सारणिक

Ex 4.1

प्रश्न 1. k के किस मान के लिए सारणिक

$$\begin{vmatrix} k & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}$$

शून्य होगा ?

हल :

$$\begin{vmatrix} k & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$-3k - 8 = 0 \Rightarrow -3k = 8 \Rightarrow k = -\frac{8}{3}$

अत: $k = -\frac{8}{3}$ के लिए सारणिक का मान शून्य होगा।

प्रश्न 2. यदि

$$\begin{vmatrix} x & y \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

हो, तो x:y ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\begin{vmatrix} x & y \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$(4 \times x) - (2 \times y) = 0$

$4x - 2y = 0$

$\Rightarrow 4x = 2y$

$$\frac{x}{y} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

अत: x:y = 1:2

प्रश्न 3. यदि

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ y & x \end{vmatrix} = 4$$

तथा

$$\begin{vmatrix} x & y \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 7$$

के मान ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ y & x \end{vmatrix} = 4$$

2 × x − 3 × y = 4
2x − 3y = 4 ….(i)

इसी प्रकार, $\begin{vmatrix} x & y \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 7$

$$x \times 2 - 4 \times y = 7$$
$$2x - 4y = 7 \quad \ldots(ii)$$

समीकरण (i) व (ii) को हल करने पर

$$2x - 3y = 4 \quad \ldots(i)$$
$$2x - 4y = 7 \quad \ldots(ii)$$
$$- \quad + \quad -$$

घटाने पर $y = -3$

$y = -3$ समीकरण (i) में रखने पर

$$2x - 3(-3) = 4$$
$$2x + 9 = 4$$
$$2x = 4 - 9 = -5$$
$$x = -5/2$$

अत: **$x = -5/2$ तथा $y = -3$.**

प्रश्न 4. यदि

$$\begin{vmatrix} x-1 & x-2 \\ x & x-3 \end{vmatrix} = 0$$

हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\begin{vmatrix} x-1 & x-2 \\ x & x-3 \end{vmatrix} = 0$$

(x − 1) (x − 3) − (x − 2) = 0

$x^2 - 3x - x + 3 - x^2 + 2x = 0$
$- 2x + 3 == 0$
$- 2x = - 3$
अतः $x = 3/2$

प्रश्न 5. निम्न सारणिकों में प्रथम स्तम्भ के अवयवों की उपसारणिक एवं सहखण्डज लिखकर उसका मान भी ज्ञात कीजिए—

(i) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$ **(ii)** $\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$

हल :

(i) माना, $A = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$

a_{11} का उपसारणिक $M_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$

$= -2 - (10) = -2 - 10 = \mathbf{-12}$

a_{11} का सहगुणनखण्ड $C_{11} = (-1)^2 M_{11}$

$= 1 \times (-12) = \mathbf{-12}$

a_{21} का उपसारणिक $M_{21} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$

$= -10 - 6 = \mathbf{-16}$

a_{21} का सहगुणनखण्ड $C_{21} = (-1)^3 M_{21}$

$= -1 \times (-16) = \mathbf{16}$

a_{31} का उपसारणिक $M_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$

$= -6 - (-2) = -6 + 2 = \mathbf{-4}$

a_{31} का सहगुणनखण्ड $C_{31} = (-1)^4 M_{31}$

$= 1 \times (-4) = \mathbf{-4}$

अतः सारणिक, $A = a_{11}F_{11} + a_{21}F_{21} + a_{31}F_{31}$

$= 1 \times (-12) + 4 \cdot (16) + 3 \cdot (-4)$

$= -12 + 64 - 12$

$= \mathbf{40}$

अत: $M_{11} = -12, M_{21} = -16, M_{31} = -4$

$F_{11} = -12, M_{21} = 16, F_{31} = -4$

$|A| = \mathbf{40}$

(ii) $\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$

a_{11} का उपसारणिक $M_{11} = \begin{vmatrix} b & f \\ f & c \end{vmatrix} = bc - f^2$

a_{11} का सहखण्ड $F_{11} = (-1)^2 M_{11}$

$= (bc - f^2)$

a_{21} का उपसारणिक $M_{21} = \begin{vmatrix} h & g \\ f & c \end{vmatrix} = hc - fg$

a_{21} का सहखण्ड $F_{21} = (-1)^3 M_{21}$

$= -(hc - fg) = fg - hc$

a_{31} का उपसारणिक $M_{31} = \begin{vmatrix} h & g \\ b & f \end{vmatrix} = hf - bg$

a_{31} का सहखण्ड $F_{31} = (-1)^4 (hf - bg)$

$= hf - bg$

अत: सारणिक $|A| = a_{11}F_{11} + a_{21}F_{21} + a_{31}F_{31}$

$= a \cdot (bc - f^2) + h \cdot (fg - hc) + g \cdot (hf - bg)$

$= abc - af^2 + fgh - h^2c + fgh - bg^2$

$= abc + 2fgh - af^2 - h^2c - bg^2$

अत: $M_{11} = bc - f^2, M_{21} = hc - fg, M_{31} = hf - bg$

$F_{11} = bc - f^2, F_{21} = Fg - hc, F_{31} = hf - bg$

$|A| = abc + 2fgh - af^2 - h^2c - bg^2$

प्रश्न 6. सारणिक

$$\begin{vmatrix} 3 & -11 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \\ -10 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

का मान ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ द्वितीय पंक्ति में दो शून्य हैं; अत: द्वितीय पंक्ति के सापेक्ष प्रसार करने पर,

$$\begin{vmatrix} 3 & -11 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \\ -10 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -5(-1)\begin{vmatrix} -11 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 0 - 0$$

= − 5 (0 − 3)
= − 5 × (-3)
= 15

प्रश्न 7. सिद्ध कीजिए

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ -a & 1 & c \\ -b & -c & 1 \end{vmatrix} = 1 + a^2 + b^2 + c^2$$

हल : प्रथम पंक्ति के सापेक्ष प्रसार करने पर,

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ -a & 1 & c \\ -b & -c & 1 \end{vmatrix} = 1(1 + c^2) - a(-a + bc) + b(ac + b)$$

$= 1 + c^2 + a^2 - abc + abc + b^2$
$= 1 + a^2 + b^2 + c^2$
= R H.S.

इति सिद्धम्

Ex 4.2

प्रश्न 1. यदि

$$\begin{vmatrix} l & m \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

हो, तो l : m ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\begin{vmatrix} l & m \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

प्रसार करने पर,
l × 3 − 2 × m = 0
3l − 2m = 0
3l = 2m
$\frac{l}{m} : \frac{2}{3}$
अतः l : m = 2 : 3

प्रश्न 2. सारणिक

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 5 \\ 1 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

के द्वितीय पंक्ति के अवयवों की उपसारणिक ज्ञात कीजिए।

हल : दी गई सारणिक,

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 5 \\ 1 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

a_{21} (= 3) का उपसारणिक $M_{21} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$

a_{22} (= 6) का उपसारणिक $M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 9 \end{vmatrix}$

a_{23} (= 5) का उपसारणिक $M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}$

प्रश्न 3. सारणिक

$$\begin{vmatrix} \mathbf{13} & \mathbf{16} & \mathbf{19} \\ \mathbf{14} & \mathbf{17} & \mathbf{20} \\ \mathbf{15} & \mathbf{18} & \mathbf{21} \end{vmatrix}$$

का मान ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\begin{vmatrix} 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \\ 15 & 18 & 21 \end{vmatrix}$$

$C_2 \to C_2 - C_1$ तथा $C_3 \to C_3 - (C_1 + 3)$ से,

$$= \begin{vmatrix} 13 & 16-13 & 19-16 \\ 14 & 17-14 & 20-17 \\ 15 & 18-15 & 21-18 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 13 & 3 & 3 \\ 14 & 3 & 3 \\ 15 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (\because\ C_2 = C_3)$$

प्रश्न 4. यदि किसी सारणिक के प्रथम व तृतीय स्तम्भों को आपस में बदल दिया जाए तो सारणिक के मान पर क्या प्रभाव पड़ेगा ? लिखिए।

हल : सारणिक के मान का चिह्न बदल जाएगा।

प्रश्न 5. सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & yz & y+z \\ \mathbf{1} & zx & z+x \\ \mathbf{1} & xy & x+y \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x).$$

हल : L.H.S. =

$$= \begin{vmatrix} 1 & yz & y+z \\ 1 & zx & z+x \\ 1 & xy & x+y \end{vmatrix}$$

R2 → R2 − R1 तथा R3 → R3 − R1 से,

$$= \begin{vmatrix} 1 & yz & y+z \\ 1-1 & zx-yz & z+x-y-z \\ 1-1 & xy-yz & x+y-y-z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & yz & y+z \\ 0 & z(x-y) & (x-y) \\ 0 & y(x-z) & (x-z) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & yz & y+z \\ 0 & z(x-y) & (x-y) \\ 0 & -y(z-x) & -(z-x) \end{vmatrix}$$

R2 व R3 से (x − y) तथा (z − x) उभयनिष्ठ लेने पर,

$$= (x-y)\,(z-x) \begin{vmatrix} 1 & yz & y+z \\ 0 & z & 1 \\ 0 & -y & -1 \end{vmatrix}$$

= (x − y) (z − x) [1(-z + y)]
= (x − y) (z − y) (y − z)
= (x − y) (y − z) (z − x)
= R.H.S.

इति सिद्धम्।

प्रश्न 6. सारणिक

$$\begin{vmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{b^2a} & \boldsymbol{c^2a} \\ \boldsymbol{a^2b} & \mathbf{0} & \boldsymbol{c^2b} \\ \boldsymbol{a^2c} & \boldsymbol{b^2c} & \mathbf{0} \end{vmatrix}$$

का मान ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\begin{vmatrix} 0 & b^2a & c^2a \\ a^2b & 0 & c^2b \\ a^2c & b^2c & 0 \end{vmatrix}$$

C1 से a^2, C2 से b^2 तथा C3 से c^2 उभयनिष्ठ लेने पर,

$$= a^2 \times b^2 \times c^2 \begin{vmatrix} 0 & a & a \\ b & 0 & b \\ c & c & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a^2b^2c^2\left\{0 - a\begin{vmatrix} b & b \\ c & 0 \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} b & 0 \\ c & c \end{vmatrix}\right\}$$

$= a^2b^2c^2\{- a(0 - bc) + a(bc - 0)\}$
$= a^2b^2c^2(+ abc + abc)$
$= a^2b^2c^2 (2abc)$
$= 2a^3b^3c^3$

प्रश्न 7. निम्न समीकरण को हल कीजिए

$$\begin{vmatrix} x-2 & 2x-3 & 3x-4 \\ x-4 & 2x-9 & 3x-16 \\ x-8 & 2x-27 & 3x-64 \end{vmatrix} = 0.$$

हल : L.H.S.

$$= \begin{vmatrix} x-2 & 2x-3 & 3x-4 \\ x-4 & 2x-9 & 3x-16 \\ x-8 & 2x-27 & 3x-64 \end{vmatrix}$$

$R_1 \to R_1 - R_2$ तथा $R_2 \to R_2 - R_3$ से

$$= \begin{vmatrix} x-2-x+4 & 2x-3-2x+9 & 3x-4-3x+16 \\ x-4-x+8 & 2x-9-2x+27 & 3x-16-3x+64 \\ x-8 & 2x-27 & 3x-64 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 6 & 12 \\ 4 & 18 & 48 \\ x-8 & 2x-27 & -29 \end{vmatrix}$$

$C_2 \to C_2 - 2C_1$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 4 & 10 & 26 \\ x-8 & -11 & -29 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2 \times 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 15 & 13 \\ x-8 & -11 & -29 \end{vmatrix} = 0$$

⇒ 1(- 145 + 143) − 1(-58 + 13x + 104) + 2(- 22 − 5x + 40) = 0
⇒ − 2 + 13x − 46 − 10x + 36 = 0
⇒ 3x − 12 = 0
⇒ x = $\frac{12}{3}$ = 4.

प्रश्न 8. बिना विस्तार के सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ p & q & r \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & b & q \\ x & a & p \\ z & c & r \end{vmatrix}$$

हल : माना

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = \Delta_1, \begin{vmatrix} x & y & z \\ p & q & r \\ a & b & c \end{vmatrix} = \Delta_2 \text{ तथा}$$

$$\begin{vmatrix} y & b & q \\ x & a & p \\ z & c & r \end{vmatrix} = \Delta_3$$

$$\therefore \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ p & q & r \end{vmatrix} \quad (R_1 \rightleftharpoons R_2)$$

$$= (-1)^2 \begin{vmatrix} x & y & z \\ p & q & r \\ a & b & c \end{vmatrix} \quad (R_2 \rightleftharpoons R_3)$$

$$= \Delta_2$$

$$\text{पुनः} \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & x & p \\ b & y & q \\ c & z & r \end{vmatrix} \quad (R \rightleftharpoons C)$$

$$= (-1)\begin{vmatrix} x & a & p \\ y & b & q \\ z & c & r \end{vmatrix} \qquad (C_1 \rightleftharpoons C_2)$$

$$= \begin{vmatrix} y & b & q \\ x & a & p \\ z & c & r \end{vmatrix} \qquad (R_1 \rightleftharpoons R_2)$$

$$= \Delta_3 \qquad \text{...(ii)}$$

समी. (i) व (ii) से,

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3$$

अतः $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ p & q & r \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & b & q \\ x & a & p \\ z & c & r \end{vmatrix}$

इति सिद्धम्।।

प्रश्न 9. सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} b+c & a+b & a \\ c+a & b+c & b \\ a+b & c+a & c \end{vmatrix} = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.$$

हल :

$$\text{L.H.S.} = \begin{vmatrix} b+c & a+b & a \\ c+a & b+c & b \\ a+b & c+a & c \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a+b+c & a+b & a \\ a+b+c & b+c & b \\ a+b+c & c+a & c \end{vmatrix} \qquad C_1 \to C_1 + C_3$$

C_1 से $(a + b + c)$ उभयनिष्ठ लेने पर,

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a+b & a \\ 1 & b+c & b \\ 1 & c+a & c \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1-1 & a+b-b-c & a-b \\ 1-1 & b+c-c-a & b-c \\ 1 & c+a & c \end{vmatrix}$$

$R_1 \to R_1 - R_2$
$R_2 \to R_2 - R_3$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 0 & a-c & a-b \\ 0 & b-a & b-c \\ 1 & c+a & c \end{vmatrix}$$

C1 के सापेक्ष विस्तार करने पर,
= (a + b + c) [0 − 0 + 1{(a − c) (b − c) − (a − b) (b − a)}]
= (a + b + c) {(ab − ca − bc + c^2) − (ab − a − b^2 + ab)}
= (a + b + c) (ab − ca − bc + c^2 − ab + a^2 + b^2 − ab)
= (a + b + c) (a^2 + b^2 + c^2 − ab − bc − ca)
= $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$
= R.H.S.
इति सिद्धम्।।

प्रश्न 10. सारणिक

$$\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 \end{vmatrix}$$

का मान ज्ञात कीजिए।

हल : सारणिक =

$$= \begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 4 & 9 & 16 \\ 9 & 16 & 25 \end{vmatrix}$$

C3 → C2 − 4C1 तथा C3 → C3 − 9C1 से,

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -7 & -20 \\ 9 & -20 & 56 \end{vmatrix}$$

= (392 − 400) − 0 + 0
= − 8

प्रश्न 11. यदि ω इकाई का घनमूल हो, तो सारणिक

$$\begin{vmatrix} 1 & \omega^3 & \omega^2 \\ \omega^3 & 1 & \omega \\ \omega^2 & \omega & 1 \end{vmatrix}$$

का मान ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\begin{vmatrix} 1 & \omega^2 & \omega^2 \\ \omega^3 & 1 & \omega \\ \omega^2 & \omega & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \omega^2 \\ 1 & 1 & \omega \\ \omega^2 & \omega & 1 \end{vmatrix} \quad (\because \ \omega^3 = 1)$$

R1 के सापेक्ष विस्तार करने पर,
$= 1(1 - \omega^2) - 1(1 - \omega^3) + \omega^2(\omega - \omega^2)$
$= 1 - \omega^2 - 1 + \omega^3 + \omega^3 - \omega^4$
$= 1 - \omega^2 - 1 + 1 + 1 - \omega^3.\omega$ $(\because \omega^3 = 1)$
$= 3 - \omega^2 - 1 - \omega$ $(\because \omega^3 = 1)$
$= 3 - (1 + \omega + \omega^2)$
$= 3 - 0 = 3$ $(\because 1 + \omega + \omega^2 = 0)$

प्रश्न 12. सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} a^2 & bc & ac + c^2 \\ a^2 + ab & b^2 & ac \\ ab & b^2 + bc & c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2.$$

हल :

$$\text{L.H.S.} = \begin{vmatrix} a^2 & bc & ac + c^2 \\ a^2 + ab & b^2 & ac \\ ab & b^2 + bc & c^2 \end{vmatrix}$$

$R_1 \rightarrow R_1 + R_2 + R_3$

$$= \begin{vmatrix} a^2+a^2+ab+ab & bc+b^2+b^2+bc & ac+c^2+ac+c^2 \\ a^2+ab & b^2 & ac \\ ab & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2a^2+2ab & 2b^2+2bc & 2c^2+2ac \\ a^2+ab & b^2 & ac \\ ab & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} a(a+b) & b(b+c) & c(a+a) \\ a(a+b) & b^2 & ac \\ ab & b(b+c) & c^2 \end{vmatrix}$$

C_1, C_2 व C_3 से a, b, c उभयनिष्ठ लेने पर,

$$= 2abc\begin{vmatrix} (a+b) & (b+c) & (c+a) \\ (a+b) & b & a \\ b & (b+c) & c \end{vmatrix}$$

$R_1 \rightarrow R_1 - R_2$
$R_2 \rightarrow R_2 - R_3$

$$= 2abc\begin{vmatrix} a+b-a-b & b+c-b & c+a-a \\ a+b-b & b-b-c & a-c \\ b & b+c & c \end{vmatrix}$$

$$= 2abc\begin{vmatrix} 0 & c & c \\ a & -c & a-c \\ b & b+c & c \end{vmatrix}$$

R_1 से c उभयनिष्ठ लेने पर,

$$= 2abc^2\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a & -c & a-c \\ b & b+c & c \end{vmatrix}$$

R1 के सापेक्ष विस्तार करने पर,
= $2abc^2$ [0 – 1{ac – b(a – c)} + 1{a(b + c) – (– c) (b)]
= $2abc^2$ [- ac + ba – bc + ab + ac + bc]
= $2abc^2$ (2ab)
= $4a^2b^2c^2$
= R.H.S.

इति सिद्धम्।

प्रश्न 13. यदि सारणिक

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

में A1, B1,C1, ... आदि क्रमशः अवयव a1,b1,c1,... आदि के सहखण्ड हों, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$$

हल : दिया है :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{तथा माना } \Delta' = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta\Delta' = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1 & a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2 & a_1A_3 + b_1B_3 + c_1C_3 \\ a_2A_1 + b_2B_1 + c_2C_1 & a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_3 & a_2A_3 + b_2B_3 + c_2C_3 \\ a_3A_1 + b_3B_1 + c_3C_1 & a_3A_2 + b_3B_2 + c_3C_2 & a_3A_3 + b_3B_3 + c_3C_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{vmatrix} = \Delta^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \Delta^3 \times 1$$

$$= \Delta^3$$

$$\therefore \qquad \Delta\Delta' = \Delta^3$$

$$\Rightarrow \qquad \Delta' = \Delta^2 \Rightarrow \Delta^2 = \Delta'$$

$$\Rightarrow \qquad \Delta^2 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$$

इति सिद्धम्।

Miscellaneous Exercise

प्रश्न 1. सारणिक

$$\begin{vmatrix} \cos 80° & -\cos 10° \\ \sin 80° & \sin 10° \end{vmatrix}$$

का मान है

(a) 0
(b) 1
(c) -1
(d) इनमें से कोई नहीं

हल : (b)

$$\begin{vmatrix} \cos 80° & -\cos 10° \\ \sin 80° & \sin 10° \end{vmatrix}$$

$= \cos 80° \sin 10° - (-\cos 10°) \sin 80°$
$= \cos 80° \sin 10° + \cos 10° \sin 80°$
$= \sin (10° + 80°)$
$= \sin 90°$
$= 1$

प्रश्न 2.

सारणिक

$$\begin{vmatrix} 5 & 20 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

के प्रथम स्तम्भ के सहखण्ड हैं

(a) – 1, 3
(b) – 1, – 3
(c) – 1, 20
(d) – 1, – 20

हल : (a)

$$\begin{vmatrix} 5 & 20 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

a_{11} का सहखण्ड $F_{11} = (-1)^2 M_{11}$
$= 1 \times (-1) = -1$
a_{12} का सहखण्ड $F_{21} = (-1) M_{21}$

$= (-1) \times 20 = -20$

अतः सारणिक के प्रथम स्तम्भ के सहखण्ड -1, -20 हैं।

प्रश्न 3. यदि

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

हो, तो सारणिक

$$\begin{vmatrix} -2 & -4 & -6 \\ -8 & -10 & -12 \\ -2 & -4 & -8 \end{vmatrix}$$

का मान होगा-

(a) – 2Δ
(b) 8Δ
(c) – 8Δ
(d) – 6Δ

हल : (c)

$$\begin{vmatrix} -2 & -4 & -6 \\ -8 & -10 & -12 \\ -2 & -4 & -8 \end{vmatrix}$$

प्रथम, द्‌वितीय तथा तृतीय पंक्ति से – 2 उभयनिष्ठ लेने पर

$$= (-2)(-2)(-2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -8\Delta \qquad \left(\because \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \right)$$

प्रश्न 4. निम्न में से कौन-सा सारणिक, सारणिक

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

के समान है

(a) $-\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ (d) $-\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{vmatrix}$

हल :

(c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix}$

$C_1 \rightleftharpoons C_3$ करने पर

$$= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

$C \rightleftharpoons R$ करने पर

$$= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

प्रश्न 5. सारणिक

$$\begin{vmatrix} \cos 50^\circ & \sin 10^\circ \\ \sin 50^\circ & \cos 10^\circ \end{vmatrix}$$

का मान है

(a) 0
(b) 1
(c) 1/2

(d) – 1/2

हल : (c)

$$\begin{vmatrix} \cos 50^\circ & \sin 10^\circ \\ \sin 50^\circ & \cos 10^\circ \end{vmatrix}$$

= cos 50°.cos 10° – sin 50° sin 10°
= cos (50° + 10°)
= cos 60°
= $\frac{1}{2}$

प्रश्न 6. सारणिक

$$\begin{vmatrix} 1 & bc & a(b+c) \\ 1 & ca & b(c+a) \\ 1 & ab & c(a+b) \end{vmatrix}$$

का मान है

(a) ab + bc + ca
(b) 0
(c) 1.
(d) abc

हल : (b)

$$\text{(b)} \begin{vmatrix} 1 & bc & a(b+c) \\ 1 & ca & b(c+a) \\ 1 & ab & c(a+b) \end{vmatrix}$$

$C_3 \to C_3 + C_1$ से

$$= \begin{vmatrix} 1 & bc & ab+ac+bc \\ 1 & ca & bc+ab+ca \\ 1 & ab & ca+cb+ab \end{vmatrix}$$

$$= (ab+bc+ca) \begin{vmatrix} 1 & bc & 1 \\ 1 & ca & 1 \\ 1 & ab & 1 \end{vmatrix}$$

= (ab + bc + ca) x 0 (∵ C1 = C3)
= 0

प्रश्न 7.

यदि ω इकाई का एक घनमूल हो, तो सारणिक

$$\begin{vmatrix} 1 & \omega^4 & \omega^8 \\ \omega^4 & \omega^8 & 1 \\ \omega^8 & 1 & \omega^4 \end{vmatrix}$$

का मान है

(a) ω^2
(b) ω
(c) 1
(d) 0

हल : (d)

$$\text{(d)} \begin{vmatrix} 1 & \omega^4 & \omega^8 \\ \omega^4 & \omega^8 & 1 \\ \omega^8 & 1 & \omega^4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \omega^3 \cdot \omega & (\omega^3)^2 \cdot \omega^2 \\ \omega^3 \cdot \omega & (\omega^3)^2 \cdot \omega^2 & 1 \\ (\omega^3)^2 \cdot \omega^2 & 1 & \omega^3 \cdot \omega \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix} \qquad (\because \omega^3 = 1)$$

$C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$

$$= \begin{vmatrix} 1+\omega+\omega^2 & \omega & \omega^2 \\ \omega+\omega^2+1 & \omega^2 & 1 \\ \omega^2+1+\omega & 1 & \omega \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & \omega & \omega^2 \\ 0 & \omega^2 & 1 \\ 0 & 1 & \omega \end{vmatrix} \qquad (\because 1 + \omega + \omega^2 = 0)$$

$$= 0.$$

प्रश्न 8. यदि

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

हो तो x का मान है

(a) 6
(c) 8
(b) 7
(d) 0

हल : (a)

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow (4 - 2)^2 = (3x - 2) - (x + 6)$
$\Rightarrow (2)^2 = 3x - 2 - x - 6$
$\Rightarrow 4 = 2x - 8$
$\Rightarrow 4 + 8 = 2x$
अत: $x = 6$

प्रश्न 9.

यदि

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

तथा $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots$ के संगत सहखण्ड क्रमशः $F_{11}, F_{12}, F_{13}, \ldots$ हों, तो सत्य कथन है-
(a) $a_{12}F_{12} + a_{22}F_{22} + a_{32}F_{32} = 0$
(b) $a_{12}F_{12} + a_{22}F_{22} + a_{32}F_{32} \neq \Delta$
(c) $a_{12}F_{12} + a_{22}F_{22} + a_{32}F_{32} = -\Delta$
(d) $a_{12}F_{12} + a_{22}F_{22} + a_{32}F_{32} = -\Delta$

हल : (c) $a_{12}F_{12} + a_{22}F_{22} + a_{32}F_{32} = \Delta$

प्रश्न 10. सारणिक

$$\begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ z & x & y \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

का मान है

(a) x + y + z
(b) 2(x + y + z)
(c) 1
(d) 0

हल : (d)

$$\begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ z & x & y \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

R1 → R1 + R2 तथा R3 से 2 उभयनिष्ठ लेने पर,

$$= 2\begin{vmatrix} x+y+z & y+z+x & z+x+y \\ z & x & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

R1 से (x + y + z) उभयनिष्ठ लेने पर,

$$= 2(x+y+z)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z & x & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

∵ R1 तथा R3 सर्वसम हैं; अत: सारणिक का मान शून्य होगा।

प्रश्न 11. निम्न सारणिक को हल कीजिए

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & x & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

हल :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & x & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

R1 के सापेक्ष प्रसार करने पर,
⇒ = 1(9x − 48) − 2(36 − 42) + 3(32 − 7x) = 0
⇒ 9x − 48 + 12 + 96 − 21x = 0
⇒ − 12x + 60 = 0
⇒ − 12x = − 60
x = $\frac{60}{12} = 5$
अतः x = 5.

प्रश्न 12. सारणिक

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 3 & 9 & 1 \\ 9 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

का मान ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 3 & 9 & 1 \\ 9 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

R1 के सापेक्ष प्रसार करने पर,
= 1(27 − 1) − 3(9 − 9) + 9(3 − 81)
= 26 − 0 − 702
= − 676

प्रश्न 13. सारणिक

$$\begin{vmatrix} 1+a & b & c \\ a & 1+b & c \\ a & b & 1+c \end{vmatrix}$$

का मान ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\begin{vmatrix} 1+a & b & c \\ a & 1+b & c \\ a & b & 1+c \end{vmatrix}$$

$R_1 \to R_1 - R_2$ तथा $R_2 \to R_2 - R_3$ से

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ a & b & 1+c \end{vmatrix}$$

$C_2 \to C_2 + C_1$ से,

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ a & a+b & 1+c \end{vmatrix}$$

= 1[(1 + c) + (a + b)] − 0 + 0
= 1 + c + a + b
= 1 + a + b + c.

प्रश्न 14. सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ca & cb & -c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2.$$

हल : L.H.S.

$$= \begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ca & cb & -c^2 \end{vmatrix}$$

C1, C2, व C3 से क्रमशः a, b तथा c उभयनिष्ठ लेने पर,

$$= abc \begin{vmatrix} -a & a & a \\ b & -b & b \\ c & c & -c \end{vmatrix}$$

R1, R2, तथा R3, से क्रमशः a, b तथा c उभयनिष्ठ लेने पर,

$$= a^2b^2c^2 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

C1 से (3 − 1) उभयनिष्ठ लेने पर,
$= a^2b^2c^2 - 1(1 - 1) - 1(-1 - 1) + 1(1 + 1)]$
$= a^2b^2c\ (0 + 2 + 2)$
$= 4a^2b^2c^2$

= R.H.S.
इति सिद्धम्।

प्रश्न 15. सिद्ध कीजिए कि निम्न समीकरण का एक मूल x = 2 है तथा इसके शेष मूल भी ज्ञात कीजिए–

$$\begin{vmatrix} x & -6 & -1 \\ 2 & -3x & x-3 \\ -3 & 2x & x+2 \end{vmatrix} = 0.$$

हल :
L.H.S.

$$= \begin{vmatrix} x & -6 & -1 \\ 2 & -3x & x-3 \\ -3 & 2x & x+2 \end{vmatrix}$$

समीकरण का मूल x = 2 सारणिक में रखने पर,

$$= \begin{vmatrix} 2 & -6 & -1 \\ 2 & -6 & -1 \\ -3 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

∵ R1 = R2
∴ सारणिक का मान शून्य होगा।
∴ स्पष्ट है कि x = 2 दिए समीकरण का एक मूल है।

पुनः $$\begin{vmatrix} x & -6 & -1 \\ 2 & -3x & x-3 \\ -3 & 2x & x+2 \end{vmatrix} = 0$$

$C_1 \rightarrow C_1 + C_3$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & -6 & -1 \\ x-1 & -3x & x-3 \\ x-1 & -2x & x+2 \end{vmatrix} = 0$$

C_1 से $(x-1)$ उभयनिष्ठ लेने पर,

$$\Rightarrow \quad (x-1)\begin{vmatrix} 1 & -6 & -1 \\ 1 & -3x & x-3 \\ 1 & 2x & x+2 \end{vmatrix} = 0$$

अब $R_2 \to R_2 - R_1$

$R_3 \to R_3 - R_1$

$$\Rightarrow (x-1)\begin{vmatrix} 1 & -6 & -1 \\ 1-1 & -3x+6 & x-3+1 \\ 1-1 & 2x+6 & x+2+1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x-1)\begin{vmatrix} 1 & -6 & -1 \\ 0 & -3x+6 & x-2 \\ 0 & 2x+6 & x+3 \end{vmatrix} = 0$$

C के सापेक्ष प्रसार करने पर,

$(x - 1) [(-3x + 6) (x + 3) - (2x + 6) (x - 2)] = 0$

$(x - 1) [-3(x - 2) (x + 3) - 2(x + 3) (x - 2)] = 0$

$- 5(x - 1) (x - 2) (x + 3) = 0$

$x = 1, 2, - 3$

अत: समीकरण के शेष मूल 1,-3 हैं।

प्रश्न 16. सिद्ध कीजिए

$$\begin{vmatrix} a+b+c & -c & -b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & c+a+b \end{vmatrix} = 2(a+b)(b+c)(c+a).$$

हल :

$$\text{L.H.S.} = \begin{vmatrix} a+b+c & -c & -b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & c+a+b \end{vmatrix}$$

$C_1 \to C_1 + C_2$ तथा $C_2 \to C_2 + C_3$

$$= \begin{vmatrix} a+b+c-c & -c-b & -b \\ -c+a+b+c & a+b+c-a & -a \\ -b-a & -a+c+a+b & c+a+b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a+b & -(b+c) & -b \\ a+b & (b+c) & -a \\ -(a+b) & (b+c) & c+a+b \end{vmatrix}$$

C_1 से $(a + b)$ तथा C_2 से $(b + c)$ उभयनिष्ठ लेने पर,

$$= (a+b)(b+c) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -b \\ 1 & 1 & -a \\ -1 & 1 & c+a+b \end{vmatrix}$$

C1 → C1 + C2 से,
= (a + b) (b + c)
C2, के सापेक्ष प्रसार करने पर
= (a + b) (b + c) [-2 {(-1) (a + b + c) + b}]
= 2(a + b) (b + c) (c + a) = R.H.S.
इति सिद्धम्।

प्रश्न 17. सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a-b-c} & \boldsymbol{2a} & \boldsymbol{2a} \\ \boldsymbol{2b} & \boldsymbol{b-c-a} & \boldsymbol{2b} \\ \boldsymbol{2c} & \boldsymbol{2c} & \boldsymbol{c-a-b} \end{vmatrix} = \boldsymbol{(a+b+c)^3}.$$

हल :

$$\text{L.H.S.} = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$R_1 \to R_1 + R_2 + R_3$ से

$$= \begin{vmatrix} a-b-c+2b+2c & 2a+b-c-a+2c & 2a+2b+c-a-b \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

R_1 से $(a + b + c)$ उभयनिष्ठ लेने पर,

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

अब $C_1 \to C_2 - C_1$ तथा $C_3 \to C_3 - C_1$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1-1 & 1-1 \\ 2b & b-c-a-2b & 2b-2b \\ 2c & 2c-2c & c-a-b-2c \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -b-c-a & 0 \\ 2c & 0 & -c-a-b \end{vmatrix}$$

R1 के सापेक्ष विस्तार करने पर,
= (a + b + c) [(− b − c − a) (− c − a − b) − 0]
= (a + b + c) (b + c + a) (c + a + b)
= $(a + b + c)^3$
= R.H.S.
इति सिद्धम्।

प्रश्न 18. सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} y+z & x & y \\ z+x & z & x \\ x+y & y & z \end{vmatrix} = (x+y+z)(x-z)^2$$

हल :

$$\text{L.H.S.} = \begin{vmatrix} y+z & x & y \\ z+x & z & x \\ x+y & y & z \end{vmatrix}$$

$R_1 \to R_1 + R_2 + R_3$ से,

$$= \begin{vmatrix} y+z+z+x+x+y & x+z+y & y+x+z \\ z+x & z & x \\ x+y & y & z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2(x+y+z) & (x+y+z) & (x+y+z) \\ z+x & z & x \\ x+y & y & z \end{vmatrix}$$

R_1 से $(x + y + z)$ उभयनिष्ठ लेने पर,

$$= (x+y+z) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ z+x & z & x \\ x+y & y & z \end{vmatrix}$$

$C_1 \to C_1 - (C_2 + C_3)$ से,

$$= (x+y+z) \begin{vmatrix} z-1-1 & 1 & 1 \\ (z+x)-(z+x) & z & x \\ (x+y)-(y+z) & y & z \end{vmatrix}$$

$$= (x+y+z) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & z & x \\ x-z & y & z \end{vmatrix}$$

C1 के सापेक्ष विस्तार करने पर,
= (x + y + z) [0 − 0 + (x − z) (x − z)]
= (x + y + z) $(x - z)^2$ = R.H.S.
इति सिद्धम्।

प्रश्न 19. सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{a^3} & \boldsymbol{b^3} & \boldsymbol{c^3} \end{vmatrix} = \boldsymbol{(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)}.$$

हल :

$$\text{L.H.S.} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

$C_1 \to C_1 - C_2$ तथा $C_2 \to C_2 - C_3$ से,

$$= \begin{vmatrix} 1-1 & 1-1 & 1 \\ a-b & b-c & c \\ a^3-b^3 & b^3-c^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ (a+b) & b-c & c \\ a^3-b^3 & b^3-c^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

C_1 व C_2 से $(a-b)$ तथा $(b-c)$ उभयनिष्ठ लेने पर,

$$= (a-b)(b-c) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & c \\ (a^2+b^2+ab) & (b^2+c^2+bc) & c^3 \end{vmatrix}$$

R1 के सापेक्ष प्रसार करने पर,
= $(a - b)(b - c)[(b^2 + c^2 + bc) - (a^2 + b^2 + ab)]$
= $(a - b)(b - c)(b^2 + c^2 + bc - a^2 - b^2 - ab)$
= $(a - b)(b - c)[bc + c^2 - a^2 - ab]$
= $(a - b)(b - c)[bc - ab + c^2 - a^2]$
= $(a - b)(b - c)[b(c - a) + (c^2 - a^2)]$
= $(a - b)(b - c)(c - a)(b + c + a)$
= R.H.S.
इति सिद्धम्।

प्रश्न 20. सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} \frac{a^2+b^2}{c} & c & c \\ a & \frac{b^2+c^2}{a} & a \\ b & b & \frac{c^2+a^2}{b} \end{vmatrix} = 4abc$$

हल :

$$\text{L.H.S.} = \begin{vmatrix} \frac{a^2+b^2}{c} & c & c \\ a & \frac{b^2+c^2}{a} & a \\ b & b & \frac{c^2+a^2}{b} \end{vmatrix}$$

संक्रिया $R_1 \to cR_1$, $R_2 \to aR_2$ तथा $R_3 \to bR_3$ करने पर

$$= \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} a^2+b^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & b^2+c^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & c^2+a^2 \end{vmatrix}$$

संक्रिया $R_1 \to R_1 - (R_2 + R_3)$

$$= \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} 0 & -2b^2 & -2a^2 \\ a^2 & b^2+c^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & c^2+a^2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{-2}{abc}\begin{vmatrix} 0 & b^2 & a^2 \\ a^2 & b^2+c^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & c^2+a^2 \end{vmatrix}$$

संक्रिया $R_2 \to R_2 - R_1$ तथा $R_3 \to R_3 - R_1$

$$= \frac{-2}{abc}\begin{vmatrix} 0 & b^2 & a \\ a^2 & c^2 & 0 \\ b^2 & 0 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{-2}{abc}[0 - b^2(a^2c^2 - 0) + a^2(0 - b^2c^2)]$$

$$= \frac{-2}{abc}[- a^2b^2c^2 - a^2b^2c^2]$$

$$= \frac{4a^2b^2c^2}{abc}$$

= 4abc

= RHS

इति सिद्धम्।

प्रश्न 21. यदि a + b + c = 0 हो, तो निम्न समीकरण को हल कीजिए

$$\begin{vmatrix} a-x & c & b \\ c & b-x & a \\ b & a & c-x \end{vmatrix} = 0.$$

हल :

समीकरण

समीकरण $\begin{vmatrix} a-x & c & b \\ c & b-x & a \\ b & a & c-x \end{vmatrix} = 0$

$R_1 \to R_1 + R_2 + R_3$ से,

$$\begin{vmatrix} a-x+c+b & c+b-x+a & b+a+c-x \\ c & b-x & a \\ b & a & c-x \end{vmatrix} = 0$$

R_1 से $(a+b+c-x)$ उभयनिष्ठ लेने पर,

$$(a+b+c-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & b-x & a \\ b & a & c-x \end{vmatrix} = 0$$

$C_1 \to C_1 - C_3$, $C_2 \to C_2 - C_3$ तथा $a+b+c=0$ रखने पर

$$(0-x)\begin{vmatrix} 1-1 & 1-1 & 1 \\ c-a & b-x-a & a \\ b-c+x & a-c+x & c-x \end{vmatrix} = 0$$

$$(-x)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ c-a & b-x-a & a \\ b-c+x & a-c+x & c-x \end{vmatrix} = 0$$

R1, के सापेक्ष विस्तार करने पर,

(-x) [(c − a) (a − c + x) − (b − c + x) (b − x − a)] = 0 la- * c b |

(-x) [(ac − c² + cx − a² + ac − ax) − (b² − bx − ab − bc + cx + ac − xb − x² − ax)]

(-x) [x² − (a² + b² − ab − bc − bc − ca)]= 0

यदि − x = 0, तो x = 0

अब यदि x² − (a² + b² + c² + c² − ab − ca) = 0

तो $\quad x = \pm\sqrt{\{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\}} = 0$

परन्तु $\quad a+b+c=0$

$\Rightarrow \quad (a+b+c)^2 = 0$

$\Rightarrow \quad (a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac) = 0$

$\Rightarrow \quad ab+bc+ca = -\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$

अतः $\quad x = \pm\sqrt{\{a^2+b^2+c^2\}+\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)}$

$$= \pm\sqrt{\frac{3}{2}(a^2+b^2+c^2)}$$

अतः $\quad x = 0, \pm\sqrt{\frac{3}{2}(a^2+b^2+c^2)}$

प्रश्न 22. सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a+b} & \boldsymbol{a+2b} \\ \boldsymbol{a+2b} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a+b} \\ \boldsymbol{a+b} & \boldsymbol{a+2b} & \boldsymbol{a} \end{vmatrix} = \boldsymbol{9(a+b)b^2}$$

हल :

$$\text{L.H.S.} = \begin{vmatrix} a & a+b & a+2b \\ a+2b & a & a+b \\ a+b & a+2b & a \end{vmatrix}$$

$C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$ से,

$$= \begin{vmatrix} a+a+b+a+2b & a+b & a+2b \\ a+2b+a+a+b & a & a+b \\ a+b+a+2b+a & a+2b & a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3a+3b & a+b & a+2b \\ 3a+3b & a & a+b \\ 3a+3b & a+2b & a \end{vmatrix}$$

C_1 से $3(a+b)$ उभयनिष्ठ लेने पर,

C_1 से $3(a+b)$ उभयनिष्ठ लेने पर,

$$= 3(a+b)\begin{vmatrix} 1 & a+b & a+2b \\ 1 & a & a+b \\ 1 & a+2b & a \end{vmatrix}$$

अब $R_2 \to R_2 - R_1$ तथा $R_3 \to R_3 - R_1$ से,

$$= 3(a+b)\begin{vmatrix} 1 & a+b & a+2b \\ 1-1 & a-a-b & a+b-a-2b \\ 1-1 & a+2b-a-b & a-a-2b \end{vmatrix}$$

$$= 3(a+b)\begin{vmatrix} 1 & a+b & a+2b \\ 0 & -b & -b \\ 0 & b & -2b \end{vmatrix}$$

अब C के सापेक्ष प्रसार करने पर,

$= 3(a + b)\ [2b^2 + b^2]$

$= 3(a + b) \times 3b^2$

$= 9(a + b)b^2$

= RH.S.

इति सिद्धम्।

प्रश्न 23. यदि $p + q + r = 0$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} pa & qb & rc \\ qc & ra & pb \\ rb & pc & qa \end{vmatrix} = pqr\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

हल :

$$\text{L.H.S.} = \begin{vmatrix} pa & qb & rc \\ qc & ra & pb \\ rb & pc & qa \end{vmatrix}$$

$$= pa\begin{vmatrix} ra & pb \\ pc & qa \end{vmatrix} - qb\begin{vmatrix} qc & pb \\ rb & qa \end{vmatrix} + rc\begin{vmatrix} qc & ra \\ rb & pc \end{vmatrix}$$

$= pa(qra^2 - p^2bc) - qb(q^2ca - prb^2) + rc(pqc^2 - r^2ab)$

$= pqra^3 - p^3abc - q^3abc + pqrb^3 + pqrc^3 - r^3abc$

$= a^3pqr - p^3abc - q^3abc + b^3pqr + c^3pqr - r^3abc$

$= pqr(a^3 + b^3 + c^3) - abc(p^3 + q^3 + r^3)$

= pqr($a^3 + b^3 + c^3$) − abc(3pqr)
($\because$ p + q+ r = 0 $\Rightarrow$ $p^3 + q^3 + r^3$ = 3pqr)
= pqr[$a^3 + b^3 + c^3$ − 3abc] …(i)

$$\text{R.H.S.} = pqr\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

= pqr[a(a² − bc) − b(ca − b²) + c(c² − ab)]
= pqr[a − abc − abc + $b^3 + c^3$ − abc]
= pqr[$a^3 + b^3 + c^3$ − 3abc]
समीकरण (i) व (i) से,

$$pqr = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

इति सिद्धम्।

प्रश्न 24. सिद्ध कीजिए कि ।

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{x+4} & \boldsymbol{2x} & \boldsymbol{2x} \\ \boldsymbol{2x} & \boldsymbol{x+4} & \boldsymbol{2x} \\ \boldsymbol{2x} & \boldsymbol{2x} & \boldsymbol{x+4} \end{vmatrix} = \mathbf{(5}\boldsymbol{x}\mathbf{+4)\ (}\boldsymbol{x}\mathbf{-4)^2}.$$

हल :

$$\text{L.H.S.} = \begin{vmatrix} x+4 & 2x & 2x \\ 2x & x+4 & 2x \\ 2x & 2x & x+4 \end{vmatrix}$$

$R_1 \to R_1 + R_2 + R_3$ से,

$$= \begin{vmatrix} x+4+2x+2x & 2x+x+4+2x & 2x+2x+x+4 \\ 2x & x+4 & 2x \\ 2x & 2x & x+4 \end{vmatrix}$$

R_1 से $(5x + 4)$ उभयनिष्ठ लेने पर,

$$= (5x+4)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & x+4 & 2x \\ 2x & 2x & x+4 \end{vmatrix}$$

अब $C_1 \to C_1 - C_2$ तथा $C_2 \to C_2 - C_3$ से,

$$= (5x + 4) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x-4 & 4-x & 2x \\ 0 & x-4 & x+4 \end{vmatrix}$$

R1 के सापेक्ष प्रसार करने पर,

$= (5x + 4) [(x - 4)^2 - 0]$

$= (5x + 4) (x - 4)^2$

= R.H.S.

इति सिद्धम्।।