व बिन्दु B से पटरी की सहायता से मिलाइए।
5. बिन्दु C व बिन्दु A से क्रमशः 5 सेमी व 3.5 सेमी का चाप काटिए, जहाँ ये चाप कटें, उसे D से नामांकित कीजिए।
6. बिन्दु D को बिन्दु A व बिन्दु C से मिलाइए। इस प्रकार ABCD एक समान्तर चतुर्भुज प्राप्त हुआ।

अभ्यास 1

इन्हें भी बनाएं (यदि संभव हो तो) –

1. एक समचतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसमें AB = 4 सेमी तथा AC = 7 सेमी
2. समान्तर चतुर्भज PQRS की रचना कीजिए जिसमें PQ = 6 सेमी, QR = 8 सेमी तथा PR = 10 सेमी हो।

प्रश्नावली 11.1

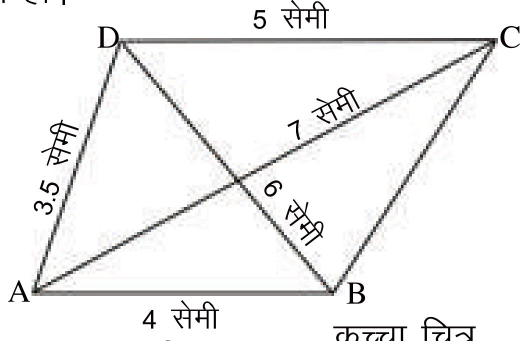
1. चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए, जिसमें AB = 4 सेमी, BC = 3.1 सेमी, CD = 3 सेमी, AD = 4.2 सेमी और AC = 5 सेमी हो। विकर्ण BD को नापिए।
2. चतुर्भुज PQRS की रचना कीजिए, जिसमें PQ = 3 सेमी, QR = QS = 5 सेमी, PS = 4 सेमी और SR = 4 सेमी हो। RP को नापिए।
3. आयत MNOP की रचना कीजिए जिसमें MN = 3 सेमी, NO = 4 सेमी तथा MO = 5 सेमी हो।

II. <u>चतुर्भुज की तीन भुजाएँ व दो विकर्ण दिये गये हों</u>

उदाहरण 4. चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए, जिसमें AB = 4 सेमी, AD = 3.5 सेमी, DC = 5 सेमी, विकर्ण AC = 7 सेमी और BD = 6 सेमी हो।

हल: प्रश्न को ध्यान में रखकर कच्चा चित्र बनाइए एवं उसमें दिए गए मापों को सम्बन्धित भुजा के साथ लिखिए।

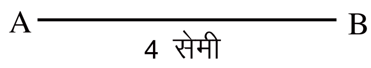
9VUDN7



चित्र 11.11

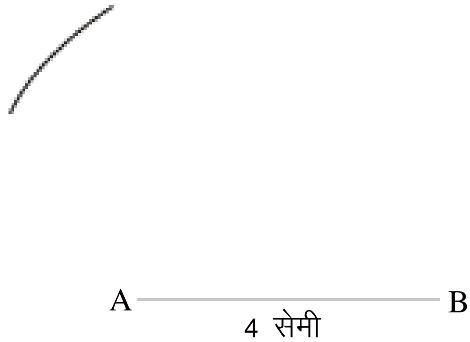
रचनाः

1. सर्वप्रथम AB = 4 सेमी का एक रेखाखण्ड खींचिए।



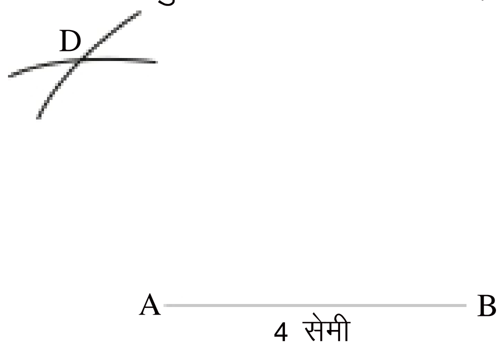
चित्र 11.12(i)

2. बिन्दु B को केन्द्र मानकर 6 सेमी त्रिज्या का एक चाप काटिए।



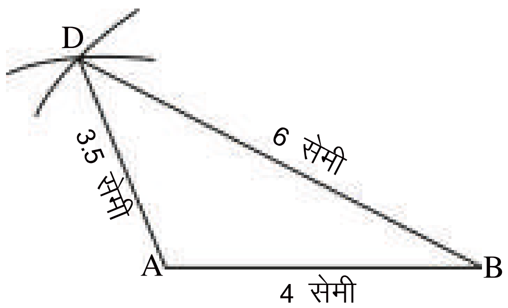
चित्र 11.12(ii)

3. बिन्दु A को केन्द्र मानकर 3.5 सेमी का चाप चरण 2 में बनाए गए चाप पर काटिए। जहाँ ये दोनों चाप एक दूसरे को काटते हैं, उसे बिन्दु D से नामांकित कीजिए।



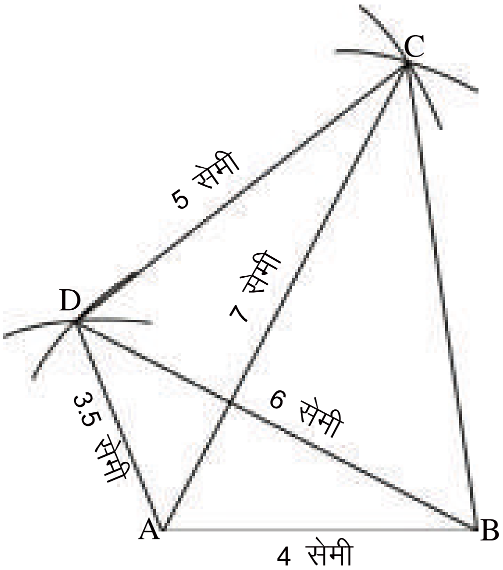
चित्र 11.12(iii)

4. बिन्दु D को पटरी की सहायता से A व B से मिलाइए।



चित्र 11.12(iv)

5. बिन्दु D व बिन्दु A से परकार की सहायता से क्रमशः 5 सेमी व 7 सेमी का चाप काटिए। जहाँ ये दोनों चाप कटते हैं उसे बिन्दु C से नामांकित कीजिए। बिन्दु C को क्रमशः बिन्दु B, D व A से मिलाइए।



चित्र 11.12(v)
अभीष्ट चित्र

इस प्रकार अभीष्ट चतुर्भुज ABCD प्राप्त हुआ।

अभ्यास 2

इन्हें भी बनाएं

1. आयत ABCD की रचना कीजिए जिसमें AB = 5 सेमी तथा AC = 8 सेमी।
(संकेत – आयत के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।)

प्रश्नावली 11.2

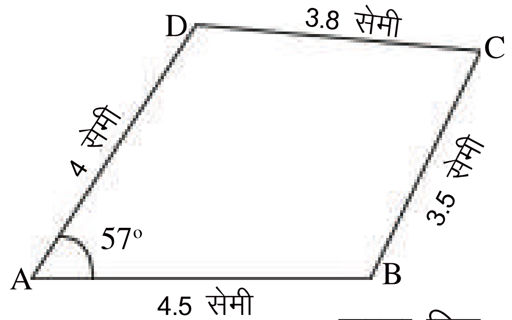
1. एक चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसमें AB = 4 सेमी, BC = 3 सेमी, AD = 3.5 सेमी, विकर्ण AC = 5 सेमी और BD = 4 सेमी हो। CD भुजा को नापिए।
2. चतुर्भुज PQRS बनाइए जिसमें PQ = 4.2 सेमी, QR = 3.6 सेमी, PS = 4.5 सेमी, विकर्ण PR = 6 सेमी तथा QS = 5.7 सेमी हो।
3. चतुर्भुज ABCD बनाइए जिसमें AB = 3.5 सेमी, BC = 3.1 सेमी, CD = 2.9 सेमी, विकर्ण AC = 4.9 सेमी और BD = 4.6 सेमी हो।
4. आयत PQRS की रचना कीजिए PQ = 4.5 सेमी तथा विकर्ण PR = 6.5 सेमी हो।

III. चतुर्भुज की रचना करना जब चार भुजाएँ व एक कोण दिया हो

उदाहरण 5. चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए, जिसमें AB = 4.5 सेमी, BC = 3.5 सेमी, CD = 3.8 सेमी, AD = 4 सेमी और $\angle A = 57^\circ$ हो।

हल:

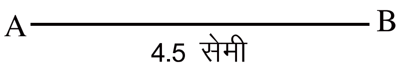
दिए गए प्रश्न को ध्यान में रखकर कच्चा चित्र बनाइए और सम्बन्धित भुजा के नीचे माप लिखिए।



चित्र 11.13

रचना:

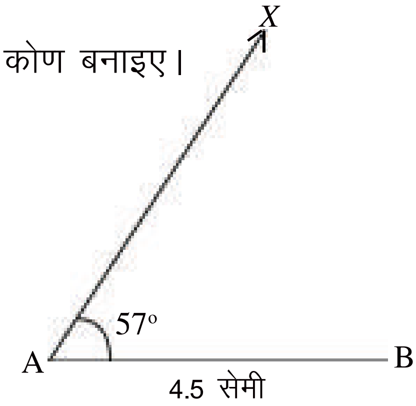
1. AB = 4.5 सेमी का एक रेखाखण्ड खींचिए।



चित्र 11.14 (i)

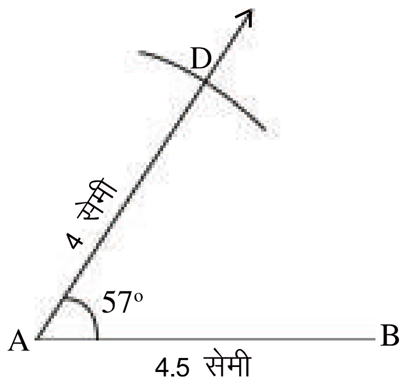
2. बिन्दु A पर चाँदें की सहायता से $\angle BAX = 57^\circ$ का कोण बनाइए।

9H49PU



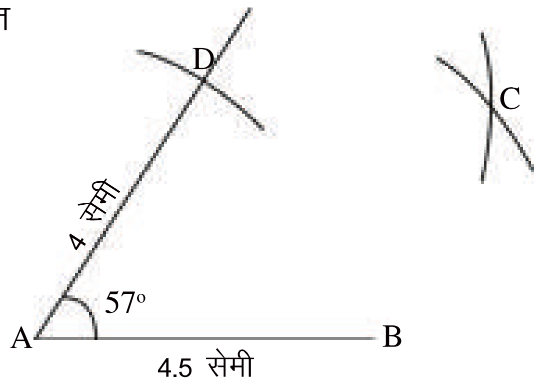
चित्र 11.14 (ii)

3. परकार की सहायता से 4 सेमी त्रिज्या का चाप लेकर बिन्दु A से किरण XA पर काटिए। जहाँ चाप कटता है उस बिन्दु को D नाम दीजिए।



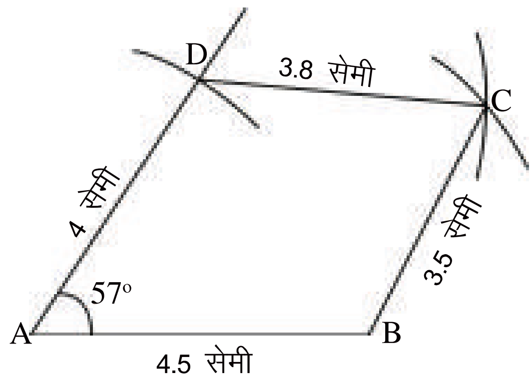
चित्र 11.14 (iii)

4. बिन्दु D तथा बिन्दु B से परकार की सहायता से क्रमशः 3.8 सेमी व 3.5 सेमी त्रिज्या के चाप काटिए। प्रतिच्छेद बिन्दु को C से नामांकित कीजिए।



चित्र 11.14 (iv)

5. बिन्दु C को बिन्दु B व बिन्दु D से पटरी की सहायता से मिलाइए।

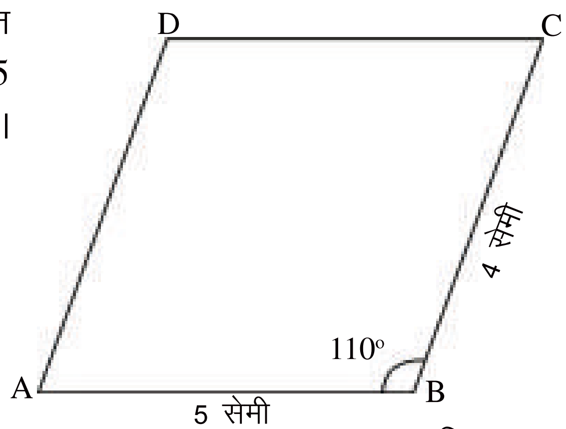


चित्र 11.14 (v)
अभीष्ट चित्र

इस प्रकार अभीष्ट चतुर्भुज ABCD प्राप्त हुआ।

उदाहरण 6. एक समान्तर चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसमें AB = 5 सेमी, BC = 4 सेमी तथा $\angle B = 110^\circ$ हो

हलः प्रश्न को ध्यान में रखकर एक समान्तर चतुर्भुज ABCD का कच्चा चित्र बनाइये। जिसमें AB = 5 सेमी, BC = 4 सेमी तथा $\angle B = 110^\circ$ नामांकित कीजिए।

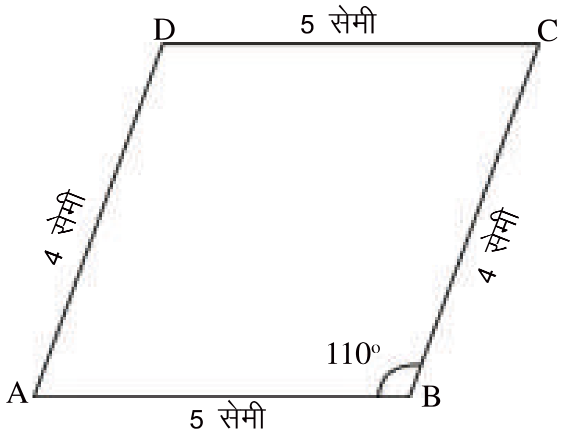


कच्चा चित्र A

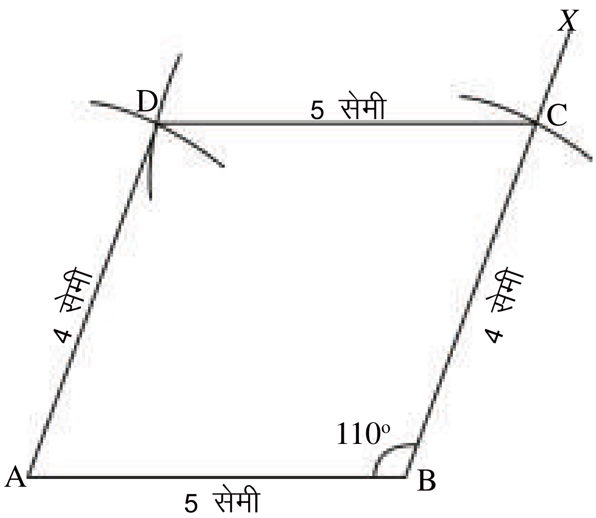
चित्र 11.15(i)

यहाँ पर दो भुजा व एक कोण दिया है जबकि किसी भी चतुर्भुज को बनाने के लिए पाँच अवयवों की आवश्यकता होती है।

चूंकि समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएं बराबर होती है। इसलिए चार भुजाएं और एक कोण का मान हमें ज्ञात हो सकता है।



चित्र 11.15(ii) कच्चा चित्र B



चित्र 11.16

रचना के पद:

1. सर्वप्रथम AB = 5 सेमी का एक रेखाखण्ड खींचिए।
2. फिर बिन्दु B पर चाँदे की सहायता से $\angle ABX = 110^\circ$ का कोण बनाइए।
3. परकार से 4 सेमी त्रिज्या का चाप बिन्दु B से किरण BX पर काटिए। जिस बिन्दु पर चाप कटा उसे C बिन्दु से नामांकित कीजिए।
4. बिन्दु A व बिन्दु C से क्रमशः 4 सेमी व 5 सेमी त्रिज्या के चाप काटिए। जहाँ ये चाप कटें, उसे D बिन्दु से नामांकित कीजिए।
5. D को A व C से मिलाइए।

इस प्रकार ABCD अभीष्ट समान्तर चतुर्भुज की रचना हुई।

अभ्यास 3

इन्हें भी बनाएं

1. समचतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसमें AB = 5 सेमी तथा $\angle A = 70^\circ$ हो।
2. आयत PQRS की रचना कीजिए जिसमें PQ = 4 सेमी तथा QR = 3 सेमी हो।
3. वर्ग LMNO की रचना कीजिए जिसमें LM = 2.8 सेमी हो।

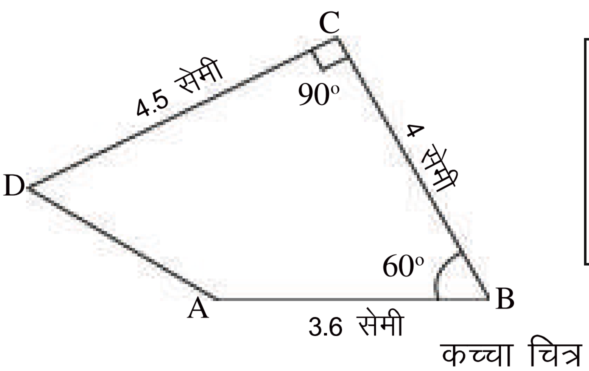
प्रश्नावली 11.3

1. चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसमें AB = 5.4 सेमी, BC = 4.8 सेमी, CD = AD = 5 सेमी और $\angle A = 120^o$ हो।
2. चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसमें AB = 3 सेमी, BC = 4 सेमी, CD = 3.5 सेमी, DA = 4.2 सेमी तथा $\angle A = 60^o$ हो।
3. समान्तर चतुर्भुज PQRS की रचना कीजिए जिसमें PQ = 5.4 सेमी, QR = 3.8 सेमी, $\angle P = 75^o$ हो।
4. समचतुर्भुज STUV की रचना कीजिए जिसमें ST = 4 सेमी एवं $\angle S = 60^o$ हो।

IV. चतुर्भुज की रचना जबकि तीन भुजाएँ एवं दो अन्तर्गत कोण दिए हो।

उदाहरण 7. चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए, जिसमें AB = 3.6 सेमी, BC = 4 सेमी, CD = 4.5 सेमी, $\angle B = 60^o$ व $\angle C = 90^o$ हो।

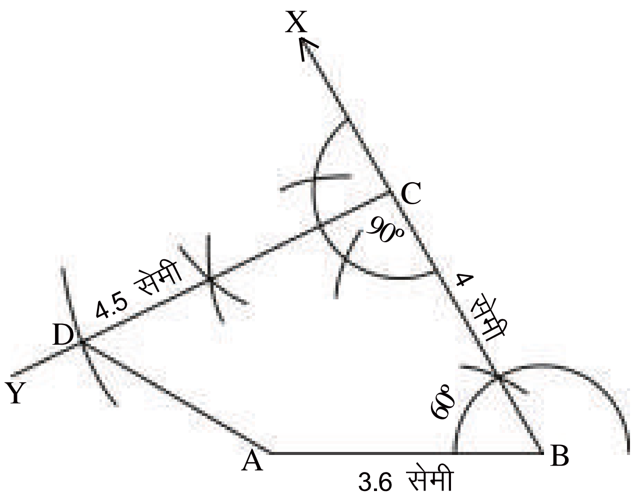
हल: प्रश्न को ध्यान में रखकर एक कच्चा चित्र बनाइए। इस पर भुजाएँ व कोण की दी गई जानकारी के अनुसार अंकित कीजिए।



चित्र 11.17

रचना :

1. सर्वप्रथम AB = 3.6 सेमी का एक रेखाखण्ड खींचिए।
2. बिन्दु B पर परकार की सहायता से $\angle ABX = 60^o$ का कोण बनाइए।
3. $\overrightarrow{BX}$ पर बिन्दु B से 4 सेमी त्रिज्या का चाप काटिए। जहाँ ये चाप कटता है उसे C से नामांकित कीजिए।



चित्र 11.18

4. बिन्दु C पर परकार की सहायता से $\angle BCY = 90^o$ का कोण बनाइए।
5. बिन्दु C से 4.5 सेमी का चाप लेकर CY पर काटिए, जहाँ ये चाप कटता है उसे D से नामांकित कीजिए।
6. D को A से मिलाइए।
   इस प्रकार ABCD अभीष्ट चतुर्भुज प्राप्त हुआ।

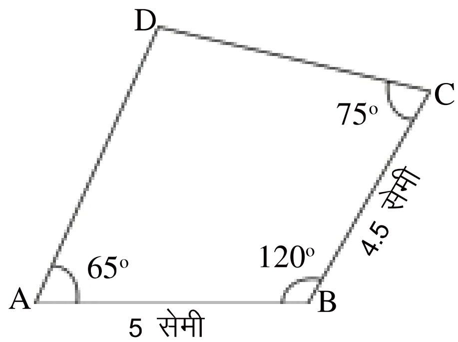
प्रश्नावली11.4

1. एक चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए, जिसमें AB = 4.5 सेमी, BC = 3.5 सेमी, AD = 5 सेमी, $\angle A = 60^o$ और $\angle B = 110^o$ हो। भुजा CD को नापिये।
2. चतुर्भुज PQRS की रचना कीजिए, जिसमें PQ = 3.5 सेमी, QR = 2.5 सेमी, RS = 4.1 सेमी, $\angle Q = 75^o$ और $\angle R = 120^o$ हो, भुजा PS को नापिये।
3. एक चतुर्भुज EFGH की रचना कीजिए जिसमें EF = 3 सेमी, HE = 5 सेमी, FG = 7 सेमी, $\angle E = 90^o$ और $\angle H = 120^o$ हो, भुजा GH को नापिए।

V. चतुर्भुज की रचना जबकि इसकी संलग्न दो भुजाएँ व तीन कोण दिये हों

उदाहरण 8. चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसमें AB = 5 सेमी, BC = 4.5 सेमी, $\angle A = 65^o$, $\angle B = 120^o$ और $\angle C = 75^o$

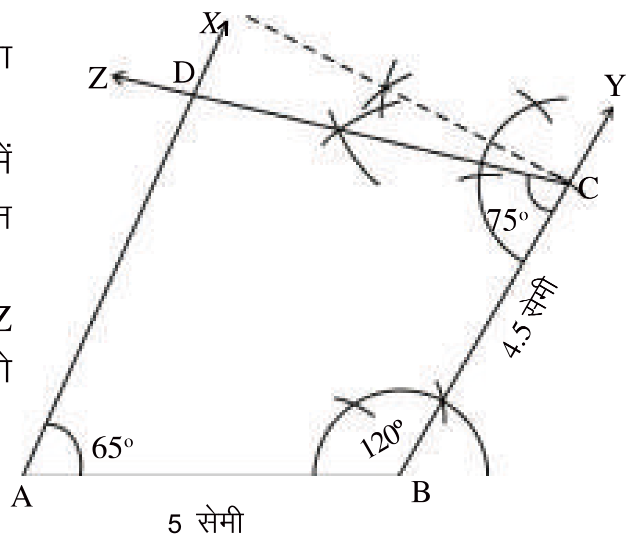
हल: प्रश्न में दी गई नाप के अनुसार कच्चा चित्र बनाइये। इस पर भुजाएँ व कोण, दी गई जानकारी के अनुसार लिखिए।



चित्र 11.19 कच्चा चित्र

रचना के पद

1. सर्वप्रथम रेखाखण्ड $\overline{AB} = 5$ सेमी बनाते हैं।
2. बिन्दु A पर चाँदें की सहायता से $\angle BAX = 65^o$ बनाते हैं।
3. बिन्दु B पर परकार अथवा चाँदा की सहायता से $\angle ABY = 120^o$ बनाते हैं।
4. बिन्दु B को केन्द्र मानकर किरण $\overrightarrow{BY}$ में 4.5 सेमी त्रिज्या का चाप काटते हैं। कटान बिन्दु C प्राप्त हुआ।
5. बिन्दु C पर परकार की सहायता से $\angle BCZ = 75^o$ बनाते हुये किरण CZ खींचते हैं जो किरण AX को बिन्दु D पर काटती है।



चित्र 12.20

इस प्रकार प्राप्त चतुर्भुज ABCD वांछित चतुर्भुज है।

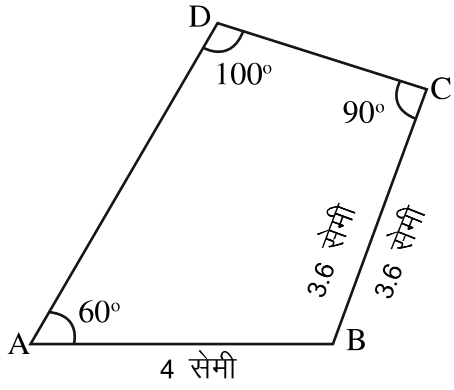
उदाहरण 9. चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसमें AB = 4 सेमी, BC = 3.6 सेमी, $\angle A = 60^\circ$, $\angle C = 90^\circ$ और $\angle D = 100^\circ$

हल: सर्वप्रथम कच्चा चित्र बनाकर प्रश्न में दिए गए नाप को सम्बन्धित भुजा व कोण पर लिखिए।

कच्चा चित्र से स्पष्ट है कि जब तक हमें $\angle B$ का मान ज्ञात न हो, केवल दो संलग्न भुजाओं से ही चतुर्भुज ABCD की रचना असंभव है।

हम जानते है कि चतुर्भुज के चारों कोणों का योग 360° होता है।

अतः चौथा कोण $\angle B = 360^\circ - (60^\circ + 100^\circ + 90^\circ)$
$= 360^\circ - 250^\circ$
$= 110^\circ$

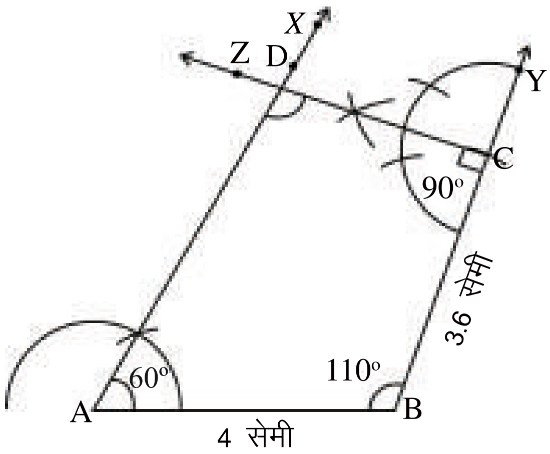


चित्र 11.21

रचना के पद

1. सर्वप्रथम रेखाखण्ड AB = 4 सेमी बनाते हैं।
2. बिन्दु A पर परकार की सहायता से $\angle BAX = 60^\circ$ बनाते हैं।
3. बिन्दु B पर $\angle ABY = 110^\circ$ बनाते हैं।
4. बिन्दु B को केन्द्र मानकर $\overrightarrow{BY}$ में 3.6 सेमी त्रिज्या का चाप काटते हैं और कटान बिन्दु C प्राप्त करते हैं।
5. बिन्दु C पर परकार की सहायता से $\angle BCZ = 90^\circ$ बनाते हुये किरण $\overrightarrow{CZ}$ खींचते हैं जो किरण $\overrightarrow{AX}$ को बिन्दु D पर काटती है।

इस प्रकार प्राप्त चतुर्भुज ABCD ही वांछित चतुर्भुज है।



चित्र 11.22

हमने विभिन्न स्थितियों में चतुर्भुज की रचना करना सीखा, जिसमें चतुर्भुज की पाँच मापें दीं गईं थीं। यदि चतुर्भुज की एक भुजा व चार कोण दिए जायें (इसमें भी चतुर्भुज के पाँच अवयव दिये हैं)। तो क्या ऐसी स्थिति में भी एक चतुर्भुज की रचना की जा सकती है? बनाने का प्रयास कीजिए।

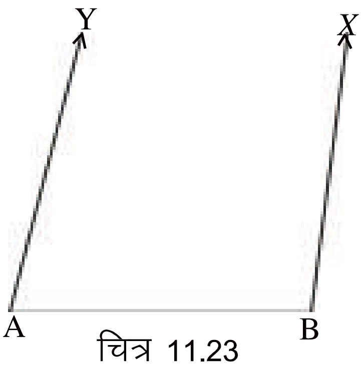
हमीदा ने दी गई भुजा के समान माप का रेखाखण्ड खींचा तथा रेखाखण्ड के दोनों सिरों पर दिए गए माप के बराबर कोण बनाये। इस प्रकार उसे चतुर्भुज की आधार वाली भुजा तथा आधार के साथ बनने वाली दो भुजाएं (रेखाखण्ड) प्राप्त हुईं। अब हमीदा के पास प्रश्न यह था कि

वह चौथी भुजा बनाने के लिए कोण किस बिन्दु पर बनाए?

क्या आप बता सकते हैं कि किरण BX के किस बिन्दु पर $\angle C$ बनेगा? या किरण $\overrightarrow{AY}$ के किस बिन्दु पर $\angle D$ बनेगा?

सोचिए और अपने शिक्षक तथा साथियों से चर्चा कीजिए।

आपने चर्चा एवं क्रियाकलाप से यह पाया होगा कि किरण $\overrightarrow{BX}$ के किसी भी बिन्दु पर यदि $\angle C$ बनाया जाए या किरण $\overrightarrow{AY}$ के किसी भी बिन्दु पर $\angle D$ बनाया जाए तो चतुर्भुज बनता है। इस प्रकार अनेक चतुर्भुज बन सकते है परन्तु एक अद्वितीय नहीं।



चित्र 11.23

प्रश्नावली 11.5

1. एक चतुर्भुज ABCD बनाइये जिसमें AB = 3.5 सेमी, BC = 4 सेमी, $\angle A = 105^\circ$, $\angle B = 90^\circ$ एवं $\angle C = 75^\circ$ हो।
2. चतुर्भुज PQRS की रचना कीजिए, जिसमें PQ = 4.5 सेमी, QR = 5 सेमी, $\angle P = 100^\circ$, $\angle R = 75^\circ$ और $\angle S = 110^\circ$ हो।
3. चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए, जिसमें AB = 6 सेमी, BC = 3.5 सेमी, $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 110^\circ$ और $\angle D = 90^\circ$ हो, भुजा CD को नापिये।

VI. विशेष प्रकार के चतुर्भुज की रचना

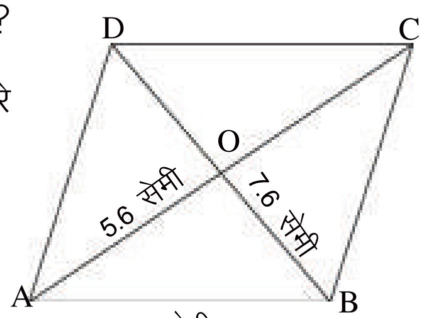
A- <u>समान्तर चतुर्भुज की रचना जब एक भुजा व दोनों विकर्ण दिये हों</u>

उदाहरण 10. समान्तर चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसमें AB = 5 सेमी, AC = 5.6 सेमी तथा BD = 7.6 सेमी।

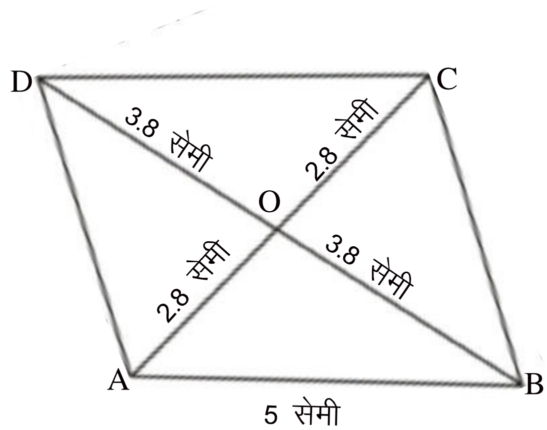
हल : प्रश्न को ध्यान में रखकर कच्चा चित्र बनाइए और दी गई भुजाओं के नाप उनके साथ लिखिए।

क्या आप इस समान्तर चतुर्भुज का निर्माण कर सकते हैं?

हम जानते है कि समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं। अर्थात् $OA ? OC = \frac{5{\cdot}6}{2} = 2{\cdot}8$ सेमी तथा $OB = OD = \frac{7.6}{2} = 3.8$ सेमी



चित्र 11.24



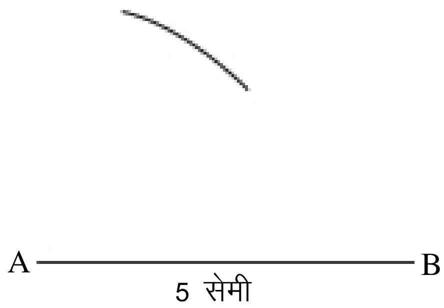
चित्र 11.25 कच्चा चित्र

रचना:

1. सर्वप्रथम AB = 5 सेमी का एक रेखाखण्ड खींचिए।

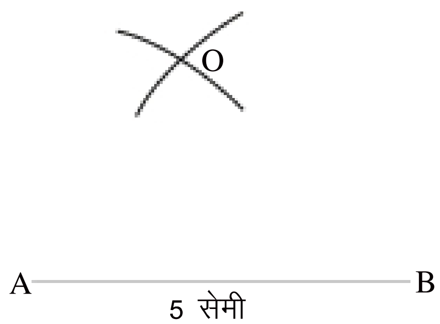
चित्र 11.26 (i)

2. बिन्दु A से 2.8 सेमी त्रिज्या का चाप काटिए।



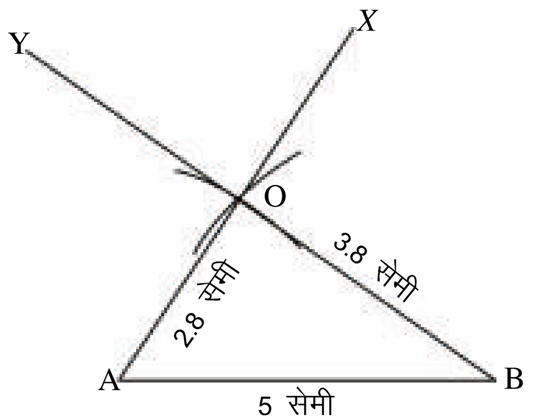
चित्र 11.26 (ii)

3. अब B बिन्दु से 3.8 सेमी त्रिज्या का चाप, चरण 2 में काटे गये चाप पर काटिए। जहाँ ये दोनों चाप कटते हैं वह O बिन्दु होगा।



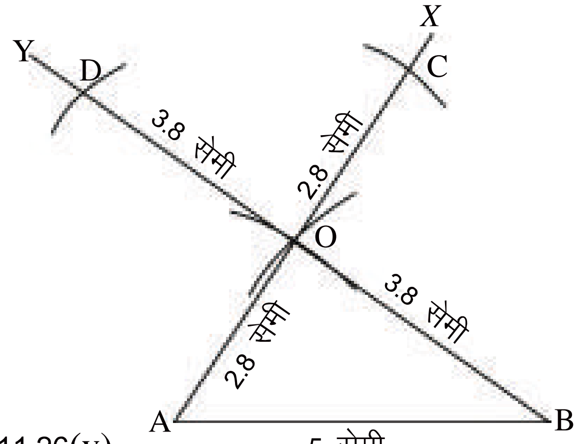
चित्र 11.26(iii)

4. बिन्दु A तथा बिन्दु B को O से मिलाते हुए क्रमशः X व Y तक बढ़ाइए।



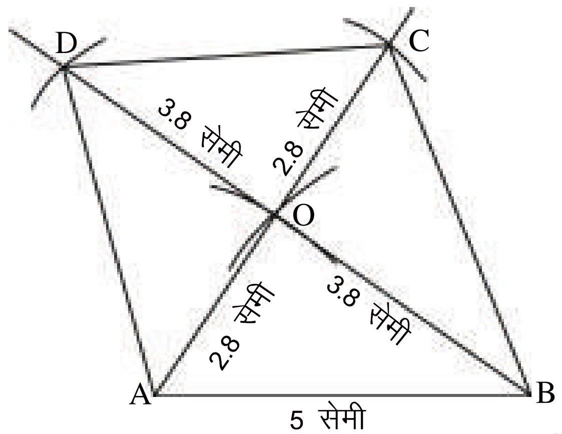
चित्र 11.26(iv)

5. बिन्दु O से $\overrightarrow{OX}$ तथा $\overrightarrow{OY}$ पर क्रमशः 2.8 सेमी तथा 3.8 सेमी त्रिज्या के चाप काटिए। चापों के कटान बिन्दु को क्रमशः बिन्दु C व बिन्दु D से नामांकित कीजिए।



चित्र 11.26(v)

6. बिन्दु C को बिन्दु B से, बिन्दु D को बिन्दु A से और बिन्दु C को बिन्दु D से मिलाइए।



9WM1T5

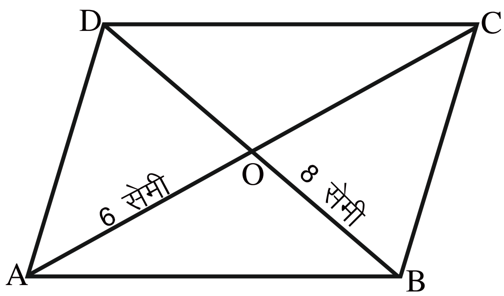
चित्र 11.26(vii) अभीष्ट चतुर्भुज

इस प्रकार अभीष्ट समान्तर चतुर्भुज ABCD प्राप्त हुआ।

B. समचतुर्भुज की रचना कीजिए जबकि उसके दोनों विकर्ण दिए हों

उदाहरण 11. समचतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसके विकर्ण AC = 6 सेमी तथा BD = 8 सेमी हों।

हल : सर्वप्रथम प्रश्न को ध्यान में रखकर एक कच्चा चित्र ABCD बनाइए।



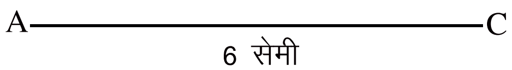
चित्र 11.27 कच्चा चित्र

क्या आप बता सकते है कि इस समचतुर्भुज को कैसे बनाएंगे।

हमने चतुर्भुज के गुण में पढ़ा है कि समचतुर्भुज के विकर्ण आपस में समकोण पर समद्विभाजित करते हैं। इस आधार पर हम यहाँ सम चतुर्भुज की रचना करेंगे।

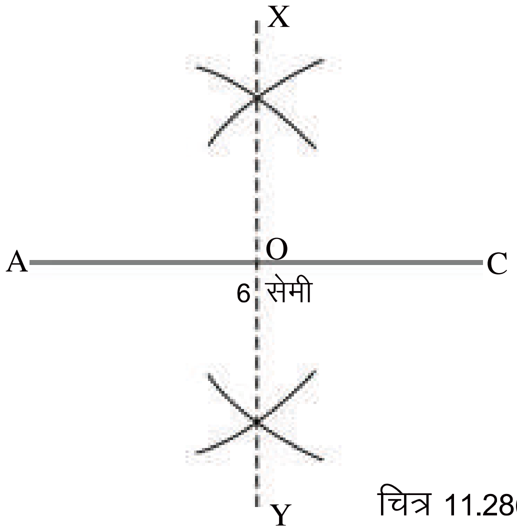
रचना :

1. सर्वप्रथम $AC = 6$ सेमी का रेखाखण्ड खींचिए।



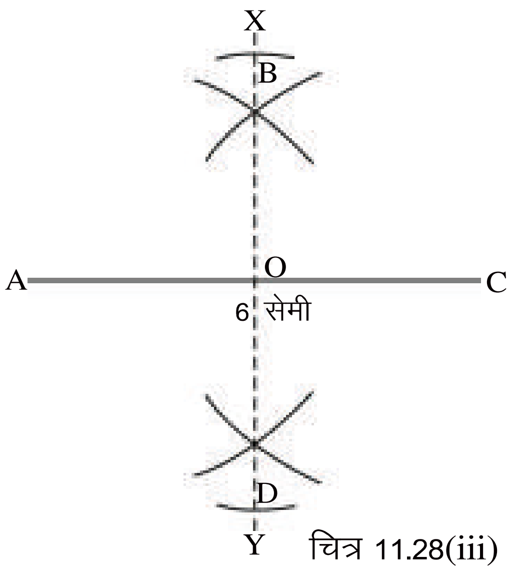
चित्र 11.28(i)

2. रेखाखण्ड़ AC का समद्विभाजन कीजिए। AC की समद्विभाजक रेखा XY इसे O पर काटती है। यह बिन्दु O विकर्णों का समद्विभाजक बिन्दु है।



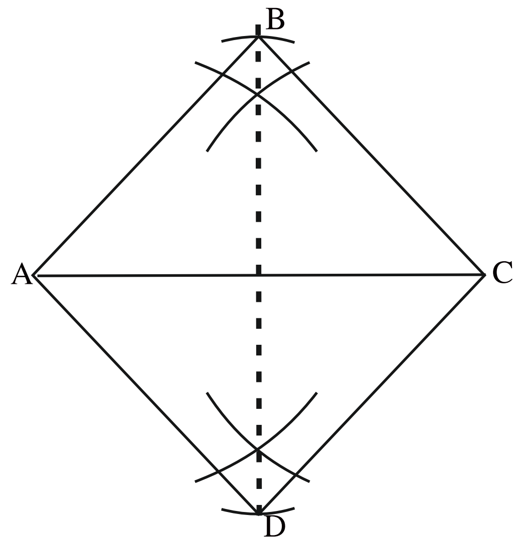
चित्र 11.28(ii)

3. बिन्दु O से $OD = OB = \frac{8}{2} = 4$ सेमी त्रिज्या का चाप ऊपर व नीचे दोनों तरफ काटिए। तथा ऊपर एवं नीचे क्रमशः B एवं D से नामांकित कीजिए



चित्र 11.28(iii)

4. बिन्दु B व बिन्दु D को बिन्दु A व बिन्दु C दोनों से मिलाइए।



चित्र 11.28(iv)

इस प्रकार अभीष्ट समचतुर्भुज ABCD प्राप्त हुआ।

प्रश्नावली 11.6

1. एक वर्ग ABCD की रचना कीजिए जिसका विकर्ण AC = 7 सेमी हो।
2. समान्तर चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसमें AB = 4 सेमी, विकर्ण AC = 6.2 सेमी तथा विकर्ण BD = 8.4 सेमी हो।
3. समचतुर्भुज EFGH की रचना कीजिए जिसमें विकर्ण EG = 7 सेमी, विकर्ण FH = 8.4 सेमी हो।
4. वर्ग PQRS की रचना कीजिए जिसमें विकर्ण PR = 5 सेमी हो।

हमने सीखा

1. एक विशिष्ट चतुर्भुज की रचना के लिए चतुर्भुज के कम से कम पाँच अवयवों की माप ज्ञात होना आवश्यक है, जिनमें अधिकतम तीन कोण हों।
2. चतुर्भुज की रचना के पूर्व कच्चा रेखाचित्र बनाकर अवयवों की मापों को अंकित कर देना उपयोगी रहता है।
3. किसी अद्वितीय चतुर्भुज की रचना की जा सकती है यदि चतुर्भुज की :

   (i) चार भुजाएँ व एक विकर्ण दिया हो।

(ii) तीन भुजाएँ व दो विकर्ण दिये हों।

(iii) चार भुजाएँ व एक कोण दिया हो।

(iv) तीन भुजाएँ व दो अंतर्गत कोण दिये हों।

(v) दो आसन्न भुजाएं व तीन कोण दिये हों।

4. यदि चतुर्भुज की एक भुजा व चार कोण दिये हों तो एक अद्वितीय चतुर्भुज की रचना नहीं की जा सकती।

5. चतुर्भुज की रचना तभी संभव है यदि उसकी माप निम्न शर्त को संतुष्ट करे :

(i) चतुर्भुज की किन्हीं तीन भुजाओं का योग चौथी भुजा से अधिक हो।

(ii) चतुर्भुज के चारों कोणों का योग 360° हो।