অসীম শ্ৰেণী
(INFINITE SERIES)

A.1.1 অৱতাৰণা (Introduction)

অনুক্ৰম আৰু শ্ৰেণী সম্পৰ্কে অধ্যায়- 9 অত আলোচনা কৰাৰ দৰে অসীম সংখ্যক পদযুক্ত এটা অনুক্ৰম যেনে a_1, $a_2, a_3,........a_n$.............ক অসীম অনুক্ৰম বোলা হয় আৰু ইয়াৰ সূচিত সমষ্টি অৰ্থাৎ $a_1 + a_2 + ...+a_n +$............ ক উক্ত অসীম অনুক্ৰমৰ সৈতে জড়িত অসীম শ্ৰেণী বোলা হয়। এই শ্ৰেণীটোক সংক্ষিপ্ত আকাৰত ছিগমা (Sigma) প্ৰতীক ব্যৱহাৰ কৰিও প্ৰকাশ কৰিব পাৰি যেনে-

$$a_1 + a_2 + ...+a_n +...........= \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

এই অধ্যায়ত বিভিন্ন সমস্যাৰ পটভূমিত প্ৰয়োজন হোৱা কিছুমান বিশেষ ধৰণৰ শ্ৰেণী সম্পৰ্কে অধ্যয়ন কৰা হ'ব।

A.1.2 *দ্বিপদ উপপাদ্য (যিকোনো সূচকৰ বাবে)* (Binomial Theorem for any Index):

অধ্যায়- 8 অত ধনাত্মক অখণ্ড সূচকৰ বাবে দ্বিপদ উপপাদ্যৰ আলোচনা আগবঢ়োৱা হৈছিল। এই অনুচ্ছেদত উপপাদ্যটোৰ এক অধিকতৰ সাধাৰণ ৰূপ উল্লেখ কৰা হ'ব, য'ত সূচকটো গোটা সংখ্যা (Whole Number) নহ'বও পাৰে। ইয়াৰ পৰা এক নিৰ্দিষ্ট ধৰণৰ অসীম শ্ৰেণী পোৱা যায়, যাক দ্বিপদ শ্ৰেণী হিচাপে আখ্যা দিয়া হয়। উদাহৰণৰ সহায়ত ইয়াৰ কেইটামান প্ৰয়োগ সম্পৰ্কে আলোচনা কৰা হ'ব।

আমি জানো যে

$$(1+x)^n = {}^nC_o + {}^nC_1\, x + {}^nC_2\, x^2 + ...+ {}^nC_n\, x^n$$

ইয়াত, n এটা অঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা। লক্ষ্যনীয় কথাটো হ'ল যে যদি সূচক n ৰ ঠাইত ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা অথবা এটা ভগ্নাংশ বহুওৱা হয় তেন্তে ${}^nC_r$ দলটোৰ কোনো অৰ্থ বিচাৰি পোৱা নাযায়।

এতিয়া (প্ৰমাণ অবিহনে) দ্বিপদ উপপাদ্যটো আগ বঢ়োৱা হ'ল যাৰ পৰা গোটা সংখ্যাৰ (Whole Number) সূচকৰ পৰিৱৰ্তে ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা বা ভগ্নাংশ ল'লে এটা অসীম শ্ৰেণী পোৱা যায়।

উপপাদ্য $$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + ...$$

সূত্ৰটো সিদ্ধ হয় যদি $|x| < 1$

মন্তব্য 1 সাৱধানে লক্ষ্য কৰা উচিত যে $|x| < 1$ অৰ্থাৎ $-1 < x < 1$ চৰ্তটো আৱশ্যক হয় যদি m ৰ মান ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা নাইবা ভগ্নাংশ হয়। উদাহৰণস্বৰূপে, যদি $x = -2$ আৰু $m = -2$ লোৱা হয় তেন্তে

$$(1-2)^{-2} = 1+(-2)(-2)+\frac{(-2)(-3)}{1.2}(-2)^2+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

বা $$1 = 1+4+12+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

যিটো অসম্ভৱ।

মন্তব্য 2 লক্ষ্যনীয় যে m ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা নাইবা ভগ্নাংশ হ'লে $(1+x)^m$ ৰ বিস্তৃতিত পদৰ সংখ্যা অসীম হ'ব। পৰৱৰ্তী বিস্তৃতিটো লোৱা যাওক-

$$(a+b)^m = \left[a\left(1+\frac{b}{a}\right)\right]^m = a^m\left(1+\frac{b}{a}\right)^m$$

$$= a^m\left[1+m\frac{b}{a}+\frac{m(m-1)}{1.2}\left(\frac{b}{a}\right)^2+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right]$$

$$= a^m + m\,a^{m-1}b+\frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}b^2+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

এই বিস্তৃতি সিদ্ধ হ'ব যদি $\left|\frac{b}{a}\right|<1$ অৰ্থাৎ যদি $|b|<|a|$

$(a+b)^m$ ৰ বিস্তৃতিত সাধাৰণ পদটো হ'ল

$$\frac{m(m-1)\ (m-2)\ldots.(m-r+1)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots.r}a^{m-r}\ b^r$$

$|x|<1$ চৰ্তসাপেক্ষে তলত দ্বিপদ উপপাদ্যৰ কিছুমান নিৰ্দিষ্ট ৰূপ উল্লেখ কৰা হ'ল। এই বোৰৰ সত্যাসত্য পৰীক্ষা ছাত্ৰ-ছাত্ৰী সকলৰ বাবে অনুশীলনী হিচাপে ৰখা হ'ল।

1. $(1+x)^{-1} = 1-x+x^2-x^3+x^4-\ldots\ldots\ldots$
2. $(1-x)^{-1} = 1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots\ldots.$
3. $(1+x)^{-2} = 1-2x+3x^2-4x^3+\ldots\ldots..$
4. $(1-x)^{-2} = 1+2x+3x^2+4x^3+\ldots\ldots\ldots.$

উদাহৰণ 1 $\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ ৰ বিস্তাৰ কৰাঁ যদি $|x|<2$

সমাধান আমি পাওঁ

$$\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{1}\left(\frac{-x}{2}\right)+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{1.2}\left(-\frac{x}{2}\right)^2+\ldots\ldots\ldots.$$

$$= 1+\frac{x}{4}+\frac{3x^2}{32}+\ \ldots..$$

A.1.3 অসীম গুণোত্তৰ শ্ৰেণী (Infinite Geometric Series)

অধ্যায় 9 অনুচ্ছেদ 9.5 অনুসৰি এটা অনুক্ৰম $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ldots.,\ a_n$ ক গুণোত্তৰ প্ৰগতি (G.P.) বোলা হয়

যদি $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} = r$ (ধ্ৰুৱক), য'ত

$$k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots..,\ (n-1)$$

নিৰ্দিষ্টভাৱে যদি $a_1 = a$ লোৱা হয় তেন্তে উপলব্ধ অনুক্ৰমটো হ'ব $a,\ ar,\ ar^2,\ \ldots\ldots\ldots.,\ ar^{n-1}$ আৰু ইয়াকে গুণোত্তৰ প্ৰগতি (G.P.) টোৰ প্ৰামাণিক ৰূপ হিচাপে লোৱা হয়, য'ত a হ'ল প্ৰথম পদ আৰু r প্ৰগতিটোৰ সাধাৰণ অনুপাত।

আগতেই আলোচনা কৰি অহা হৈছে যে এটা সসীম শ্ৰেণী $a + ar + ar^2 + \ldots\ldots + ar^{n-1}$ ৰ সমষ্টি বুজোৱা সূত্ৰটো হ'ল

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

এই অনুচ্ছেদত এটা অসীম গুণোত্তৰ শ্ৰেণী যেনে $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots$ ৰ যোগফলৰ সূত্ৰটো আৰু তাৰ ব্যৱহাৰ সম্পৰ্কে উদাহৰণৰ সহায়ত বৰ্ণনা কৰা হ'ল।

এটা গুণোত্তৰ প্ৰগতি (G.P.) যেনে $1,\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{4}{9},\ \ldots$ লোৱা হ'ল।

ইয়াত $a = 1,\quad r = \dfrac{2}{3}$

গতিকে, $$S_n = \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} = 3\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right] \qquad \ldots (1)$$

n ৰ মান ক্ৰমাগতভাৱে বঢ়াই গৈ থাকিলে $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ ৰ আচৰণ কেনে হয় তাক পৰীক্ষা কৰি চোৱা যাওক।

n	1	5	10	20
$\left(\frac{2}{3}\right)^n$	0.6667	0.1316872428	0.01734152992	0.00030072866

দেখা যায় যে n ৰ মান যিমানে ডাঙৰ হৈ গৈ থাকে $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ ৰ মান সিমানে 0 (শূণ্য) ৰ কাষ চাপি আহে। গাণিতিকভাৱে ক'ব পৰা যায় যে n ৰ মান পৰ্য্যাপ্তৰূপে বৃহৎ হ'লে $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ ৰ মান পৰ্য্যাপ্তৰূপে ক্ষুদ্ৰ হয়। অন্যভাৱে ক'ব পাৰি,

যেতিয়া $n \to \infty$, $\left(\frac{2}{3}\right)^n \to o$ ফলস্বৰূপে, অসীমভাৱে বৃহৎ সংখ্যক পদৰ বাবে সমষ্টিটোৰ মান $S = 3$ হিচাপে ল'ব পৰা যায়।

এইদৰে, যদি সাধাৰণ অনুপাত r ৰ সাংখ্যিক মান 1 তকৈ সৰু হয় তেতিয়া এটা অসীম গুণোত্তৰ প্ৰগতি $a, ar, ar^2, \ldots\ldots\ldots$ৰ ক্ষেত্ৰত

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}$$

এনে ক্ষেত্ৰত, $n \to \infty$ ৰ বাবে $r^n \to 0$ যিহেতু $|r| < 1$ আৰু তেতিয়া $\frac{ar^n}{1-r} \to 0$. সেয়েহে

$S_n \to \frac{a}{1-r}$ যেতিয়া $n \to \infty$

প্ৰতীকৰ সহায়ত এটা অসীম গুণোত্তৰ শ্ৰেণীৰ যোগফলটোক S ৰে সূচোৱা হয়। এইদৰে, আমি পাওঁ

$S = \frac{a}{1-r}$

উদাহৰণস্বৰূপে,

(i) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

(ii) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$

উদাহৰণ 2 গুণোত্তৰ প্ৰগতি $-\frac{5}{4}, \frac{5}{16}, \frac{-5}{64}, \ldots\ldots$ৰ অসীমলৈ যোগফল উলিওৱাঁ।

সমাধান ইয়াত $a = -\frac{5}{4}$ আৰু $r = -\frac{1}{4}$. লগতে $|r| < 1$

গতিকে অসীমলৈ যোগফল হ'ব $\frac{\frac{-5}{4}}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{\frac{-5}{4}}{\frac{5}{4}} = -1$

A.1.4 সূচকীয় শ্ৰেণী (Exponential Series)

1748 চনত মহান চুইছ গণিতজ্ঞ লিওনাৰ্ড অয়লাৰে (1707-1783) তেওঁৰ কলন গণিত পুথিত (calculus text) e সংখ্যাটোৰ ধাৰণা আগ বঢ়ায়। e সংখ্যাটো কলন গণিতত অতি লাগতিয়াল, যিদৰে বৃত্তৰ অধ্যয়নত π লাগতিয়াল।

তলৰ অসীম শ্ৰেণীটো লোৱা যাওক

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+....... \qquad ...(1)$$

(1) ত উল্লেখিত শ্ৰেণীটোৰ যোগফলক e আখৰটোৰে সূচোৱা হয়।

e সংখ্যাটোৰ মান উলিয়াই চোৱা যাওক। (1) শ্ৰেণীটোৰ প্ৰতিটো পদেই ধনাত্মক কাৰণে স্পষ্টভাৱে ইয়াৰ যোগফলো ধনাত্মক।

তলৰ যোগফল দুটা বিবেচনা কৰা হ'ল।

$$\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+............+\frac{1}{n!}+ \qquad ...(2)$$

আৰু $$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+......+\frac{1}{2^{n-1}}+... \qquad ...(3)$$

দেখা যায়-

$\frac{1}{3!}=\frac{1}{6}$ আৰু $\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$. ইয়াৰপৰা $\frac{1}{3!}<\frac{1}{2^2}$

$\frac{1}{4!}=\frac{1}{24}$ আৰু $\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$. ইয়াৰপৰা $\frac{1}{4!}<\frac{1}{2^3}$

$\frac{1}{5!}=\frac{1}{120}$ আৰু $\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$. ইয়াৰপৰা $\frac{1}{5!}<\frac{1}{2^4}$

গতিকে অনুৰূপভাৱে ক'ব পৰা যায়

$\frac{1}{n!}<\frac{1}{2^{n-1}}$ য'ত $n>2$

লক্ষ্যনীয় যে (2) ৰ প্ৰতিটো পদেই (3) ৰ অনুৰূপ পদতকৈ সৰু।

সেইবাবে $$\left(\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+...+\frac{1}{n!}+...\right)<\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}...+\frac{1}{2^{n-1}}+...\right) \qquad ... (4)$$

(4) ৰ উভয় পক্ষত $\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\right)$ যোগ কৰিলে আমি পাওঁ

$$\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+...+\frac{1}{n!}+...\right)$$

$$< \left\{\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+...+\frac{1}{2^{n-1}}+...\right)\right\} \qquad ... (5)$$

$$=\left\{1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^{n-1}}+...\right)\right\} \quad = 1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}} \quad =1+2=3$$

(5) ৰ বাওঁপক্ষই শ্ৰেণী (1) ক সূচায়। সেইবাবে $e < 3$. লগতে $e > 2$ আৰু ইয়াৰ পৰা

$2 < e < 3$

মন্তব্য চলক x যুক্ত সূচকীয় শ্ৰেণীটোক এনেদৰে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি-

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

উদাহৰণ 3 x ৰ ঘাতযুক্ত শ্ৰেণীহিচাপে e^{2x+3} ৰ প্ৰসাৰণ (বিস্তৃতি)ত x^2 ৰ সহগটো নিৰ্ণয় কৰাঁ।

সমাধান সূচকীয় শ্ৰেণী

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots \text{ ৰ}$$

x ৰ ঠাইত $(2x+3)$ বহুৱাই আমি পাওঁ -

$$e^{2x+3} = 1+\frac{2x+3}{1!}+\frac{(2x+3)^2}{2!}+\frac{(2x+3)^3}{3!}+\ldots$$

ইয়াত সাধাৰণ পদটো হ'ল $\frac{(2x+3)^n}{n!} = \frac{(3+2x)^n}{n!}$। দ্বিপদ উপপাদ্যৰ সহায়ত ইয়াক বিস্তাৰ কৰি আমি পাওঁ

$$\frac{1}{n!}\left[3^n + {}^nC_1\, 3^{n-1}(2x) + {}^nC_2\, 3^{n-2}(2x)^2+\ldots+(2x)^n\right]$$

ইয়াত x^2 ৰ সহগ হ'ল $\frac{{}^nC_2\, 3^{n-2}\, 2^2}{n!}$ সেইবাবে, গোটেই শ্ৰেণীটোত x^2 ৰ সহগ হ'ল

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{{}^nC_2 .\ 3^{n-2}.2^2}{n!} = 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-1)3^{n-2}}{n!}$$

$$= 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3^{n-2}}{(n-2)!} \qquad [n! = n\,(n-1)\,(n-2)! \text{ ব্যৱহাৰ কৰি}]$$

$$= 2\left[1+\frac{3}{1!}+\frac{3^2}{2!}+\frac{3^3}{3!}+\ldots\ldots\right]$$

$$= 2\,e^3$$

এনেদৰে, e^{2x+3} ৰ প্ৰসাৰণত x^2 ৰ সহগ হিচাপে $2e^3$ পোৱা যায়।

বিকল্পৰূপে $e^{2x+3} = e^3 .\ e^{2x}$

$$= e^3\left[1+\frac{2x}{1!}+\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^3}{3!}+\ldots\ldots\right]$$

এইদৰে, e^{2x+3}ৰ প্ৰসাৰণত x^2 ৰ সহগ হ'ল $e^3 . \dfrac{2^2}{2!} = 2e^3$

উদাহৰণ 4 দশমিকৰ প্ৰথম স্থানলৈ আসন্ন মান ব্যৱহাৰ কৰি e^2ৰ মান উলিওৱাঁ।

সমাধান x ৰ সূচকীয় শ্ৰেণীটো ব্যৱহাৰ কৰি আমি পাওঁ

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

$x = 2$ বহুৱাই আমি পাওঁ

$$e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \frac{2^5}{5!} + \frac{2^6}{6!} + \ldots$$

$$= 1 + 2 + 2 + \frac{4}{3} + \frac{2}{3} + \frac{4}{15} + \frac{4}{45} + \ldots$$

$\geq$ প্ৰথম সাতটা পদৰ যোগফল ≥ 7.355

আনহাতে আমি পাওঁ -

$$e^2 < \left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!}\right) + \frac{2^5}{5!}\left(1 + \frac{2}{6} + \frac{2^2}{6^2} + \frac{2^3}{6^3} + \ldots\right)$$

$$= 7 + \frac{4}{15}\left(1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \ldots\right) = 7 + \frac{4}{15}\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{3}}\right) = 7 + \frac{2}{3} = 7.4$$

এইদৰে, e^2 ৰ মান 7.355 আৰু 7.4 ৰ মাজত থাকে। সেয়েহে দশমিকৰ প্ৰথম স্থানলৈ আসন্ন মান হিচাপে e^2ৰ মান হ'ল 7.4

A.1.5 ঘাতাংকীয় শ্ৰেণী (Logarithmic Series) অতি লাগতিয়াল আন এটি শ্ৰেণী হ'ল ঘাতাংকীয় শ্ৰেণী যাক অসীম শ্ৰেণীৰ ৰূপত পোৱা যায়। পৰৱৰ্তী উপপাদ্যটো প্ৰমাণ অবিহনে উল্লেখ কৰা হৈছে আৰু উদাহৰণৰ সহায়ত ইয়াৰ প্ৰয়োগ ব্যাখ্যা কৰা হ'ল।

উপপাদ্য $|x| < 1$ হলে

$$\log_e(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$$

উপৰিউক্ত সমতাৰ সোঁ পক্ষত থকা শ্ৰেণীটোক ঘাতাংকীয় শ্ৰেণী বোলা হয়।

☛ টোকা $\log_e(1+x)$ৰ প্ৰসাৰণটো $x = 1$ ৰ বাবে প্ৰযোজ্য। $\log_e(1+x)$ ৰ প্ৰসাৰণত $x = 1$ বহুৱাই আমি পাওঁ

$$\log_e{}^2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

উদাহৰণ 5 যদি α, β $x^2 - px + q = o$ সমীকৰণৰ মূল হয়, প্ৰমাণ কৰাঁ যে-

$$\log_e(1+px+qx^2) = (\alpha+\beta)x - \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}x^2 + \frac{\alpha^3+\beta^3}{3}x^3 \ldots\ldots\ldots$$

সমাধান সোঁপক্ষ

$$= \left[\alpha x - \frac{\alpha^2 x^2}{2} + \frac{\alpha^3 x^3}{3} - \ldots\right] + \left[\beta x - \frac{\beta^2 x^2}{2} + \frac{\beta^3 x^3}{3} - \ldots\right]$$

$$= \log_e(1+\alpha x) + \log_e(1+\beta x)$$

$$= \log_e\left[1+(\alpha+\beta)x + \alpha\beta x^2\right]$$

$$= \log_e(1+px+qx^2)$$ = বাওঁপক্ষ

ইয়াত $\alpha + \beta = p$ আৰু $\alpha\beta = q$ সম্বন্ধ দুটা ব্যৱহাৰ কৰা হৈছে। দ্বিঘাত সমীকৰণৰ প্ৰদত্ত মূলৰপৰা আমি এই সম্পৰ্কে শিকি আহিছোঁ। এইক্ষেত্ৰত আমি ইয়াকো মানি লৈছোঁ যে $|\alpha x| < 1$ আৰু $|\beta x| < 1$

— ❖ —

পৰিশিষ্ট ২

গণিতীয় আৰ্হি প্ৰকৰণ
(MATHEMATICAL MODELLING)

A.2.1 অৱতাৰণা (Introduction)

বিগত কেইটামান শতিকাত লাভ কৰা প্ৰগতিৰ অধিকাংশই বিভিন্ন ক্ষেত্ৰ, যেনে— বিজ্ঞান, বিত্ত, ব্যৱস্থাপনা (Management) আদিৰপৰা উদ্ভুত বাস্তৱ জীৱনভিত্তিক সমস্যাৱলীত গণিতীয় পদ্ধতিৰ প্ৰয়োগ আৱশ্যকীয় কৰি তুলিছে। দীঘলীয়া আৰু জটিল সমস্যাবোৰৰো সমাধান সম্ভৱ কৰি তোলা গণনা পদ্ধতি আৰু 'ডিজিটেল কম্পিউটাৰ'বোৰৰ বৰ্দ্ধিত গণনক্ষমতাৰ বাবে বাস্তৱ জগতৰ সমস্যা সমাধানত গণিতৰ ব্যৱহাৰ হৈ পৰিছে সৰ্বব্যাপক। বাস্তৱ জীৱনভিত্তিক সমস্যাৰ গাণিতিক ৰূপান্তৰ কাৰ্যই কোনো কোনো সমস্যাৰ উন্নততৰ প্ৰতিৰূপ আৰু সমাধান আগ বঢ়ায়। এই গাণিতিক ৰূপান্তৰ পদ্ধতিটোকে কোৱা হয় গণিতীয় আৰ্হি প্ৰকৰণ।

ইয়াত উদাহৰণৰ সহায়ত এই পদ্ধতিৰ সৈতে জড়িত পৰ্য্যায়বোৰ সম্পৰ্কে ছাত্ৰ-ছাত্ৰীসকলক পৰিচয় কৰোৱা হ'ব। প্ৰথমতে, গণিতীয় আৰ্হি কি সেই সম্পৰ্কে উল্লেখ কৰা হ'ব আৰু তাৰ পিছত আৰ্হিপ্ৰকৰণ প্ৰক্ৰিয়াৰ সৈতে জড়িত পৰ্য্যায়বোৰ আলোচনা কৰা হ'ব।

A.2.2 প্ৰাৰম্ভিক ধাৰণাসমূহ (Preliminaries)

এই বিশ্বজগত সম্পৰ্কে জানিবলৈ গণিতীয় আৰ্হি হ'ল অতি লাগতিয়াল আহিলা। প্ৰাচীন কালত চীনা, ইজিপ্তীয়, ভাৰতীয়, বেবিলনীয় আৰু গ্ৰীকসকলে অংকশাস্ত্ৰৰ জৰিয়তেই প্ৰাকৃতিক ঘটনাৱলীৰ উপলব্ধি আৰু ভৱিষ্যদ্বাণী কৰিবলৈ সমৰ্থ হৈছিল। স্থপতিবিদ, বাঢ়ৈ আৰু খনিকৰসকলে জ্যামিতীয় ধাৰণাৰ আলমতে তেওঁলোকৰ শিল্পকৰ্মক সাকাৰ ৰূপ দিয়ে।

ধৰি লোৱা, এজন জৰীপকাৰকে (Surveyor) এটা স্তম্ভৰ উচ্চতা জুখিবলৈ বিচাৰিছে। সোঁশৰীৰে অৰ্থাৎ হাতে-কামে ফিটা ব্যৱহাৰ কৰি স্তম্ভৰ উচ্চতাৰ জোখ লোৱাটো এক দুৰূহ কাম। গতিকে অন্য বিকল্প হ'ল উচ্চতা নিৰ্ণয়ত কামত লগা উপাদানবোৰ বিচাৰি উলিওৱাটো। ত্ৰিকোণমিতিৰ জ্ঞানৰপৰা তেওঁ জানে যে যদি তেওঁ স্তম্ভটোৰ মূধচৰ উঠন কোণ (Angle of Elevation) আৰু তেওঁ য'ত থিয় হৈ আছে সেই ঠাইৰপৰা স্তম্ভটোৰ গুৰিৰ দূৰত্ব উলিয়াব পাৰে, তেন্তে তেওঁ ইয়াৰ উচ্চতা উলিয়াব পাৰিব।

সেয়েহে তেওঁৰ কামটো এতিয়া সহজ হৈ পৰিল, কিয়নো এতিয়া স্তম্ভটোৰ মূধচৰ উঠন কোণ আৰু ইয়াৰ গুৰিৰপৰা তেওঁ থিয় হৈ থকা ঠাইৰ দূৰত্ব উলিয়ালেই হ'ল, যি দুটাৰ জোখ তেওঁ সহজেই উলিয়াব পাৰে। এইদৰে, যদি তেওঁ উঠন কোণটোৰ জোখ 40^0 আৰু দূৰত্বৰ জোখ 450 মিটাৰ পায় তেন্তে উদাহৰণ -1 ত উল্লেখ কৰা ধৰণে তেওঁ সমস্যাটোৰ সমাধান উলিয়াব পাৰিব।

উদাহৰণ 1 এটা স্তম্ভৰ গুৰিৰ পৰা 450 মিটাৰ দূৰত্বত মাটিত থকা এটা বিন্দু O ত স্তম্ভৰ মূধচটোৱে 40^0 জোখৰ উঠন কোণ কৰিছে। স্তম্ভটোৰ উচ্চতা নিৰ্ণয় কৰাঁ।

সমাধান বিভিন্ন ঢাপত আমি ইয়াৰ সমাধান আগ বঢ়াম।

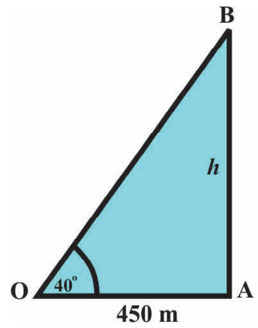
ঢাপ 1 প্ৰথমতে আমি প্ৰকৃত সমস্যাটো বুজিবলৈ চেষ্টা কৰোঁহক। সমস্যাটোত এটা স্তম্ভৰ উল্লেখ কৰা হৈছে যাৰ উচ্চতা উলিয়াব লাগে। ধৰা হওক, ইয়াৰ উচ্চতা h। ভূমিৰ ওপৰত থকা এটা নিৰ্দিষ্ট বিন্দু Oৰ পৰা স্তম্ভৰ গুৰিৰ

আনুভূমিক দূৰত্ব 450 মিটাৰ দিয়া আছে। এই দূৰত্বক d ৰে সূচোৱা হ'ল যাতে d =450 মিটাৰ। আমি ইয়াকো জানো যে θ নিৰ্দেশিত স্তম্ভটোৰ মূধচৰ উঠন কোণৰ মাপ 40^0

প্ৰদত্ত উঠন কোণ θ আৰু দূৰত্ব d ব্যৱহাৰ কৰি স্তম্ভটোৰ উচ্চতা h নিৰ্ণয় কৰাটোৱেই হ'ল আচল সমস্যা।

ঢাপ 2 সমস্যাটোত উল্লেখ কৰা ৰাশি তিনিটা হ'ল উচ্চতা, দূৰত্ব আৰু উঠন কোণ। গতিকে আমি এই ৰাশি তিনিটা যুক্ত হৈ থকা সম্বন্ধ এটি বিচাৰি উলিয়াব লাগিব। পৰৱৰ্তী ধৰণে অৰ্থাৎ জ্যামিতীয়ভাৱে প্ৰকাশ কৰি এই সম্বন্ধটো পাব পৰা যায় (চিত্ৰ 1)। AB য়ে স্তম্ভটোৰ উচ্চতা নিৰ্দেশ কৰিছে। OA ই O বিন্দুৰ পৰা স্তম্ভটোৰ গুৰিলৈ আনুভূমিক দূৰত্ব বুজাইছে। $\angle AOB$ হ'ল উঠন কোণ। তেতিয়া আমি পাও

$$\tan\theta = \frac{h}{d} \text{ বা } h = d\tan\theta \qquad \dots (1)$$



চিত্ৰ 1

এই সমীকৰণটোৱে θ, h আৰু d ৰ মাজত সংযোগ স্থাপন কৰিছে।

ঢাপ 3 h ৰ সমাধান পাবলৈ আমি সমীকৰণ (1)ৰ ব্যৱহাৰ কৰোঁহক। দিয়া আছে $\theta = 40^0$ আৰু $d = 450$ মিটাৰ। তেতিয়া আমি পাওঁ $h = \tan 40^0 \times 450 = 450 \times 0.839 = 377.6$ মিটাৰ

ঢাপ 4 এইদৰে স্তম্ভটোৰ উচ্চতা আমি প্ৰায় 378 মিটাৰ পালোঁ।

এতিয়া আমি সমস্যাটোৰ সমাধানত ব্যৱহাৰ হোৱা বিভিন্ন ঢাপবোৰ পৰীক্ষা কৰি চাওঁ। ঢাপ-1 অত আমি প্ৰকৃত সমস্যাটো অধ্যয়ন কৰিছিলো আৰু দেখিছিলো যে সমস্যাটোত তিনিটা প্ৰাচল (Parameter),যেনে— উচ্চতা, দূৰত্ব আৰু উঠন কোণ জড়িত হৈ আছে। ইয়াৰ অৰ্থ হ'ল, এই ঢাপটোত আমি *এটা বাস্তৱ জীৱন ভিত্তিক সমস্যা (Real life problem) অধ্যয়ন কৰিলোঁ আৰু প্ৰাচলসমূহ চিনাক্ত কৰিলোঁ।*

ঢাপ-2 ত আমি কিছুমান জ্যামিতীয় সমস্যা ব্যৱহাৰ কৰিলোঁ আৰু বুজিলোঁ যে সমস্যাটোক জ্যামিতীয়ভাৱে চিত্ৰ-1 অত দেখুওৱা ধৰণে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি। তাৰ পিছত আমি 'টেন্‌জেণ্ট ফলন' (Tangent Function)ৰ বাবে ত্ৰিকোণমিতীয় অনুপাতটো ব্যৱহাৰ কৰিলোঁ আৰু

$$h = d\tan\theta$$

সম্বন্ধটো পালোঁ।

গতিকে, এই ঢাপত আমি সমস্যাটোক গণিতীয় সূত্ৰাকাৰে প্ৰকাশ কৰিলোঁ। অৰ্থাৎ, আমি প্ৰকৃত সমস্যাটোক এটা গণিতীয় সমীকৰণলৈ ৰূপান্তৰ কৰিলোঁ।

ঢাপ-3 ত গণিতীয় সমস্যাটোৰ সমাধান উলিয়ালোঁ আৰু $h = 377.6$ মিটাৰ পালোঁ। অৰ্থাৎ আমি সমস্যাটোৰ সমাধান পালোঁ।

শেষৰ ঢাপটোত আমি সমস্যাটোৰ সমাধানৰ ব্যাখ্যা আগ বঢ়ালোঁ আৰু ঘোষণা কৰিলোঁ যে স্তম্ভটোৰ উচ্চতা প্ৰায় 378 মিটাৰ। ইয়াক আমি

বাস্তৱ পটভূমিত গণিতীয় সমাধানৰ ব্যাখ্যা হিচাপে উল্লেখ কৰোঁহক।

দৰাচলতে, গণিতজ্ঞ আৰু আনসকলে 'বিভিন্ন ধৰণৰ বাস্তৱ জীৱনভিত্তিক সমস্যাৰ অধ্যয়নত এই ঢাপবোৰ ব্যৱহাৰ কৰে। বিভিন্ন পটভূমিত সমস্যা সমাধানৰ বাবে গণিত ব্যৱহাৰ কৰিবলগীয়া হয় কিয়- এই প্ৰশ্নটো আমি বিবেচনা কৰি চাওঁহক।

বিভিন্ন পৰিৱেশত গণিতক কাৰ্য্যকৰীভাৱে ব্যৱহাৰ কৰা কিছুমান উদাহৰণ উল্লেখ কৰা হ'ল।

1. মানুহ আৰু অন্যান্য জীৱ-জন্তুৰ দেহৰ বিভিন্ন অংশলৈ অম্লজান আৰু আন আন পুষ্টিকাৰী উপাদানসমূহ

প্ৰেৰণৰ বাবে তেজৰ সঠিক প্ৰবাহ অতি আৱশ্যকীয়। ৰক্তনলীত ঘটা যিকোনো ধৰণৰ সংকোচন অথবা ইয়াৰ স্বাভাৱিক বৈশিষ্ট্যৰ যিকোনো পৰিৱৰ্তনে ৰক্তপ্ৰবাহ সলনি কৰিব পাৰে আৰু সাধাৰণ অসুবিধাৰপৰা আৰম্ভ কৰি আকস্মিক মৃত্যুৰ নিচিনা ক্ষতি পৰ্য্যন্ত ঘটাব পাৰে। সমস্যাটো হ'ল কিদৰে ৰক্তপ্ৰবাহ আৰু ৰক্তনলীৰ গঠনভিত্তিক বৈশিষ্ট্যৰ মাজত থকা সম্বন্ধটো নিৰ্ণয় কৰা যায়!

2. ক্ৰিকেট খেলত 'এল, বি, ডব্লিউ' (LBW) ৰ সিদ্ধান্ত লওঁতে তৃতীয় আম্পায়াৰজনে নিৰীক্ষণৰদ্বাৰা বলৰ সঞ্চাৰ পথটো অনুকৰণ কৰে আৰু ব্যাট্‌ছমেনজন তেওঁৰ অৱস্থানত নথকা বুলি ধৰি লয়। ব্যাট্‌ছমেনৰ ভৰিত লগাৰ আগলৈকে বলটোৱে যি গতিপথৰ সৃষ্টি কৰে তাৰ ভিত্তিত পথটোৰ এক গণিতীয় সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা হয়। 'এল্, বি ডব্লিউ'ৰ সিদ্ধান্ত লোৱাৰ সময়ত (বলৰ সঞ্চাৰ পথৰ) এই অনুকৰণ প্ৰাপ্ত আৰ্হিটো ব্যৱহাৰ কৰা হয়।

3. বতৰবিজ্ঞান বিভাগে গণিতীয় আৰ্হিৰ ভিত্তিতে বতৰৰ আগজাননী দিয়ে। বতৰৰ ক্ষেত্ৰত তাৰতম্য ঘটোৱা কাৰকসমূহৰ ভিতৰত কেইটামান হ'ল উত্তাপ, বায়ুচাপ, আৰ্দ্ৰতা, বতাহৰ গতি ইত্যাদি। এই কাৰকসমূহৰ জোখমাখ লোৱাৰ বাবে ব্যৱহৃত যন্ত্ৰসমূহৰ ভিতৰত আছে তাপ জোখাৰ বাবে থাৰ্মোমিটাৰ, বায়ুচাপ জোখাৰ বাবে বেৰ'মিটাৰ, আৰ্দ্ৰতা জোখাৰ বাবে হাইগ্ৰ'মিটাৰ, বতাহৰ গতিবেগ জোখাৰ বাবে এনিম'মিটাৰ ইত্যাদি। দেশৰ চৌদিশে থকা কেন্দ্ৰসমূহৰপৰা এবাৰকৈ তথ্যসমূহ সংগ্ৰহ কৰা হয় আৰু অধিক বিশ্লেষণ তথা ব্যাখ্যাৰ বাবে কম্পিউটাৰত ভৰোৱা হয়।

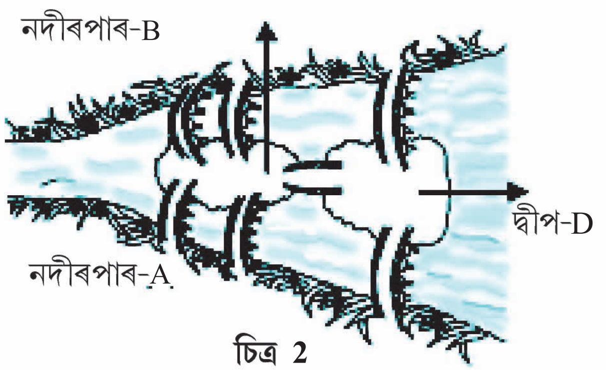
4. কৃষি বিভাগে ধান নকটাকৈয়ে ভাৰতবৰ্ষৰ ধান উৎপাদনৰ হিচাপ এটা ল'বলৈ সিদ্ধান্ত কৰিলে। এই ক্ষেত্ৰত বিজ্ঞানীসকলে প্ৰথমে ধানখেতি পথাৰসমূহ চিহ্নিত কৰে আৰু কিছুমান নিৰ্বাচিত পথাৰৰপৰা ধান কটাৰ পিছত ওজন লৈ প্ৰতি একৰ জমিৰ ভিত্তিত উৎপাদনৰ গড় উলিয়ায়। ইয়াৰ পিছত কিছুমান পৰিসাংখ্যিকীয় পদ্ধতি প্ৰয়োগ কৰি ধান উৎপাদনৰ গড় হিচাপ নিৰ্ণয় কৰে।

এনেধৰণৰ সমস্যাবোৰৰ সমাধানত গণিতজ্ঞসকলে কেনেদৰে সহায় কৰে? তেওঁলোকে কোনো বিভাগৰ বিচক্ষণ ব্যক্তিসমূহৰ সৈতে একেলগে বহে আৰু সমস্যাটোৰ সমতুল্য গণিতীয় ৰূপ এটা প্ৰস্তুত কৰে। এই সমতুল্য গণিতীয় ৰূপটো এক বা একাধিক সমীকৰণ নাইবা অসমীকৰণেৰে গঠিত হয় যিবোৰক গণিতীয় আৰ্হি আখ্যা দিয়া হয়। তাৰ পিছত তেওঁলোকে এই আৰ্হিটোৰ সমাধান উলিয়ায় আৰু মূল সমস্যাটোৰ পটভূমিতে ইয়াৰ ব্যাখ্যা আগ বঢ়ায়। প্ৰক্ৰিয়াটো ব্যাখ্যা কৰাৰ আগতে আমি গণিতীয় আৰ্হি কি সেই সম্পৰ্কে আলোচনা কৰোহঁক।

এটা গণিতীয় আৰ্হি হ'ল কোনো পৰিস্থিতিক সামৰি ল'ব পৰা এক ধৰণৰ বিৱৰণ।

পৰৱৰ্তী উদাহৰণটোৰ জৰিয়তে এক আমোদজনক জ্যামিতিয় আৰ্হি চিত্ৰৰ সহায়ত ব্যাখ্যা কৰা হ'ল।

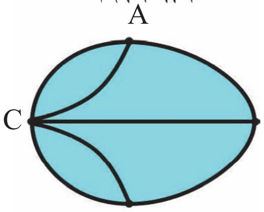
উদাহৰণ 2 (দলঙৰ সমস্যা) প্ৰেজেল নদীৰ মাজত অৱস্থিত কণিগছ্‌বাৰ্গ চহৰখন 18 শ শতিকাত জাৰ্মানীৰ অধীনত আছিল আৰু বৰ্তমান ই ৰাছিয়াৰ অন্তৰ্ভুক্ত। চহৰখনৰ ভিতৰত দুটি নদী-দ্বীপ আছে যাৰ সৈতে নদীৰ পাৰ দুটা চিত্ৰ-2 ত দেখুওৱা ধৰণে 7 খন দলঙেৰে সংযুক্ত হৈ আছে।



চিত্ৰ 2

মানুহে চহৰখনৰ চৌপাশে এনেভাৱে এপাক ঘূৰি আহিবলৈ চেষ্টা কৰিছিল যাতে প্ৰতিখন দলং মাত্ৰ এবাৰহে পাৰ হ'ব পাৰে; কিন্তু সমস্যাটো কঠিন আছিল। ৰাছিয়ান

সম্ৰাজ্ঞী মহিয়সী কেথেৰিনৰ সেৱাত নিযুক্ত চুইছ্ (swiss) গণিতজ্ঞ লিওনাৰ্ড অয়লাৰে সমস্যাটোৰ কথা জানিব পাৰিছিল। 1736 চনত অয়লাৰে প্ৰমাণ কৰি দেখুৱাইছিল যে প্ৰদত্ত চৰ্ত মানি চহৰখন এপাক ঘূৰি অহাটো সম্ভৱ নহয়। তেওঁ 'নেট্‌ৱৰ্ক' বা জালিবন্ধন বোলা একধৰণৰ চিত্ৰ আৱিষ্কাৰ কৰি ইয়াৰ প্ৰমাণ আগ বঢ়াইছিল, যি চিত্ৰ কিছুমান শীৰ্ষবিন্দু আৰু ৰেখা বা বক্ৰচাপেৰে গঠিত। (চিত্ৰ-3)

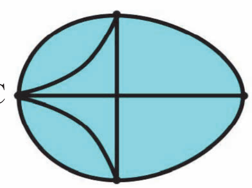


চিত্ৰ 3

তেওঁ নদীৰ দুই পাৰ আৰু দুই দ্বীপৰ বাবে মুঠ চাৰিটা বিন্দু (শীৰ্ষবিন্দু) ব্যৱহাৰ কৰিছিল। এইবোৰক A, B, C আৰু D ৰে চিহ্নিত কৰা হৈছে। সাতডাল ৰেখা (বক্ৰচাপ) হ'ল সাতখন দলং। তোমালোকে দেখিবলৈ পাইছা যে তিনিখন দলঙে নদীৰ পাৰ A আৰু আন তিনিখন দলঙে নদীৰ পাৰ B ক দ্বীপ দুটাৰ সৈতে সংযোগ কৰিছে। ইয়াৰ অৰ্থ হ'ল আটাইবোৰ শীৰ্ষবিন্দুৰ সৈতে অযুগ্ম সংখ্যক বক্ৰচাপ মিলিত হৈছে। সেইবাবে সেইবোৰক কোৱা হয় অযুগ্ম শীৰ্ষবিন্দু। (এটা যুগ্ম শীৰ্ষবিন্দুৰ সৈতে যুগ্ম সংখ্যক বক্ৰচাপ লগ লাগিলহেতেন!)।

স্মৰণ কৰাঁ যে সমস্যাটো আছিল প্ৰতিখন দলং মাত্ৰ এবাৰকৈ পাৰহৈ চহৰখন এপাক ঘূৰি আহিব লাগে। অয়লাৰৰ 'জালিবন্ধন'ত ইয়াৰ অৰ্থ হ'ল প্ৰতিডাল বক্ৰচাপ এবাৰকৈ বগাই আটাইকেইটা শীৰ্ষ বিন্দু চুই আহিব লাগে। অয়লাৰে প্ৰমাণ কৰিছিল যে এইটো সম্ভৱ নহয়, কিয়নো তেওঁ পৰ্য্যবেক্ষণ কৰি পাইছিল যে এটা অযুগ্ম শীৰ্ষ বিন্দু পাবলৈ তুমি সেই বিন্দুটোত যাত্ৰা আৰম্ভ নাইবা শেষ কৰিব লাগিব (চিন্তা কৰা!)। যিহেতু ভ্ৰমণটোত মাত্ৰ এটা আৰম্ভণি আৰু এটা সমাপ্তি থাকে গতিকে প্ৰতিডাল বক্ৰচাপ মাত্ৰ এবাৰকৈ অতিক্ৰম কৰিবলৈ হ'লে তাত (জালিবন্ধনটোত) মাত্ৰ দুটা অযুগ্ম শীৰ্ষবিন্দু থাকিব পাৰে। যিহেতু দলঙৰ সমস্যাটোত চাৰিটা অযুগ্ম শীৰ্ষবিন্দু আছে, গতিকে এই ভ্ৰমণ অসম্ভৱ!

অয়লাৰে তেওঁৰ উপপাদ্যটো প্ৰমাণ কৰাৰ পিছত কণিগ্‌ছ্‌বাৰ্গৰ দলং কেইখনৰ তলেৰে বহু পানী বৈ গৈছে। 1875 চনত কণিগ্‌ছ্‌বাৰ্গত নদীৰ দুই পাৰ A আৰু B সংলগ্ন কৰি এখন অতিৰিক্ত দলং সজা হৈছে। কণিগছ্‌বাৰ্গবাসীসকলৰ বাবে এতিয়া প্ৰতিখন দলং মাত্ৰ এবাৰকৈ অতিক্ৰম কৰি চহৰখন ভ্ৰমি অহাটো সম্ভৱ হৈ উঠিছেনে?



চিত্ৰ 4

এতিয়া, অৱস্থাটো চিত্ৰ- 4 ত দেখুওৱা ধৰণৰ হৈছে। নতুন এটা দাঁতি সংযোগ কৰাৰ পিছত A আৰু B দুয়োটা শীৰ্ষবিন্দুৱেই যুগ্ম শীৰ্ষবিন্দু হৈ পৰিছে। যি হওক, D আৰু C দুয়োটা শীৰ্ষ বিন্দু এতিয়াও অযুগ্ম শীৰ্ষ বিন্দু হৈয়ে আছে। সেয়েহে, প্ৰতিখন দলং মাত্ৰ এবাৰ অতিক্ৰম কৰি চহৰখন এপাক ভ্ৰমি অহাটো কণিগ্‌ছ্‌বাৰ্গবাসীসকলৰ বাবে এতিয়া সম্ভৱ হৈ উঠিছে।

'জালিবন্ধন'ৰ আৱিষ্কাৰৰ ফলত গ্ৰাফ্‌তত্ত্ব (Graph Theory) নামেৰে এক নতুন তত্ত্বৰ সূচনা হৈছে আৰু ইয়াক পৰিকল্পনা আৰু ৰেলপথ স্থাপনকে ধৰি বিভিন্ন ধৰণে প্ৰয়োগ কৰা হয় (চিত্ৰ-4)।

A.2.3 গণিতীয় আৰ্হি প্ৰকৰণ কি ? (What is Mathematical Modelling?)

ইয়াত গণিতীয় আৰ্হি প্ৰকৰণৰ সংজ্ঞা আগ বঢ়োৱা হ'ব আৰু এই আৰ্হি প্ৰকৰণৰ সৈতে জড়িত বিভিন্ন প্ৰক্ৰিয়া সম্পৰ্কে উদাহৰণৰ সহায়ত বৰ্ণনা কৰা হ'ব।

সংজ্ঞা গণিতীয় আৰ্হিপ্ৰকৰণ মানে হ'ল বাস্তৱ জীৱনভিত্তিক সমস্যাৰ কোনো অংশ সম্পৰ্কে গণিতৰ ভাষাৰে কৰা অধ্যয়নৰ প্ৰচেষ্টা।

কিছুমান উপযুক্ত চৰ্তসহ যিকোনো ভৌতিক পৰিস্থিতিক গণিতলৈ পৰিৱৰ্তন কৰাকে গণিতীয় আৰ্হিপ্ৰকৰণ বুলি ক'ব পৰা যায়। গণিতীয় আৰ্হিপ্ৰকৰণ মানে আন একো নহয়, মাত্ৰ একধৰণৰ কৌশল আৰু শিক্ষা প্ৰণালী (Pedagogy) যাক মৌলিক বিজ্ঞান নহয়, সুকুমাৰ কলাৰ পৰাহে আহৰণ কৰা হয়। এতিয়া আমি গণিতীয় আৰ্হিপ্ৰকৰণত জড়িত বিভিন্ন কাৰ্য্য-প্ৰণালীবোৰ বুজি লওঁহক। এই কাৰ্য্য-প্ৰণালীত চাৰিটা ঢাপ যুক্ত হৈ থাকে। উদাহৰণহিচাপে সৰল দোলক (Simple Pendulum) ৰ গতি অধ্যয়নৰ বাবে সজা আৰ্হিটো লোৱা যাওক।

সমস্যাটো কি ? (Understanding the Problem)

ইয়াক বুজিবলৈ আমি সৰল দোলকৰ গতিৰ সৈতে যুক্ত কাৰ্য্যপ্ৰণালীটো জানিব লাগিব। দোলক হ'ল এটা বস্তুপিণ্ড (ইংৰাজীত যাক 'Bob' (বব্) বোলা হয়) যাক এডাল সূতাৰ এমূৰে সংযোগ কৰি আনটো মূৰ এটা স্থিৰ বিন্দুৰপৰা গাঁঠি মাৰি ওলোমাই ৰখা হয়। আমি পাই আহিছোঁ যে এটা সৰল দোলকৰ গতি সাধাৰণতে পৰ্য্যাবৃত্ত। ইয়াৰ পৰ্য্যায় সূতাডালৰ দৈৰ্ঘ্য আৰু মাধ্যাকৰ্ষণিক ত্বৰণৰ ওপৰত নিৰ্ভৰশীল। গতিকে ইয়াত নিৰ্ণয় কৰিবলগীয়া বিষয়টো হ'ল দোলনৰ পৰ্য্যায়কাল। এই কথাৰ ওপৰত নিৰ্ভৰ কৰি আমি সমস্যাটোৰ সঠিক উক্তি এনেদৰে আগ বঢ়াব পাৰোঁ।

উক্তি সৰল দোলকৰ দোলন কাল (পৰ্য্যায় কাল) কেনেকৈ উলিয়াব পাৰি? সমস্যাটোৰ পৰৱৰ্তী ঢাপটো হ'ল সূত্ৰ প্ৰকৰণ বা সূত্ৰায়ন (Formulation)।

সূত্ৰপ্ৰকৰণৰ মূল ঢাপ দুটা ঃ-

1. প্ৰাসংগিক কাৰকসমূহৰ চিহ্নিতকৰণ (Identifying the relevant factors) ইয়াত, আমি সমস্যাটোৰ সৈতে যুক্ত কাৰক/প্ৰাচলসমূহ বাছি উলিয়াম। উদাহৰণস্বৰূপে দোলকটোৰ ক্ষেত্ৰত, এই কাৰকসমূহ হ'ল দোলন কাল (T), বব্ অৰ্থাৎ পিণ্ডটোৰ ভৰ (m), দোলকটোৰ কাৰ্য্যকৰী দৈৰ্ঘ্য (l) যাক বব্‌টোৰ ভৰ কেন্দ্ৰ (centre of mass) আৰু ওলমাই ৰখা বিন্দুটোৰ মাজৰ দূৰত্বৰ দ্বাৰা সূচোৱা হয়। ইয়াত আমি সূতাডালৰ দীঘকে দোলকটোৰ কাৰ্য্যকৰী দীঘ আৰু এখন ঠাইৰ মাধ্যাকৰ্ষণিক ত্বৰণ (g)ক ধ্ৰুৱক হিচাপে বিবেচনা কৰিম।

গতিকে, সমস্যাটোৰ অধ্যয়নৰ বাবে আমি চাৰিবিধ প্ৰাচল চিহ্নিত কৰিলোঁ। এতিয়া আমাৰ উদ্দেশ্য হ'ল T ৰ মান নিৰ্ণয়। ইয়াৰ বাবে আমি পৰ্য্যায়কাল কোনবোৰ কাৰকৰদ্বাৰা প্ৰভাৱিত হয় তাক জনা দৰকাৰ, যিটো এটা সহজ পৰীক্ষা সম্পন্ন কৰি জানিব পাৰি। আমি বেলেগ বেলেগ ভৰযুক্ত দুটা ধাতুৰ বল লওঁ আৰু সমান দৈৰ্ঘ্যৰ দুডাল সূতাৰে প্ৰতিটো বল যুক্ত কৰি পৰীক্ষাটো চলাওঁ। আমি দুয়োটাৰে দোলন কাল জুখি উলিয়াও। আমি লক্ষ্য কৰিম যে বল দুটাৰ দোলন কালত কোনো চকুত পৰা পাৰ্থক্য পোৱা নাযায়। একেটা পৰীক্ষা এতিয়া আমি দুটা সমান ভৰযুক্ত বল কিন্তু বেলেগ বেলেগ দৈৰ্ঘ্যৰ সূতা ব্যৱহাৰ কৰি সম্পন্ন কৰিলে দেখিম যে দোলকৰ দৈৰ্ঘ্যই দোলন কালত স্পষ্ট প্ৰভাৱ পেলাইছে।

এইটোৱে ইয়াকে সূচায় যে পৰ্য্যায়কাল নিৰ্ণয়ৰ বাবে ভৰ m নহয়, দৈৰ্ঘ্য l হে মূল প্ৰাচল।

পৰৱৰ্তী ঢাপলৈ অগ্ৰসৰ হোৱাৰ আগতে মূল প্ৰাচলসমূহ বিচাৰি উলিওৱা এই কাৰ্য্যপ্ৰণালীৰ আৱশ্যক হয়।

2. গণিতীয় বৰ্ণনা (Mathematical description) এই পৰ্য্যায়ত ইতিমধ্যে চিহ্নিত কৰি উলিওৱা প্ৰাচলসমূহ ব্যৱহাৰ কৰি সমীকৰণ, অসমীকৰণ বা জ্যামিতীয় চিত্ৰ আদিৰে সমস্যাটো প্ৰকাশ কৰা হয়।

সৰল দোলকৰ ক্ষেত্ৰত l ৰ বিভিন্ন মানৰ বাবে দোলন কাল T ৰ মান পাব পৰাকৈ পৰীক্ষা চলোৱা হৈছিল। এই

মানবোৰ লেখ কাগজত বহুৱাই এটা বক্ৰ আঁকিব পাৰি যাৰ আকৃতি এটা অধিবৃত্তৰ সৈতে মিলে। ইয়াৰ অৰ্থ হ'ল, T আৰু l ৰ মাজৰ সম্বন্ধটো

$$T^2 = kl \qquad \text{... (1)}$$

ধৰণে আগ বঢ়াব পৰা যায়। দেখা যায় ইয়াত, $k = \frac{4\pi^2}{g}$। ইয়াৰপৰা আমি পাওঁ

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \text{... (2)}$$

(2) সমীকৰণেই হ'ল সমস্যাটোৰ গণিতীয় সূত্ৰায়ন।

সমাধানৰ সন্ধান (Finding the solution) গণিতীয় সূত্ৰায়নে প্ৰত্যক্ষভাৱে সমস্যাৰ সমিধান নিদিয়ে। সচৰাচৰ আমি কিছুমান প্ৰক্ৰিয়া যেনে সমীকৰণৰ সমাধান, গণনাভিত্তিক কাৰ্য্য নাইবা কোনো উপপাদ্যৰ প্ৰয়োগ আদি খটুৱাইহে সমস্যাৰ নিৰ্ণেয় সমিধান পাব পাৰোঁ। সৰল দোলকৰ ক্ষেত্ৰত সমাধানৰ বাবে সমীকৰণ (2)ত উল্লেখিত সূত্ৰৰ প্ৰয়োগ আৱশ্যকীয়।

বেলেগ বেলেগ দৈৰ্ঘ্যযুক্ত দুটা দোলকৰ বাবে হিচাপ কৰি পোৱা দোলন কাল সাৰণী-1ত উল্লেখ কৰা হ'ল ।

সাৰণী 1

l	225 ছে:মি	275 ছে:মি
T	3.04 ছেকেণ্ড	3.36 ছেকেণ্ড

সাৰণীখনে দেখুৱায় যে $l = 225$ ছেমিৰ বাবে $T = 3.04$ ছেকেণ্ড আৰু l=275 ছেমিৰ বাবে $T = 3.36$ ছেকেণ্ড

ব্যাখ্যা/বৈধকৰণ বা সিদ্ধকৰণ (Interpretation/Validation)

গণিতীয় আৰ্হি হ'ল বাস্তৱ জীৱনভিত্তিক সমস্যা এটাৰ গুৰুত্বপূৰ্ণ বৈশিষ্ট্যসমূহ অধ্যয়নৰ এক প্ৰচেষ্টা। বহু সময়ত এক আদৰ্শ পটভূমিত চৰ্ত আৰোপৰ জৰিয়তে আৰ্হি সমীকৰণ কিছুমান পোৱা যায়। এই আৰ্হি ফলপ্ৰসু হ'ব যদিহে আমি ব্যাখ্যা কৰিব খোজা আটাইবোৰ দিশ ই ব্যাখ্যা কৰিব পাৰে। অন্যথা, আমি ইয়াক পৰিহাৰ কৰিম আৰু তাৰ পিছত আকৌ পৰীক্ষা চলাম। অন্যভাৱে ক'বলৈ হ'লে, ***আমি গণিতীয় আৰ্হিটোৰপৰা প্ৰাপ্ত ফলসমূহ বাস্তৱ সমস্যাটোৰ পৰা প্ৰাপ্ত তথ্যৰাজিৰে তুলনা কৰি আৰ্হি সমীকৰণটোৰ কাৰ্য্যকাৰিতাৰ জোখ ল'ব পাৰোঁ। এই কাৰ্য্যপ্ৰণালীটোক কোৱা হয় আৰ্হি এটাৰ বৈধকৰণ বা সিদ্ধকৰণ।*** সৰল দোলকৰ ক্ষেত্ৰত দোলকটোৰ ওপৰত আমি কিছুমান পৰীক্ষা চলাওঁ আৰু দোলনকাল নিৰ্ণয় কৰোঁ। পৰীক্ষাৰ পৰা প্ৰাপ্ত ফলবোৰ সাৰণী-2ত উল্লেখ কৰা হ'ল।

সাৰণী 2

চাৰিটা বিভিন্ন দোলকৰ পৰীক্ষালব্ধ দোলনকাল

ভৰ (গ্ৰামত)	দীঘ (ছেমিত)	সময় (ছেকেণ্ডত)
385	275	3.371
	225	3.056
230	275	3.352
	225	3.042

এতিয়া সাৰণী-1ত সন্নিবিষ্ট (সমীকৰণৰ পৰা) গণনা প্ৰাপ্ত মানবোৰ সাৰণী-2ত সন্নিৱিষ্ট (পৰীক্ষাৰ পৰা) জুখি উলিওৱা মানবোৰ তুলনা কৰি চাওঁ।

গণনাপ্ৰাপ্ত মান আৰু পৰীক্ষাভিত্তিক পৰ্য্যবেক্ষণৰদ্বাৰা প্ৰাপ্ত মানৰ পাৰ্থক্যই বিসংগতিৰ পৰিমাণ সূচাইছে। উদাহৰণস্বৰূপে $l = 275$ ছে:মি আৰু ভৰ $m = 385$ গ্ৰামৰ বাবে

বিসংগতিৰ পৰিমাণ $= 3.371 - 3.36 = 0.011$, যিটো তেনেই ক্ষুদ্ৰ আৰু সেয়েহে আৰ্হিটো গ্ৰহণযোগ্য। আৰ্হিটো গৃহীত হোৱাৰ পিছত আমি ইয়াৰ ব্যাখ্যা আগ বঢ়াব লাগিব।

বাস্তৱ অৱস্থাৰ পটভূমিত সমাধানৰ বৰ্ণনা আগ বঢ়োৱা প্ৰণালীটোকেই আৰ্হিটোৰ ব্যাখ্যা বোলা হয়। এইক্ষেত্ৰত পৰৱৰ্তী ধৰণে আমি সমাধানৰ ব্যাখ্যা আগ বঢ়াব পাৰোঁ।

(a) দোলন কাল দোলকৰ দৈৰ্ঘ্যৰ বৰ্গমূলৰ সৈতে প্ৰত্যক্ষভাৱে সমানুপাতী।

(b) ই মাধ্যাকৰ্ষণিক ত্বৰণৰ বৰ্গমূলৰ সৈতে বিপৰীতভাৱে সমানুপাতী।

গণিতীয় আৰ্হিটোৰ সম্পৰ্কত আমাৰ বৈধকৰণ আৰু ব্যাখ্যাই দেখুৱায় যে ই ব্যাৱহাৰিক (পৰ্যাবেক্ষণ প্ৰাপ্ত) মানৰ সৈতে সু-সমন্বয় স্থাপন কৰিছে। কিন্তু গণনা কৰি উলিওৱা মান আৰু জুখি উলিওৱা মানৰ মাজত আমি কিছু বিসংগতি প্ৰত্যক্ষ কৰিছিলোঁ। ইয়াৰ কাৰণ হ'ল আমি সূতাডালৰ ভৰ আৰু মাধ্যমৰ প্ৰতিৰোধ উভয়ৰে সম্পৰ্ক আওকান কৰিছোঁ। সেয়েহে এনে অৱস্থাত আমি এক উন্নত আৰ্হিৰ সন্ধান কৰোঁ আৰু এই প্ৰক্ৰিয়া চলি থাকে।

এই কথাই আমাক এক গুৰুত্বপূৰ্ণ পৰ্য্যবেক্ষণৰ দিশে আগুৱাই নিয়ে। বাস্তৱ জগত সম্পৰ্কে সম্পূৰ্ণ জ্ঞান অৰ্জন কৰা আৰু ইয়াৰ বৰ্ণনা কৰিবলৈ যোৱা দুয়োটা কথাই অতিশয় জটিল। আমি মাথোঁ সম্পূৰ্ণভাৱে প্ৰাসংগিক বুলি অনুমান কৰা এটা বা দুটা মূল কাৰক বাছি লওঁ যিয়ে অৱস্থাটোক প্ৰভাৱিত কৰে। তাৰপৰা আমি এক সৰলীকৃত আৰ্হি প্ৰস্তুত কৰি উলিয়াবলৈ চেষ্টা কৰোঁ, যাৰ পৰা অৱস্থাটোৰ সম্পৰ্কে আমি কিছুমান সম্ভেদ পাওঁ। (প্ৰকৃত) অৱস্থাটো সম্পৰ্কে এক উন্নত আৰ্হি লাভ কৰাৰ আশাৰে আমি আমাৰ আৰ্হিটোৰে সৰল (ৰূপত) অৱস্থাটো অধ্যয়ন কৰোঁ।

এতিয়া আমি আৰ্হিপ্ৰকৰণৰ সৈতে যুক্ত মূল কাৰ্য্যপ্ৰণালীটোৰ সাৰাংশ এই ধৰণে আগবঢ়াব পাৰোঁ।

(a) সূত্ৰ প্ৰকৰণ বা সূত্ৰায়ন (Formulation) (b) সমাধান (c) ব্যাখ্যা/বৈধকৰণ

পৰৱৰ্তী উদাহৰণে দেখুৱায় কিদৰে অসমিকাৰ লৈখিক সমাধান নিৰ্ণয়ৰ কৌশল ব্যৱহাৰ কৰি আৰ্হি প্ৰস্তুত কৰা হয়।

উদাহৰণ 3 এখন কৃষিপামে দৈনিক কমেও 800 কিগ্ৰাকৈ বিশেষ খাদ্য সামগ্ৰী ব্যৱহাৰ কৰে। বিশেষ সামগ্ৰীবিধ হ'ল এবিধ মিশ্ৰণ য'ত শস্য আৰু চয়াবিন পৰৱৰ্তী সাৰণীত উল্লেখ কৰা ধৰণে মিহলোৱা হয়।

সাৰণী-3

দ্ৰব্য	প্ৰতি কিগ্ৰাত পুষ্টি (মাংসসাৰ)	প্ৰতি কিগ্ৰাত (আঁহ)	প্ৰতি কিগ্ৰাত খৰচ
শস্য	.09	.02	10 টকা
চয়াবিন	.60	.06	20 টকা

বিশেষ খাদ্য-সামগ্ৰীৰ আহাৰত কমেও 30% মাংসসাৰ আৰু সৰ্বোচ্চ 5% আঁহৰ প্ৰয়োজন হয়। খাদ্যমিশ্ৰণটোৰ দৈনিক ন্যূনতম খৰচ নিৰ্ণয় কৰাঁ।

সমাধান ঢাপ 1 ইয়াত আমি শস্য আৰু চয়াবিনেৰে তৈয়াৰ কৰা খাদ্যবিধৰ দৈনিক মুঠ খৰচৰ নিম্ন সীমা উলিয়াব লাগে। গতিকে বিবেচনাধীন প্ৰাচল (কাৰক) বোৰ হ'ল

$x =$ শস্যৰ পৰিমাণ

$y =$ চয়াবিনৰ পৰিমাণ

$z =$ খৰচ

ঢাপ 2 সাৰণী 3 ৰ শেষৰ স্তম্ভৰ পৰা x, y আৰু z ৰ মাজত সম্বন্ধটো এনেধৰণে পোৱা যায়-

$$z = 10x + 20y \quad \ldots (1)$$

সমস্যাটো হ'ল z ৰ ন্যূনতম মান নিৰ্ণয় কৰা, যাৰ বাবে মানিব লগীয়া চৰ্তাৱলী এনেধৰণৰ-

(a) কৃষিপামখনে শস্য আৰু চয়াবিন মিলি কমেও 800 কিলোগ্ৰাম ব্যৱহাৰ কৰে। অৰ্থাৎ $x + y > 800$ ... (2)

(b) সাৰণী-3 ৰ প্ৰথম স্তম্ভত উল্লেখ কৰা পৰিমাণৰ সমানুপাতত আহাৰত মাংসসাৰৰ প্ৰয়োজন 30%. ইয়াৰ পৰা

$$0.09x + 0.6y \geq 0.3(x + y) \quad \ldots (3)$$

(c) সদৃশভাৱে, সাৰণী-3 ৰ দ্বিতীয় স্তম্ভত উল্লেখ কৰা পৰিমাণৰ অনুপাতত আহাৰত আঁহযুক্ত দ্ৰব্যৰ প্ৰয়োজন হ'ল সৰ্বোচ্চ 5%. ইয়াৰ পৰা

$$0.02x + 0.06y \leq 0.05(x + y) \quad \ldots (4)$$

চৰ্ত (2), (3) আৰু (4) ৰ পৰা x আৰু y ৰ সহগবোৰ বেলেগে বেলেগে লগ লগাই আমি সেইবোৰ সৰল কৰিব পাৰোঁ।

তেতিয়া সমস্যাটো পুনৰ পৰৱৰ্তী ৰূপত সজাব পাৰি।

উক্তি $x + y \geq 800$

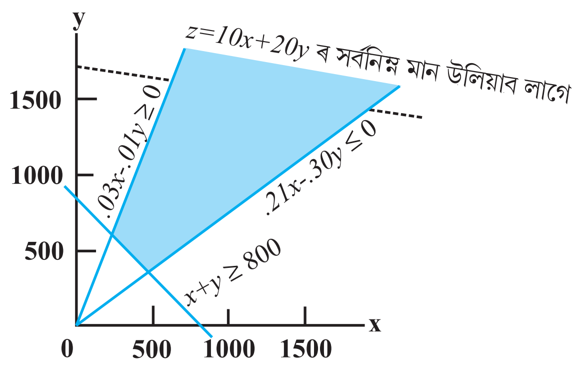
$0.21x - 0.30y \leq 0$

$0.03x - 0.01y \geq 0$

চৰ্তসাপেক্ষে $z = 10x + 20y$ ৰ সৰ্বনিম্ন মান উলিয়াব লাগে।

এয়েই হ'ল আৰ্হিটোৰ সূত্ৰায়ন।

ঢাপ 3 ইয়াৰ সমাধান আমি লেখৰ সহায়ত পাব পাৰোঁ। চিত্ৰ-5 ত দেখুওৱা ছাঁ পেলোৱা অঞ্চলটোৱেই হ'ল সমীকৰণবোৰৰ সম্ভাব্য সমাধান।



সৰ্বোচ্চ : x=470.6

y=329.4

z=11294

চিত্ৰ 5

লেখৰ পৰা স্পষ্ট যে z ৰ সৰ্বনিম্ন মান (470.6, 329.4) বিন্দুত প্ৰাপ্ত হয় অৰ্থাৎ, যেতিয়া $x = 470.6$ আৰু $y = 329.4$

ইয়াৰ পৰা z ৰ মান পাওঁ. $z = 10 \times 470.6 + 20 \times 329.4 = 11294$

এইটোৱেই হ'ল সমস্যাটোৰ গাণিতিক সমাধান।

ঢাপ 4 সমাধানটোৰ ব্যাখ্যা এনেদৰে আগ বঢ়াব পাৰি 'মাংসসাৰ আৰু আঁহ প্ৰয়োজনীয় পৰিমাণত থকা শস্য আৰু চয়াবিনযুক্ত বিশেষ খাদ্য বিধৰ ন্যূনতম খৰচ হ'ল 11294 টকা আৰু খৰচ ন্যূনতম হয় যদি মুঠ শস্য 470.6 কিগ্ৰা আৰু মুঠ চয়াবিন 329.4 কিগ্ৰা ব্যৱহাৰ কৰা হয়।'

পৰৱৰ্তী উদাহৰণটোত আমি নিৰ্দিষ্ট সময়ত এখন দেশৰ জনসংখ্যাৰ অধ্যয়ন কৰাত আৰ্হি কিদৰে ব্যৱহাৰ কৰা হয় সেই বিষয়ে আলোচনা কৰিম।

উদাহৰণ 4 ধৰা হওক, জনসংখ্যা নিয়ন্ত্ৰণ গোট এটাই 10 বছৰৰ পিছত এখন ৰাষ্ট্ৰত হ'ব পৰা জনসংখ্যাৰ পৰিমাণ উলিয়াব বিচাৰিছে।

ঢাপ 1 সূত্ৰ প্ৰকৰণ প্ৰথমে আমি লক্ষ্য কৰোঁ যে জনসংখ্যা সময়ৰ সৈতে পৰিৱৰ্তন হয় আৰু ই জন্মৰদ্বাৰা বৃদ্ধি আৰু মৃত্যুৰদ্বাৰা হ্ৰাস হয়। আমি এক নিৰ্দিষ্ট সময়ত জনসংখ্যা নিৰ্ণয় কৰিব খোজো। ধৰা হ'ল t য়ে বছৰৰ হিচাপত সময় নিৰ্দেশ কৰে । তেতিয়া t ৰ মানবোৰ হ'ব $t = 0,\ 1, 2,$........... য'ত $t = 0$ ৰ দ্বাৰা বৰ্তমানক, $t = 1$ ৰ দ্বাৰা পৰৱৰ্তী বছৰক ইত্যাদি ধৰণে নিৰ্দেশ কৰা হয়। t ৰ যিকোনো মানৰ বাবে ধৰা হ'ল, $p(t)$ য়ে সেই নিৰ্দিষ্ট বছৰত হোৱা মুঠ জনসংখ্যাক নিৰ্দেশ কৰে।

ধৰি লোৱা, আমি কোনো এক নিৰ্দিষ্ট বছৰ $t = 2006$ চনত মুঠ জনসংখ্যাৰ পৰিমাণ উলিয়াব বিচাৰিছোঁ। কিন্তু সেইটো কিদৰে কৰা যায়? আমি 2005 ৰ পহিলা জানুৱাৰীত জনসংখ্যা কিমান সেইটো জানি লওঁ। ইয়াৰ লগত সেই বছৰত হোৱা জন্মৰ সংখ্যা যোগ আৰু বছৰটোত হোৱা মুঠ মৃত্যুৰ সংখ্যা ইয়াৰপৰা বিয়োগ কৰোঁ। ধৰা হ'ল, B(t) যে t আৰু $t + 1$ৰ মাজৰ বছৰটোত হোৱা মুঠ জন্মৰ পৰিমাণ আৰু D (t) যে সেই একে বছৰত হোৱা মুঠ মৃত্যুৰ পৰিমাণ সূচায়। তেতিয়া আমি পাওঁ

$$P(t + 1) = P(t) + B(t) - D(t)$$

এতিয়া আমি কিছুমান অনুমান আৰু সংজ্ঞা আগ বঢ়াওঁ।

1. $\dfrac{B(t)}{P(t)}$ ক t ৰ পৰা $t + 1$ লৈ সময় অন্তৰালৰ বাবে জন্মৰ হাৰ বোলা হয়।

2. $\dfrac{D(t)}{P(t)}$ ক t ৰ পৰা $t + 1$ লৈ সময় অন্তৰালৰ বাবে মৃত্যুৰ হাৰ বোলা হয়।

অনুমানসমূহ (Assumptions)

1. আটাইবোৰ অন্তৰালতে জন্মৰ হাৰ একে। সেইদৰে, সকলো অন্তৰালতে মৃত্যুৰ হাৰ একে। ইয়াৰ অৰ্থ হ'ল জন্মৰ হাৰ বুজোৱা এটা ধ্ৰুৱক b আৰু মৃত্যুৰ হাৰ বুজোৱা আন এটা ধ্ৰুৱক d পোৱা যাব যাতে সকলো $t \geq 0$ ৰ বাবে

$$b = \frac{B(t)}{P(t)} \quad \text{আৰু} \quad d = \frac{D(t)}{P(t)}$$

2. জনসংখ্যালৈ বা জনসংখ্যাৰ পৰা কোনো ধৰণৰ প্ৰব্ৰজন ঘটা নাই অৰ্থাৎ জনসংখ্যা পৰিৱৰ্তনৰ উৎস কেৱল জন্ম আৰু মৃত্যু।

অনুমান 1 আৰু 2 ৰ ফলস্বৰূপে আমি এই সিদ্ধান্তলৈ আহিব পাৰোঁ যে $t \geq 0$ ৰ বাবে

$$P(t+1) = P(t) + B(t) - D(t)$$
$$= P(t) + bP(t) - dP(t)$$
$$= (1+b-d)P(t) \qquad \text{... (2)}$$

(2) ৰ পৰা t = 0 বহুৱাই আমি পাওঁ

$$P(1) = (1+b-d)\,P(0) \qquad \text{... (3)}$$

আকৌ (2) ৰ পৰা t = 1 বহুৱাই আমি পাওঁ

$$P(2) = (1+b-d)P(1)$$
$$= (1+b-d)(1+b-d)P(0) \qquad \text{((3) ব্যৱহাৰ কৰি)}$$
$$= (1+b-d)^2 P(0)$$

এনেদৰে গৈ থাকিলে আমি পাওঁ

$$P(t) = (1+b-d)^t P(o) \text{ য'ত } t = 0,\ 1,\ 2,\ \dots\dots \qquad (4)$$

ধ্ৰুৱক $1+b\text{-}d$ ক সংক্ষেপে r ৰ দ্বাৰা সূচোৱা হয় আৰু ইয়াক 'বৃদ্ধিৰ হাৰ' বুলি উল্লেখ কৰা হয়। অধিকতৰ উচ্চ খাপৰ ভাষাত ইয়াক কোৱা হয় 'মালথাছিয় প্ৰাচল' (Malthusian Parameter) যিটো আগ বঢ়োৱা হৈছিল ৰবাৰ্ট মালথাছৰ সন্মানাৰ্থে যিজনে প্ৰথমে এই আৰ্হিটো সম্পৰ্কে জনসাধাৰণৰ মনোযোগ আকৰ্ষণ কৰিছিল। r ৰ সহায়ত সমীকৰণ (4) ৰূপ হ'ব

$$P(t) = P(0)\, r^t,\ t = 0,\ 1,\ 2\ \dots \qquad \text{... (5)}$$

$P(t)$ হ'ল সূচকীয় ফলনৰ এটা উদাহৰণ। cr^t আকাৰৰ ফলনক সূচকীয় আকাৰৰ ফলন বোলা হয় য'ত c আৰু r ধ্ৰুৱক। সমীকৰণ (5) হ'ল সমস্যাটোৰ গাণিতিকভাৱে সূত্ৰায়িত ৰূপ অৰ্থাৎ, সূত্ৰায়ন।

ঢাপ 2 – সমাধান

ধৰা হওক বৰ্তমান জনসংখ্যা 250.000,000 আৰু জন্ম আৰু মৃত্যুৰ হাৰ ক্ৰমে $b = 0.02$ আৰু $d = 0.01$. 10 বছৰত জনসংখ্যা কিমান হ'ব? সূত্ৰৰ সহায়ত আমি P(10) ৰ মান উলিয়াওঁ

$$P(10) = (1.01)^{10}(250{,}000{,}000)$$
$$= 1.104622125 \times 250{,}000{,}000$$
$$= 276{,}155{,}531.25$$

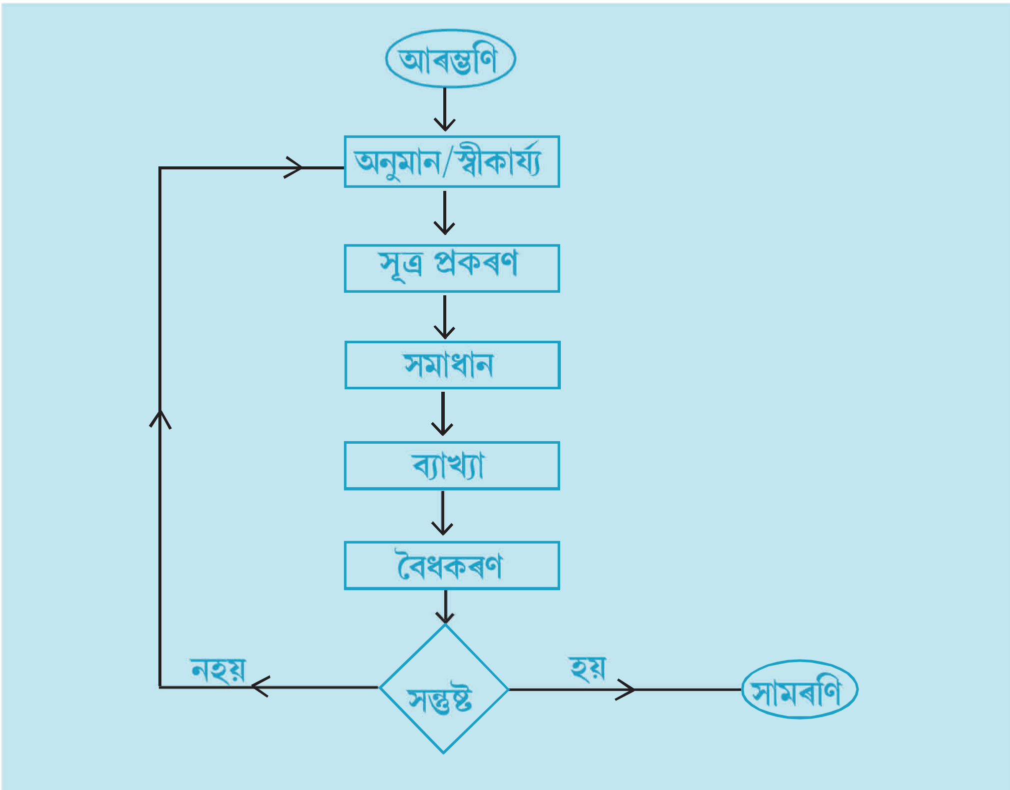
ঢাপ 3 ব্যাখ্যাকৰণ আৰু বৈধকৰণ

স্বাভাৱিকতে উক্ত ফলটো অসম্ভৱ কিয়নো 0.25 পৰিমাণৰ ব্যক্তি পাব নোৱাৰি। সেয়েহে আমি কোনো আসন্ন মান লওঁ আৰু জনসংখ্যাৰ পৰিমাণ 276,155,531 (আসন্ন মান) বুলি থিৰাং কৰোঁ। গণিতীয় আৰ্হিটোত আৰোপ কৰা ধাৰণা বা অনুমানৰ বাবে আমি ইয়াত আচল মানটো পোৱা নাই।

উপৰিউক্ত উদাহৰণসমূহে দেখুৱায় কেনেকৈ বিভিন্ন গণিতীয় কৌশল প্ৰয়োগ কৰি বেলেগ বেলেগ পৰিস্থিতিত আৰ্হি প্ৰস্তুত কৰিব পাৰি।

গণিতীয় আৰ্হি যিহেতু বাস্তৱ সমস্যা এটাৰ সৰলীকৃত ৰূপ, স্বাভাৱিকতে অনুমান (Assumption) আৰু আসন্নতা

(Approximation) ইয়াৰ গাঁঠনিগত বৈশিষ্ট্য। স্পষ্টভাৱে, আটাইতকৈ গুৰুত্বপূৰ্ণ প্ৰশ্নটো হ'ল আমাৰ আৰ্হিটো সঠিক হৈছে নে নাই সেইটো নিৰ্ণয় কৰা অৰ্থাৎ আৰ্হিটোৱে যথাযথ সমিধান দিয়া বা নিদিয়া কথাটো যেতিয়া বাস্তৱ ক্ষেত্ৰত ব্যাখ্যা কৰা হয়। যদি আৰ্হিটো বৰ নিখুঁত হোৱা নাই তেন্তে আমি ইয়াৰ আসোঁৱাহ বিলাকৰ উৎস সমূহ বিচাৰি উলিয়াবলৈ চেষ্টা কৰোঁ। তেতিয়া কথাটো এনেধৰণৰো হ'ব পাৰে যে এক নতুন সূত্ৰ প্ৰকৰণ, এক নতুন ধৰণৰ গণিতীয় প্ৰচেষ্টা আৰু সেইবাবে এক নতুন ধৰণৰ মূল্যায়ন প্ৰয়োজন হৈ পৰিছে। এইদৰে তলৰ 'ফ্ল'চাৰ্ট' (Flow Chart) অত দেখুওৱাৰ নিচিনা গণিতীয় আৰ্হিকৰণ, আৰ্হিকৰণ প্ৰক্ৰিয়াটোৰ এক চক্ৰ হৈ উঠিব পাৰে। যেনে-



— ❖ —