પ્રકરણ 9

ઘન પદાર્થોના યાંત્રિક ગુણધર્મો
(MECHANICAL PROPERTIES OF SOLIDS)

9.1 પ્રસ્તાવના
9.2 ઘન પદાર્થોની સ્થિતિસ્થાપક વર્તણૂક
9.3 પ્રતિબળ અને વિકૃતિ
9.4 હૂકનો નિયમ
9.5 પ્રતિબળ-વિકૃતિ વક્ર
9.6 સ્થિતિસ્થાપક અંકો
9.7 દ્રવ્યની સ્થિતિસ્થાપક વર્તણૂકના ઉપયોગો
સારાંશ
ગહન વિચારણાના મુદ્દા
સ્વાધ્યાય
વધારાનું સ્વાધ્યાય

9.1 પ્રસ્તાવના (INTRODUCTION)

આપણે પ્રકરણ 7માં પદાર્થના ભ્રમણનો અભ્યાસ કર્યો અને તે પરથી સમજાયું કે પદાર્થની ગતિ પદાર્થમાં દળ-વિતરણ કેવી રીતે થયું છે, તેના પર આધારિત છે. આપણે દૃઢ પદાર્થની બહુ સામાન્ય સ્થિતિ સુધી સીમિત રહ્યા હતા. સામાન્યતઃ દૃઢ પદાર્થ એટલે એવો સખત ઘન પદાર્થ જેનો આકાર અને કદ નિશ્ચિત હોય છે. પરંતુ વાસ્તવમાં પદાર્થને ખેંચી, દબાવી કે વાળી શકાય છે. દેખીતી રીતે જ દૃઢ સ્ટીલના સળિયાને પણ પૂરતું મોટું બાહ્ય બળ લાગુ પાડીને વિરૂપિત કરી શકાય છે. આનો અર્થ એ થયો કે ઘન પદાર્થો પૂર્ણરૂપે દૃઢ પદાર્થ નથી.

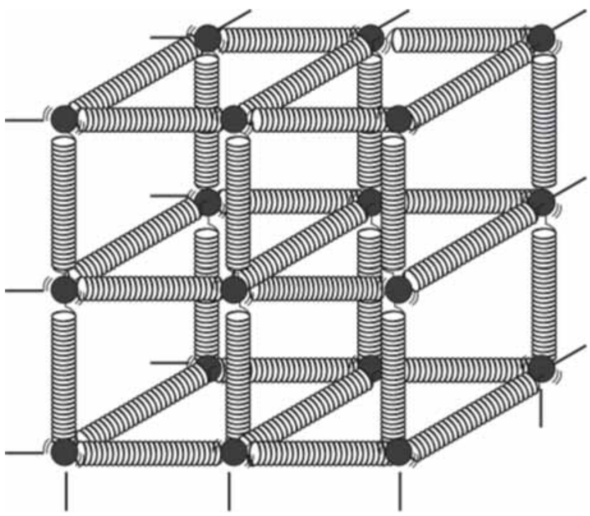
ઘન પદાર્થને ચોક્કસ આકાર અને પરિમાણ હોય છે. ઘન પદાર્થનો આકાર કે પરિમાણમાં ફેરફાર કરવા (અથવા વિરૂપિત કરવા) બળની જરૂર પડે. જો તમે સર્પીલ આકારની સ્પ્રિંગના છેડાને કાળજીપૂર્વક ખેંચો તો તેની લંબાઈમાં થોડો વધારો થાય છે. જ્યારે તમે સ્પ્રિંગના છેડાને છોડી દો ત્યારે તે પોતાનો મૂળ આકાર અને પરિમાણ પાછા મેળવે છે. પદાર્થના જે ગુણધર્મને કારણે વિરૂપકબળ દૂર કરતાં તે પોતાનો મૂળ આકાર અને પરિમાણ પુનઃપ્રાપ્ત કરે છે. તેને **સ્થિતિસ્થાપકતા** કહે છે અને ઉત્પન્ન થતા વિરૂપણને **સ્થિતિસ્થાપક** વિરૂપણ કહે છે. લૂગદી (Putty) અથવા કાદવ (mud)ના પિંડ પર જો તમે બળ લાગુ પાડો તો તેમાં પોતાનો પ્રારંભિક આકાર પાછો મેળવવાની વૃત્તિ હોતી નથી અને તે કાયમ માટે વિરૂપિત થઈ જાય છે. આવા પદાર્થોને **પ્લાસ્ટિક** કહેવાય છે અને તેના આવા ગુણધર્મને **પ્લાસ્ટિસિટી (Plasticity)** કહે છે. લૂગદી અને કાદવ આદર્શ પ્લાસ્ટિકની નજીક છે.

એન્જિનિયરિંગ ડિઝાઇનમાં દ્રવ્યની સ્થિતિસ્થાપક વર્તણૂક મહત્ત્વની ભૂમિકા ભજવે છે. ઉદાહરણ તરીકે બિલ્ડિંગની ડિઝાઇન કરવા માટે સ્ટીલ, કૉંક્રિટ વગેરે જેવાં દ્રવ્યોના સ્થિતિસ્થાપક ગુણધર્મોનું જ્ઞાન હોવું જરૂરી છે. આ જ રીતે બ્રિજ, ઑટોમોબાઇલ, રોપ-વેની ડિઝાઇન વગેરે માટે પણ આ વાત સાચી છે. એવો પણ પ્રશ્ન પૂછી શકાય કે શું આપણે વધુ હલકા પરંતુ મજબૂત હોય તેવાં ઍરોપ્લેનની ડિઝાઇન કરી શકીએ ? શું આપણે એવાં કૃત્રિમ અંગો ડિઝાઇન કરી શકીએ કે જે હલકા પરંતુ મજબૂત હોય ? શા માટે રેલવે ટ્રેકનો આકાર I જેવો વિશિષ્ટ હોય છે ? શા માટે કાચ બટકણો હોય છે, જ્યારે પિત્તળ એવું નથી ? આ બધા જ પ્રશ્નોના જવાબની શરૂઆત સરળ પ્રકારના બોજ કે બળો કેવી રીતે જુદા જુદા ઘન પદાર્થોને વિરૂપિત કરે છે,

તેના અભ્યાસથી થાય છે. આ પ્રકરણમાં આપણે ઘન પદાર્થોની સ્થિતિસ્થાપક વર્તણૂક અને યાંત્રિક ગુણધર્મોનો અભ્યાસ કરીશું. જે આવા ઘણા પ્રશ્નોનો ઉકેલ આપશે.

9.2 ઘન પદાર્થોની સ્થિતિસ્થાપક વર્તણૂક (ELASTIC BEHAVIOUR OF SOLIDS)

આપણે જાણીએ છીએ કે ઘન પદાર્થમાં દરેક પરમાણુ કે અણુ તેના પડોશી પરમાણુઓ કે અણુઓ દ્વારા ઘેરાયેલા હોય છે. આંતર પરમાણ્વીક કે આંતર આણ્વીક બળો વડે તેઓ એકબીજાં સાથે જકડાયેલાં હોય છે અને સ્થાયી સંતુલિત અવસ્થામાં રહે છે. જ્યારે ઘન પદાર્થ વિરૂપણ અનુભવે ત્યારે પરમાણુઓ કે અણુઓ તેમના સંતુલન સ્થાનેથી સ્થાનાંતરિત થાય છે. પરિણામે આંતર પરમાણ્વીય (અથવા આંતરઆણ્વીય) અંતરમાં ફેરફાર થાય છે. જ્યારે વિરૂપકબળ દૂર કરવામાં આવે છે ત્યારે આંતર પરમાણ્વીય બળો તેમને મૂળ સ્થાને લઈ જાય છે અને ઘન પદાર્થ પોતાનો મૂળ આકાર અને પરિમાણ પુનઃપ્રાપ્ત કરે છે. પુનઃસ્થાપનની આ પ્રક્રિયા આકૃતિ 9.1માં દર્શાવેલ સ્પ્રિંગ અને બૉલનાં મોડલ દ્વારા સમજી શકાય છે. જ્યાં બૉલ પરમાણુઓને તથા સ્પ્રિંગ આંતર પરમાણ્વીક બળોને રજૂ કરે છે.



આકૃતિ 9.1 ઘન પદાર્થની સ્થિતિસ્થાપક વર્તણૂક માટેનું "સ્પ્રિંગ-બૉલ" મોડલ

જો તમે કોઈ પણ બૉલને તેની સંતુલન સ્થિતિથી સ્થાનાંતર કરાવવાનો પ્રયત્ન કરશો તો સ્પ્રિંગનું તંત્ર બૉલને તેના મૂળ સ્થાને પાછો લઈ જવાનો પ્રયત્ન કરશે. આમ, ઘન પદાર્થની સ્થિતિસ્થાપક વર્તણૂક ઘન પદાર્થની સૂક્ષ્મ પ્રકૃતિના સંદર્ભે સમજાવી શકાય. અંગ્રેજ ભૌતિકશાસ્ત્રી રોબર્ટ હૂકે (ઈ.સ. 1635-1703) સ્પ્રિંગ પર પ્રયોગ કરીને શોધી કાઢ્યું કે પદાર્થોમાં ઉદ્ભવતો લંબાઈનો ફેરફાર લાગુ પડેલ બળ અથવા બોજ (load)ને સપ્રમાણમાં હોય છે. 1676માં તેણે સ્થિતિસ્થાપકતાનો નિયમ આપ્યો જે હવે હૂકના નિયમ વડે ઓળખાય છે. આપણે તેને વિશે પરિચ્છેદ 9.4માં અભ્યાસ કરીશું. બોઈલના નિયમની માફક આ નિયમ પણ વિજ્ઞાનના શરૂઆતના માત્રાત્મક સંબંધો પૈકીનો એક છે. એન્જિનિયરિંગ ડિઝાઈનના સંદર્ભે જુદા જુદા બોજ હેઠળ દ્રવ્યોની વર્તણૂક જાણવી ખૂબ જ મહત્ત્વની છે.

9.3 પ્રતિબળ અને વિકૃતિ (STRESS AND STRAIN)

જ્યારે કોઈ પદાર્થ પર એવી રીતે બળ લગાડવામાં આવે કે તે હજીય (ગતિની દૃષ્ટિએ) સ્થાયી સંતુલનમાં રહે તો તે ઓછાવત્તા પ્રમાણમાં વિરૂપણ પામે છે. જેનો આધાર પદાર્થનાં દ્રવ્યની પ્રકૃતિ તથા વિરૂપકબળનાં માન પર હોય છે. એવું બની શકે કે ઘણાં દ્રવ્યોમાં આ વિરૂપણ જોઈ શકાય નહિ, પરંતુ વિરૂપણ થતું જ હોય છે. જ્યારે પદાર્થ પર વિરૂપકબળ લગાડવામાં આવે ત્યારે પદાર્થમાં પુનઃસ્થાપકબળ ઉદ્ભવે છે. આ પુનઃસ્થાપકબળનું માન લાગુ પાડેલ બળ જેટલું જ પરંતુ તેની વિરુદ્ધ દિશામાં હોય છે. એકમ ક્ષેત્રફળ દીઠ ઉદ્ભવતાં પુનઃસ્થાપકબળને **પ્રતિબળ** કહે છે. પદાર્થનાં A આડછેદનાં ક્ષેત્રફળને લંબદિશામાં લાગુ પાડેલ બળ F હોય તો

પ્રતિબળનું માન $= F/A$ (9.1)

પ્રતિબળનો SI એકમ $N\ m^{-2}$ અથવા પાસ્કલ (Pa) અને તેનું પારિમાણિક સૂત્ર $[ML^{-1}T^{-2}]$ છે.

જ્યારે કોઈ ઘન પદાર્થ પર બાહ્ય બળ લગાડવામાં આવે ત્યારે તેના પરિમાણમાં ત્રણ રીતે ફેરફાર થઈ શકે છે. જે આકૃતિ 9.2માં દર્શાવેલ છે. આકૃતિ 9.2(a)માં નળાકારને તેના આડછેદને લંબરૂપે બે સમાન બળો લાગુ પાડીને ખેંચવામાં આવેલ છે. આ કિસ્સામાં એકમ આડછેદ દીઠ પુનઃસ્થાપક બળને **તણાવ પ્રતિબળ (Tensile stress)** કહે છે. જો બળોની અસર હેઠળ નળાકાર સંકોચન પામે તો એકમ ક્ષેત્રફળ દીઠ પુનઃસ્થાપક બળને **દાબીય પ્રતિબળ (Compresive stress)** કહે છે. તણાવ અને દાબીય પ્રતિબળને **સંગત પ્રતિબળ (Longitudinal stress)** પણ કહે છે.

બંને કિસ્સામાં નળાકારની લંબાઈમાં ફેરફાર થાય છે. પદાર્થની લંબાઈમાં થતો ફેરફાર ΔL અને પદાર્થની મૂળ લંબાઈ L (આ કિસ્સામાં નળાકાર માટે)ના ગુણોત્તરને **સંગત વિકૃતિ (Longitudinal strain)** કહે છે.

$$\text{સંગત વિકૃતિ} = \frac{\Delta L}{L} \quad (9.2)$$

જોકે આકૃતિ 9.2(b)માં દર્શાવ્યા મુજબ, નળાકારના આડછેદને સમાંતરે પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશામાં બે સમાન વિરૂપક બળો લગાડવામાં આવે ત્યારે, નળાકારની સામસામી બાજુઓ વચ્ચે સાપેક્ષ સ્થાનાંતર થાય છે. અહીં લાગુ પાડેલ સ્પર્શીય બળને કારણે એકમ ક્ષેત્રફળ દીઠ ઉદ્ભવતા પુનઃસ્થાપક બળને **સ્પર્શીય અથવા આકાર પ્રતિબળ (Tangential or Shearing stress) કહે છે.**

રોબર્ટ હૂક (Robert Hooke) (ઈ.સ. 1635-1703)

રોબર્ટ હૂકનો જન્મ 18 જુલાઈ, 1635ના રોજ ફ્રેશવોટર, આઈસલ ઑફ વાઈટમાં થયો હતો. તે સત્તરમી શતાબ્દીના અંગ્રેજી વૈજ્ઞાનિકો પૈકીના એક હોશિયાર અને બહુમુખી પ્રતિભાવાળા હતા. તેમણે ઑક્સફર્ડ વિશ્વવિદ્યાલયમાં અભ્યાસ શરૂ કર્યો પરંતુ ક્યારેય સ્નાતક થઈ શક્યા નહિ છતાં તે પ્રતિભાશાળી સંશોધક યંત્રો બનાવનાર અને બિલ્ડિંગના ડિઝાઈનર હતા. તે બોઈલ-વાયુપંપની રચના કરવામાં રોબર્ટ બોઈલના મદદનીશ તરીકે રહ્યા હતા. નવી સંસ્થાપિત રોયલ સોસાયટીના 'પ્રયોગ-ક્યુરેટર' તરીકે 1662માં તે નિમણૂક પામ્યા. 1665માં તે ગ્રેશમ કૉલેજમાં ભૂમિતિના પ્રૉફેસર બન્યા, જ્યાં તેણે ખગોળીય અવલોકનો કર્યાં. તેમણે ગ્રેગોરિયન પરાવર્તક ટેલિસ્કૉપની રચના કરી, ટ્રેપિઝિયમમાં પાંચમા તારાની અને ઓરીઅન તારામંડળમાં એક તારાપુંજની શોધ કરી. ગુરુ પોતાની અક્ષ પર ભ્રમણ કરે છે તેવું સૂચન કર્યું, મંગળ ગ્રહનાં વિગતવાર રેખાચિત્રો તૈયાર કર્યાં જેનો તે પછીથી ઓગણીસમી શતાબ્દીમાં ઉપયોગ કરીને મંગળ ગ્રહનો ભ્રમણ-દર નક્કી થયો, ગ્રહોની ગતિનું વર્ણન કરવા માટેનો 'વ્યસ્ત વર્ગ નિયમ' રજૂ કર્યો. જેને પાછળથી ન્યૂટને સંશોધિત કર્યો વગેરે. તે રોયલ સોસાયટીના સભ્ય (Fellow) તરીકે ચૂંટાઈ આવ્યા અને 1667 થી 1682 આ સોસાયટીના સેક્રેટરી તરીકે સેવાઓ આપી. 'માઈક્રોગ્રાફિયા'માં પ્રસ્તુત તેની અવલોકન શ્રેણીઓમાં પ્રકાશના તરંગ સિદ્ધાંતનું સૂચન કર્યું અને કૉર્ક (Cork)ના અભ્યાસનાં પરિણામ સ્વરૂપે જીવવિજ્ઞાનના સંદર્ભે પ્રથમ વખત કોષ (cell) શબ્દનો ઉપયોગ કર્યો હતો.

ભૌતિકશાસ્ત્રીઓમાં રોબર્ટ હૂક તેમના સ્થિતિસ્થાપકતાનાં નિયમની શોધ માટે સૌથી વધુ પ્રચલિત હતા, (Ut tensio, sic vis) આ એક લેટિન રજૂઆત છે. જેનો અર્થ થાય છે જેવું વિરૂપણ તેવું બળ. આ નિયમે પ્રતિબળ અને વિકૃતિ તથા સ્થિતિસ્થાપકતા દ્રવ્યોને સમજવા માટેનો આધાર આપ્યો.

આકૃતિ 9.2 (b) મુજબ લાગુ પાડેલ સ્પર્શીય બળને કારણે નળાકારની બે સામસામી સપાટી વચ્ચેનું સાપેક્ષ સ્થાનાંતર Δx છે. પરિણામે ઉદ્ભવતી વિકૃતિ **આકાર વિકૃતિ** (Shearing strain) તરીકે ઓળખાય છે અને તેને સાપેક્ષ સ્થાનાંતર Δx તથા નળાકારની લંબાઈ Lના ગુણોત્તર સ્વરૂપે વ્યાખ્યાયિત કરાય છે.

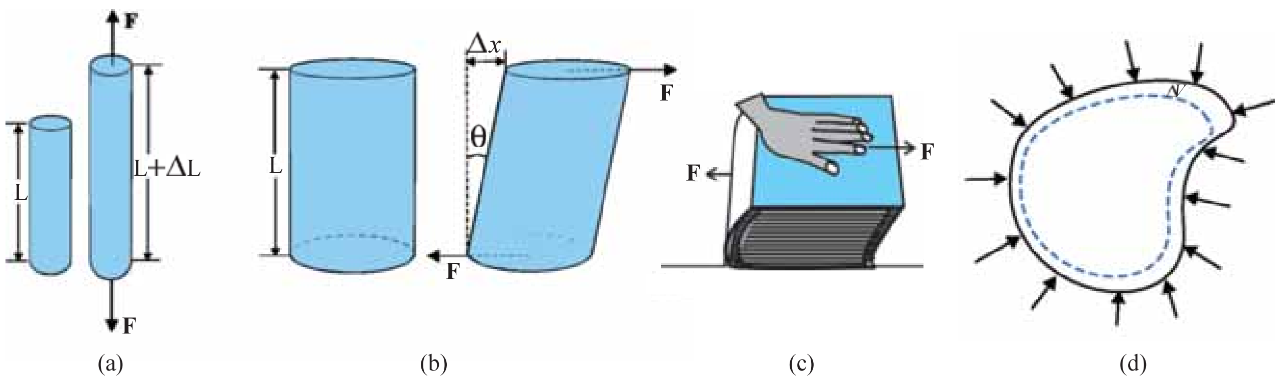
$$\text{આકાર વિકૃતિ} = \frac{\Delta x}{L} = \tan\theta \qquad (9.3)$$

જ્યાં θ શિરોલંબ (નળાકારની મૂળસ્થિતિ) સાથે નળાકારનું કોણીય સ્થાનાંતર છે. સામાન્ય રીતે θ ખૂબ જ સૂક્ષ્મ હોય છે, તેથી $\tan\theta$ એ લગભગ θકોણ જેટલું હોય છે. (ઉદાહરણ તરીકે $\theta = 10°$ હોય, તો θ અને $\tan\theta$માં માત્ર 1 % જેટલો તફાવત હોય છે.)

આકૃતિ 9.2(c)માં દર્શાવ્યા મુજબ જ્યારે પુસ્તકને હાથ વડે દબાવી સમક્ષિતિજ ધકેલવામાં આવે ત્યારે પણ તે જોઈ શકાય છે.

$$\text{આમ, આકાર વિકૃતિ} = \tan\theta \approx \theta. \qquad (9.4)$$

આકૃતિ 9.2 (d)માં દર્શાવ્યા મુજબ ઘન પદાર્થને ઊંચું દબાણ ધરાવતાં કોઈ તરલમાં મૂકવામાં આવે ત્યારે પદાર્થ બધી બાજુઓથી નિયમિત રીતે દબાય છે. તરલ વડે પદાર્થની સપાટીના દરેક



આકૃતિ 9.2 *(a) તણાવ પ્રતિબળની અસર હેઠળ નળાકાર પદાર્થની લંબાઈનો વધારો ΔL (b) નળાકાર પર લાગતું આકાર પ્રતિબળ તેને θ કોણ જેટલું વિરૂપિત કરે છે. (c) આકાર પ્રતિબળની અસર હેઠળ રહેલો પદાર્થ (d) સપાટીને દરેક બિંદુએ લંબરૂપે લાગતાં પ્રતિબળની અસર હેઠળ રહેલો ઘન પદાર્થ (હાઈડ્રોલિક પ્રતિબળ). કદ-વિકૃતિ $\Delta V/V$, પરંતુ આકારમાં ફેરફાર થતો નથી.*

બિંદુએ લંબરૂપે બળ લાગે છે અને પદાર્થ હાઇડ્રોલિક (જલીય) સંકોચનની સ્થિતિમાં છે તેમ કહેવાય છે. પરિણામે ભૌમિતિક આકારમાં ફેરફાર સિવાય તેના કદમાં ઘટાડો થાય છે.

પદાર્થમાં આંતરિક પુનઃસ્થાપકબળ ઉદ્‌ભવે છે જે તરલ દ્વારા લાગતાં બળ જેટલું જ અને તેની વિરુદ્ધ દિશામાં હોય છે. (પદાર્થને તરલની બહાર કાઢતાં તે પોતાનો મૂળ આકાર અને પરિમાણ પાછાં મેળવે છે.) આ કિસ્સામાં એકમ ક્ષેત્રફળ દીઠ આંતરિક પુનઃસ્થાપકબળ **હાઇડ્રોલિક (જલીય) પ્રતિબળ** તરીકે ઓળખાય છે. તેનું માન હાઇડ્રોલિક દબાણ (એકમ ક્ષેત્રફળ દીઠ લાગતાં બળ) જેટલું હોય છે.

હાઇડ્રોલિક દબાણને કારણે ઉદ્‌ભવતી વિકૃતિને **કદ-વિકૃતિ** કહે છે અને તેને કદના ફેરફાર ΔV અને મૂળ કદ Vના ગુણોત્તર સ્વરૂપે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે.

$$\text{કદ-વિકૃતિ} = \frac{\Delta V}{V} \tag{9.5}$$

અહીં વિકૃતિ પરિમાણનો ફેરફાર અને મૂળ પરિમાણનો ગુણોત્તર હોવાથી તેને કોઈ એકમ કે પારિમાણિક સૂત્ર નથી.

9.4 હૂકનો નિયમ (HOOKE'S LAW)

આકૃતિ 9.2માં દર્શાવેલ જુદી જુદી પરિસ્થિતિઓમાં પ્રતિબળ અને વિકૃતિ જુદા જુદા સ્વરૂપ ધારણ કરે છે. નાના વિરૂપણ માટે પ્રતિબળ અને વિકૃતિ એકબીજાનાં સપ્રમાણમાં હોય છે. આને હૂકનો નિયમ કહે છે. આ રીતે,

$$\text{પ્રતિબળ} \propto \text{વિકૃતિ}$$

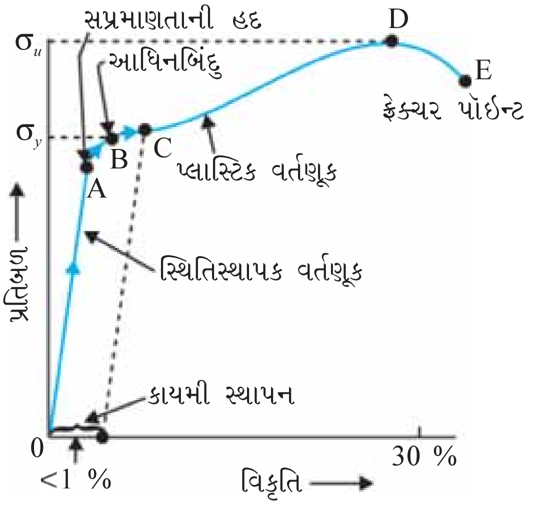
$$\text{પ્રતિબળ} = k \times \text{વિકૃતિ} \tag{9.6}$$

જ્યાં k = સપ્રમાણતાનો અચળાંક છે જેને સ્થિતિસ્થાપક અંક કહે છે.

હૂકનો નિયમ એક આનુભવિક નિયમ છે અને મોટા ભાગનાં દ્રવ્યોમાં તેનું પાલન થાય છે. જોકે કેટલાંક દ્રવ્યોમાં આ સપ્રમાણતાનો સંબંધ જળવાતો નથી.

9.5 પ્રતિબળ-વિકૃતિ વક્ર (STRESS-STRAIN CURVE)

તણાવ પ્રતિબળ અંતર્ગત આપેલ દ્રવ્ય માટે પ્રતિબળ અને વિકૃતિ વચ્ચેનો સંબંધ પ્રાયોગિક રીતે મેળવી શકાય છે. તણાવ લાક્ષણિકતાઓના પ્રમાણભૂત પરીક્ષણમાં બળ લાગુ પાડીને પરીક્ષણ નળાકાર કે તારને ખેંચવામાં આવે છે. લંબાઈમાં થતો આંશિક ફેરફાર (વિકૃતિ) અને વિકૃતિ ઉત્પન્ન કરવા માટે લાગુ પાડેલ બળ નોંધવામાં આવે છે. લાગુ પાડેલ બળને ક્રમશઃ વધારવામાં આવે છે અને લંબાઈમાં થતાં ફેરફાર નોંધવામાં આવે છે. પ્રતિબળ (કે જે એકમ ક્ષેત્રફળ દીઠ લાગુ પાડેલ બળનાં માન જેટલું હોય છે) વિરુદ્ધ ઉદ્‌ભવેલ વિકૃતિનો આલેખ દોરવામાં આવે છે. આકૃતિ 9.3માં કોઈ એક ધાતુ માટે આવો લાક્ષણિક આલેખ દર્શાવેલ છે. દાબીય અને આકાર પ્રતિબળ માટે પણ આવા જ આલેખ મેળવી શકાય છે. જુદાં જુદાં દ્રવ્યો માટે પ્રતિબળ-વિકૃતિ વક્રો જુદા જુદા હોય છે. આ વક્રો આપેલ દ્રવ્યમાં બોજના વધારા સાથે કેવું વિરૂપણ થશે તે સમજવામાં આપણને મદદ કરે છે. આલેખ પરથી આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, O થી A સુધીનો વક્ર સુરેખ છે. આ વિસ્તારમાં હૂકના નિયમનું પાલન થાય છે. જ્યારે વિરૂપક બળ દૂર કરવામાં આવે છે ત્યારે પદાર્થ પોતાનાં મૂળ પરિમાણો પુનઃપ્રાપ્ત કરે છે. આ વિસ્તારમાં ઘન પદાર્થ સ્થિતિસ્થાપક પદાર્થ તરીકે વર્તે છે.



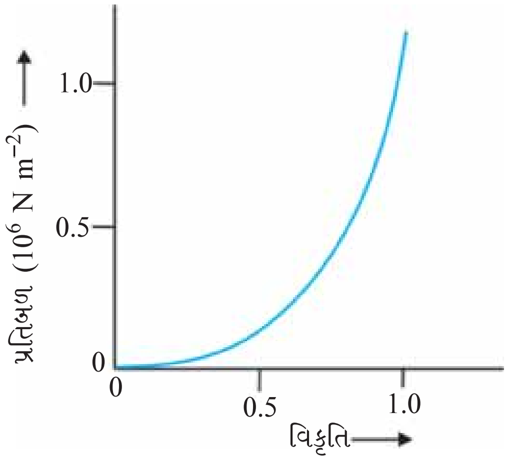
આકૃતિ 9.3 કોઈ એક ધાતુ માટે પ્રતિબળ-વિકૃતિ વક્ર

A થી B સુધીના વિસ્તારમાં પ્રતિબળ અને વિકૃતિ સપ્રમાણમાં નથી. છતાં બોજ દૂર કરતાં, પદાર્થ પોતાનાં મૂળ પરિમાણમાં પાછો ફરે છે. વક્રમાં બિંદુ Bને **આધિનબિંદુ (સ્થિતિસ્થાપકતાની હદ)** કહે છે અને તેને અનુરૂપ પ્રતિબળને દ્રવ્યની **આધિન પ્રબળતા (Yield Strength) (σ_y)** કહે છે.

જો બોજને વધારવામાં આવે તો ઉદ્‌ભવતું પ્રતિબળ આધિન પ્રબળતાથી વધી જાય છે અને ત્યારે પ્રતિબળના નાના ફેરફાર માટે વિકૃતિમાં ખૂબ જ ઝડપી વધારો થાય છે.

વક્રને B અને D વચ્ચેનો ભાગ આ બાબત દર્શાવે છે. B અને D વચ્ચે કોઈ એક બિંદુ ધારો કે C પાસે બોજ દૂર કરવામાં આવે તો પદાર્થ તેનાં મૂળ પરિમાણ પાછા મેળવતો નથી. આવી સ્થિતિમાં પ્રતિબળ શૂન્ય થવા છતાં વિકૃતિ શૂન્ય થતી નથી ત્યારે દ્રવ્યમાં કાયમી સ્થાપન થઈ ગયું છે એમ કહેવાય. આવા વિરૂપણને **પ્લાસ્ટિક વિરૂપણ** કહેવાય છે. આલેખ પરનાં બિંદુ Dને દ્રવ્યની અંતિમ **તણાવ પ્રબળતા (Tensile Strength) (σ_u)** કહે છે. આ બિંદુથી આગળ લાગુ પાડેલ બળ ઘટાડવામાં આવે તોપણ વધારાની વિકૃતિ ઉદ્‌ભવે છે અને E બિંદુ પાસે પદાર્થ તૂટી જાય છે. જો અંતિમ પ્રબળતા બિંદુ D અને ફ્રેક્ચર પૉઇન્ટ E પાસપાસે હોય તો દ્રવ્યને બટકણું દ્રવ્ય કહે છે. જો તે બિંદુઓ વધુ દૂર હોય તો દ્રવ્યને તન્ય દ્રવ્ય કહે છે.

અગાઉ નોંધ્યું તેમ જુદાં જુદાં દ્રવ્યો માટે પ્રતિબળ-વિકૃતિ વર્તણૂક જુદી જુદી હોય છે. ઉદાહરણ તરીકે રબરને તેની મૂળ લંબાઈ કરતાં ઘણું વધુ ખેંચી શકાય છે, છતાં તે પોતાનાં મૂળ આકારમાં



આકૃતિ 9.4 હૃદયમાંથી રુધિરને લઈ જતી મહાધમની (Aorta)ની સ્થિતિસ્થાપક પેશી માટે પ્રતિબળ-વિકૃતિ વક્ર

પાછું ફરે છે. આકૃતિ 9.4માં હૃદયમાં રહેલી મહાધમનીની સ્થિતિસ્થાપક પેશી માટે પ્રતિબળ-વિકૃતિ વક્ર દર્શાવેલ છે. અહીં નોંધો કે સ્થિતિસ્થાપક-વિસ્તાર ખૂબ જ મોટો હોવા છતાં આ દ્રવ્ય તે વિસ્તારમાં હૂકના નિયમને અનુસરતું નથી અને બીજું કે તેમાં કોઈ સ્પષ્ટ પ્લાસ્ટિક વિસ્તાર પણ નથી. મહાધમનીની પેશી, રબર વગેરે જેવાં દ્રવ્યોને ખેંચીને બહુ મોટી વિકૃતિ ઉત્પન્ન કરી શકાય છે. તેવાં દ્રવ્યોને **ઈલાસ્ટોમર** કહે છે.

9.6 સ્થિતિસ્થાપક અંકો (ELASTIC MODULI)

સ્ટ્રક્ચરલ અને મેન્યુફેક્ચરિંગ એન્જિનિયરિંગ ડિઝાઈન માટે પ્રતિબળ-વિકૃતિ વક્રમાં સ્થિતિસ્થાપકતાની હદ પહેલાનો સપ્રમાણતાવાળો વિસ્તાર (આકૃતિ 9.3માં *OA* વિસ્તાર) ખૂબ જ મહત્ત્વનો છે. પ્રતિબળ અને વિકૃતિના ગુણોત્તરને **સ્થિતિસ્થાપક અંક** કહે છે તથા તે આપેલ દ્રવ્ય માટે લાક્ષણિક હોવાનું જણાય છે.

9.6.1 યંગ મૉડ્યુલસ (Young's Modulus)

પ્રાયોગિક અવલોકનો સૂચવે છે કે આપેલા દ્રવ્ય માટે તણાવ પ્રતિબળ હોય કે દાબીય પ્રતિબળ, ઉદ્‌ભવતી વિકૃતિનું માન સમાન હોય છે. તણાવ (અથવા દાબીય) પ્રતિબળ (σ) અને સંગત વિકૃતિ (ε)ના ગુણોત્તરને યંગ મૉડ્યુલસ કહે છે. તે સંકેત *Y* દ્વારા દર્શાવાય છે.

$$Y = \frac{\sigma}{\varepsilon} \tag{9.7}$$

સમીકરણ (9.1) અને (9.2) પરથી,

$$Y = (F/A) / (\Delta L/L)$$

$$= (F \times L) / (A \times \Delta L) \tag{9.8}$$

અહીં વિકૃતિ પરિમાણરહિત રાશિ હોવાથી યંગ મૉડ્યુલસનો એકમ પ્રતિબળના એકમ જેવો જ એટલે કે N m^{-2} અથવા પાસ્કલ (Pa) છે. કોષ્ટક 9.1માં કેટલાંક દ્રવ્યોનાં યંગ મૉડ્યુલસ અને આધિન પ્રબળતાનાં મૂલ્યો આપેલ છે.

કોષ્ટક 9.1માં આપેલ માહિતી પરથી જોઈ શકાય છે કે, ધાતુઓ માટે યંગ મૉડ્યુલસ વધારે છે માટે આવાં દ્રવ્યોની લંબાઈમાં નાનો ફેરફાર કરવા માટે મોટા બળની જરૂર પડે છે. 0.1 cm^2 આડછેદનું ક્ષેત્રફળ ધરાવતાં સ્ટીલના પાતળા તારની લંબાઈમાં 0.1 ટકાનો વધારો કરવા માટે 2000 N બળની જરૂર પડે છે. આટલા જ આડછેદનું ક્ષેત્રફળ ધરાવતાં ઍલ્યુમિનિયમ, પિત્તળ અને તાંબાના તારમાં આટલી જ વિકૃતિ ઉત્પન્ન કરવા માટે જરૂરી બળ અનુક્રમે 690 N, 900 N અને 1100 N હોય છે. એનો અર્થ એવો થાય કે, ઍલ્યુમિનિયમ, પિત્તળ અને તાંબા કરતાં સ્ટીલ વધુ સ્થિતિસ્થાપક છે. આ કારણોસર હેવી ડ્યુટિ મશીન અને સ્ટ્રક્ચરલ (સંરચનાત્મક) ડિઝાઈનમાં સ્ટીલને પસંદ કરવામાં આવે છે. લાકડું, હાડકું, કૉંક્રિટ અને કાચ માટે યંગ મૉડ્યુલસ ઓછા હોય છે.

કોષ્ટક 9.1 કેટલાંક દ્રવ્યના યંગ મૉડ્યુલસ, સ્થિતિસ્થાપકતાની હદ અને તણાવ-પ્રબળતા

પદાર્થ	યંગ મૉડ્યુલસ 10^9 N/m^2 σ_y	સ્થિતિસ્થાપકતાની હદ 10^7 N/m^2 %	તણાવ-પ્રબળતા 10^7 N/m^2 σ_u
ઍલ્યુમિનિયમ	70	18	20
તાંબું	120	20	40
લોખંડ (ઘડેલુ)	190	17	33
સ્ટીલ	200	30	50
હાડકું			
(તણાવ)	16		12
(દાબીય)	9		12

ઉદાહરણ 9.1 એક સ્ટ્રક્ચરલ સ્ટીલના સળિયાની ત્રિજ્યા 10 mm અને લંબાઈ 1.0 m છે. તેની લંબાઈની દિશામાં 100 kN બળ દ્વારા તેને ખેંચવામાં આવે છે. સળિયામાં (a) પ્રતિબળ (b) લંબાઈનો વધારો (elongation) અને (c) વિકૃતિની ગણતરી કરો. સ્ટ્રક્ચરલ સ્ટીલ માટે યંગ મૉડ્યુલસ 2.0×10^{11} N m^{-2} છે.

ઉકેલ

આપણે ધારી લઈએ કે સળિયો એક છેડેથી જકડીને રાખેલ છે અને બીજા છેડે સળિયાની લંબાઈની દિશામાં F જેટલું બળ લાગુ પાડેલ છે.

સળિયા પરનું પ્રતિબળ,

$$\text{પ્રતિબળ} = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi r^2}$$

$$= \frac{100 \times 10^3 \text{ N}}{3.14 \times (10^{-2} \text{ m})^2}$$

$$= 3.18 \times 10^8 \text{ N m}^{-2}$$

લંબાઈનો વધારો,

$$\Delta L = \frac{(F/A)L}{Y}$$

$$= \frac{(3.18 \times 10^8 \text{ N m})^{-2} (1 \text{ m})}{2 \times 10^{11} \text{ N m}^{-2}}$$

$$= 1.59 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$= 1.59 \text{ mm}$$

$$\text{વિકૃતિ} = \Delta L/L$$

$$= (1.59 \times 10^{-3} \text{ m}) / (1 \text{ m})$$

$$= 1.59 \times 10^{-3}$$

$$= 0.16 \ \%$$

ઉદાહરણ 9.2 3.0 mm જેટલો સમાન વ્યાસ ધરાવતાં, છેડાથી છેડા સાથે જોડાયેલા તાંબા અને સ્ટીલના તારની લંબાઈ અનુક્રમે 2.2 m અને 1.6 m છે. જ્યારે તેમને બોજ (Load) વડે ખેંચવામાં આવે છે ત્યારે તેમની લંબાઈમાં થતો કુલ વધારો 0.70 mm મળે છે. લાગુ પાડેલ બોજ મેળવો.

ઉકેલ તાંબા અને સ્ટીલના તારો સમાન તણાવ પ્રતિબળ હેઠળ છે. કારણ કે તેમને લાગુ પાડેલ તણાવ (સમાન બોજ) સમાન છે અને આડછેદનું ક્ષેત્રફળ A સમાન છે. સમીકરણ (9.7) મુજબ,

પ્રતિબળ = યંગ મૉડ્યુલસ × વિકૃતિ, આથી

$$W/A = Y_c \times (\Delta L_c / L_c) = Y_s \times (\Delta L_s / L_s)$$

જ્યાં c અને s અનુક્રમે તાંબા અને સ્ટેનલેસ સ્ટીલ માટેના સંકેત છે.

$$(\Delta L_c/\Delta L_s) = (Y_s / Y_c) \times (L_c / L_s)$$

$L_c = 2.2$ m અને $L_s = 1.6$ m આપેલ છે.

કોષ્ટક 9.1 પરથી $Y_c = 1.1 \times 10^{11}$ N m^{-2} અને

$Y_s = 2.0 \times 10^{11}$ N m^{-2}

$$\Delta L_c/\Delta L_s = (2.0 \times 10^{11}/1.1 \times 10^{11}) \times (2.2/1.6) = 2.5$$

લંબાઈમાં થતો કુલ વધારો $\Delta L_c + \Delta L_s = 7.0 \times 10^{-4}$ m

ઉપરનાં સમીકરણોનો ઉકેલ મેળવતાં,

$\Delta L_c = 5.0 \times 10^{-4}$ m અને $\Delta L_s = 2.0 \times 10^{-4}$ m

તેથી,

$$W = (A \times Y_c \times \Delta L_c)/L_c$$

$$= \pi(1.5 \times 10^{-3})^2 \times [(5.0 \times 10^{-4} \times 1.1 \times 10^{11})/2.2]$$

$$= 1.8 \times 10^2 \text{ N}$$

ઉદાહરણ 9.3 સર્કસમાં માનવ પિરામિડમાં સંતુલિત ગ્રૂપનો તમામ બોજ એક વ્યક્તિ કે જે પોતાની પીઠના સહારે સૂઈ ગયો હોય છે તેના પગ પર ટેકવાય છે (આકૃતિ 9.5માં દર્શાવ્યા મુજબ). પિરામિડની રચના કરતાં તમામ કલાકારો, પાટિયા અને ટેબલનું કુલ દળ 280 kg છે. તળિયે પોતાની પીઠ પર સૂઈ રહેલ વ્યક્તિનું દળ 60 kg છે. આ વ્યક્તિના દરેક સાથળનાં હાડકાંની લંબાઈ 50 cm અને અસરકારક ત્રિજ્યા 2.0 cm છે. વધારાના બોજને કારણે સાથળના દરેક હાડકાનું સંકોચન શોધો.

આકૃતિ 9.5 સર્કસમાં માનવ પિરામિડ

ઉકેલ તમામ કલાકારો, પાટિયા અને ટેબલ વગેરેનું કુલ દળ

= 280 kg

પિરામિડના તળિયે રહેલા કલાકારનું દળ = 60 kg

પિરામિડના તળિયે રહેલા કલાકારે પગ પર ટેકવેલ દળ

= 280 − 60 = 220 kg

આ ટેકવેલ દળનું વજન = 220 kg wt. = 220 × 9.8 N

= 2156 N

કલાકારના સાથળના દરેક હાડકા પર ટેકવેલ

બોજ = 1/2 (2156) N = 1078 N

કોષ્ટક 9.1 પરથી હાડકા માટે યંગ મૉડ્યુલસ,

$Y = 9.4 \times 10^9$ N m^{-2}

સાથળના દરેક હાડકાની લંબાઈ L = 0.5 m

સાથળના હાડકાની ત્રિજ્યા = 2.0 cm

તેથી સાથળના હાડકાના આડછેદનું ક્ષેત્રફળ

$A = \pi \times (2 \times 10^{-2})^2$ m^2 = 1.26×10^{-3} m^2

સમીકરણ 9.8નો ઉપયોગ કરીને સાથળના દરેક હાડકાનું સંકોચન ΔL નીચે મુજબ ગણી શકાય :

$\Delta L = [(F \times L) / (Y \times A)]$

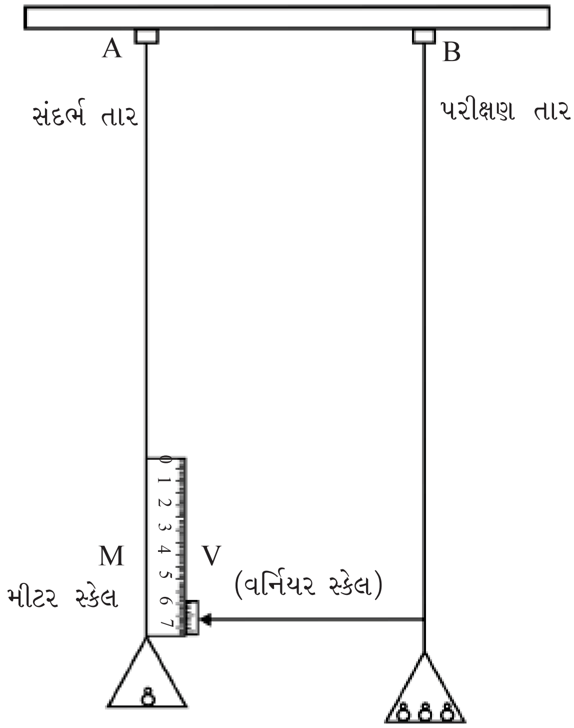
$= [(1078 \times 0.5) / (9.4 \times 10^9 \times 1.26 \times 10^{-3})]$

$= 4.55 \times 10^{-5}$ m અથવા 4.55×10^{-3} cm

જે ખૂબ જ સૂક્ષ્મ ફેરફાર છે ! સાથળનાં હાડકામાં આંશિક ઘટાડો $\Delta L/L$ = 0.000091 અથવા 0.0091 % ◀

9.6.2 તારનાં દ્રવ્યનો યંગ મૉડ્યુલસ નક્કી કરવો (Determination of Young's Modulus of the Material of a Wire)

તારનાં દ્રવ્યનો યંગ મૉડ્યુલસ નક્કી કરવા માટેની વિશિષ્ટ પ્રાયોગિક ગોઠવણી આકૃતિ 9.6માં દર્શાવેલ છે. તેમાં સ્થિર દૃઢ આધાર પરથી સમાન લંબાઈ અને સમાન ત્રિજ્યાવાળા બે સુરેખ તારને પાસપાસે લટકાવેલ છે. તાર A (સંદર્ભ તાર) મિલિમીટર માપક્રમનો મુખ્ય સ્કેલ M અને વજન મુકવા માટે પલ્લું (Pan) ધરાવે છે. નિયમિત આડછેદનું ક્ષેત્રફળ ધરાવતો તાર B (પરીક્ષણ તાર) પણ પલ્લું ધરાવે છે જેમાં જાણીતા વજનિયાં મૂકી શકાય છે પરીક્ષણ તાર Bના છેડે દર્શક સાથે વનિર્યર માપક્રમ જોડેલ છે અને સંદર્ભ તાર A સાથે મુખ્ય માપક્રમ M જડિત કરેલ છે. પલ્લામાં મૂકેલાં વજનિયાં અધોદિશામાં બળ લગાડે છે અને પરીક્ષણ તાર તણાવ પ્રતિબળની અસર હેઠળ ખેંચાય છે. વર્નિયરની ગોઠવણ દ્વારા પરીક્ષણ તારની લંબાઈમાં થતો વધારો (elongation) માપવામાં આવે છે. ઓરડાનાં તાપમાનમાં થતા ફેરફારને કારણે થતો લંબાઈનો ફેરફાર ભરપાઈ (Compensate) કરવા માટે સંદર્ભ તારનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. આ કારણે પરીક્ષણ તારની લંબાઈમાં તાપમાનને કારણે થતો ફેરફાર સંદર્ભ તારના ફેરફાર જેટલો જ હોય છે. (તાપમાનની આવી અસરોનો અભ્યાસ આપણે પ્રકરણ 11માં વિગતવાર કરીશું.)



આકૃતિ **9.6** તારના દ્રવ્યનો યંગ મૉડ્યુલસ નક્કી કરવા માટેની પ્રાયોગિક ગોઠવણી

પરીક્ષણ તાર અને સંદર્ભ તારને સીધા રાખવા માટે બંને તારને પ્રારંભમાં નાના બોજ હેઠળ રાખીને વર્નિયર અવલોકન નોંધવામાં આવે છે. હવે પરીક્ષણ તારને તણાવ પ્રતિબળની અસર હેઠળ લાવવા માટે તેના બોજમાં ક્રમશઃ વધારો કરવામાં આવે છે અને વર્નિયરનું અવલોકન ફરી નોંધવામાં આવે છે. બે વર્નિયર અવલોકનો વચ્ચેનો તફાવત તારની લંબાઈમાં ઉદ્ભવેલ વધારો આપે છે. ધારો કે, પરીક્ષણ તારની પ્રારંભિક ત્રિજ્યા અને લંબાઈ અનુક્રમે r અને L છે તો તારના આડછેદનું ક્ષેત્રફળ πr^2 થશે. ધારો કે M દળને કારણે તારની લંબાઈમાં ΔL જેટલો વધારો થાય છે. લાગુ પાડેલ બળ Mg જેટલું થશે. જ્યાં g ગુરુત્વપ્રવેગ છે. સમીકરણ (9.8) પરથી તારનાં દ્રવ્યનો યંગ મૉડ્યુલસ,

$$Y = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{Mg}{\pi r^2} \cdot \frac{L}{\Delta L}$$

$$= Mg \times L/(\pi r^2 \times \Delta L) \qquad (9.9)$$

પરથી મળે છે.

9.6.3 આકાર સ્થિતિસ્થાપક અંક (Shear Modulus)

આકાર પ્રતિબળ અને તેને અનુરૂપ આકાર વિકૃતિના ગુણોત્તરને દ્રવ્યનો આકાર સ્થિતિસ્થાપક અંક કહે છે અને તેને G દ્વારા દર્શાવાય છે. તેને દૃઢતા ગુણાંક (Modulus or rigidity) પણ કહે છે.

$$G = \text{આકાર પ્રતિબળ } (\sigma_s) \ / \ \text{આકાર વિકૃતિ } (\theta)$$

$$= (F/A)/(\Delta x/L)$$

$$= FL/A\Delta x \qquad (9.10)$$

આ રીતે સમીકરણ (9.4) પરથી,

$G = (F/A) / \theta$

$= (F/A\theta)$ (9.11)

આકાર પ્રતિબળ σ_sને નીચે મુજબ પણ દર્શાવી શકાય છે :

$\sigma_s = G \times \theta$ (9.12)

આકાર સ્થિતિસ્થાપક અંકનો SI એકમ N m^{-2} અથવા પાસ્કલ (Pa) છે. કોષ્ટક 9.2માં કેટલાંક સામાન્ય દ્રવ્યોના આકાર સ્થિતિસ્થાપક અંક આપેલા છે. અહીં જોઈ શકાય કે આકાર સ્થિતિસ્થાપક અંક (દૃઢતા ગુણાંક) સામાન્યતઃ યંગ મૉડ્યુલસથી ઓછા હોય છે (કોષ્ટક 9.1 પરથી). મોટા ભાગનાં દ્રવ્યો માટે, $G \approx Y/3$

કોષ્ટક 9.2 કેટલાંક સામાન્ય દ્રવ્યોના આકાર સ્થિતિસ્થાપક અંક (G)

દ્રવ્ય	G(10^9 Nm^{-2} અથવા GPa)
ઍલ્યુમિનિયમ	25
બ્રાસ(પિત્તળ)	36
તાંબું	42
કાચ	23
લોખંડ	70
સીસુ	5.6
નિકલ	77
સ્ટીલ	84
ટંગસ્ટન	150
લાકડું	10

ઉદાહરણ 9.4 50 cm બાજુની લંબાઈ ધરાવતાં સીસાનાં એક ચોરસ ચોસલાની જાડાઈ 10 cm છે. તેની પાતળી બાજુ પર 9.0×10^4 N જેટલું સ્પર્શીય બળ લાગુ પાડેલ છે. જો ચોસલાની નીચેની બાજુ ભોંયતળિયા સાથે જડિત કરેલી (riveted) હોય, તો તેની ઉપર તરફની બાજુ કેટલી સ્થાનાંતરિત થશે ?

ઉકેલ આકૃતિ 9.7માં દર્શાવ્યા મુજબ સીસાનું ચોસલું જડિત કરેલ છે અને પાતળી બાજુને સમાંતર બળ લાગુ પાડવામાં આવેલ છે. જે બાજુને સમાંતરે બળ લગાડવામાં આવ્યું છે તેનું ક્ષેત્રફળ

$A = 50 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$

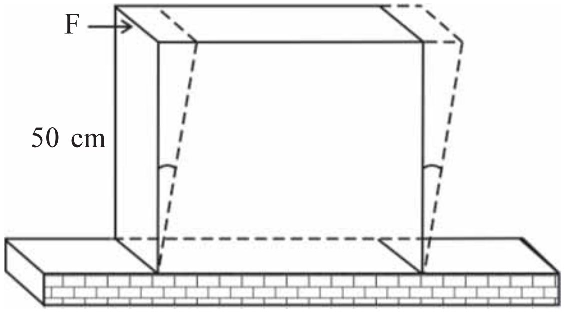
$= 0.5 \text{ m} \times 0.1 \text{ m}$

$= 0.05 \text{ m}^2$

માટે, લાગુ પાડેલ પ્રતિબળ,

$= (9.0 \times 10^4 \text{ N} / 0.05 \text{ m}^2)$

$= (1.8 \times 10^6 \text{ N m}^{-2})$



આકૃતિ 9.7

આપણે જાણીએ છીએ કે,

આકાર વિકૃતિ = $(\Delta x/L)$ = (પ્રતિબળ) / G. આથી, સ્થાનાંતર

Δx = (પ્રતિબળ × L) / G.

$= (1.8 \times 10^6 \text{ N m}^{-2} \times 0.5 \text{ m}) / (5.6 \times 10^9 \text{ N m}^{-2})$

$= 1.6 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.16 \text{ mm}$ ◀

9.6.4 કદસ્થિતિસ્થાપક અંક (Bulk Modulus)

પરિચ્છેદ (9.3)માં આપણે જોયું તેમ જ્યારે પદાર્થને પ્રવાહીમાં ડુબાડવામાં આવે ત્યારે તે હાઇડ્રોલિક પ્રતિબળ (દબાણના માન જેટલું જ)ની અસર હેઠળ આવે છે. જેથી પદાર્થના કદમાં ઘટાડો થાય છે. આથી ઉદ્ભવતી વિકૃતિને કદ વિકૃતિ કહે છે [સમીકરણ (9.5)]. હાઇડ્રોલિક પ્રતિબળ અને તેને અનુરૂપ કદ વિકૃતિના ગુણોત્તરને કદ સ્થિતિસ્થાપક અંક (Bulk modulus) કહે છે જેને B વડે દર્શાવાય છે.

$B = -p/(\Delta V/V)$ (9.13)

ઋણ નિશાની સૂચવે છે કે દબાણમાં વધારો થાય તેમ કદમાં ઘટાડો ઉદ્ભવે છે. આમ p ધન હોય તો ΔV ઋણ થશે. આમ, સંતુલનમાં રહેલા તંત્ર માટે બલ્ક મૉડ્યુલસ હંમેશાં ધન હોય છે. બલ્ક મૉડ્યુલસનો એકમ દબાણનો જ એકમ છે. એટલે કે N m^{-2} અથવા Pa. કેટલાંક સામાન્ય દ્રવ્યોના બલ્ક મૉડ્યુલસ કોષ્ટક 9.3માં આપેલ છે.

કોષ્ટક 9.3 કેટલાંક સામાન્ય દ્રવ્યોના બલ્ક મૉડ્યુલસ (B)

દ્રવ્ય (ઘન)	B(10^9 N m^{-2} અથવા GPa)
ઍલ્યુમિનિયમ	72
પિત્તળ	61
તાંબું	140
કાચ	37
લોખંડ	100
નિકલ	260
સ્ટીલ	160
પ્રવાહી	
પાણી	2.2
ઈથેનોલ	0.9
કાર્બન ડાઈસલ્ફાઈડ	1.56
ગ્લિસરિન	4.76
પારો	25
વાયુઓ	
હવા (S T P એ)	1.0×10^{-4}

બલ્ક મૉડ્યુલસના વ્યસ્તને દબનીયતા કહે છે. તેને k વડે દર્શાવાય છે. દબાણમાં એક એકમના વધારા દીઠ કદમાં થતા આંશિક ફેરફાર દ્વારા તેને વ્યાખ્યાયિત કરાય છે.

$$k = (1/B) = -(1/\Delta p) \times (\Delta V/V) \quad (9.14)$$

કોષ્ટક 9.3માં આપેલ માહિતી પરથી જોઈ શકાય છે કે ઘન પદાર્થ માટે બલ્ક મૉડ્યુલસ પ્રવાહીના બલ્ક મૉડ્યુલ્સ કરતાં ઘણા મોટા છે અને પ્રવાહીના બલ્ક મૉડ્યુલસ વાયુઓ (હવા)ના બલ્ક મૉડ્યુલ્સ કરતાં ઘણા મોટા હોય છે. આમ ઘન સૌથી ઓછા દબનીય હોય છે. જ્યારે વાયુઓ સૌથી વધુ દબનીય હોય છે. ઘનની સાપેક્ષે વાયુઓ દસ લાખ ગણા વધુ દબનીય હોય છે. વાયુઓની દબનીયતા વધુ હોય છે જે તાપમાન અને દબાણ સાથે બદલાય છે. ઘનની અદબનીયતા મુખ્યત્વે પડોશી પરમાણુઓ સાથેના દૃઢ યુગ્મનને કારણે હોય છે. પ્રવાહીના અણુઓ પણ પોતાના પડોશી અણુઓ સાથે બંધનમાં હોય છે. પરંતુ તે એટલું પ્રબળ નથી હોતું જેટલું ઘનમાં હોય છે. વાયુના અણુઓ તેના પડોશી અણુઓ સાથે નિર્બળ યુગ્મન ધરાવે છે.

કોષ્ટક 9.4માં જુદા જુદા પ્રકારના પ્રતિબળ, વિકૃતિ સ્થિતિસ્થાપક અંક અને લાગુ પડતી દ્રવ્યની અવસ્થા દર્શાવેલ છે.

▶ *ઉદાહરણ* **9.5** હિન્દ મહાસાગરની સરેરાશ ઊંડાઈ 3000 m છે. મહાસાગરના તળિયે પાણી માટે આંશિક સંકોચન ΔV/Vની ગણતરી કરો. પાણી માટે બલ્ક મૉડ્યુલસ 2.2×10^9 N m^{-2}. (g = 10 m s^{-2} લો.)

ઉકેલ તળિયાના સ્તર પર 3000 m ઊંચાઈવાળા પાણીના સ્તંભ વડે ઉદ્‌ભવતું દબાણ,

$$P = h\rho g = 3000 \text{ m} \times 1000 \text{ kg m}^{-3} \times 10 \text{ m s}^{-2}$$
$$= 3 \times 10^7 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-2}$$
$$= 3 \times 10^7 \text{ N m}^{-2}$$

આંશિક સંકોચન $\Delta V/V$ =

પ્રતિબળ/B = $(3 \times 10^7 \text{ N m}^{-2}) / (2.2 \times 10^9 \text{ N m}^2)$

= 1.36×10^{-2} અથવા 1.36 % ◀

9.6.5 પોઈસન ગુણોત્તર (Poisson's Ratio)

યંગ મૉડ્યુલસના પ્રયોગમાં (પરિચ્છેદ 9.6.2માં સમજાવ્યા મુજબ) કાળજીપૂર્વકનાં અવલોકનો દર્શાવે છે કે તારના આડછેદની ત્રિજ્યામાં (અથવા વ્યાસમાં) થોડોક ઘટાડો થાય છે. લાગુ પાડેલ બળને લંબ વિકૃતિને **પાર્શ્વિક વિકૃતિ** (Lateral strain) કહે છે. સાઈમન પોઇસને શોધી કાઢ્યું કે, સ્થિતિસ્થાપકતાની હદ સુધીમાં પાર્શ્વિક વિકૃતિ સંગત વિકૃતિને સમપ્રમાણમાં હોય છે. પાર્શ્વિક વિકૃતિ અને સંગત વિકૃતિના ગુણોત્તરને **પોઇસન ગુણોત્તર** (Poission's Ratio) કહે છે. જો તારનો મૂળ વ્યાસ d અને પ્રતિબળને લીધે વ્યાસમાં થતો ઘટાડો Δd હોય, તો પાર્શ્વિક વિકૃતિ $\Delta d/d$ થશે. જો તારની મૂળ લંબાઈ L હોય તથા પ્રતિબળને લીધે લંબાઈનો વધારો ΔL હોય તો સંગત

કોષ્ટક 9.4 પ્રતિબળ, વિકૃતિ તથા જુદા જુદા સ્થિતિસ્થાપક અંક

પ્રતિબળનો પ્રકાર	પ્રતિબળ	વિકૃતિ	થતો ફેરફાર		સ્થિતિસ્થાપક અંક	સ્થિતિસ્થાપક અંકનું નામ	દ્રવ્યની સ્થિતિ
			આકાર	કદ			
તણાવ અથવા દાબીય	સમાન મૂલ્યના પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશામાંનાં બે બળો સપાટી પર લંબ દિશામાં ($\sigma = F/A$)	બળને સમાંતર દિશામાં લંબાઈમાં વધારો કે સંકોચન ($\Delta L/L$) (સંગતવિકૃતિ)	હા	ના	$Y = (F \times L) / (A \times \Delta L)$	યંગ મૉડ્યુલસ	ઘન
આકાર	સામસામી બે સપાટી પર સપાટીને સમાંતર પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશામાં લાગતાં સમાન મૂલ્યનાં બે બળો (દરેક કિસ્સામાં પદાર્થ પર લાગતું પરિણામી બળ અને પરિણામી ટૉર્ક શૂન્ય થાય.) ($\sigma_s = F/A$)	આકાર, θ (શુદ્ધ આકાર)	હા	ના	$G = (F \times \theta)/A$	આકાર મૉડ્યુલસ	ઘન
હાઇડ્રોલિક	સમગ્ર સપાટીના દરેક બિંદુએ લંબરૂપે બળ લાગે છે. એકમ ક્ષેત્રફળ દીઠ લાગતું બળ (દબાણ) દરેક બિંદુએ સમાન હોય છે.	કદમાં ફેરફાર થાય છે. (સંકોચન અથવા વિસ્તરણ ($\Delta V/V$)	ના	હા	$B = -P/(\Delta V/V)$	બલ્ક મોડ્યુલસ	ઘન પ્રવાહી અને વાયુ

વિકૃતિ $\Delta L/L$. તેથી પોઇસન ગુણોત્તર $(\Delta d/d)/(\Delta L/L)$ અથવા $(\Delta d/\Delta L) \times (L/d)$. પોઇસન ગુણોત્તર બે વિકૃતિઓનો ગુણોત્તર છે તે અંક છે અને તેને પરિમાણ કે એકમ નથી. તેનું મૂલ્ય દ્રવ્યના પ્રકાર પર આધારિત છે. સ્ટીલ માટે તેનું મૂલ્ય 0.28થી 0.30ની વચ્ચે છે. ઍલ્યુમિનિયમની મિશ્ર ધાતુઓ માટે તે લગભગ 0.33 છે.

9.6.6 ખેંચાણમાં રહેલા તારમાં સ્થિતિસ્થાપકીય સ્થિતિઊર્જા (Elastic Potential Energy in a Stretched Wire)

જ્યારે એક તારને તણાવ પ્રતિબળ હેઠળ રાખેલ હોય ત્યારે આંતરપરમાણ્વીય બળો વિરુદ્ધ કાર્ય થતું હોય છે. આ કાર્ય તારમાં સ્થિતિસ્થાપકીય સ્થિતિઊર્જા રૂપે સંગ્રહ પામે છે. L જેટલી મૂળ લંબાઈ અને A આડછેદનું ક્ષેત્રફળ ધરાવતો તાર જ્યારે લંબાઈની દિશામાં વિરૂપક બળની અસર હેઠળ હોય ત્યારે ધારો કે લંબાઈમાં થતો વધારો l છે. તો સમીકરણ (9.8) પરથી, $F = YA \times (l/L)$ અહીં Y તારનાં દ્રવ્યનો યંગ મૉડ્યુલસ છે.

હવે લંબાઈમાં અતિસૂક્ષ્મ dl જેટલો વધારો કરવા માટે કરવું પડતું કાર્ય dW, $F \times dl$ અથવા $YAl dl/L$ જેટલું થશે. માટે તારની લંબાઈ L થી $L + l$ જેટલી કરવા માટે કરવું પડતું કાર્ય W છે, જે $l = 0$ થી $l = l$ માટે થતું કાર્ય છે.

$$W = \int_0^l \frac{YAl}{L}\, dl = \frac{YA}{2} \frac{l^2}{L}$$

$$W = \frac{1}{2} \times Y \times \left(\frac{l}{L}\right)^2 \times AL$$

$$= \frac{1}{2} \times \text{યંગ મોડ્યુલસ} \times (\text{વિકૃતિ})^2 \times \text{તારનું કદ}$$

$$= \frac{1}{2} \times \text{પ્રતિબળ} \times \text{વિકૃતિ} \times \text{તારનું કદ}$$

આમ, તારમાં સંગ્રહીત થતું કાર્ય સ્થિતિસ્થાપકીય સ્થિતિ ઊર્જા (U) છે. માટે એકમ કદ દીઠ સંગ્રહિત સ્થિતિસ્થાપકીય સ્થિતિઊર્જા (u)

$$u = \frac{1}{2}\, \sigma\varepsilon \qquad \text{(A-1)}$$

પરથી મળે છે.

9.7 દ્રવ્યોની સ્થિતિસ્થાપક વર્તણૂકનો ઉપયોગ (APPLICATIONS OF ELASTIC BEHAVIOUR OF MATERIALS)

રોજિંદા જીવનમાં દ્રવ્યોની સ્થિતિસ્થાપક વર્તણૂક અગત્યનો ભાગ ભજવે છે. બધી જ એન્જિનિયરિંગ ડિઝાઇન માટે દ્રવ્યની સ્થિતિસ્થાપક વર્તણૂકનું સચોટ જ્ઞાન જરૂરી છે. ઉદાહરણ તરીકે મકાનની ડિઝાઇન બનાવતી વખતે સ્તંભ, પાટડા અને આધારની સ્ટ્રક્ચરલ ડિઝાઇન માટે વપરાતાં દ્રવ્યોની મજબૂતાઈનું જ્ઞાન હોવું જરૂરી છે. શું તમે કદી વિચાર્યું છે કે પુલની રચનામાં આધાર તરીકે ઉપયોગમાં લેવાતા સ્તંભો શા માટે I આકારના હોય છે ? શા માટે, માટીનો ઢગલો કે ટેકરી પિરામિડ આકારની હોય છે ? આ પ્રશ્નોના જવાબ અહીં તૈયાર કરેલ ખ્યાલો પર આધારિત સ્ટ્રક્ચરલ એન્જિનિયરિંગનાં અભ્યાસ પરથી મેળવી શકાય છે.

ભારે બોજને ઉપાડવા અને એક સ્થળેથી બીજા સ્થળે લઈ જવા માટે વપરાતી ક્રેનમાં જાડું ધાતુનું દોરડું ભારે બોજ સાથે જોડેલું હોય છે. ગરગડી અને મોટરનો ઉપયોગ કરીને દોરડાને ઉપર ખેંચવામાં આવે છે. ધારો કે આપણે એક ક્રેન બનાવવા માંગીએ છીએ જેની બોજ ઊંચકવાની ક્ષમતા 10 ટન (1 મેટ્રિક ટન = 1000 kg) હોય, તો દોરડાની જાડાઈ કેટલી હોવી જોઈએ ? સ્પષ્ટ છે કે આપણે ઇચ્છીએ કે દોરડું બોજને કારણે કાયમી વિરૂપણ ન પામે, આ માટે વિરૂપણ સ્થિતિસ્થાપક હદથી વધુ ન હોવું જોઈએ. કોષ્ટક 9.1 પરથી નરમ સ્ટીલની આધિન પ્રબળતા (S_y) $300 \times 10^6\ N\ m^{-2}$ છે. આમ દોરડાના આડછેદનું ઓછામાં ઓછું ક્ષેત્રફળ (A),

$$A \geq W/S_y = Mg/S_y \qquad (9.15)$$

$$= (10^4\ kg \times 10\ m\ s^{-2})/(300 \times 10^6\ N\ m^2)$$

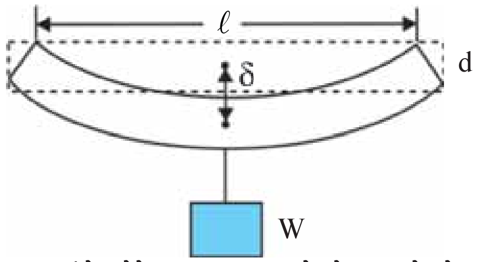
$$= 3.3 \times 10^{-4}\ m^2)$$

આ સંદર્ભે દોરડાના વર્તુળાકાર આડછેદની ત્રિજ્યા લગભગ 1 cm જેટલી થાય. સામાન્ય રીતે સુરક્ષાના હેતુથી એક મોટું માર્જિન (બોજના 10 ગણા જેવું) રાખવામાં આવે છે. આ રીતે લગભગ 3 cm ત્રિજ્યાવાળું જાડું દોરડું વાપરવાનું સૂચવવામાં આવે છે. આટલી ત્રિજ્યાનો એક તાર વ્યાવહારિક રીતે દૃઢ સળિયો કહેવાય. દોરડું લચકદાર, મજબૂત અને ઉત્પાદનમાં સરળતા રહે તે માટે હંમેશાં ઘણા બધા પાતળા તારને વેણીની માફક એકબીજા સાથે ગૂંથીને બનાવવામાં આવે છે.

કોઈ પણ પુલની ડિઝાઇન એવી રીતે તૈયાર કરવામાં આવે છે કે જેથી તે વાહનવ્યવહારનો ભાર, પવનને લીધે લાગતું બળ અને પોતાના વજનને સહન કરી શકે. આ જ રીતે બિલ્ડિંગની ડિઝાઇનમાં સ્તંભો અને પાટડાનો ઉપયોગ જાણીતો છે. બંને કિસ્સાઓમાં બોજ હેઠળ પાટડાનાં વંકનની સમસ્યાનું નિરાકરણ કરવું મહત્ત્વપૂર્ણ છે. પાટડો વધુ પડતો વળવો કે તૂટવો ન જોઈએ. આકૃતિ 9.8માં દર્શાવ્યા મુજબ આપણે એક પાટડાનો વિચાર કરીએ કે જે બંને છેડેથી એક આધાર પર ટેકવેલ છે અને વચ્ચેથી બોજ લટકાવેલ છે. લંબાઈ l, પહોળાઈ b અને ઊંડાઈ d વાળા સળિયા (bar)નાં કેન્દ્ર પર W બોજ લટકાવતાં તેમાં ઉદ્ભવતાં વંકનની માત્રા

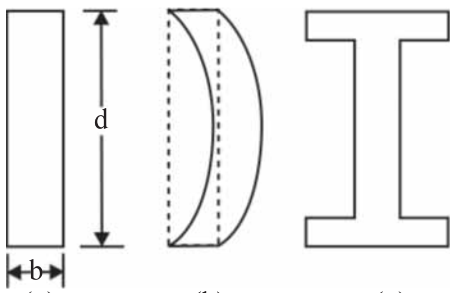
$$\delta = Wl^3/\ (4\ bd^3 Y) \qquad (9.16)$$

પરથી મળે છે.



આકૃતિ 9.8 બંને છેડે આધાર પર ટેકવેલ અને કેન્દ્ર પર ભારિત પાટડો (Beam)

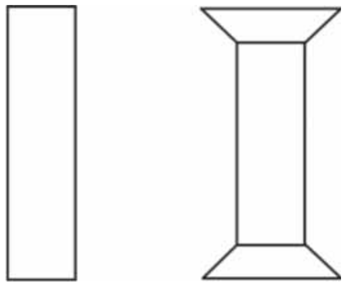
કેટલીક ગણતરીઓ અને તમે જે અભ્યાસ કરી ચૂક્યા તેનો ઉપયોગ કરીને આ સંબંધ સાબિત કરી શકાય છે. સમીકરણ (9.16) પરથી સ્પષ્ટ છે કે, આપેલ બોજ માટે વંકન ઘટાડવા માટે એવા દ્રવ્યનો ઉપયોગ કરવો જોઈએ જેનો યંગ મૉડ્યુલસ મોટો હોય. આપેલ દ્રવ્ય માટે વંકન ઘટાડવા માટે પહોળાઈ b વધારવાને બદલે જાડાઈ d વધારવી વધુ અસરકારક રહે છે. કારણ કે δ, d^{-3}ને સપ્રમાણ અને b^{-1}ને સપ્રમાણ છે. (જોકે બે ટેકા વચ્ચેનું અંતર l ઓછું જ હોવું જોઈએ.) જો બોજ ચોક્કસ સ્થાને ન હોય ત્યારે, (પુલ પર ગતિશીલ વાહનવ્યવહારમાં આવી ગોઠવણી કરવી કઠિન છે.) પરંતુ જો જાડાઈ dમાં વધારો કરતાં આકૃતિ 9.9 (b) મુજબ સળિયા (bar)માં વિરૂપણ ઉદ્ભવે છે. જેને બકલિંગ કહે છે. જેનાં સામાન્ય નિવારણ માટે સળિયાના આડછેદનો આકાર આકૃતિ 9.9 (c) જેવો રાખવામાં આવે છે. આવો આડછેદ મોટા ભારવહન માટેની સપાટી પૂરી પાડે છે અને વંકન રોકવા માટે પૂરતી ઊંડાઈ આપે છે. આવો આકાર પાટડાની પ્રબળતાનો ભોગ આપ્યા વગર પાટડાનું વજન ઘટાડે છે અને તેની કિંમત પણ ઘટી જાય છે.



(a) (b) (c)

આકૃતિ 9.9 *પાટડા (Beam)ના આડછેદના જુદા જુદા આકાર (a) એક સળિયા (bar)નો લંબચોરસ આડછેદ (b) એક પાતળો સળિયો અને તે કેવી રીતે વંકન થાય છે. (c) ભારવહન કરતા સળિયા (bar) માટે સામાન્ય રીતે ઉપયોગમાં લેવાતો આડછેદ.*

બિલ્ડિંગ અને પુલમાં થાંભલા અથવા સ્તંભોનો ઉપયોગ ખૂબ જ પ્રચલિત છે. આકૃતિ 9.10 (a)માં દર્શાવ્યા મુજબ ગોળ છેડાવાળા થાંભલા, 9.10(b)માં દર્શાવેલ વધુ ફેલાવો ધરાવતાં છેડાવાળા થાંભલાની સરખામણીએ ઓછા બોજને વહન કરે છે. કોઈ પણ બિલ્ડિંગ કે પુલની સચોટ ડિઝાઈન કરતી વખતે તે બાબતોનું ધ્યાન રાખવું પડે કે તે કઈ પરિસ્થિતિઓમાં કામ કરશે; તેની કિંમત કેટલી થશે અને સંભવિત દ્રવ્યોની દીર્ઘકાલીન વિશ્વસનીયતા વગેરે શું હશે ?



(a) (b)

આકૃતિ 9.10 *સ્તંભ અથવા થાંભલા (a) ગોળાકાર છેડા ધરાવતો થાંભલો (b) ફેલાવો ધરાવતા છેડાવાળો થાંભલો*

શા માટે પૃથ્વી પરના કોઈ પર્વતની મહત્તમ ઊંચાઈ લગભગ 10 km જેટલી હોઈ શકે ? આ પ્રશ્નોનો ઉત્તર ખડકોના સ્થિતિસ્થાપક ગુણધર્મો પર વિચાર કરવાથી મળી શકે છે. પર્વતનો પાયો સમાન દબાણ હેઠળ હોતો નથી. આ બાબત ખડકોને આકાર પ્રતિબળ પૂરું પાડે છે. જેને કારણે ખડકો સરકી શકે છે. ટોચ પરનાં બધાં જ દ્રવ્યોને કારણે ઉદ્ભવતું પ્રતિબળ જેને કારણે ખડકો સરકે છે તે ક્રાંતિક આકાર પ્રતિબળ કરતાં ઓછું હોવું જોઈએ.

h ઊંચાઈવાળા પર્વતના તળિયે પર્વતના વજનને કારણે એકમ ક્ષેત્રફળ પર લાગતું બળ $h\rho g$ હોય છે. જ્યાં ρ પર્વતના દ્રવ્યની ઘનતા અને g ગુરુત્વપ્રવેગ છે. તળિયે રહેલું દ્રવ્ય શિરોલંબ અધોદિશામાં આ બળ અનુભવે છે, પરંતુ પર્વતની બાજુઓ આ બળથી સ્વતંત્ર હોય છે. એટલે કે આ કિસ્સો દબાણ અથવા કદ-સંકોચનનો નથી. આ પ્રતિબળનો આકાર (સ્પર્શીય) ઘટક છે. જે લગભગ $h\rho g$ જેટલો જ છે. હવે વિશિષ્ટ ખડક માટે સ્થિતિસ્થાપક હદ 30×10^7 N m^{-2} છે. તેને $h\rho g$ સાથે સરખાવીએ, જ્યાં $\rho = 3 \times 10^3$ kgm^{-3} હોય, તો

$h\rho g = 30 \times 10^7$ N m^{-2} અથવા

$$h = 30 \times 10^7 \text{ N m}^{-2} / (3 \times 10^3 \, kg \, m^{-3} \times 10 \text{ m s}^{-2})$$
$$= 10 \text{ km}$$

જે માઉન્ટ એવરેસ્ટની ઊંચાઈ કરતાં વધુ છે.

સારાંશ

1. એકમ ક્ષેત્રફળ દીઠ પુનઃસ્થાપકબળ એ પ્રતિબળ છે અને પરિમાણનો આંશિક ફેરફાર એ વિકૃતિ છે. સામાન્યતઃ ત્રણ પ્રકારનાં પ્રતિબળ હોય છે. (a) પ્રતાન પ્રતિબળ - સંગતપ્રતિબળ (તણાવ સાથે સંકળાયેલ) અથવા દાબીય પ્રતિબળ (સંકોચન સાથે સંકળાયેલ) (b) આકાર પ્રતિબળ (c) હાઇડ્રોલિક પ્રતિબળ.
2. ઘણાં દ્રવ્યો માટે વિરૂપણ નાનું હોય ત્યારે પ્રતિબળ વિકૃતિને સપ્રમાણ હોય છે. જે હૂકનાં નિયમ તરીકે ઓળખાય છે. સપ્રમાણતાનો અચળાંક સ્થિતિસ્થાપક-અંક કહેવાય છે. વિરૂપણ બળોની અસર હેઠળ પદાર્થોની પ્રતિક્રિયા અને સ્થિતિસ્થાપક વર્તણૂકનું વર્ણન કરવા માટે ત્રણ સ્થિતિસ્થાપક-અંકો યંગ મૉડ્યુલસ, આકાર મૉડ્યુલસ અને બલ્ક મૉડ્યુલસનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. ઘન પદાર્થોનો એક પ્રકાર ઇલાસ્ટોમર તરીકે ઓળખાય છે, જે હૂકના નિયમનું પાલન કરતો નથી.
3. જ્યારે કોઈ પદાર્થ તણાવ કે સંકોચન હેઠળ હોય ત્યારે હૂકનાં નિયમનું સ્વરૂપ $F/A = Y\Delta L/L$ હોય છે. જ્યાં $\Delta L/L$ પદાર્થની તણાવ કે દાબીય વિકૃતિ, F વિકૃતિ ઉત્પન્ન કરતાં બળનું માન છે.

A આડછેદનું ક્ષેત્રફળ જે જેનાં પર બળ F લાગુ પાડેલ છે. (જે A ને લંબદિશામાં છે) અને Y પદાર્થ માટે યંગ મૉડ્યુલસ છે. અહીં પ્રતિબળ F/A છે.

4. પદાર્થની ઉપરની અને નીચેની સપાટીને સમાંતર બળોની જોડ લાગુ પાડવામાં આવે છે ત્યારે પદાર્થ એવી રીતે વિરૂપણ અનુભવે છે કે જેથી ઉપરની સપાટી, નીચેની સપાટીની સાપેક્ષે કોઈ એક બાજુ વિસ્થાપન અનુભવે. ઉપરની સપાટીનું સમક્ષિતિજ વિસ્થાપન ΔL શિરોલંબ ઊંચાઈ Lને લંબ હોય છે. આ પ્રકારના વિરૂપણને આકાર વિરૂપણ કહે છે. તેને અનુરૂપ પ્રતિબળને આકાર પ્રતિબળ કહે છે. આવું પ્રતિબળ માત્ર ઘનમાં જ ઉદ્ભવે છે. આવા વિરૂપણ માટે હૂકનો નિયમ નીચેના સ્વરૂપે લઈ શકાય :

$$F/A = G\Delta L/\mathrm{L}$$

જ્યાં ΔL લાગુ પાડેલ બળ Fની દિશામાં પદાર્થના એક છેડાનું વિસ્થાપન અને G આકાર મૉડ્યુલસ છે.

5. જ્યારે કોઈ પદાર્થ તેની ફરતે રહેલા પ્રવાહી દ્વારા લાગુ પડતા પ્રતિબળને કારણે હાઇડ્રોલિક (જલીય) સંકોચન અનુભવે છે ત્યારે હૂકનો નિયમ નીચેનાં સ્વરૂપે લઈ શકાય :

$$P = B(\Delta V/\mathrm{V})$$

જ્યાં P એ પ્રવાહીને કારણે પદાર્થ પર લાગતું દબાણ (જલીય પ્રતિબળ), $\Delta V/\mathrm{V}$ એ દબાણને કારણે પદાર્થના કદમાં થતો નિરપેક્ષ આંશિક ફેરફાર (કદ-વિકૃતિ) અને B પદાર્થનો બલ્ક મૉડ્યુલસ છે.

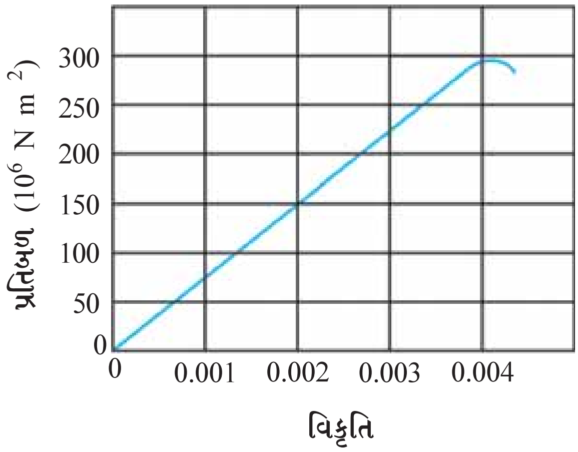
ગહન વિચારણાના મુદ્દા

1. કોઈ એક તારના કિસ્સામાં તારને છત (celling) પરથી લટકાવેલ હોય અને તેના બીજા છેડે બોજ F લટકાવીને તેની અસર હેઠળ ખેંચવામાં આવ્યો હોય, તો છત દ્વારા તેના પર લાગતું બળ ભાર જેટલું જ અને તેની વિરુદ્ધ દિશામાં હોય છે. જોકે તારના કોઈ પણ આડછેદ A પર લાગતું તણાવ એ F જેટલું જ હોય છે તે $2F$ ન હોઈ શકે. આમ, તણાવ પ્રતિબળ એકમ ક્ષેત્રફળ દીઠ લાગતાં તણાવ એટલે કે F/A જેટલું હોય છે.
2. હૂકનો નિયમ પ્રતિબળ-વિકૃતિ વક્રના રેખીય ભાગ માટે જ સત્ય છે.
3. યંગ મૉડ્યુલસ અને આકાર મૉડ્યુલસ માત્ર ઘન પદાર્થો સાથે સંબંધિત છે, કારણ કે ઘન પદાર્થો જ લંબાઈ અને આકાર ધરાવે છે.
4. બલ્ક મૉડ્યુલસ ઘન, પ્રવાહી અને વાયુઓ બધા જ સાથે સંબંધિત છે. જ્યારે પદાર્થના પ્રત્યેક ભાગ પર સમાન પ્રતિબળ લાગે ત્યારે કદમાં થતા ફેરફારના સંદર્ભમાં તે છે અને તેના આકારમાં ફેરફાર થતો નથી.
5. ધાતુઓ માટે યંગ મૉડ્યુલસનું મૂલ્ય મિશ્રધાતુ અને ઈલાસ્ટોમર કરતાં વધુ હોય છે. યંગ મૉડ્યુલસનું મોટું મૂલ્ય ધરાવતાં દ્રવ્યોમાં લંબાઈમાં સૂક્ષ્મ ફેરફાર માટે ખૂબ જ વધુ બળની જરૂર પડે છે.
6. રોજિંદા જીવનમાં આપણી એવી ધારણા હોય છે કે જે દ્રવ્યને વધુ ખેંચી શકાય તે વધુ સ્થિતિસ્થાપક છે, પરંતુ તે ધારણા ખોટી છે. વાસ્તવમાં જે દ્રવ્ય આપેલ બોજ દ્વારા ઓછા ખેંચી શકાતા હોય તે વધુ સ્થિતિસ્થાપક હોય છે.
7. વ્યાપકરૂપે કોઈ એક દિશામાં લાગુ પાડેલ વિરૂપક બળ અન્ય દિશાઓમાં વિકૃતિ ઉત્પન્ન કરી શકે છે. આવી પરિસ્થિતિમાં પ્રતિબળ અને વિકૃતિ વચ્ચેની સપ્રમાણતા એક જ સ્થિતિસ્થાપક-અંક વડે વર્ણવી શકાય નહિ. ઉદાહરણ તરીકે સંગત વિકૃતિ અંતર્ગત રહેલા તારના પાર્શ્વિક પરિમાણ (આડછેદની ત્રિજ્યા) સૂક્ષ્મ ફેરફાર અનુભવશે. જેને દ્રવ્યનાં બીજા સ્થિતિસ્થાપક-અંક (પોઇસન ગુણોત્તર) વડે દર્શાવી શકાય છે.
8. પ્રતિબળ સદિશ રાશિ નથી કેમ કે બળને ચોક્કસ દિશા આપી શકાય છે તેમ પ્રતિબળને ચોક્કસ દિશા આપી શકાતી નથી. પદાર્થના કોઈ એક ભાગ પર, આડછેદની નિશ્ચિત બાજુ પર લાગતાં બળને ચોક્કસ દિશા હોય છે.

સ્વાધ્યાય

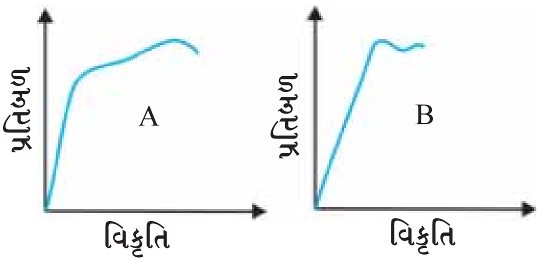
9.1 4.7 m લંબાઈ અને 3.0×10^{-5} m^2 આડછેદનું ક્ષેત્રફળ ધરાવતો સ્ટીલનો તાર તથા 3.5 m લંબાઈ અને 4.0×10^{-5} m^2 આડછેદનું ક્ષેત્રફળ ધરાવતા તાંબાના તાર પર આપેલ સમાન ભાર લટકાવતા બંને તારની લંબાઈમાં સમાન વધારો થાય છે, તો સ્ટીલ અને તાંબાનાં યંગ મૉડ્યુલસનો ગુણોત્તર શું હશે ?

9.2 આપેલ દ્રવ્ય માટે પ્રતિબળ-વિકૃતિ વક્ર આકૃતિ 9.11 માં દર્શાવેલ છે, તો આ દ્રવ્ય માટે (a) યંગ મૉડ્યુલસ અને (b) અંદાજિત આધિન પ્રબળતા કેટલી હશે ?



આકૃતિ 9.11

9.3 આકૃતિ 9.12માં દ્રવ્ય *A* અને *B* માટે પ્રતિબળ-વિકૃતિ-આલેખ દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 9.12

આલેખ સમાન માપક્રમ પર દોરેલ છે.

(a) કયા દ્રવ્યનો યંગ મૉડ્યુલસ મોટો હશે ?

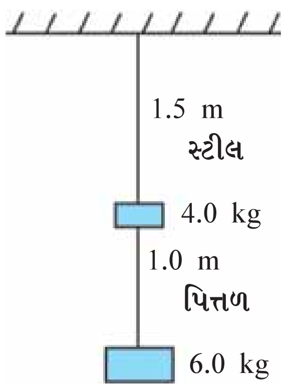
(b) બેમાંથી કયું દ્રવ્ય વધુ મજબૂત હશે ?

9.4 નીચે આપેલ વિધાનો કાળજીપૂર્વક વાંચી કારણ સહિત તે સાચાં છે કે ખોટાં તે જણાવો :

(a) રબરનો યંગ મૉડ્યુલસ સ્ટીલ કરતાં મોટો હોય છે.

(b) ગૂંચળાનું ખેંચાણ (લંબાઈ વધારો) તેના આકાર મૉડ્યુલસ પરથી નક્કી થાય છે.

9.5 0.25 cm વ્યાસ ધરાવતા બે તાર પૈકી એક સ્ટીલનો અને બીજો પિત્તળનો બનેલો છે. આકૃતિ 9.13 મુજબ તેમને ભારિત કરેલ છે. ભારવિહીન અવસ્થામાં સ્ટીલના તારની લંબાઈ 1.5 m અને પિત્તળના તારની લંબાઈ 1.0 m છે. સ્ટીલ અને પિત્તળના તારમાં લંબાઈમાં થતાં વધારાની ગણતરી કરો.



આકૃતિ 9.13

9.6 ઍલ્યુમિનિયમના સમઘનની કિનારી (edge) 10 cm લાંબી છે. આ ઘનની એક સપાટી શિરોલંબ દિવાલ સાથે જડિત કરેલ છે. તેની વિરુદ્ધ તરફની સપાટીએ 100 kg દળ જોડવામાં આવે છે. ઍલ્યુમિનિયમનો આકાર મૉડ્યુલસ 25 GPa હોય, તો આ સપાટીનું શિરોલંબ દિશામાં વિસ્થાપન કેટલું થશે ?

9.7 નરમ સ્ટીલમાંથી બનાવેલા ચાર પોલા અને સમાન નળાકાર વડે 50,000 kg દળવાળા મોટા સ્ટ્રક્ચરને આધાર આપવામાં આવ્યો છે. દરેક નળાકારની અંદર અને બહારની ત્રિજ્યાઓ અનુક્રમે 30 cm અને 60 cm છે. ભાર-વહેંચણી સમાન રીતે થાય છે. તેમ ધારીને દરેક નળાકારમાં દાબીય વિકૃતિની ગણતરી કરો.

9.8 15.2 mm × 19.1 mm લંબચોરસ આડછેદનું ક્ષેત્રફળ ધરાવતાં તાંબાના એક ટુકડાને 44,500 N બળના તણાવ વડે ખેંચવામાં આવે છે જેથી માત્ર સ્થિતિસ્થાપક વિરૂપણ ઉદ્‌ભવે છે, તો ઉદ્‌ભવતી વિકૃતિની ગણતરી કરો.

9.9 સ્કી વિસ્તારમાં ઊડન ખટોલા (chair lift)નો આધાર એક સ્ટીલનો કૅબલ છે. જેની ત્રિજ્યા 1.5 cm છે. જો મહત્તમ પ્રતિબળ 10^8 N m^{-2} થી વધારી શકાતું ન હોય તો કૅબલ કેટલા મહત્તમ ભારને આધાર આપી શકે ?

9.10 2.0 m લંબાઈના ત્રણ તાર વડે 15 kg દળના દૃઢ સળિયાને સમાન રીતે લટકાવેલ છે. ત્રણ પૈકી છેડાના બે તાર તાંબાના અને વચ્ચેનો તાર લોખંડનો છે. જો ત્રણેય તાર સમાન તણાવ અનુભવતા હોય, તો તેમના વ્યાસના ગુણોત્તર શોધો.

9.11 ખેંચાયા વગરના 1.0 m લંબાઈ ધરાવતા સ્ટીલના તારને એક છેડે 14.5 kg દળને જડિત કરેલ છે. તેને ઊર્ધ્વ સમતલમાં વર્તુળાકારે ઘુમાવવામાં આવે છે. વર્તુળમાર્ગમાં નીચેના બિંદુએ તેની કોણીય ઝડપ 2 પરિભ્રમણ /s છે. તારના આડછેદનું ક્ષેત્રફળ 0.065 cm^2 છે. જ્યારે જડિત કરેલ દળ વર્તુળમાર્ગમાં નિમ્નત્તમ બિંદુએ હોય ત્યારે તારના લંબાઈ-વધારાની ગણતરી કરો.

9.12 નીચે આપેલ માહિતી પરથી પાણી માટે બલ્ક મૉડ્યુલસની ગણતરી કરો. પ્રારંભિક કદ = 100.0 લિટર, દબાણનો વધારો = 100.0 atm (1 atm = 1.013 × 10^5 Pa), અંતિમ કદ = 100.5 લિટર. (અચળ તાપમાને) પાણી અને હવાનાં બલ્ક મૉડ્યુલસની તુલના કરો. આ ગુણોત્તર શા માટે મોટો છે તે સરળ શબ્દોમાં સમજાવો.

9.13 જે ઊંડાઈએ દબાણ 80 atm હોય ત્યાં પાણીની ઘનતા શોધો. સપાટી પર પાણીની ઘનતા 1.03 × 10^3 kgm^{-3} છે. પાણીની દબનીયતા 45.8 × 10^{-11} Pa^{-1} (1 Pa = 1 N m^{-2})

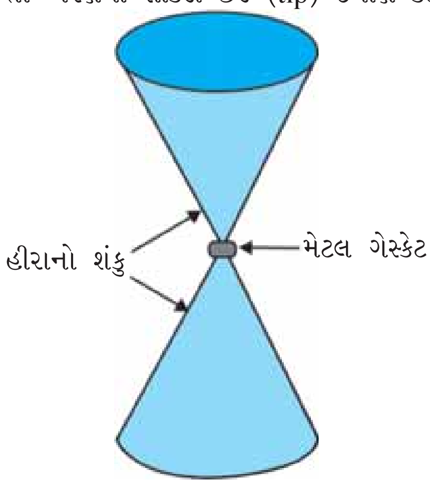
9.14 10 atm જેટલા હાઇડ્રોલિક દબાણ હેઠળ રહેલા કાચના ચોસલા(Slab) માટે કદના આંશિક ફેરફારની ગણતરી કરો.

9.15 10 cm લંબાઈની કિનારીવાળા તાંબાના નક્કર સમઘન માટે 7.0 × 10^6 Pa જેટલા હાઇડ્રોલિક દબાણની અસર હેઠળ કદ-સંકોચનની ગણતરી કરો.

9.16 એક લિટર પાણીનું 0.10 % સંકોચન કરવા તેના પરના દબાણમાં કેટલો ફેરફાર કરવો પડે ?

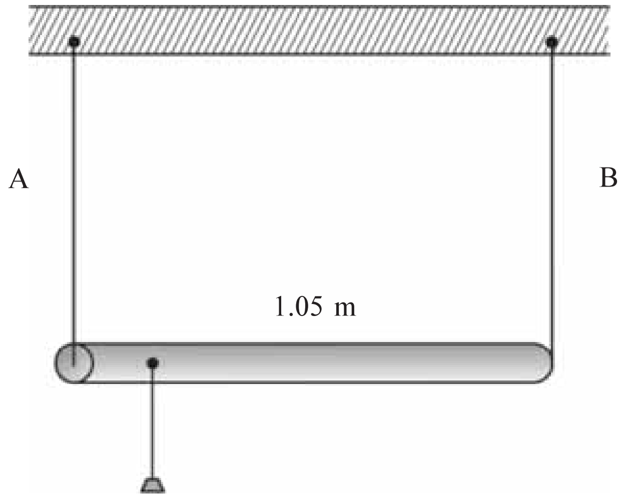
વધારાનું સ્વાધ્યાય

9.17 હીરાના એક જ સ્ફટિકમાંથી આકૃતિ 9.14માં દર્શાવ્યા મુજબના આકારનું એરણ (anvils) બનાવેલ છે. તેનો ઉપયોગ ઊંચા દબાણ હેઠળ દ્રવ્યની વર્તણૂક તપાસવા માટે થાય છે. એરણના સાંકડા છેડા પાસે સપાટ બાજુઓના વ્યાસ 0.50 mm છે. જો એરણના પહોળા છેડાઓ પર 50,000 Nનું દાબીય બળ લાગુ પાડેલ હોય, તો એરણના સાંકડા છેડે (tip) દબાણ કેટલું હશે.



આકૃતિ 9.14

9.18 1.05 m લંબાઈ અને અવગણ્ય દળ ધરાવતાં એક સળિયાને આકૃતિ 9.15માં દર્શાવ્યા મુજબ બે તાર વડે બંને છેડેથી લટકાવેલ છે. તાર *A* સ્ટીલ અને તાર *B* ઍલ્યુમિનિયમનો છે. તાર *A* અને તાર *B*ના આડછેદનું ક્ષેત્રફળ અનુક્રમે 1.0 mm^2 અને 2.0 mm^2 છે. સળિયા પર કયા બિંદુએ m દળ લટકાવવામાં આવે કે જેથી સ્ટીલ અને ઍલ્યુમિનિયમના બંને તારમાં (a) સમાન પ્રતિબળ (b) સમાન વિકૃતિ ઉદ્‌ભવે ?



આકૃતિ **9.15**

9.19 1.0 m લંબાઈ અને 0.50×10^{-2} cm^2 આડછેદનું ક્ષેત્રફળ ધરાવતાં નરમ સ્ટીલના તારને બે થાંભલાની વચ્ચે સમક્ષિતિજ દિશામાં સ્થિતિસ્થાપકતાની હદ (મર્યાદા)માં રહે તેમ ખેંચવામાં આવે છે. હવે તારના મધ્યબિંદુએ 100 g દળ લટકાવવામાં આવે, તો તારનું મધ્યબિંદુ કેટલું નીચે આવશે ?

9.20 ધાતુની બે પટ્ટીઓને છેડે, દરેકનો વ્યાસ 6.0 mm હોય તેવા ચાર રિવેટ દ્વારા એકબીજા સાથે જડેલ છે. રિવેટ પરનું આકાર પ્રતિબળ 6.9×10^7 Pa થી વધારી ન શકાય તે માટે જોડેલ પટ્ટીઓ પરનું મહત્તમ તણાવ કેટલું રાખવું જોઈએ ? દરેક રિવેટ એક ચતુર્થાંશ બોજ વહન કરે છે તેમ ધારો.

9.21 પ્રશાંત મહાસાગરમાં આવેલી મરીના નામની ખાઈ પાણીની સપાટીથી 11 km ઊંડી છે. ખાઈના તળિયે પાણીનું દબાણ 1.1×10^8 Pa છે. 0.32 m^3 પ્રારંભિક કદ ધરાવતાં એક સ્ટીલના દડાને દરિયામાં નાંખતાં તે ખાઈના તળિયા સુધી પહોંચે છે, તો દડાના કદમાં થતો ફેરફાર કેટલો હશે ? સ્ટીલનો બલ્ક મૉડ્યુલસ 160 GPa છે.