अध्याय 2

आँकड़ों का एकत्रीकरण एवं विश्लेषण

(Collection of Data and Analysis)

परिचय

पूर्व निर्धारित उद्‌देश्य की पूर्ति हेतु सुव्यवस्थित ढ़ंग से संग्रह कर गणितीय रूप में प्रदर्शित संख्याओं को हम आँकड़े कहते हैं। आँकड़ों के व्यवस्थित संकलन, वर्गीकरण एवं विश्लेषण के माध्यम से किसी भी विषय का अध्ययन करना एक नवीन वृत्ति बन चुका है। सांख्यिकीय आँकड़ों के विश्लेषण के माध्यम से किया गया अध्ययन वैज्ञानिक भी होता है और यथार्थ के निकट भी। इसी कारण वर्तमान में अधिकांश विज्ञान व मानविकी विषयों में सांख्यिकीय विश्लेषण की प्रवृत्ति बढ़ी है। भूगोल विषय भी इससे अछूता नहीं रहा है। बीसवीं सदी के पूर्वार्द्ध से ही भूगोल में मात्रात्मक क्रान्ति आयी परिणामत, गुणात्मक के साथ–साथ मात्रात्मक भूगोल का भी तीव्र विकास हुआ। प्रस्तुत अध्याय में हम आँकड़ों के प्रकार, स्त्रोत, संग्रहण व विश्लेषण का अध्ययन करेंगे।

आँकड़ों के प्रकार एवं स्त्रोत

आँकड़ों को उनकी प्राप्ति एवं स्त्रोत के आधार पर (अ) प्राथमिक एवं (ब) द्वितीयक वर्गों में विभाजित किया जाता है।

(अ) प्राथमिक आँकड़े – ऐसे आँकड़े जो अनुसंधानकर्ता व्यक्ति/संस्था द्वारा प्रथम बार संग्रहीत किये जाते हैं, प्राथमिक आँकड़े कहलाते हैं। ऐसे आँकड़े जो पहले से प्रकाशित अथवा अप्रकाशित रूप में विद्यमान नहीं होते अपितु सर्वेक्षण के विभिन्न माध्यमों द्वारा पहली बार प्राप्त किये जाते हैं, प्राथमिक आँकड़े कहलाते हैं। ये आँकड़े व्यक्तिगत प्रेक्षण, साक्षात्कार, प्रश्नावली के माध्यम से प्राप्त किये जाते हैं। प्राथमिक आँकड़ों को निम्न विधियों द्वारा प्राप्त करते हैं –

(i) व्यक्तिगत प्रेक्षण – संग्रहकर्त्ता के द्वारा स्वयं क्षेत्र में भ्रमण करके तथ्यों की जानकारी प्राप्त की जाती है। इस प्रकार के प्रेक्षण मुख्यतया उच्चावच, मिट्टियाँ, प्राकृतिक वनस्पति, भूगर्भीय संरचना तथा सांस्कृतिक स्वरूप यथा अधिवास जैसे तथ्यों के लिये किये जाते हैं। व्यक्तिगत प्रेक्षण के द्वारा व्यावहारिक जानकारी प्राप्त होती है।

(ii) गहन साक्षात्कार – इस विधि के अन्तर्गत अनुसंधानकर्ता, सूचनादाता से व्यक्तिगत सम्पर्क स्थापित कर वार्तालाप के द्वारा किसी भी विषय से सम्बन्धित जानकारी/आँकड़े प्राप्त करता है। इस विधि में प्रश्नावली का प्रयोग नहीं होता। बात में से बात निकालते हुये गहन तथ्य प्राप्त किये जाते हैं।

(iii) प्रश्नावली – इस विधि में अध्ययनकर्ता शोध विषय से सम्बन्धित एक प्रश्नावली तैयार कर प्रश्नावली के माध्यम से आँकड़ों का संग्रह करता है। प्रश्नावली के साथ व्यक्तिगत सम्पर्क से भी और डाक द्वारा भी सूचनादाता से सम्पर्क कर जानकारी प्राप्त की जा सकती है।

(ब) द्वितीयक आँकड़े – ऐसे आँकड़े जिनका संग्रहण अनुसंधानकर्ता या संस्था स्वयं न करके प्रकाशित या अप्रकाशित स्त्रोत यथा सरकारी, गैर–सरकारी प्रशासन, निजी प्रशासन, पत्र–पत्रिकाओं, निजी अभिलेख के माध्यम से प्राप्त करता है, द्वितीयक आँकड़े कहलाते हैं। द्वितीयक आँकड़े प्रकाशित या अप्रकाशित स्त्रोत से प्राप्त होते हैं। प्रकाशित स्त्रोत में अन्तर्राष्ट्रीय, सरकारी, अर्द्धसरकारी निजी प्रकाशन आते हैं जबकि अप्रकाशित स्त्रोत में विभिन्न सरकारी व निजी अभिलेख आते हैं वे निम्न है–

(i) प्रकाशित स्त्रोत – इसके अन्तर्गत अन्तर्राष्ट्रीय, राष्ट्रीय अथवा स्थानीय स्तर पर प्रकाशित होने वाले सांख्यिकीय प्रतिवेदन, सांख्यिकीय सारांश एवं पुस्तकें आते हैं।

(क) अन्तर्राष्ट्रीय प्रकाशन – संयुक्त राष्ट्र संघ के तत्वावधान में कार्यरत विभिन्न संस्थाएँ जैसे खाद्य एवं कृषि संगठन (FAO), अंतर्राष्ट्रीय श्रम कार्यालय (ILO), विश्व

स्वास्थ्य संगठन (WHO), अंतर्राष्ट्रीय मुद्रा कोष (IMF), संयुक्त राष्ट्र संघ जनसंख्या गतिविधि (UNFPA), विभिन्न देशों से प्राप्त आँकड़ों को समय–समय पर प्रकाशित करती है। दी यू.एन. स्टेटिस्टीकल इयर बुक' (The U.N. Statistical Year Book) इसी का एक उदाहरण है।

(ख) राष्ट्रीय प्रकाशन – केन्द्र व राज्य सरकारों के विभिन्न विभागों द्वारा प्रकाशित प्रतिवेदन, बुलेटिन इसके अन्तर्गत आते हैं। भारत की जनगणना से सम्बन्धित प्रकाशन, आर्थिक प्रगति को दर्शाने वाले आर्थिक सर्वेक्षण, आर्थिक समीक्षा आदि इसके उदाहरण हैं।

(ग) स्थानीय प्रकाशन – महानगरों के नगर निगम, नगरों की नगर परिषद्, नगर पालिकाओं, जिला परिषद् एवं इसी प्रकार के अन्य स्थानीय निकायों द्वारा प्रकाशित प्रतिवेदन, बुलेटिन इसके अन्तर्गत आते हैं।

(घ) निजी प्रकाशन – अनुसंधानकर्त्ता / संस्थाएँ अनेक बार अपने द्वारा एकत्रित प्राथमिक आँकड़ों को शोध प्रबन्ध / पुस्तक / शोधपत्र के रूप में प्रकाशित कर देते हैं, यहीं आँकड़ें अन्य अनुसंधानकर्ताओं द्वारा उपयोग करने पर द्वितीयक आँकड़े कहलाते हैं।

(ii) अप्रकाशित स्त्रोत – अप्रकाशित स्त्रोतों के अन्तर्गत सरकारी व निजी अभिलेख, अप्रकाशित शोध प्रबन्ध आते हैं।

(क) सरकारी अभिलेख : केन्द्र व राज्य सरकारों के विभिन्न विभागों द्वारा प्रकाशित आँकड़े अभिलेख के रूप में भी उपलब्ध होते हैं।

(ख) निजी अभिलेख – विभिन्न कम्पनियों, व्यापार संघों एवं व्यापारियों के निजी उपयोग के लेखे इसके अन्तर्गत आते हैं।

सांख्यिकीय विधियाँ

सांख्यिकी शब्द का प्रयोग दो अर्थों में होता है, एक सांख्यिकी आंकड़ें जिन्हें समंक भी कहते हैं तथा सांख्यिकी विज्ञान।

आंकड़ें अनेक प्रकार के हो सकते हैं जैसे भूमि उपयोग के आंकड़े, किसी फसल या वस्तु के उत्पादन, उपभोग, वितरण एवं आयात–निर्यात के आंकड़े, जनसंख्या के आंकड़े, जलवायु सम्बन्धी आंकड़े, राष्ट्रीय आय व बजट से सम्बन्धित आंकड़े आदि–आदि। वास्तव में किसी एक तथ्य से सम्बन्धित संख्या आंकड़े नहीं कहलाती है, क्योंकि आंकड़े कहलाने वाले अंक किसी एक तथ्य से सम्बन्धित न होकर बहुत से तथ्यों से सम्बन्धित होते हैं तथा वे परस्पर तुलना के योग्य होते हैं। सांख्यिकीय विज्ञान में आंकड़ों के संकलन, वर्गीकरण, प्रस्तुतीकरण, तुलना, विश्लेषण एवं व्याख्या से सम्बन्धित सांख्यिकीय विधियों का अध्ययन किया जाता है। इस अध्याय में आंकड़ों का संकलन, वर्गीकरण एवं विश्लेषण से सम्बन्धित कुछ महत्वपूर्ण सांख्यिकीय विधियों का वर्णन आगे किया गया है।

सांख्यिकीय श्रेणीयाँ

आँकड़ों के व्यवस्थित क्रम को ही सांख्यिकीय श्रेणी या समंकमाला कहा जाता है। दिये गये आंकड़ों की तुलना करने या सांख्यिकीय विश्लेषण के द्वारा उनसे कोई निष्कर्ष प्राप्त करने के लिये समंकमाला बनाना आवश्यक होता है इन्हें सांख्यिकीय श्रेणियाँ भी कहते हैं इन श्रेणियों को निम्नानुसार विभाजित जाता है –

(1) गुण धर्म के अनुसार

(i) काल श्रेणी – समय के आधार पर आँकड़ों का व्यवस्थित क्रम काल श्रेणी कहलाता है।

(ii) स्थानिक श्रेणी – भौगोलिक अवस्थिति के आधार पर व्यवस्थित आँकड़ों की श्रेणी स्थानिक श्रेणी कहलाती है।

(iii) परिस्थिति श्रेणी – आँकड़ों की श्रेणी का निर्माण परिस्थिति के अनुसार हो तो ऐसी श्रेणी परिस्थिति श्रेणी कहलाती है। जैसे– आयु, व्यवसाय के अनुसार जनसंख्या।

(2) रचना विधि के अनुसार

(i) व्यक्तिगत श्रेणी – प्रत्येक इकाई से प्राप्त तथ्यों को उसी रूप में प्रदर्शित किया जाता है तो ऐसी श्रेणी व्यक्तिगत श्रेणी कहलाती है। इसमें प्रत्येक इकाई को व्यक्तिगत मूल्य दिया जाता है। उदाहरणार्थ कक्षा के प्रत्येक विद्यार्थी द्वारा प्राप्त प्राप्तांक, विभिन्न गाँवों का क्षेत्रफल।

(ii) खण्डित श्रेणी – खण्डित श्रेणी में मूल्य विभिन्न खण्डों में प्रस्तुत किये जाते हैं अर्थात् यदि किन्हीं आँकड़ों में पुनरावृत्ति हो रही है तो बार–बार लिखने के स्थान पर

एक ही बार लिख दिया जाता है, साथ ही समंक जितनी बार आता है उसे आवृत्ति के रूप में लिख दिया जाता है इसे ही खण्डित श्रेणी कहते हैं। उदाहरणार्थ एक कक्षा में 7 अंक लाने वाले 12 विद्यार्थी हैं तो मूल रूप में 7 एवं आवृत्ति के रूप में 12 लिख दिया जाता है।

(iii) सतत (अखण्डित) श्रेणी – विभिन्न पदों के चर मूल्यों में एक निरन्तरता मिले, ऐसी श्रेणी को सतत श्रेणी कहा जाता है, इन चर मूल्यों को वर्गों में रखते हैं। वर्ग में सम्मिलित इकाईयों की संख्या को आवृत्ति के रूप में लिख देते हैं। उदाहरण के लिये

प्राप्तांक	विद्यार्थी
30–60	12
60–90	6

यहाँ प्राप्तांक वर्ग है और विद्यार्थियों की संख्या आवृत्ति

(iv) केन्द्रीय प्रवृति की माप – समंक माला (आँकड़ों की श्रेणी) की केन्द्रीय प्रवृत्ति को दर्शाने वाला मूल्य माध्य कहलाता है। यह मूल्य उस श्रेणी का प्रतिनिधित्व करता है। समानतर माध्य, मध्यका, बहुलक (भूयिष्ठक) इसके उदाहरण हैं।

बहुलक या भूयिष्ठक **(Mode)**

बहुलक किसी श्रेणी का वह मूल्य होता है जो समंकमाला में सबसे अधिक बार आता हो अर्थात् जिसकी आवृत्ति सबसे अधिक हो एवं जहाँ आवृत्तियों का सर्वाधिक जमाव हो। इस प्रकार बहुलक समंकमाला का सर्वाधिक सामान्य मूल्य होता है। यदि सांख्यिकीय श्रेणी में केवल एक बहुलक हो तो उसे एकल–बहुलक (Uni Mode) श्रेणी, 2 बहुलक होने पर द्विबहुलक (Bio Mode) श्रेणी एवं 2 से अधिक होने पर बहु–बहुलक (Multi-Mode) श्रेणी कहलायेगी। सांख्यिकी विज्ञान में इसे 'Z' अक्षर से व्यक्त करते हैं।

बहुलक का निर्धारण

(1) व्यक्तिगत श्रेणी में बहुलक का निर्धारण– व्यक्तिगत श्रेणी में बहुलक निम्न विधियों द्वारा निकाला जाता है–

(i) निरीक्षण द्वारा बहुलक का निर्धारण– बहुलक ज्ञात करने के लिए इस विधि में मूल्यों को आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर जो मूल्य सबसे अधिक बार आयेगा, वहीं बहुलक कहलायेगा।

उदाहरण : निम्न पद मूल्यों से बहुलक ज्ञात कीजिए–

4, 6, 5, 8, 5, 4, 5, 6, 7, 2, 3, 8, 5, 7, 5, 2, 4, 5, 6, 9

बहुलक ज्ञात करने के लिए पद मूल्यों को एक क्रम में इस प्रकार रखा जाता है–

2, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 9

पद मूल्यों को एक क्रम से जमाने के बाद निरीक्षण से ज्ञात होता है कि 5 अंक सबसे अधिक बार आया है, अतः इन पद मूल्यों का बहुलक 5 होगा।

(ii) खण्डित श्रेणी में बदलकर – जब व्यक्तिगत श्रेणी में मूल्यों की संख्या अधिक हो तो उन्हें आरोही क्रम में रखकर उनकी आवृत्ति उनके सामने लिख दी जाती है। उसके बाद जिस मूल्य की आवृत्ति सबसे अधिक है उनका मूल्य बहुलक कहलाता है।

उदाहरण– निम्न आँकड़ों की सहायता से बहुलक ज्ञात कीजिए

पद मूल्य	2	3	4	5	6	7	8
आवृत्ति	2	2	3	6	3	2	2

निरीक्षण से स्पष्ट है कि सबसे अधिक आवृत्ति 6 बार हुई है जिसका पद–मूल्य 5 है, अतः यहाँ पद मूल्य 5 बहुलक होगा।

(2) खण्डित श्रेणी में बहुलक का निर्धारण –

(i) निरीक्षण विधि – यह रीति तब अपनाई जाती है जब खण्डित श्रेणी की आवृत्तियाँ नियमित हो, अर्थात् श्रेणी के आरम्भ से आवृत्तियाँ निरन्तर बढ़ती रहे, केन्द्र में अधिकतम तथा उसके बाद पुनः आवृत्तियाँ निरन्तर घटने लगे। ऐसी श्रेणी का मूल्य निरीक्षण द्वारा ज्ञात हो जाता है।

(ii) समूहन विधि – जब आवृत्तियों का क्रम अनियमित हो अथवा अधिकतम आवृत्तियाँ हो तो समूहन रीति का प्रयोग किया जाता है। इस विधि में आवृत्तियों के विभिन्न समूह बना लिये जाते हैं। तत्पश्चात् विश्लेषण सारणी बनाकर ज्ञात किया जाता है। समूहन के लिए 6 कालम की एक सारणी बनाई जाती है–

कॉलम 1 में उदाहरण में दी गई आवृत्तियों को यथावत् लिखा जाता है।

कॉलम 2 में आरम्भ से दो–दो आवृत्तियों के जोड़ लिखे जाते हैं।

कॉलम 3 में कॉलम 1 की सबसे पहली आवृत्ति को छोड़कर, दो–दो आवृत्तियों के जोड़ लिखे जाते हैं।

कॉलम 4 में कॉलम 1 की तीन–तीन आवृत्तियों के जोड़े लिखे जाते हैं।

कॉलम 5 में कॉलम 1 की प्रथम आवृत्ति को छोड़कर आगे की तीन–तीन आवृत्तियों के जोड़ लिखे जाते हैं।

कॉलम 6 में कॉलम 1 की प्रथम दो आवृत्तियों को छोड़कर तीन–तीन आवृत्तियों के जोड़ लिखे जाते हैं।

उदाहरण– निम्न आँकड़ों की सहायता से समूहन विधि द्वारा बहुलक का निर्धारण कीजिए।

समूहन द्वारा बहुलक निर्धारण

वर्षा (सेमी. में)	आवृत्ति (f)						अधिकतम आवृत्तियों की संख्या	
	दिनों की संख्या (i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)	टेली	संख्या
22	1						--	&
23	2	3		10			--	&
24	7		9				I	1
25	9	16			18		III	3
26	11		20	28		27	~~IIII~~ I	6
27	8	19			24		III	3
28	5		13			17	I	1
29	4	9					--	&

आवृत्ति छः (6) सर्वाधिक है जिसका पद मूल्य 26 है। अतः बहुलक 26 सेमी. वर्षा होगा। ध्यान रहे कि बहुलक की गणना चाहे किसी भी रीति से की जाए उत्तर सदैव समान ही होगा।

(3) अखण्डित या सतत् श्रेणी से बहुलक का निर्धारण – अखण्डित श्रेणी में बहुलक ज्ञात करने के लिए पहले निरीक्षण या समूहन रीति द्वारा बहुलक वर्ग निश्चित कर लिया जाता है। तत्पश्चात् बहुलक का मूल्य निर्धारित करने के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है–

सूत्र – $$Z = L_1 + \frac{f_1 - f_\theta}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i$$

इस सूत्र में प्रयुक्त विभिन्न चिन्हों का अर्थ इस प्रकार है–

Z संकेत = बहुलक का मूल्य

L_1 संकेत = बहुलक वर्ग की निम्न सीमा

i संकेत = बहुलक वर्ग का वर्ग अन्तराल

f_1 संकेत = बहुलक वर्ग की आवृत्ति

f_0 संकेत = बहुलक वर्ग के ठीक पहले आने वाली आवृत्ति

f_2 संकेत = बहुलक वर्ग के ठीक बाद आने वाली आवृत्ति

उदाहरण : निम्न आँकड़ों की सहायता से बहुलक परिकलित कीजिये।

निरीक्षण से स्पष्ट है कि सबसे अधिक आवृत्ति 21 है, अतः बहुलक वर्ग 30–40 हुआ।

प्राप्तांक	विद्यार्थी संख्या
10–20	9
20–30	13
30–40	21
40–50	20
50–60	15
60–70	8

$$Z = L_1 + \frac{f_1 - f_\theta}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i$$

$$Z = 30 + \frac{21-13}{2\times(21-13-20)} \times 10$$

$$Z = 30 + \frac{80}{9}$$

$$Z = 38.89$$

समूहन विधि द्वारा बहुलक निर्धारण

उदाहरण : निम्न सारणी में बहुलक ज्ञात कीजिये।

केन्द्रीय आकार	15	25	35	45	55	65	75	85
आवृत्तियाँ	5	9	13	21	20	15	8	3

हलः जब वर्ग–अन्तरालों के स्थान पर मध्य मूल्य दिये हो तो उनके अन्तर (10) को आधार करके (10 ⁄ 2) मध्य मूल्य में एक बार घटाते (15–5) तथा एक बार जोड़ते (15+5) है जिससे निम्न व ऊपरी सीमा प्राप्त हो जाती है।

वर्गान्तर कालर माप सेमी.	दो–दो के जोड़े			तीन–तीन के जोड़े			अधिकतम आवृत्ति वाले वर्ग	
	(i) (f)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)	मिलान रेखाएँ	मिलान रेखाओं का योग
0 - 10	5	14						
10 - 20	9		22	27			I	1
20 - 30	13 f_0	34			43		II	2
30 - 40	21 f_1		41	56		54	$\cancel{IIII}$	5
40 - 50	20 f_2	35			43		$\cancel{IIII}$	5
50 - 60	15		23			26	III	3
60 - 70	8	11					I	1
70 - 80	3							

उपर्युक्त सारणी से यह ज्ञात होता है कि (30–40) तथा (40–50) दोनों वर्गों में अधिकतम मिलान रेखाएँ 5–5 आती है, अतः इन दोनों में से बहुलक–वर्ग छाँटने के लिए निम्न घनत्व परीक्षण का प्रयोग किया जायेगा।

वर्गान्तर	30–40	40–50
बहुलक वर्ग की आवृत्ति (f_1)	21	20
उससे पहले वर्ग की आवृत्ति (f_0)	13	21
उसके बाद वाले वर्ग की आवृत्ति (f_2)	20	15
योग	**54**	**56**

चूंकि 40–50 वर्गान्तर का योग सर्वाधिक है, अतः इसी वर्गान्तर को वास्तविक बहुलक वर्गान्तर माना जायेगा।

$$Z = L_1 + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i$$

$$= 40 + \frac{20 - 21}{(2 \times 20) - 21 - 15} \times 10$$

$$= 40 + \frac{-1}{40 - 36} \times 10$$

$$= 40 + \left(\frac{-1}{4}\right) \times 10$$

$$= 40 + (-2.5)$$

$Z = 37.5$ कालर माप (सेमी में)

किन्तु 37.5, (40–50) वाले वर्ग के बाहर है अतः यह सही बहुलक नहीं है। अतः बहुलक मूल्य ज्ञात करने के लिए वैकल्पिक सूत्र (Alternative formula) का प्रयोग किया जायेगा।

$$Z = L_1 + \frac{f_2}{f_0 - f_2} \times i$$

$$= 40 + \frac{15}{21 + 15} \times 10$$

$$= 40 + \frac{15}{36} \times 10$$

$$= 40 + 4.166$$

$Z = 44.166$ कालरमाप (सेमी.)

मध्यका (Median)

किसी समंक श्रेणी को आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित करने के पश्चात् जो मूल्य श्रेणी के मध्य स्थित होता है, उसे श्रेणी का मध्यका मूल्य (Median value) कहते हैं। सांख्यिकी विज्ञान में इसे 'M' अक्षर से व्यक्त करते हैं। जैसे– एक कक्षा के 13 छात्रों को कद के अनुसार खड़ा किया जाये तो सातवें छात्र का कद मध्यका कहलायेगी।

मध्यका का निर्धारण : विभिन्न समंक मालाओं से मध्यका निकालने की विधियाँ इस प्रकार है–

(1) व्यक्तिगत श्रेणी में मध्यका की गणना – व्यक्तिगत श्रेणी में मध्यका की गणना के लिए निम्न प्रक्रिया अपनाई जाती है–

(i) मूल्यों को आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित कीजिये।

(ii) मूल्यों को क्रम संख्या प्रदान कीजिये।

(iii) व्यक्तिगत श्रेणी में मध्यका ज्ञात करने के लिए सूत्र का प्रयोग

$$M = \left(\frac{N+1}{2}\right)^{th} \text{item or } \quad \mathrm{M} = \text{size of} \left(\frac{\mathrm{N}+1}{2}\right)$$

वें पद का मान

इसमें, M = मध्यका मूल्य तथा N = पदों की संख्या

उदाहरण : निम्नांकित आँकड़ों से मध्यका मूल्य ज्ञात कीजिये – 25, 27, 33, 29, 25, 24, 23

(i) आरोही क्रम में निम्न प्रकार से इन मूल्यों का विन्यास किया जायेगा– 23, 24, 25, 25, 27, 29, 33

(ii) मूल्यों को क्रम संख्या प्रदान कीजिये–

हल : सूत्र के अनुसार –

क्रम संख्या	1	2	3	4	5	6	7	
आयु (वर्षो में)	23	24	25	25	27	29	33	N = 7

$$M = \left(\frac{N+1}{2}\right) \text{ वां पद} \quad = \left(\frac{7+1}{2}\right) \text{ वां पद} = \frac{8}{2} \quad M = 4 \text{ वां पद}$$

4 वें पद का मूल्य 25 है, अतः मध्यका 25 वर्ष आयु होगी।

उदाहरण : निम्न आँकड़ों की सहायता से मध्यका ज्ञात कीजिये– 10, 12, 24, 42, 29, 13, 18, 54, 48, 18

आरोही क्रम में रखने पर – 10, 12, 13, 18, 18, 24, 29, 42, 48, 54

हल : सूत्र के अनुसार

$$\text{मध्यका} = \left(\frac{N+1}{2}\right) \text{ वां पद} = \frac{\text{पांचवें पद का मूल्य + छठे पद का मूल्य}}{2}$$

$$= \left(\frac{10+1}{2}\right) \text{ वां पद} = \frac{18+24}{2}$$

$$5.5 \text{ वां पद} \qquad = 21 \text{ वर्ष}$$

(2) खण्डित श्रेणी में मध्यका का निर्धारण : खण्डित श्रेणी में मध्यका ज्ञात करने के लिए निम्न प्रक्रिया अपनाई जाती है–

(i) मूल्यों को आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित करें।

(ii) आरोही या अवरोही श्रेणी से संचयी आवृत्ति (Cf) ज्ञात करें।

(iii) निम्नांकित सूत्र का प्रयोग करें–

$$\mathrm{M} = \text{size of} \left(\frac{\mathrm{N}+1}{2}\right)^{th \text{ item}}$$

$$or\ \ M = \left(\frac{N+1}{2}\right)^{\text{वें पद}} \text{ का आकार}$$

(iv) मध्यका की क्रम संख्या का मूल्य संचयी आवृत्ति की सहायता से ज्ञात कर लिया जाता है। जिस संचयी आवृत्ति में यह क्रम संख्या प्रथम बार सम्मिलित होती है, उसका मूल्य ही मध्यका मूल्य होता है।

उदाहरण : निम्न समंकश्रेणी में मध्यका मूल्य (Median) ज्ञात कीजिये।

प्राप्तांक	28	30	32	34	36	38	40
विद्यार्थियों की संख्या	3	7	12	28	10	8	6

प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या (f)	संचयी आवृत्ति (cf)
28	3	3
30	7	10
32	12	22.
34	28	50
36	10	60
38	9	69
40	6	75
	$\sum f = 75$	

$$M = \left(\frac{N+1}{2}\right)^{\text{वें पद}} \text{ का आकार}$$

$$M = \left(\frac{75+1}{2}\right)^{\text{वें पद}} \text{ का आकार}$$

M = 38 वें पद का आकार

M = 34

3) सतत् श्रेणी में मध्यका का निर्धारण – अविच्छिन्न समंकमाला में मध्यका का मूल्य निकालने के लिए निम्न प्रक्रिया अपनाई जाती है–

(i) सर्वप्रथम, संचयी आवृत्तियाँ ज्ञात की जाती है।

(ii) निम्न सूत्र द्वारा केन्द्रीय पद ज्ञात किया जाता है।

$$M = \text{size of} \left(\frac{N}{2}\right)^{\text{th item}} \quad \text{or}$$

$$\text{मध्यका} = \left(\frac{N}{2}\right) \text{वें पद का आकार}$$

उपर्युक्त m के मान को cf में देखकर मध्यका वर्ग (Median class) का निर्धारण करते हैं। इसके पश्चात् निम्न सूत्र का प्रयोग कर मध्यका का निर्धारण किया जाएगा–

$$M = L_1 + \frac{i}{f}(m-c))$$

इसमें–

M मध्यका का मूल्य

L1 मध्यका वर्ग की निम्न सीमा

i मध्यका वर्ग का वर्ग–अन्तराल

f मध्यका वर्ग की आवृत्ति

m मध्यका संख्या

c मध्यका वर्ग से ठीक पूर्व वाले संचयी आवृत्ति

उदाहरण : विद्यार्थियों के निम्नलिखित प्राप्तांकों की सहायता से मध्यका (Median) ज्ञात कीजिये।

प्राप्तांक (x)	विद्यार्थियों की संख्या (f)	संचयी आवृत्ति (c.f.)
10–20	15	15
20–30	33	48
30–40	63	111 **C**
40–50	83 **f**	194
50–60	100	294
	$\sum f = 294$	

हल :

$$m = \left(\frac{N}{2}\right)^{\text{th item}}$$

$$m = \frac{294}{2} = 147^{\text{th item}}$$

147वां पद संचयी आवृत्ति 194

147वां पद संचयी आवृत्ति 194 में प्रथम बार सम्मिलित हुआ है, जिसका वर्गान्तर 40–50 मध्यका वर्ग है, मध्यका मूल्य निश्चित करने के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग होगा–

$$M = L_1 + \frac{i}{f}(m-c)$$

$$= 40 + \frac{10}{83}(147-111)$$

$$= 40 + \frac{10}{83}(36)$$

$$= 40 + 4.34$$

$$M = 44.34 \text{ अंक}$$

प्राप्तांकों की मध्य का मूल्य 44.37 अंक है।

समान्तर माध्य (**Arithmatic Mean**)

गणितीय माध्यों में सबसे अधिक महत्वपूर्ण और लोकप्रिय समान्तर माध्य है। समान्तर माध्य वह मूल्य है जो उस श्रेणी के सभी मूल्यों के योग को उनकी संख्या से भाग देने से प्राप्त होता है। सांख्यिकी विज्ञान में इसे X अक्षर से व्यक्त करते हैं। उदाहरण के रूप में 10 विद्यार्थियों के प्राप्तांक 25, 15, 20, 40, 30, 20, 15, 20, 30, 25 है तो उनका योग 240 होता है, उसमें 10 का भाग देने से प्राप्त मान 24 समान्तर माध्य कहलाता है।

समान्तर माध्य की विशेषताएं

(i) समान्तर माध्य कुल पदों के मूल्यों के योग में पदों की संख्या का भाग देकर प्राप्त किया जाता है।

(ii) इसमें समस्त पद मूल्यों को समान महत्व दिया जाता है।

(iii) इसमें पदों की आवृत्ति की तुलना में पद मूल्यों को अधिक महत्वपूर्ण समझा जाता है।

(iv) समान्तर माध्य ज्ञात करने के लिए प्रत्येक पद की गणना केवल एक बार ही की जाती है।

(v) समान्तर माध्य तथा पदों की संख्या ज्ञात होने पर दोनों के गुणा करने से कुल पदों का योग किया जा सकता है।

समान्तर माध्य का परिकलन : समान्तर माध्य ज्ञात करने की निम्न विधियाँ हैं–

(i) प्रत्यक्ष रीति द्वारा

(ii) लघु रीति द्वारा

(1) व्यक्तिगत श्रेणी में समान्तर माध्य की गणना : व्यक्तिगत श्रेणी में दो विधियों द्वारा समान्तर माध्य निकाला जाता है–

(i) प्रत्यक्ष रीति द्वारा : समंकमाला के समस्त पदों के मूल्यों को जोड़कर पदों की कुल संख्या से भाग देने पर प्राप्त मान समान्तर माध्य कहलाता है। इसके लिए निम्न सूत्र हैं–

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 \ldots\ldots + X_n}{N}$$

$$\overline{X} = \frac{\Sigma X}{N}$$

इसमें

$\overline{X}$ = समान्तर माध्य

X = योग

N = इकाईयों की संख्या

उदाहरण : 10 वर्षा केन्द्रों से दर्ज वर्षा की मात्रा से समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

$$\text{सूत्र– } \overline{X} = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{1730}{10}$$

$$\overline{X} = 173 \text{ सेमी वर्षा}$$

क्र.सं.	वर्षा (सेमी में)
1	165
2	163
3	178
4	172
5	174
6	176
7	190
8	175
9	167
10	170
N = 10	$\sum x = 1730$

(ii) लघु रीति : सर्वप्रथम समंक श्रेणी में से किसी एक पदमूल्य को कल्पित माध्य (लघु रीति से समान्तर माध्य ज्ञात करने के लिए निम्न प्रक्रिया अपनाई जाती है) माना जाता है।

(क) किसी श्रेणी के आँकड़ों को देखकर कल्पना से माध्य मान लेना कल्पित माध्य कहलाता है।

(ख) प्रत्येक व्यक्तिगत मूल्य (x) में से कल्पित माध्य (A) घटाकर विचलन ज्ञात कर लेना चाहिये। ($dx = X - A$)

(ग) विचलनों का योग निकाल लेना चाहिये ($\sum dx$)

(घ) अन्त में निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है–

$$\overline{X} = A + \left[\frac{\sum dx}{N}\right]$$

इसमें– X = समान्तर माध्य

A = कल्पित माध्य

$\sum$ = योग

dx = व्यक्तिगत मूल्य से विचलन

N = पदों की संख्या

i = अन्तराल

उदाहरण : उपरोक्त उदाहरण में लघु रीति द्वारा समान्तर माध्य ज्ञात कीजिये।

वर्षा स्टेशन	X (वर्षा सेमी में)	dx
A	165	- 5
B	163	- 7
C	178	+ 18
D	172	+ 02
E	174	+ 04
F	176	+ 06
G	190	+ 20
H	175	+5
I	167	- 3
J	170	0
N = 7		$(\sum dx) = +45 - 15 = 30$

हल

$A = 170$

$$\overline{X} = A + \left[\frac{\sum dx}{N}\right]$$

$$= 170 + \frac{30}{10}$$

$$= 170 + 3$$

$\overline{X} = 173$ सेमी वर्षा

(2) खण्डित श्रेणी में समान्तर माध्य की गणना :

(i) प्रत्यक्ष रीति : प्रत्यक्ष रीति द्वारा खण्डित श्रेणी में समान्तर माध्य ज्ञात करने के लिए निम्न प्रक्रिया की जाती है–

(ii) सर्वप्रथम पद मूल्य (x) को आवृत्ति (f) से गुणा करते हैं। (fx)

(iii) सभी पदों के गुणनफल (fx) का योग करते हैं। ($\sum fx$)

(iv) गुणनफल के योग ($\sum fx$) में आवृत्तियों के योग (N) का भाग देते हैं। $\frac{\sum fx}{N}$

(v) इसके लिए निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है–

सूत्र– $\overline{X} = \left(\frac{\sum fx}{N} \right)$

इसमें,

X = समान्तर माध्य

N = आवृत्तियों का योग

$\sum$fx = पद मूल्यों और आवृत्तियों के गुणनफलों का योग

उदाहरण : निम्नलिखित सारणी की सहायता से समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

प्राप्तांक	8	9	10	11	12	13	14
छात्र	4	5	9	20	18	8	6

हल

प्राप्तांक (x)	छात्र (f)	मूल्यों व आवृत्तियों का गुणनफल (fx)
8	4	32
9	5	45
10	9	90
11	20	220
12	18	216
13	8	104
14	6	84

$\overline{X} = \left(\frac{\sum fx}{N} \right)$

$\overline{X} = \frac{791}{70}$

$\overline{X} = 11.3$ अंक होगा।

(ii) लघु रीति : खण्डित श्रेणी में लघु रीति द्वारा समान्तर माध्य ज्ञात करने के लिए निम्न प्रक्रिया की जाती है–

(क) पद मूल्यों में से किसी एक को कल्पित माध्य (A) मान लेते हैं।

(ख) पदमूल्यों में से कल्पित माध्य घटाकर विचलन ज्ञात करते हैं। (X-A) = dx

(ग) प्रत्येक विचलन (dx) को सम्बन्धित आवृत्ति (f) से गुणा करते हैं ($\sum$fdx)।

(घ) गुणनफलों का योग ($\sum$fdx) कर लेते हैं।

(य) अन्त में निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है।

$$X = A + \frac{\sum fdx}{N}$$

उदाहरण : निम्नलिखित आँकड़ों की सहायता से समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

प्राप्तांक	8	9	10	11	12	13	14
छात्र	4	5	9	20	18	8	6

हल

प्राप्तांक (x)	छात्रों की संख्या (f)	A = 22 dx (X-A)	fdx
8	4	-3	-12
9	5	-2	-10
10	9	-1	-9
11	20	0	0
12	18	1	18
13	8	2	16
14	6	3	18

$X = A + \frac{\sum fdx}{N}$

$X = 11 + \frac{21}{70}$

$X = 11.3$ अंक होगा।

(3) सतत् श्रेणी में समान्तर माध्य की गणना : मध्य–मूल्य (x) को आवृत्तियों (f) से गुणा (fx) कर योग किया जाता है ($\sum fx$)

गुणनफलों के योग ($\sum fx$) में आवृत्तियों के योग (N) का भाग देते हैं।

इसके लिए निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है–

$$X = \frac{\sum fx}{N}$$

उदाहरण : निम्न आँकड़ों की सहायता से समान्तर माध्य ज्ञात कीजिये।

जल की गहराई (मीटर)	5–15	15–25	25–35	35–45	45–55
कुओं की संख्या	5	9	15	10	6

हल :

जल की गहराई (मीटर में)	कुओं की संख्या (f)	मध्य मूल्य (x)	(fx)
5–15	5	10	50
15–25	9	20	180
25–35	15	30	450
35–45	10	40	400
45–55	6	50	300
	N = 45		**$\sum$fx = 1380**

$$X = \frac{\sum fx}{N}$$

$$X = \frac{1380}{45}$$

$X = 30.67$ मीटर

जल की गहराई का समान्तर माध्य 30.67 मीटर है।

(ii) लघु रीति :

(क) सर्वप्रथम वर्गान्तरों से मध्य मूल्य (x) निश्चित कर लिए जाते हैं।

(ख) मध्य मूल्यों में से किसी एक मूल्य को कल्पित माध्य (A) मान लेते हैं।

(ग) पद मूल्यों में से कल्पित माध्य (A) को घटाकर विचलन (dx) ज्ञात किया जाता है (X-A=dx)।

(घ) घटाने से प्राप्त विचलन को (dx) आवृत्ति (f) से गुणा (fdx) करके गुणनफलों का योग ($\sum$fdx) ज्ञात करते हैं।

(य) अन्त में निम्न सूत्र का प्रयोग करते हैं–

सूत्र – $$\overline{X} = A + \left[\frac{\sum fdx}{N}\right]$$

उदाहरण : निम्न आँकड़ों के समान्तर माध्य की गणना कीजिए।

दैनिक मजदूरी (रु.)	3–5	6–8	9–11	12–14	15–17	18–20	21–23	24–26
श्रमिकों की संख्या	2	6	8	11	10	4	3	1

हल :

दैनिक मजदूरी (रूपयों में)	श्रमिकों की संख्या (f)	मध्य मूल्य (x)	विचलन dx(X-A) =16	fdx
3–5	2	4	–12	–24
6–8	6	7	–9	–54
9–11	8	10	–6	–48
12–14	11	13	–3	–33
15–17	10	16	0	0
18–20	4	19	+3	+12
21–23	3	22	+6	+18
24–26	1	25	+9	+9
	N = 45			$\sum$fdx= -159+39=-120

$$\overline{X} = A + \left[\frac{\sum fdx}{N}\right]$$

$$= 16 + \left[\frac{-120}{45}\right]$$

$$= 16 + [-2.67]$$

$$= 16 - 2.67$$

$\overline{X} = 13.66$ में दैनिक मजदूरी

सह–सम्बन्ध (Correlation)

सांख्यिकी में सह–सम्बन्ध के अन्तर्गत यह ज्ञात किया जाता है कि दो या दो से अधिक समंक–श्रेणियों के चर–मूल्यों में कोई पारस्परिक सम्बन्ध है अथवा नहीं है और यदि कोई पारस्परिक सम्बंध है तो उसकी दिशा व परिमाण क्या है। यदि दो समंक–श्रेणियों के चर–मूल्य स्वतन्त्र रूप से घटते बढ़ते हैं। यदि एक श्रेणी के चर–मूल्य का परिवर्तन दूसरी श्रेणी के चर–मूल्य को प्रभावित करता है तो वे दोनों समंक–श्रेणियाँ सह–सम्बन्धित कही जाती है।

सह–सम्बन्ध दो प्रकार का होता है– (i) धनात्मक (positive) या प्रत्यक्ष सह–सम्बन्ध तथा (ii) ऋणात्मक (negative), विलोम (inverse) या अप्रत्यक्ष सह–सम्बन्ध। जब एक श्रेणी के चर–मूल्य में वृद्धि होने पर दूसरी श्रेणी के चर–मूल्य में भी वृद्धि होती है अथवा एक कमी आने पर दूसरे में भी कमी आती है तो चर–मूल्यों के इस सह–सम्बन्ध को धनात्मक कहा जायेगा। इसके विपरीत यदि वे चर–मूल्य इस प्रकार सम्बन्धित हैं कि एक चर–मूल्य में वृद्धि होने पर दूसरे चर–मूल्य में कमी होती है या एक चर–मूल्य में कमी होने पर दूसरे में वृद्धि होती है तो वे चर–मूल्य ऋणात्मक सह–सम्बंध वाले माने जायेंगे। धनात्मक व ऋणात्मक सह–सम्बंधों का अन्तर स्पष्ट करने के उद्देश्य से नीचे दो सारणियाँ दी गयी हैं।

धनात्मक सह–सम्बन्ध	
X श्रेणी	Y श्रेणी
40	65
35	60
30	58
25	53
20	50

ऋणात्मक सह–सम्बन्ध	
X श्रेणी	Y श्रेणी
40	50
35	53
30	58
25	60
20	65

सह–सम्बन्ध के परिमाण को सह–सम्बन्ध गुणांक (coefficient of correlation) के द्वारा व्यक्त करते हैं। सह–सम्बन्ध होने पर इसका मान +1 तथा –1 के मध्य कोई भी मूल्य हो सकता है। सह–सम्बन्ध गुणांक का मान +1 होने की स्थिति में पूर्ण धनात्मक सह–सम्बन्ध (perfect positive correlation) तथा –1 होने की दशा में पूर्ण ऋणात्मक सह–सम्बन्ध (perfect negative correlation) माना जाता है।

सह–सम्बन्ध गुणांक के शाब्दिक विवेचन में 'उच्च', 'मध्यम' व 'निम्न' शब्दों का प्रयोग किया जाता है। उच्च स्तरीय धनात्मक सह–सम्बन्ध, मध्यम स्तरीय धनात्मक सह–सम्बन्ध तथा निम्न स्तरीय धनात्मक सह–सम्बन्ध उस दशा में कहे जाते हैं जब

सह–सम्बन्ध गुणांक का मान क्रमशः +0.75 से 1, +0.25 से +0+75 तथा 0 से अधिक व 0.25 से कम होता है। इसी प्रकार सह–सम्बन्ध गुणांक का मान –0.75 से –1, –0. 25 से –0.75 तथा 0 से –0.25 के मध्य होने की दशा में क्रमशः उच्च स्तरीय ऋणात्मक सह–सम्बन्ध, मध्यम स्तरीय ऋणात्मक सह–सम्बन्ध तथा निम्न स्तरीय ऋणात्मक सह–सम्बन्ध शब्दों का प्रयोग करते हैं।

(1) स्पियरमेन की कोटि–अन्तर विधि

(Spearman's rank difference method) स्पियरमेन नामक सांख्यिकी–विद् ने व्यक्तिगत समंक–श्रेणियों के विभिन्न पद–मूल्यों की कोटियों (rank) के आधार पर सह–सम्बन्ध गुणांक ज्ञात करने की एक सरल विधि प्रतिपादित की थी, जिसे उनके नाम पर स्पियरमेन की कोटि–अन्तर विधि कहते हैं। समंक–श्रेणी के विभिन्न पद–मूल्यों को, उनके आकार (size) या मान के अनुसार 1, 2, 3, 4, 5 आदि कोटियाँ प्रदान की जा सकती है। उदाहरणार्थ, यदि किसी समंक–श्रेणी में 10, 8, 3, 7 व 15 कोई पाँच पद–मूल्य हैं तो स्पष्ट है कि इन पद–मूल्यों की कोटियाँ क्रमशः 2, 3, 5, 4 व 1 होगी। स्पियरमेन की विधि के अनुसार निम्न प्रकार कोटि सह–सम्बन्ध गुणांक ज्ञात करते हैं :–

(i) सर्वप्रथम प्रत्येक समंक–श्रेणी के विभिन्न पद–मूल्यों को उनके आकार के अनुसार कोटियाँ (ranks) देते हैं।

(ii) X तथा Y श्रेणियों के तत्सम्बन्धी पद–मूल्यों को कोटियों का अन्तर (D) ज्ञात करते हैं। इसके लिये X श्रेणी की कोटि में तत्सम्बन्धी मूल्य की Y श्रेणी में लिखी कोटि को घटाया जाता है, अर्थात्

D = (X श्रेणी में कोटि – Y श्रेणी में कोटि)

(iii) इस प्रकार प्राप्त कोटि–अन्तर के मानों का वर्ग (D^2) करते हैं तथा इन वर्गों को जोड़कर $\sum D^2$ का मान निकाल लेते हैं।

(iv) निम्नांकित सूत्र की सहायता से स्पियरमैन के कोटि सह–सम्बन्ध गुणांक की गणना की जाती है :

$$p = 1 - \frac{6[\sum D^2]}{N^3 - N}$$

इस सूत्र में ग्रीक वर्णमाला का p (rho) अक्षर कोटि सह–सम्बन्ध गुणांक को, ∑D2 कोटि अन्तर के वर्गों के योग को तथा N पद–युग्मों की संख्या को प्रकट करता है।

निम्नांकित आँकड़ों को कोटि–अन्तर विधि के द्वारा सह–सम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिये –

X श्रेणी	Y श्रेणी
8	84
36	51
98	91
25	60
75	68
82	62
92	86
62	58
65	35
39	49

हल :

कोटि सह–सम्बन्ध की गणना

X श्रेणी		Y श्रेणी		कोटि अन्तर	कोटि–अन्तरों के वर्ग
मूल्य	कोटि	मूल्य	कोटि		
	X		Y	X-Y = D	D^2
8	10	84	3	7	49
36	8	51	8	0	0
98	1	91	1	0	0
25	9	60	6	3	9
75	4	68	4	0	0
82	3	62	5	.2	4
92	2	86	2	0	0
62	6	58	7	.1	1
65	5	35	10	.5	25
39	7	49	9	.2	4
N = 10					$\sum D^2 = 92$

कोटि सह–सम्बन्ध गुणांक अथवा

$$p = 1 - \frac{6[\sum D^2]}{N^3 - N}$$

$$= 1 - \frac{6 \cdot 92}{(10)^3 - 10}$$

$$1 - \frac{552}{1000 - 10}$$

$$1 - \frac{552}{990} = 1 - 0.5576$$

p = +0.442

निम्नांकित सूचना से जनसंख्या के घनत्व एवं मृत्यु–दर में स्पियरमैन की कोटि–अन्तर विधि के द्वारा सह–सम्बन्ध गुणांक की गणना कीजियेः–

प्रदेश	घनत्व (वर्ग किमी)	मृत्यु दर (प्रति हजार)
A	300	22
B	350	26
C	450	25
D	325	23

कोटि सह–सम्बन्ध गुणांक की गणना

प्रदेश	क्षेत्रफल (वर्ग किमी)	X श्रेणी		Y श्रेणी		कोटि–अन्तर	कोटि–अन्तर का वर्ग
		प्रति वर्ग किमी घनत्व	कोटि	प्रति हजार मृत्यु–दर	कोटि		
A	200	200	4	12	4	0	0
B	150	500	2	16	1	1	1
C	120	600	1	15	2	-1	1
D	80	250	3	14	3	0	0
N = 4							$\sum D^2=2$

चूंकि कोटि सह–सम्बन्ध गुणांक अथवा

$$p = 1 - \frac{6[\sum D^2]}{N^3 - N}$$

$$= 1 - \frac{6 \cdot 2}{(4)^3 - 4}$$

$$= 1 - \frac{12}{64 - 4}$$

$$= 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

= +0.80

मानक विचलन (**Standard Deviation**)

केन्द्रीय प्रवृति के माप (माध्य, माध्यिका, बहुलक) से इकाईयों के विचलन को प्रकीर्णन कहा जाता है। प्रकीर्णन के मापन की निम्नलिखित विधियाँ हैं –

– विस्तार

– चतुर्थक विचलन

– माध्य विचलन

– मानक विचलन

– लॉरेंज वक्र

इनमें से सबसे अधिक प्रचलित माप मानक विचलन है। इसे विचलनों के वर्ग के औसत के वर्गमूल के रूप में परिभाषित किया जाता है। इसकी गणना सदैव माध्य से की जाती है। इसे ग्रीक अक्षर σ से प्रदर्शित किया जाता है।

मानक विचलन की गणना अवर्गीकृत श्रेणी में –

(1) सबसे पहले श्रेणी का माध्य ज्ञात किया जाता है।

(2) इसके पश्चात् प्रत्येक मूल्य में से माध्य घटाकर विचलन (d) ज्ञात किये जाते हैं।

(3) विचलनों के वर्ग की गणना करते हैं।

(4) विचलनों के वर्गों को जोड़ लेते हैं।

(5) विचलनों के वर्गों के योग में कुल पदों का भाग देते हैं और इस प्रकार ज्ञात मूल्य का वर्गमूल निकाल लेते हैं। यही मानक विचलन होता है।

सूत्र रूप में

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{N}}$$

यहाँ d = माध्य – प्रत्येक पद मूल्य

N = पदों की संख्या

सतत व खण्डित श्रेणी में मानक विचलन की गणना

सतत व खण्डित श्रेणी में मानक विचलन की गणना हेतु निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है–

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{N}}$$

यहाँ f = आवृत्ति

d = माध्य से पद मूल्य का विचलन

N = आवृत्तियों का योग

उदाहरण – निम्न आँकड़ों से मानक विचलन की गणना कीजिये –

वार्षिक वर्षा (cm)	वर्षों की संख्या
0 – 10	5
10 – 20	14
20 – 30	18
30 – 40	20
40 – 50	18
50 – 60	15
60 – 70	10

वार्षिक वर्षा (सेमी)	मध्य मूल्य	आवृत्ति	आवृत्ति व मध्य मूल्य का गुणन	विचलन	विचलन का वर्ग	आवृत्ति व विचलन के वर्ग का गुणन
वर्गान्तर	X	f	fx	d	d^2	sd^2
0−10	5	5	25	−31.7	1004.89	5024.45
10−20	15	14	210	−21.7	470.89	6592.46
20−30	25	18	450	−11.7	136.89	2464.02
30−40	35	20	700	−1.7	2.89	57.80
40−50	45	18	810	+8.3	68.89	1240.02
50−60	55	15	825	+18.3	334.89	5023.35
60−70	65	10	650	+28.3	800.89	8008.90
		N=100	$\sum fx=3670$			28411-00

समान्तर माध्य या $\overline{X} = \dfrac{3670}{100} = 36.70$

मानक विचलन या $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum fd^2}{N}}$

$$\sigma = \sqrt{\frac{28411}{100}}$$

$\sqrt{284.1}$ सेमी

$= 16.86$ cm

अभ्यास प्रश्न

1. आँकड़ों से क्या आशय हैं?

....

....

....

....

....

2. प्राथमिक आँकड़ें किसे कहते हैं?

....

....

....

....

....

3. प्राथमिक आँकड़ों की प्राप्ति की विधियाँ बताइये?

....

....

....

....

....

4. द्वितीयक आँकड़ों से आप क्या समझते हैं?

....

....

....

....

....

5. द्वितीयक आँकड़ों की प्राप्ति के स्रोत बताइए।

....

....

....

....

....

6. द्वितीयक आँकड़ों के प्रकाशित स्रोत बताइये।

....

....

....

....

....

7. द्वितीयक आँकड़ों के अप्रकाशित स्रोत बताइये।

....

....

....

....

....

8. खण्डित श्रेणी क्या हैं?उदाहरण सहित स्पष्ट कीजिए।

....

....

....

....

....

....

....

9. सतत् श्रेणी किसे कहते हैं?

....

....

....

....

....

....

....

10. निम्नलिखित सारणी से माध्यिका ज्ञात कीजिये।

प्राप्तांक	परीक्षार्थियों की संख्या
0–10	16
10–20	60
20–30	80
30–40	24
40–50	20

हल

....

....

....

....

....

11. निम्नलिखित सारणी में दिये गये मूल्यों के आधार पर समान्तर माध्य ज्ञात करिये।

सिंचित क्षेत्र (हेक्टेयर)	आवृत्ति
5–10	15
10–15	25
15–20	30
20–25	35
25–30	28
30–35	20
35–40	17

हल

12. निम्न समंकों के लिये मानक विचलन ज्ञात कीजिये।

3, 5, 8, 12, 16, 13, 8, 4, 21, 10

हल

13. निम्न आँकड़ों के लिये मानक विचलन ज्ञात कीजिये–

वर्ग	आवृत्ति
10–20	09
20–30	12
30–40	14
40–50	18
50–60	16
60–70	12
70–80	08

14. एक विद्यार्थी के सात प्रश्न पत्रों के प्राप्तांक 42, 48, 53, 62, 67, 70, 76 हैं तो उनका समान्तर माध्य प्रत्यक्ष व अप्रत्यक्ष विधी से ज्ञात कीजिये।

हल

15. निम्न आँकड़ों से माध्यिका ज्ञात कीजिये।

7, 25, 52, 14, 1, 19, 39, 27, 9, 47, 66

हल

प्र.16 निम्न आँकड़ों के लिये बहुलक ज्ञात कीजिये।

प्राप्तांक	विद्यार्थी संख्या
10–20	7
20–30	12
30–40	19
40–50	14
50–60	6

हल ....

प्र.17 निम्न श्रेणियों में स्पियमेन की कोटि अंतर विधी से सह सम्बन्ध ज्ञात करिये।

X श्रेणी	Y श्रेणी
15	80
16	75
17	60
18	40
19	30
20	15

हल ....