02

प्रतिलोम वृत्तीय फलन
(Inverse Circular Functions)

2.01 प्रस्तावना (Introduction)

यदि $\sin\theta = x$ हो तो हम x को θ का ज्या (sine) कहते हैं और θ संख्या x का ज्या प्रतिलोम (Sine inverse) कहलाता है।

इस कथन को गणितीय संकेतन में निम्न प्रकार से लिखा जाता है : $\theta = \sin^{-1} x$ या $\theta = \arcsin x$

$\sin^{-1} x$ को हम 'ज्या व्युत्क्रम (Sine inverse x)' पढ़ते हैं।

2.02 प्रतिलोम वृत्तीय फलन (Inverse circular functions):

हम जानते हैं कि $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ इत्यादि त्रिकोणमितीय वृत्तीय फलन (Trigonometrical circular function) कहलाते हैं, जिनमें से प्रत्येक, θ के प्रत्येक मान के लिए एक निश्चित संख्या के बराबर होता है।

यदि $\sin\theta = x$ तो $\theta = \sin^{-1} x$ होगा।

कोण θ को x के रूप में व्यक्त करने वाला व्यंजक $\sin^{-1} x$ प्रतिलोम वृत्तीय फलन (Inverse circular function) कहलाता है। इसी प्रकार कोण θ को, एक संख्या x के रूप में व्यक्त करने वाले अन्य प्रतिलोम वृत्तीय फलन हैः

$\cos^{-1} x, \tan^{-1} x, \cos^{-1} x$ तथा $\cot^{-1} x$

टिप्पणी:

1. $\sin^{-1} x, \cos^{-1} x$ फलनों में -1 घात नहीं है, इसे केवल प्रतिलोम फलन के संकेत के रूप में प्रयोग किया गया है क्योंकि

$(\sin x)^{-1} = \dfrac{1}{\sin x}$ अतः $\sin^{-1} x \neq (\sin x)^{-1}$

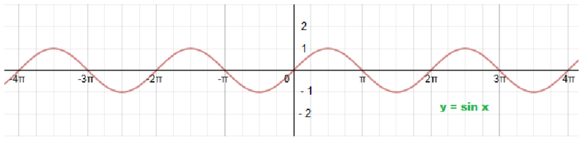
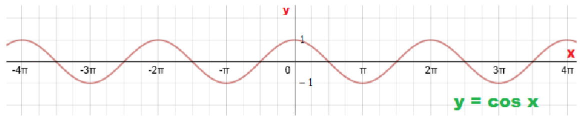
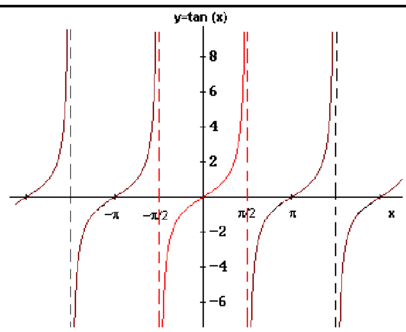
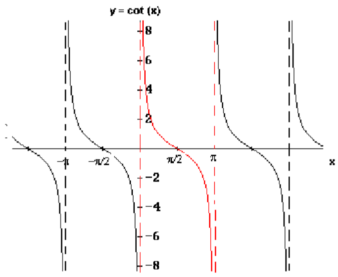
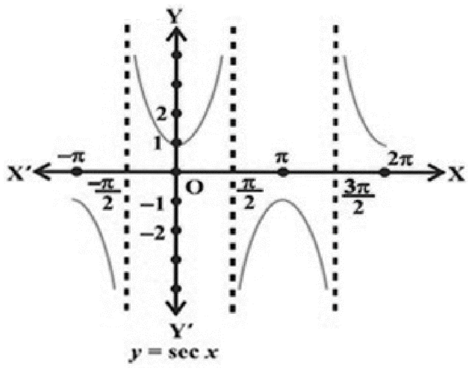
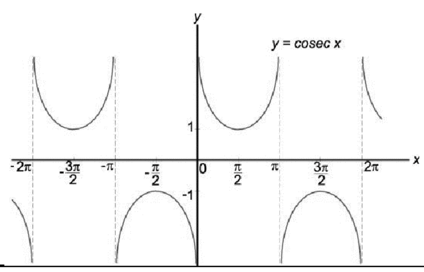
2. $\sin^{-1} x$ एक कोण को व्यक्त करता है। जबकि $\sin\theta$ एक संख्या को, जहाँ θ एक कोण है।

प्रतिलोम वृत्तीय फलनः हम जानते है कि किसी फलन f का प्रतिलोम फलन f^{-1} ज्ञात करने के लिए फलन f ज्ञात करने के लिए फलन f का एकैकी–आच्छादक होना आवश्यक है।

वृत्तीय फलनों के अध्ययन से स्पष्ट है कि ये फलन अपने स्वाभाविक (सामान्य) प्रांत और परिसर में एकैकी तथा आच्छादक नहीं होते हैं। अतः इनके प्रतिलोम सामान्य स्थितियों में ज्ञात करना संभव नहीं होता है, परन्तु इन फलनों के प्रांत को परिसीमित (प्रतिबंधित) करने पर ये फलन एकैकी आच्छादक हो जाते है तथा इन स्थितियों में इनके प्रतिलोम फलन ज्ञात किये जा सकते है।

प्रतिलोम वृत्तीय फलनों को समझने से पूर्व इन फलनों के प्रांत-परिसर को निम्न सारणी के माध्यम से समझा जाना चाहिए।

सारणी 2.1

फलन $y =$	प्रांत	परिसर	वक्र
$\sin x$	$x \in R$ या $\ldots\left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right], \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$ $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]\ldots$	$y \in [-1, 1]$	
$\cos x$	$x \in R$ या $\ldots[-\pi, 0], [0, \pi], [\pi, 2\pi]\ldots$	$y \in [-1, 1]$	
$\tan x$	$x \in R - (2n+1)\frac{\pi}{2}, \;\forall\; n \in Z$ या $\ldots\left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right), \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$ $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)\ldots$ टिप्पणी: $-3\pi/2, -\pi/2, \pi/2, 3\pi/2$ इत्यादि पर फलन परिभाषित नहीं है।	$y \in R$	
$\cot x$	$x \in R - n\pi \;\;\forall\; n \in Z$ या $\ldots(-\pi, 0), (0, \pi), (\pi, 2\pi)\ldots$ टिप्पणी: $-\pi, 0, \pi, 2\pi$ इत्यादि पर फलन परिभाषित नहीं है।	$y \in R$	
$\sec x$	$x \in R - (2n+1)\frac{\pi}{2} \;\;\forall\; n \in Z$ या $\ldots[-\pi, 0] - \{-\pi/2\},$ $[0, \pi] - \{\pi/2\},$ $[\pi, 2\pi] - \{3\pi/2\}$ टिप्पणी: $\ldots -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\ldots$ पर फलन परिभाषित नहीं है।	$y \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ अर्थात् -1 व 1 के मध्य परिसर उपस्थित नहीं है	
cosec$x$	$x \in R - n\pi \;\;\forall\; n \in Z$ $\ldots[-3\pi/2, -\pi/2] - \{-\pi\},$ $[-\pi/2, \pi/2] - \{0\},$ $[\pi/2, 3\pi/2] - \{\pi\},\ldots$ टिप्पणी: $\ldots -\pi, 0, \pi, \ldots$ पर फलन परिभाषित नहीं है।	$y \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ अर्थात् -1 व 1 के मध्य परिसर उपस्थित नहीं है।	

उपर्युक्त सारणी का विश्लेषण करने पर हम देखते है कि

(i) वृत्तीय फलन अपने सम्पूर्ण प्रांत में एकैकी आच्छादक नहीं है।

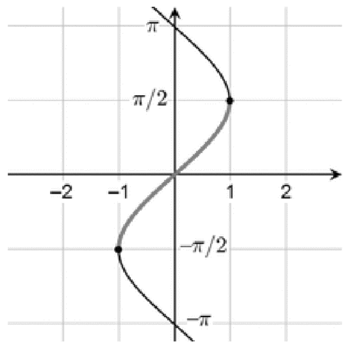
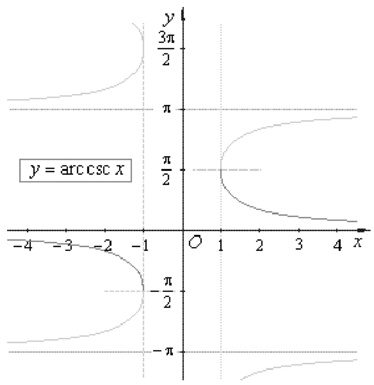
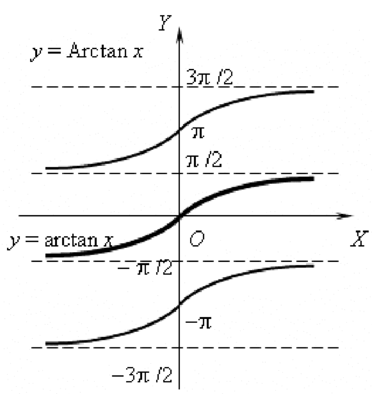
(ii) $\tan, \cot, \sec, \text{cosec}$ फलन अपने प्रांत के कुछ बिन्दुओं पर परिभाषित नहीं है।

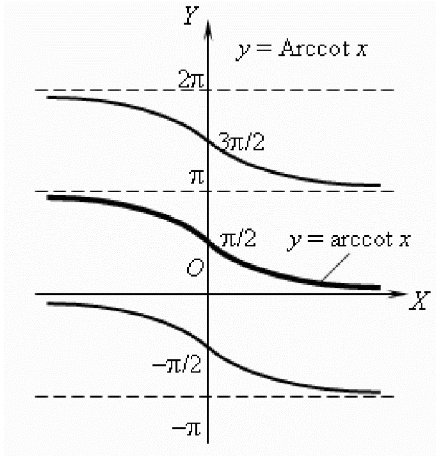
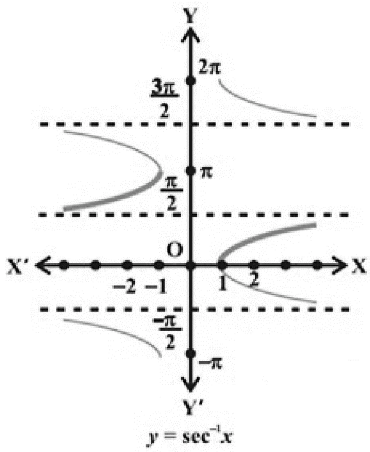
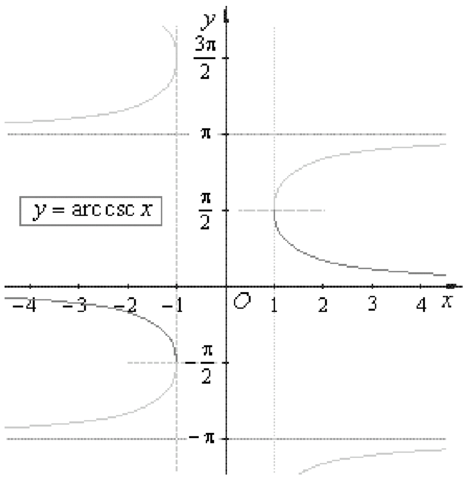
(iii) sine व cosine फलन के परिसर सीमित अंतराल $[-1, \ 1]$ में ही है वहीं sec व cosec फलन के परिसर अन्तराल $(-1, 1)$ के मध्य उपस्थित नहीं है।

अब यदि हमें इन फलनों के प्रतिलोम फलन ज्ञात करने है तो हमें इन फलनों के प्रांतों को परिसीमित कर इन्हें एकैकी आच्छादक बनाना होगा। इस हेतु उपर्युक्त सारणी में सम्पूर्ण प्रांत में या के बाद दिये खण्डों में से किसी एक खण्ड का चयन कर प्रांत को परिसीमित करने पर फलन स्वतः एकैकी आच्छादक हो जाते है तत्पश्चात् इनके प्रतिलोम फलन ज्ञात किये जा सकते है।

इन प्रतिबंधित स्थितियों के प्राप्त प्रतिलोम वृत्तीय फलनों के प्रांत एवं परिसर निम्न सारणी में दर्शाये गये है। साथ ही प्रत्येक परिसर खण्ड के लिए हमें प्रतिलोम फलन की एक शाखा प्राप्त होती है। इन शाखाओं में से ही एक मुख्य शाखा होती है जिसके परिसर तथा आकृति को गहरे काले रंग से दर्शाया गया है।

सारणी 2.2

फलन $y =$	प्रांत	परिसर (इनमें से कोई खण्ड)	वक्र
$\sin^{-1} x$	$x = [-1, 1]$	$\ldots\left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right]$; $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$; $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], \ldots$	
$\cos^{-1} x$	$x \in [-1, 1]$	$\ldots[-\pi, 0]$; $[0, \pi]$; $[\pi, 2\pi], \ldots$	
$\tan^{-1} x$	$x \in R$	$\ldots\left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$; $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$; $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right), \ldots$ टिप्पणी: $\ldots -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$ इत्यादि पर फलन परिभाषित नहीं है।	

$\cot^{-1} x$	$x \in R$	$\ldots(-\pi, 0)$; $(0, \pi)$; $(\pi, 2\pi), \ldots$ टिप्पणी: $\ldots -\pi, 0, \pi, 2\pi \ldots$ इत्यादि पर फलन परिभाषित नहीं है।	
$\sec^{-1} x$	$x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	$\ldots[-\pi, 0]-\{-\pi/2\}$; $[0, \pi]-\{\pi/2\}$, $[\pi, 2\pi]-\{3\pi/2\}, \ldots$ टिप्पणी: $\ldots -\pi/2, \pi/2, 3\pi/2, \ldots$ इत्यादि पर फलन परिभाषित नहीं है।	
$\text{cosec}^{-1} x$	$x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	$\ldots[-3\pi/2, -\pi/2]-\{-\pi\}$; $[-\pi/2, \pi/2]-\{0\}$; $[\pi/2, 3\pi/2]-\{\pi\}, \ldots$ टिप्पणी: $\ldots -\pi, 0, \pi, \ldots$ इत्यादि पर फलन परिभाषित नहीं है।	

टिप्पणी: $y = f(x)$ जैसे व्युत्क्रमणीय फलन का प्रतिलोम फलन $x = f^{-1}(y)$ प्राप्त होता है। अर्थात् मूल फलन के आलेख में X तथा Y-अक्षों का परस्पर विनिमय करके प्रतिलोम फलन का आलेख प्राप्त होता है। यही नियम प्रतिलोम वृत्तीय फलनों के आलेख प्राप्त करने में लागू होता है।

(i) जब कभी प्रतिलोम वृत्तीय फलनों की किसी शाखा विशेष का उल्लेख न हो, तो हमारा तात्पर्य उस फलन की मुख्य शाखा से होता है।

(ii) किसी प्रतिलोम वृत्तीय फलन का वह मान, जो उसकी मुख्य शाखा में स्थित होता है प्रतिलोम वृत्तीय फलन का मुख्य मान (Principal value) कहलाता है। इस हेतु सारणी 2.3 देखें।

व्यापक मान (General values):

हम जानते हैं कि $\sin\theta = \sin\left\{n\pi + (-1)^n \theta\right\}$, जहाँ $n \in Z$ पूर्णांक संख्याओं का समुच्चय है।

अब यदि $\sin^{-1} x = \theta$ हो, तो $\sin^{-1} x$ का व्यापक मान $n\pi + (-1)^n \sin^{-1} x$ होता है तथा इसे $\mathrm{Sin}^{-1}x$ से निरूपित किया जाता है। अतः $\mathrm{Sin}^{-1}x = n\pi + (-1)^n \sin^{-1} x,\ n \in Z$

इसी प्रकार $\mathrm{Cos}^{-1}x = 2n\pi \pm \cos^{-1} x,\ n \in Z$

$\mathrm{Tan}^{-1}x = n\pi + \tan^{-1} x$ इत्यादि

जहाँ $\mathrm{Cos}^{-1}x, \mathrm{Tan}^{-1}x$ से हमारा तात्पर्य $\cos^{-1} x, \tan^{-1} x$ के व्यापक मान से है। इसी प्रकार $\mathrm{Sec}^{-1}x, \mathrm{Cosec}^{-1}x, \mathrm{Cot}^{-1}x$ से हमारा तात्पर्य $\sec^{-1} x, \mathrm{cosec}^{-1}x, \cot^{-1} x$ के व्यापक मान से होगा।

मुख्य मान (Principal value):

प्रतिलोम वृत्तीय फलन (Inverse circular function) का मुख्य मान θ का वह छोटे से छोटा धनात्मक या ऋणात्मक मान है जो समीकरण $\sin\theta = x, \cos\theta = x$ इत्यादि को सन्तुष्ट करता है। उदाहरणार्थ $\sin^{-1}\frac{1}{2} = 30^\circ, \sin^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ मुख्य मान को हम संकेतन में छोटे अक्षर $\sin^{-1} x, \cos^{-1} x, \tan^{-1} x$ इत्यादि से व्यक्त करते हैं।

प्रतिलोम वृत्तीय फलनों के मुख्य मानों के अन्तराल निम्न है :

सारणी 2.3

फलन	मुख्य मान	प्रान्त
$y = \sin^{-1} x$	$-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$	$-1 \le x \le 1$
$y = \cos^{-1} x$	$0 \le y \le \pi$	$-1 \le x \le 1$
$y = \tan^{-1} x$	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$	$-\infty < x < \infty$
$y = \sec^{-1} x$	$0 < y \le \pi, y \ne \frac{\pi}{2}$	$(-\infty < x \le -1) \cup (1 \le x < \infty)$
$y = \mathrm{cos}ec^{-1}x$	$-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}, y \ne 0$	$(-\infty < x \le -1) \cup (1 \le x < \infty)$
$y = \cot^{-1} x$	$0 < y < \pi$	$-\infty < x < \infty$

टिप्पणी:(i) यदि $x > 0$ है तब सभी प्रतिलोम वृत्तीय फलनों के मुख्य मान प्रथम चतुर्थांश $[0, \pi/2]$ में स्थित है।

(ii) यदि $x < 0$ है तब $\sin^{-1} x, \tan^{-1} x$ तथा $\mathrm{cos}ec^{-1}x$ के मुख्य मान चतुर्थ चतुर्थांश $[-\pi/2, 0]$ में स्थित है, जब कि $\cot^{-1} x, \sec^{-1} x$ के मुख्य मान द्वितीय चतुर्थांश $[\pi/2, \pi]$ में स्थित होते हैं।

2.03 प्रतिलोम वृत्तीय फलनों के मध्य सम्बन्ध (Relation between inverse circular functions)

मान लो $\theta = \sin^{-1} x$ तो $\sin\theta = x$ तब $\cos\theta = \sqrt{1-x^2}$ $\quad (\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$

$$\theta = \cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$$

इसी प्रकार

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \Rightarrow \theta = \cot^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \theta = \sec^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{x} \Rightarrow \theta = \operatorname{cosec}^{-1}\frac{1}{x}$$

$$\therefore \quad \sin^{-1}x = \cos^{-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right) = \sec^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \operatorname{cosec}^{-1}\frac{1}{x}$$

टिप्पणी: इन सूत्रों की सत्यता निश्चित अन्तराल के लिए ही होगी।

2.04 प्रतिलोम वृत्तीय फलनों के गुणधर्म (Properties of inverse circular functions)

(i) $\sin\left(\sin^{-1}x\right) = x, \quad -1 \le x \le 1$ एवं $\sin^{-1}\left(\sin\theta\right) = x, \quad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

प्रमाण: $\because \sin^{-1}x = \theta$ तब $\sin\theta = x$ [परिभाषा से]

θ का मान पुनः रखने पर $\sin\left(\sin^{-1}x\right) = x$

पुनः यदि $\quad \sin\theta = x, -1 \le x \le 1$

तब $\quad \theta = \sin^{-1}x, -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ या $\quad \theta = \sin^{-1}\left(\sin\theta\right)$

इसी प्रकार दी गई सारणी के अनुसार x तथा θ के अन्तरालों के लिए

$$\cos\left(\cos^{-1}x\right) = x \qquad \cos^{-1}\left(\cos\theta\right) = \theta$$

$$\tan\left(\tan^{-1}x\right) = x \qquad \tan^{-1}\left(\tan\theta\right) = \theta$$

$$\cot\left(\cot^{-1}x\right) = x \qquad \cot^{-1}\left(\cot\theta\right) = \theta$$

$$\sec\left(\sec^{-1}x\right) = x \qquad \sec^{-1}\left(\sec\theta\right) = \theta$$

$$\operatorname{cosec}\left(\operatorname{cosec}^{-1}x\right) = x \qquad \operatorname{cosec}^{-1}\left(\operatorname{cosec}\theta\right) = \theta$$

टिप्पणी: $\sin^{-1}\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right) \neq \frac{2\pi}{3}$ क्योंकि $\sin^{-1}x$ का मुख्य मान $\frac{2\pi}{3}$ नहीं है।

$$\sin^{-1}\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \sin^{-1}\left[\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right] = \sin^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$$

(ii) $\sin^{-1}\frac{1}{x} = \operatorname{cosec}^{-1}x, \quad R \sim (-1, 1)$

प्रमाण: $\sin^{-1}\frac{1}{x} = \theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{x} \Rightarrow \operatorname{cosec}\theta = x \Rightarrow \theta = \operatorname{cosec}^{-1}x \Rightarrow \sin^{-1}\frac{1}{x} = \operatorname{cosec}^{-1}x$

इसी प्रकार $\operatorname{cosec}^{-1}x = \sin^{-1}\frac{1}{x}, x \le -1, x \ge 1$

$$\cos^{-1}x = \sec^{-1}\frac{1}{x}, -1 \le x, x \ge 1$$

$$\sec^{-1}x = \cos^{-1}\frac{1}{x}, x \le -1, x \ge 1$$

$\tan^{-1}x = \cot^{-1}\frac{1}{x}$ तथा $\cot^{-1}x = \tan^{-1}\frac{1}{x}, x > 0$

(iii) $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}x$ व $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}x, -1 \le x \le 1$

प्रमाण: $\sin^{-1}(-x) = \theta \Rightarrow -x = \sin\theta \Rightarrow x = -\sin\theta = \sin(-\theta)$

या $\sin^{-1}x = -\theta = -\sin^{-1}(-x)$

या $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}x$

इसी प्रकार, यदि $\cos^{-1}(-x) = \theta$ तो $x = -\cos\theta$

या $x = \cos(\pi - \theta)$

$\therefore$ $\cos^{-1}x = \pi - \theta$

या $\cos^{-1}x = \pi - \cos^{-1}(-x)$

या $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}x$

इसी प्रकार $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1}x, \quad \operatorname{cosec}^{-1}(-x) = -\operatorname{cosec}^{-1}x$

$$\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1}x, \cot^{-1}(-x) = \pi - \cot^{-1}x$$

2.05 अन्य महत्वपूर्ण मानक सूत्र (Other important standrad formula)

(i) सिद्ध करना है कि

(a) $\sin^{-1}x \pm \sin^{-1}y = \sin^{-1}\left\{x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2}\right\}$

(b) $2\sin^{-1}x = \sin^{-1}\left\{2x\sqrt{1-x^2}\right\}$

(c) $3\sin^{-1}x = \sin^{-1}\left\{3x - 4x^3\right\}$

प्रमाण: (a) माना $\sin^{-1}x = \theta_1$ अर्थात् $\sin\theta_1 = x$ तथा $\sin^{-1}y = \theta_2$

अर्थात् $\sin\theta_2 = y$ तब $\cos\theta_1 = \sqrt{1-\sin^2\theta_1} = \sqrt{1-x^2}$

इसी प्रकार $\cos\theta_2 = \sqrt{1-\sin^2\theta_2} = \sqrt{1-y^2}$

अब हम जानते हैं कि

$$\sin(\theta_1 \pm \theta_2) = \sin\theta_1\cos\theta_2 \pm \cos\theta_1\sin\theta_2$$

या $$\theta_1 \pm \theta_2 = \sin^{-1}(\sin\theta_1\cos\theta_2 \pm \cos\theta_1\sin\theta_2)$$

$\therefore$ $$\sin^{-1}x \pm \sin^{-1}y = \sin^{-1}\left[x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2}\right]$$

(b) माना $\sin^{-1}x = \theta$ अर्थात् $\sin\theta = x$

$\therefore$ $$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta} = 2x\sqrt{1-x^2}$$

$\Rightarrow$ $$2\theta = \sin^{-1}\left\{2x\sqrt{1-x^2}\right\}$$

$$2\sin^{-1}x = \sin^{-1}\left\{2x\sqrt{1-x^2}\right\}$$

(c) हम जानते हैं कि $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

$\therefore$ $$3\theta = \sin^{-1}\left(3\sin\theta - 4\sin^3\theta\right)$$

या $$3\sin^{-1}x = \sin^{-1}\left(3x - 4x^3\right)$$

(ii) सिद्ध करना है कि

(a) $$\cos^{-1}x \pm \cos^{-1}y = \cos^{-1}\left\{xy \mp \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right\}$$

(b) $$2\cos^{-1}x = \cos^{-1}\left(2x^2 - 1\right)$$

(c) $$3\cos^{-1}x = \cos^{-1}\left(4x^3 - 3x\right)$$

प्रमाण: (a) माना $\cos^{-1}x = \theta_1$ अर्थात् $\cos\theta_1 = x$

तथा $\cos^{-1}y = \theta_2$ अर्थात् $\cos\theta_2 = y$

तब $\sin\theta_1 = \sqrt{1-x^2}$ तथा $\sin\theta_2 = \sqrt{1-y^2}$

अब हम जानते हैं कि

$$\cos(\theta_1 \pm \theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 \mp \sin\theta_1\sin\theta_2$$

या $$\theta_1 \pm \theta_2 = \cos^{-1}\left(\cos\theta_1\cos\theta_2 \mp \sin\theta_1\sin\theta_2\right)$$

$\therefore$ $$\cos^{-1}x \pm \cos^{-1}y = \left[xy \mp \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right]$$

(b) माना $\cos^{-1}x=\theta$ अर्थात् $\cos\theta = x$ $\therefore\ \cos 2\theta = \left(2\cos^2\theta\right)-1 = 2x^2-1$

या $$2\theta = \cos^{-1}\left(2x^2-1\right)$$

या $$2\cos^{-1}x = \cos^{-1}\left(2x^2-1\right)$$

(c) हम जानते है कि $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ $\therefore 3\theta = \cos^{-1}\left(4\cos^3\theta - 3\cos\theta\right)$

या $$3\cos^{-1}x = \cos^{-1}\left(4x^3-3x\right)$$

(iii) सिद्ध करना है कि

(a) $$\tan^{-1}x+\tan^{-1}y = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

(b) $$\tan^{-1}x-\tan^{-1}y = \tan^{-1}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$$

(c) $$\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z = \tan^{-1}\left(\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx}\right)$$

(d) $$2\tan^{-1}x = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$$

(e) $$3\tan^{-1}x = \tan^{-1}\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right)$$

प्रमाण: (a) माना लो $\tan^{-1}x=\theta_1$ अर्थात् $\tan\theta_1 = x$ तथा $\tan^{-1}y=\theta_2$ अर्थात् $\tan\theta_2 = y$

अब हम जानते हैं कि

$$\tan\left(\theta_1+\theta_2\right) = \frac{\tan\theta_1+\tan\theta_2}{1-\tan\theta_1\tan\theta_2} = \frac{x+y}{1-xy}$$

या $$\theta_1+\theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

या $$\tan^{-1}x+\tan^{-1}y = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

(b) $\tan^{-1}x-\tan^{-1}y = \tan^{-1}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$ को भी हम (a) की भाँति सिद्ध कर सकते हैं।

(c) अब $$\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

तो $$\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)+\tan^{-1}z$$

$$=\tan^{-1}\left[\frac{\{(x+y)/(1-xy)\}+z}{1-z\{(x+y)/(1-xy)\}}\right]$$ [(a) से]

$$=\tan^{-1}\left(\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx}\right)$$

(d) माना $\tan^{-1}=\theta$ अर्थात् $\tan\theta=x$

$\therefore$ $$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2x}{1-x^2}$$

या $$2\theta=\tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$$

या $$2\tan^{-1}x=\tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$$

(e) हम जानते हैं कि $$\tan 3\theta=\frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}$$

$\therefore$ $$3\theta=\tan^{-1}\left(\frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}\right)$$

या $$3\tan^{-1}x=\tan^{-1}\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right)$$

(iv) सिद्ध करना है कि

(a) $$\cot^{-1}x+\cot^{-1}y=\cot^{-1}\left(\frac{xy-1}{x+y}\right)$$

(b) $$\cot^{-1}x-\cot^{-1}y=\cot^{-1}\left(\frac{xy+1}{y-x}\right).$$

प्रमाण: (a) माना $\cot^{-1}x=\theta_1$ तथा $\cot^{-1}y=\theta_2$

तब $\cot\theta_1=x,$ $\cot\theta_2=y$

हम जानते हैं कि $$\cot(\theta_1+\theta_2)=\frac{\cot\theta_1\cot\theta_2-1}{\cot\theta_1+\cot\theta_2}$$

या $$\theta_1+\theta_2=\cot^{-1}\left(\frac{\cot\theta_1\cot\theta_2-1}{\cot\theta_1+\cot\theta_2}\right)$$

या $$\cot^{-1}x+\cot^{-1}y=\cot^{-1}\left(\frac{xy-1}{x+y}\right).$$

(b) $\cot^{-1}x-\cot^{-1}y=\cot^{-1}\left(\frac{xy+1}{y-x}\right)$ को भी हम (a) की भांति सिद्ध कर सकते हैं।

(iv) सिद्ध करना है कि

(a) $\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}$ (b) $\tan^{-1}x+\cot^{-1}x=\frac{\pi}{2}$ (c) $\sec^{-1}x+\operatorname{cosec}^{-1}x=\frac{\pi}{2}$.

प्रमाण : (a) माना $\sin^{-1}x=\theta$ तब $\sin^{-1}x=\theta\Rightarrow x=\sin\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$$\Rightarrow\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}-\theta$$

$$\Rightarrow\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}x$$

$$\Rightarrow\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}.$$

(b) माना $\tan^{-1}x=\theta$ तब $\tan^{-1}x=\theta\Rightarrow x=\tan\theta=\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$$\Rightarrow\cot^{-1}x=\frac{\pi}{2}-\theta$$

$$\Rightarrow\cot^{-1}x=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x$$

$$\Rightarrow\tan^{-1}x+\cot^{-1}=\frac{\pi}{2}.$$

(c) माना $\sec^{-1}x=\theta$ तब $\sec^{-1}x=\theta\Rightarrow x=\sec\theta=\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$$\Rightarrow\operatorname{cosec}^{-1}x=\frac{\pi}{2}-\theta$$

$$\Rightarrow\operatorname{cosec}^{-1}x=\frac{\pi}{2}-\sec^{-1}x$$

$$\Rightarrow\sec^{-1}x+\operatorname{cosec}^{-1}x=\frac{\pi}{2}.$$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. निम्नलिखित के मुख्य मान ज्ञात कीजिए

(a) $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ (b) $\tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)$ (c) $\sec^{-1}\left(\sqrt{2}\right)$.

हल: (a) माना कि $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)=\theta$, तब $\sin\theta=-\frac{1}{2}$

चूँकि $\sin^{-1}x$ के मुख्य मान अन्तराल $-\frac{\pi}{2}\le\sin^{-1}x\le\frac{\pi}{2}$ में है।

$\therefore$ $$-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$$

परन्तु यहाँ $\sin\theta$ ऋणात्मक है।

$\therefore$ $$-\frac{\pi}{2}\le\theta\le 0$$

अब $$\sin\theta=-\frac{1}{2}=-\sin\frac{\pi}{6}=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\Rightarrow\theta=-\frac{\pi}{6}$$

अतः $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ का मुख्य मान $-\frac{\pi}{6}$ है।

(b) माना कि $\tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)=\theta$, तब $\tan\theta=-\sqrt{3}$

चूँकि $\tan^{-1}x$ के मुख्य मान अन्तराल $-\frac{\pi}{2}<\tan^{-1}x<\frac{\pi}{2}$ में है।

$\therefore$ $$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$$

परन्तु यहाँ $\tan\theta$ ऋणात्मक है।

$\therefore$ $$-\frac{\pi}{2}<\theta<0$$

अब $$\tan\theta=-\sqrt{3}=-\tan\frac{\pi}{3}=\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)\quad\Rightarrow\quad\theta=-\frac{\pi}{3}$$

अतः $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$ का मुख्य मान $-\pi/3$ है।

(c) माना कि $\sec^{-1}\left(\sqrt{2}\right)=\theta$, तब $\sec\theta=\sqrt{2}$

यहाँ चूँकि $x\ge 1$ अर्थात् $1\le x$ के लिए $\sec^{-1}x$ का मुख्य मान का अन्तराल $0\le\sec^{-1}x<\frac{\pi}{2}$ है।

$\therefore$ $$0<\theta\le\frac{\pi}{2}$$

अब $\sec\theta = \sqrt{2} = \sec\pi/4 \quad \Rightarrow \quad \theta = \pi/4$

अतः $\sec^{-1}(\sqrt{2})$ का मुख्य मान $\pi/4$ है।

उदाहरण-2. सिद्ध कीजिए कि $4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{70} + \tan^{-1}\frac{1}{99} = \frac{\pi}{4}$

हल: वाम पक्ष $= 4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{70} + \tan^{-1}\frac{1}{99}$

$$= 2\left(2\tan^{-1}\frac{1}{5}\right) - \left(\tan^{-1}\frac{1}{70} - \tan^{-1}\frac{1}{99}\right)$$

$$= 2\tan^{-1}\frac{2/5}{1-1/25} - \tan^{-1}\frac{1/70-1/99}{1+1/70\times 1/99}$$

$$= 2\tan^{-1}\frac{5}{12} - \tan^{-1}\frac{29}{6931}$$

$$= \tan^{-1}\frac{2\times 5/12}{1-25/144} - \tan^{-1}\frac{1}{239}$$

$$= \tan^{-1}\frac{120}{119} - \tan^{-1}\frac{1}{239} = \tan^{-1}\left[\frac{\frac{120}{119}-\frac{1}{239}}{1+\frac{120}{119}\times\frac{1}{239}}\right]$$

$$= \tan^{-1}\frac{28561}{28561} = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4} = \text{दक्षिण पक्ष (RHS)}$$

उदाहरण-3. सिद्ध कीजिए कि

$$2\tan^{-1}\left\{\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right\} = \cos^{-1}\left(\frac{b+a\cos x}{a+b\cos x}\right)$$

हल: माना $\tan^{-1}\left\{\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right\} = \theta$

$\therefore$ $\tan\theta = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}$

अब $\cos 2\theta = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

$$= \frac{1-\frac{a-b}{a+b}\tan^2\frac{x}{2}}{1+\frac{a-b}{a+b}\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{b\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)+a\left(1-\tan^2\frac{x}{2}\right)}{a\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)+b\left(1-\tan^2\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{b + a\dfrac{1-\tan^2 x/2}{1+\tan^2 x/2}}{a + b\dfrac{1-\tan^2 x/2}{1-\tan^2 x/2}}$$ [$1+\tan^2 x/2$ का अंश और हर में भाग देने पर]

$$= \frac{b + a\cos x}{a + b\cos x}$$

या $$2\theta = \cos^{-1}\left(\frac{b + a\cos x}{a + b\cos x}\right)$$

अतः $$2\tan^{-1}\left\{\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right\} = \cos^{-1}\frac{b + a\cos x}{a + b\cos x}.$$

उदाहरण-4. सिद्ध कीजिए कि $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{a}{b}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{a}{b}\right) = \frac{2b}{a}$.

हल: माना कि $\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{a}{b} = \theta$, तब $\cos 2\theta = \frac{a}{b}$

वाम पक्ष $$= \tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)$$

$$= \frac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan\theta}{1 - \tan\frac{\pi}{4}\tan\theta} + \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\theta}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\tan\theta}$$

$$= \frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta} + \frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$$

$$= \frac{(1+\tan\theta)^2 + (1-\tan\theta)^2}{(1-\tan\theta)(1+\tan\theta)}$$

$$= 2\left(\frac{1+\tan^2\theta}{1-\tan^2\theta}\right) = \frac{2}{\left(\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right)} = \frac{2}{\cos 2\theta} = \frac{2b}{a}$$ = दक्षिण पक्ष (RHS)

उदाहरण-5. यदि $\cos^{-1}\frac{x}{a} + \cos^{-1}\frac{y}{b} = \alpha$ तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab}\cos\alpha + \frac{y^2}{b^2} = \sin^2\alpha.$$

हल: दिया हुआ है कि $$\cos^{-1}\frac{x}{a}+\cos^{-1}\frac{y}{b}=\alpha$$

$$\cos^{-1}\left\{\frac{x}{a}.\frac{y}{b}-\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\right\}=\alpha$$

या $$\frac{xy}{ab}-\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}=\cos\alpha$$

या $$\left(\frac{xy}{ab}-\cos\alpha\right)^2=\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)$$

या $$\frac{x^2y^2}{a^2b^2}-\frac{2xy}{ab}\cos\alpha+\cos^2\alpha=1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2y^2}{a^2b^2}$$

या $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{2xy}{ab}\cos\alpha+\frac{y^2}{b^2}=1-\cos^2\alpha$$

या $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{2xy}{ab}\cos\alpha+\frac{y^2}{b^2}=\sin\alpha.$$

उदाहरण-6. निम्न समीकरण को हल कीजिए

$$\cos^{-1}\frac{1-a^2}{1+a^2}+\cos^{-1}\frac{1-b^2}{1+b^2}=2\tan^{-1}x.$$

हल: माना $a=\tan\theta, b=\tan\phi,$ तब $\theta=\tan^{-1}a, \phi=\tan^{-1}b$

$\therefore$ $$\frac{1-a^2}{1+a^2}=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\cos 2\theta$$

तथा $$\frac{1-b^2}{1+b^2}=\frac{1-\tan^2\phi}{1+\tan^2\phi}=\cos 2\phi$$

अतः दिये गये समीकरण से

$$\cos^{-1}(\cos 2\theta)+\cos^{-1}(\cos 2\phi)=2\tan^{-1}x$$

या $$2\theta+2\phi=2\tan^{-1}x$$

या $$\theta+\phi=\tan^{-1}x$$

या $$\tan^{-1}a+\tan^{-1}b=\tan^{-1}x$$

या $$\tan^{-1}\frac{a+b}{1-ab}=\tan^{-1}x$$

$\therefore$ $$x=\frac{a+b}{1-ab}.$$

उदाहरण-7. सिद्ध कीजिए कि

$$\cos\left[\tan^{-1}\left\{\sin\left(\cot^{-1}x\right)\right\}\right]=\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+2}}.$$

हलः माना $\cot^{-1}x=\theta$, तब $\cot\theta=x$

यदि $\cot\theta=x$, तब $\sin\theta=\frac{1}{\operatorname{cosec}\theta}=\frac{1}{\sqrt{\cot^2\theta+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$$\theta=\cot^{-1}x=\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

वाम पक्ष $=\cos\left[\tan^{-1}\left\{\sin\left(\cot^{-1}x\right)\right\}\right]$

$$=\cos\left[\tan^{-1}\left\{\sin\left(\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)\right\}\right]$$

$$=\cos\left[\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)\right]$$

हम जानते हैं कि $\tan\phi=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ तो $\cos\phi=\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{2+x^2}}$

$\therefore$ वाम पक्ष $=\cos\left(\cos^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{2+x^2}}\right)$

$$=\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{2+x^2}}=\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+2}}=\text{दक्षिण पक्ष (RHS)}$$

उदाहरण-8. निम्न समीकरण को हल किजिए

$$\tan^{-1}\frac{1}{a-1}=\tan^{-1}\frac{1}{x}+\tan^{-1}\frac{1}{a^2-x+1}.$$

हलः $\tan^{-1}\frac{1}{a-1}-\tan^{-1}\frac{1}{x}=\tan^{-1}\frac{1}{a^2-x+1}$

या $\tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{a-1}-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{(a-1)x}}\right)=\tan^{-1}\frac{1}{a^2-x+1}$

या $\frac{x-a+1}{ax-x+1}=\frac{1}{a^2-x+1}$

या $(x-a+1)(a^2-x+1)=ax-x+1$

या $$xa^2 - a^3 - x^2 + a^2 + x - a = 0$$

या $$a^2(x-a) - (x+a)(x-a) + (x-a) = 0$$

या $$(x-a)\left[a^2 - (x+a) + 1\right] = 0$$

या $$(x-a)\left(a^2 - x - a + 1\right) = 0$$

या $$x = a \text{ एवं } x = a^2 - a + 1.$$

उदाहरण-9. निम्न समीकरण को हल कीजिए

$$\sin^{-1} x + \sin^{-1} 2x = \frac{\pi}{3}$$

हल: $$\sin^{-1} x + \sin^{-1} 2x = \frac{\pi}{3}$$

या $$\left(\frac{\pi}{2} - \cos^{-1} x\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \cos^{-1} 2x\right) = \frac{\pi}{3}$$

या $$\cos^{-1} x + \cos^{-1} 2x = \frac{2\pi}{3}$$

या $$\cos^{-1}\left[x.2x - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-4x^2}\right] = \frac{2\pi}{3}$$

या $$2x^2 - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-4x^2} = \cos\frac{2\pi}{3}$$

या $$2x^2 - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-4x^2} = -\frac{1}{2}$$

या $$2x^2 + \frac{1}{2} = \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-4x^2}$$

या $$4x^4 + \frac{1}{4} + 2x^2 = \left(1-x^2\right)\left(1-4x^2\right) \text{ वर्ग करने पर}$$

या $$4x^4 + \frac{1}{4} + 2x^2 = 1 - 5x^2 + 4x^4$$

या $7x^2 = \frac{3}{4}$ या $x^2 = \frac{3}{28}$ या $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$

परन्तु $x^2 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$ दिए गए समीकरण को सन्तुष्ट नहीं करता है।

अतः हल $x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$.

प्रश्नमाला 2.1

1. निम्नलिखित कोणों के मुख्य मान ज्ञात कीजिए

(i) $\sin^{-1}(1)$ (ii) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ (iii) $\sec^{-1}\left(-\sqrt{2}\right)$

(iv) $\operatorname{cosec}^{-1}(-1)$ (v) $\cot^{-1}\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ (vi) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

सिद्ध कीजिए [2 से 8]

2. $2\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{7}=\frac{\pi}{4}$

3. $\tan^{-1}\frac{17}{19}-\tan^{-1}\frac{2}{3}=\tan^{-1}\frac{1}{7}$

4. $\cos^{-1}\frac{63}{65}+2\tan^{-1}\frac{1}{5}=\sin^{-1}\frac{3}{5}$

5. $\sec^2\left(\tan^{-1}2\right)+\operatorname{cosec}^2\left(\cot^{-1}3\right)=15$

6. $2\tan^{-1}x=\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}=\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$

7. $\tan^{-1}\sqrt{\frac{ax}{bc}}+\tan^{-1}\sqrt{\frac{bx}{ca}}+\tan^{-1}\sqrt{\frac{cx}{ab}}=\pi$, जहाँ $a+b+c=x$

8. $\frac{1}{2}\tan^{-1}x=\cos^{-1}\left\{\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{2\sqrt{1+x^2}}\right\}^{\frac{1}{2}}$.

9. यदि $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y+\cos^{-1}z=\pi$, तो सिद्ध कीजिए कि $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$.

10. यदि $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y+\sin^{-1}z=\pi$, तो सिद्ध कीजिए कि $x\sqrt{1-x^2}+y\sqrt{1-y^2}+z\sqrt{1-z^2}=2xyz$.
(संकेत: यदि $A+B+C=\pi$ तो $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$)

11. यदि $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\frac{\pi}{2}$, तो सिद्ध कीजिए कि $xy+yz+zx=1$.

12. यदि $\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2x}{1-x^2}+\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-y^2}{1+y^2}+\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{3z-z^3}{1-3z^2}=5\pi$, सिद्ध कीजिए कि $x+y+z=xyz$.

13. यदि $\sec^{-1}\left(\sqrt{1+x^2}\right)+\operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+y^2}}{y}\right)+\cot^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=3\pi$, तो सिद्ध कीजिए कि $x+y+z=xyz$.

14. सिद्ध कीजिए कि $\tan^{-1}x+\cot^{-1}(x+1)=\tan^{-1}(x^2+x+1)$.

15. यदि $\tan^{-1}x, \tan^{-1}y, \tan^{-1}z$ समान्तर श्रेढ़ी में हो तो सिद्ध कीजिए कि $y^2(x+z)+2y(1-xz)-x-z=0$

16. यदि $x^3+px^2+qx+p=0$ के मूल α,β,γ हो तो सिद्ध कीजिए कि एक विशेष परिस्थिति के अलावा $\tan^{-1}\alpha+\tan^{-1}\beta+\tan^{-1}\gamma=n\pi$ और वह विशेष स्थिति भी ज्ञात कीजिए जब ऐसा नहीं होता है।

निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए [प्रश्न 17 से 25]:

17. $\sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)-\sec^{-1}\left(\frac{x}{b}\right)=\sec^{-1}b-\sec^{-1}a$

18. $\cos^{-1}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)=\frac{2\pi}{3}$

19. $\tan^{-1}\frac{1}{1+2x}+\tan^{-1}\frac{1}{4x+1}=\tan^{-1}\frac{2}{x^2}$

20. $\tan^{-1}\frac{x+7}{x-1}+\tan^{-1}\frac{x-1}{x}=\pi-\tan^{-1}7$

21. $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+\cot^{-1}x=\frac{\pi}{4}$

22. $3\tan^{-1}\frac{1}{2+\sqrt{3}}-\tan^{-1}\frac{1}{x}=\tan^{-1}\frac{1}{3}$

23. $\sin 2\left[\cos^{-1}\left\{6+\left(2\tan^{-1}x\right)\right\}\right]=0$

24. $\tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)+2\tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{6}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{4}$

25. $\sin^{-1}x-\sin^{-1}y=\frac{2\pi}{3};\quad \cos^{-1}x-\cos^{-1}=\frac{\pi}{3}.$

विविध प्रश्नमाला–2

1. $\tan^{-1}(-1)$ का मुख्य मान है

(क) 45° (ख) 135° (ग) -45° (घ) -60°.

2. $2\tan^{-1}(1/2)$ बराबर है

(क) $\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ (ख) $\cos^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ (ग) $\cos^{-1}\left(\frac{5}{3}\right)$ (घ) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$.

3. यदि $\tan^{-1}(3/4)=\theta$ तो $\sin\theta$ का मान है

(क) $\frac{5}{3}$ (ख) $\frac{3}{3}$ (ग) $\frac{4}{3}$ (घ) $\frac{1}{4}$.

4. $\cot\left[\tan^{-1}\alpha+\cot^{-1}\alpha\right]$ का मान है

(क) 1 (ख) ∞ (ग) 0 (घ) इनमें से कोई नहीं।

5. यदि $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=x$ तो x का व्यापक मान है

(क) $2n\pi\pm\frac{\pi}{6}$ (ख) $\frac{\pi}{6}$ (ग) $n\pi\pm\frac{\pi}{6}$ (घ) $n\pi(-1)^n\frac{\pi}{6}$.

6. $2\tan\left(\tan^{-1}x+\tan^{-1}x^{3}\right)$ का मान है

(क) $\frac{2x}{1-x^{2}}$ (ख) $1+x^{2}$ (ग) $2x$ (घ) इनमें से कोई नहीं।

7. यदि $\tan^{-1}(3x)+\tan^{-1}(2x)=\frac{\pi}{4}$ तो x का मान है

(क) $\frac{1}{6}$ (ख) $\frac{1}{3}$ (ग) $\frac{1}{10}$ (घ) $\frac{1}{2}$.

8. $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ का मान है

(क) $\frac{\pi}{2}$ (ख) $\frac{\pi}{3}$ (ग) $\frac{2\pi}{3}$ (घ) π.

9. यदि $\tan^{-1}(1)+\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sin^{-1}x$ तो x का मान है

(क) -1 (ख) 0 (ग) 1 (घ) $-\frac{1}{2}$.

10. यदि $\cot^{-1}x+\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{\pi}{2}$ तो x का मान है

(क) 1 (ख) 3 (ग) $\frac{1}{3}$ (घ) इनमें से कोई नहीं।

11. यदि $4\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\pi$ तो x का मान ज्ञात कीजिए।

12. $\cos\left[(\pi/2)+\sin^{-1}(1/3)\right]$ का मान ज्ञात कीजिए।

13. यदि $\sin^{-1}(3/4)+\sec^{-1}(4/3)=x$ तो x का मान ज्ञात कीजिए।

14. $\sin^{-1}(4/5)+2\tan^{-1}(1/3)$ का मान ज्ञात कीजिए।

15. यदि $\sin^{-1}(5/x)+\sin^{-1}(12/x)=90^{\circ}$ तो x का मान ज्ञात कीजिए।

16. सिद्ध कीजिए कि : $\sin^{-1}\frac{3}{5}-\cos^{-1}\frac{12}{13}=\sin^{-1}\frac{16}{65}$.

17. यदि $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\pi$, तो सिद्ध कीजिए : $x+y+z+=xyz.$

18. सिद्ध कीजिए कि : $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\tan 2A\right)+\tan^{-1}(\cot A)+\tan^{-1}\left(\cot^{2}A\right)=0$.

19. सिद्ध कीजिए कि : $\tan^{-1}x=2\tan^{-1}\left[\operatorname{cosec}\left(\tan^{-1}x\right)-\tan\left(\cot^{-1}x\right)\right]$.

20. यदि $\phi=\tan^{-1}\frac{x\sqrt{3}}{2K-x}$ और $\theta=\tan^{-1}\frac{2x-K}{K\sqrt{3}}$ तो सिद्ध कीजिए कि $\phi-\theta$ का मान 30° है।

21. सिद्ध कीजिए कि: $2\tan^{-1}\left[\tan\left(45^{\circ}-\alpha\right)\tan\frac{\beta}{2}\right]=\cos^{-1}\left(\frac{\sin 2\alpha+\cos\beta}{1+\sin 2\alpha\cos\beta}\right)$.

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. यदि $\sin\theta = x$ तो $\theta = \sin^{-1} x$ तथा $\sin^{-1} x = \theta$ तो $\sin\theta = x$.

2. $\sin\left(\sin^{-1} x\right) = x,\ \sin^{-1}\left(\sin x\right) = x;\ \cos\left(\cos^{-1} x\right) = x, \cos^{-1}\left(\cos x\right) = x$ इत्यादि।

3. (i) $\sin^{-1} x, \tan^{-1} x, \cot^{-1} x, \operatorname{cosec}^{-1} x$ के मुख्य मान $-\frac{\pi}{2}$ से $\frac{\pi}{2}$ तक होते हैं।

   (ii) $\cos^{-1} x$ एवं $\sec^{-1} x$ के मुख्य मान 0 से π तक होते हैं।

4. (i) $\sin^{-1}\left(-x\right) = -\sin^{-1} x,\quad \tan^{-1}\left(-x\right) = -\tan^{-1} x,\quad \operatorname{cosec}^{-1}\left(-x\right) = -\operatorname{cosec}^{-1} x$

   (ii) $\cos^{-1}\left(-x\right) = \pi - \cos^{-1} x,\quad \sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1} x,\quad \cot^{-1}\left(-x\right) = \pi - \cot^{-1} x$

5. (i) $\sin^{-1} x = \operatorname{cosec}^{-1}\frac{1}{x},\quad \cos^{-1} x = \sec^{-1}\frac{1}{x},\quad \tan^{-1} x = \cot^{-1}\frac{1}{x}$

   (ii) $\operatorname{cosec}^{-1} x = \sin^{-1}\frac{1}{x},\quad \sec^{-1} x = \cos^{-1}\frac{1}{x},\quad \cot^{-1} x = \tan^{-1}\frac{1}{x}$

6. $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2},\quad \tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2},\quad \sec^{-1} x + \operatorname{cosec}^{-1} x = \frac{\pi}{2}$

7. (i) $\tan^{-1} x \pm \tan^{-1} y = \tan^{-1}\left(\frac{x \pm y}{1 \mp xy}\right)$

   (ii) $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y + \tan^{-1} z = \tan^{-1}\left(\frac{x + y + z - xyz}{1 - xy - yz - zx}\right)$

8. $2\tan^{-1} x = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} = \cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2} = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$

9. $\sin^{-1} x \pm \sin^{-1} y = \sin^{-1}\left(x.\sqrt{1-y^2} \pm y.\sqrt{1-x^2}\right)$

10. $\cos^{-1} x \pm \cos^{-1} y = \cos^{-1}\left(xy \mp \sqrt{1-x^2}\,\sqrt{1-x^2}\right)$

11. (i) $2\sin^{-1} x = \sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$ (ii) $2\cos^{-1} x = \cos^{-1}\left(2x^2 - 1\right)$

12. (i) $3\sin^{-1} x = \sin^{-1}\left(3x - 4x^3\right)$ (ii) $3\cos^{-1} x = \cos^{-1}\left(4x^3 - 3x\right)$

    (iii) $3\tan^{-1} x = \tan^{-1}\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}$

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 2.1

1. (i) $\frac{\pi}{2}$ (ii) $\frac{2\pi}{3}$ (iii) $\frac{3\pi}{4}$ (iv) $-\frac{\pi}{2}$ (v) $\frac{2\pi}{3}$ (vi) $\frac{\pi}{6}$

17. $x = ab$ 18. $x = \tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$ 19. $x = 0, 3, \frac{-2}{3}$ 20. $x = 11 \pm 4\sqrt{6}$

21. $x = 3$ 22. $x = 2$ 23. $x = \pm 1, \pm\left(1 \pm \sqrt{2}\right)$ 24. $x = \frac{-461}{9}$

25. $x = \frac{1}{2}, y = 1$

विविध प्रश्नमाला–2

1. (ग) 2. (क) 3. (ख) 4.(ग) 5. (घ) 6. (क) 7. (क)
8. (ग) 9. (ग) 10. (ग) 11. 1/2 12. –1/3 13. $\pi/2$ 14. $\pi/2$
15. 13