जोड़
(Addition)

जोड़ने की प्रक्रिया में दो बातों पर ध्यान देना जरूरी होता है। पहला यह कि हमारा योगफल शुद्ध कैसे हो एवं दूसरा यह कि जोड़ने की रफ्तार तेज कैसे की जाए। इसलिए हमलोग जोड़ने की एक ऐसी विधि पर विचार करेंगे जिससे प्राप्त नतीजे पर आसानी से भरोसा किया जा सके, साथ ही यह विधि आम तौर से प्रयुक्त होने वाले तरीकों से अपेक्षाकृत सुगम एवं लघु भी हो। इस अध्याय के अंतर्गत उपर्युक्त विधि द्वारा प्राप्त योगफल की शुद्धता के परीक्षण एवं पुन:परीक्षण की प्रक्रिया पर भी विचार किया जाएगा।

जोड़ने की परंपरागत विधि के सहारे बड़ी संख्या की लंबी शृंखला को जोड़ना खासा मुश्किल होता है। हमलोग अलग-अलग कॉलम को जोड़कर, बिना योग की क्रिया दुहराए, योगफल की शुद्धता को परख सकते हैं। इसके कई लाभ हैं:

i. पुनरावृत्ति में नष्ट होने वाले समय की बचत होती है।

ii. यदि कोई त्रुटि हुई भी है, तो संबद्ध कॉलम में इसे पकड़ना आसान होता है।

iii. परंपरागत विधि के सहारे जोड़ने में कुछ त्रुटियाँ भले रह जाएँ, पर इस प्रक्रिया में भूल की न्यूनतम गुंजाइश है।

इनमें से अंतिम बिन्दु पर हर कोई आसानी से सहमत नहीं होंगे। हर कोई किसी खास प्रकार की त्रुटि बार-बार करने के लिए अभ्यस्त-सा हो जाता है। कोई व्यक्ति इस भूल के प्रति अभ्यस्त हो सकता है कि 9 को 6 से गुणा करने पर परिणाम 56 मिलता है। यदि आप उससे सीधे यह सवाल पूछें तो वह 54 ही बताएगा। पर गणना की जटिल एवं उबाऊ प्रक्रिया में वह 56 पर जाकर रुकेगा। यदि वह जोड़ को दुहराए भी तो उसे अपनी भूल का पता शायद ही लगे, क्योंकि यह उसकी प्रिय भूल है।

कॉलम में जोड़ना **(Totalling in Columns)**

जोड़ की पारंपरिक विधि में हम दिए हुए अंकों को एक कॉलम में लिखते हैं, उसके नीचे एक रेखा खींचकर योगफल लिख डालते हैं। दी गई संख्याओं को कॉलम में सजाते वक्त इस बात का ध्यान रखा जाता है कि पूर्ण संख्या एवं दशमलव के बाद के अंकों को एक कतार में रखा जाए। उदाहरण के लिए:

पूर्ण संख्याओं की कतार	***दशमलव-युक्त संख्याओं की कतार***
4234	13.05
8238	2.51
646	539.652
5321	2431.0003
350	49.24
9989	

परंपरागत विधि यह है कि हम दायीं ओर स्थित कॉलम से शुरू करके एक-एक कॉलम को जोड़ें, जैसे, 4 को 8 से, फिर 4 और 8 के योगफल को 6 से, एवं इसी प्रक्रिया को जारी रखें। आप चाहें तो नयी विधि में भी इस प्रक्रिया को जारी रख सकते हैं, पर यहाँ ऐसा करना अनिवार्य नहीं

है। इस विधि के दौरान आप किसी भी कॉलम से जोड़ की प्रक्रिया शुरू कर सकते हैं। पर सुविधा के लिए हम दायीं ओर से ही जोड़ना शुरू करेंगे।

जोड़ने की प्रक्रिया में किसी कॉलम में ऊपर से नीचे की ओर बढ़ने के दौरान हम योगफल 10 से ऊपर होते ही फिर इकाई से शुरू करते हैं। मतलब यह कि जैसे ही योगफल 10 से ऊपर होता है, हम उसमें से 10 घटाकर शेष के साथ जोड़ने की प्रक्रिया जारी रखते हैं। इस क्रम में जिस अंक पर जाकर योगफल 10 से अधिक हो गया था, वहाँ एक चिह्न लगा दिया जाता है। उदाहरण के लिए,

4
8

4 और 8 को जोड़ने से हमें 12 मिला। 12 निश्चय ही 10 से अधिक है। अब इसमें से 10 घटा लें। चूँकि यह घटना अंक 8 पर पहुँचकर घटित हुई है, इसलिए वहाँ एक चिह्न लगा दें तथा शेष 2 के साथ आगे बढ़ें।

6	6+2=8
1	1+8=9
0	0+9=9
9	9+9=18

यहाँ 9 पर एक चिह्न लगाएँ। 18 में से 10 घटाने के बाद शेष 8 बचा। 8 ही आपका परिणामी योगफल है, जिसे इस कॉलम के नीचे लिख दें।

अब हम इस कॉलम में लगाए गए चिह्नों को गिनेंगे तथा परिणामी योगफल के नीचे लिख देंगे। उपर्युक्त उदाहरण में ऐसे दो चिह्न लगाए गए थे, इसलिए हम चिह्नों की संख्या के रुप में लिखेंगे,

4234
8238′
646
5321
350
9989′

परिणामी योगफल: 8

चिह्नों की संख्या: 2

यदि इसी प्रक्रिया को सभी कॉलम के लिए दुहराया जाए, तो हम निम्नलिखित परिणाम पर पहुँचते हैं :

4234
8′238′
6′4′6
5321
350
9′9′8′9′

परिणामी योगफल: 6558

चिह्नों की संख्या: 2222

अंतिम परिणाम पर पहुँचने के लिए हम परिणामी योगफल (running total) एवं चिह्नों (ticks) की संख्या को निम्नलिखित ढंग से जोड़ते हैं:

परिणामी योगफल	0 6 5 5 8 0
चिह्नों की संख्या	0 2 2 2 2 0
योगफल	2 8 7 7 8

कैसे बचाएँ समय?– आपने गौर किया होगा कि परिणामी योगफल को उसके ठीक दायीं ओर स्थित कॉलम में लगाए गए चिह्नों की संख्या से जोड़ते हैं। यह प्रक्रिया एक चरण में भी पूरी की जा सकती है। जैसा कि आपने देखा है दायीं ओर से पहले कॉलम में लगाए गए चिह्नों की संख्या को दायीं ओर से दूसरे कॉलम के परिणामी योगफल से जोड़ते हैं। इसी तरह दूसरे कॉलम में लगाए गए चिह्नों की संख्या से तीसरे कॉलम के परिणामी योगफल को जोड़ते हैं और यह क्रिया निरंतर जारी रखते हैं। पूरी विधि को निम्नलिखित चरणों में व्यक्त किया जा सकता है :

पहला चरण

4234
8238′
646
5321
350
9989′
कुल 8

[4 + 8 = 12, 8 पर चिह्न लगाएँ तथा 2(12 – 10) को 6 से जोड़ें, इस प्रकार आपको मिला 8, 8 + 1 = 9; 9 + 0 = 9; 9 + 9 = 18. अब फिर यहाँ 9 पर एक चिह्न लगाएँ एवं अधोरेखा के नीचे 8 (18 – 10) लिख दें]

दूसरा चरण

4234
8238′
64′6
5321
350
998′9′
कुल 78

[3 + 2 (पहले कॉलम में लगाए गए चिह्नों की संख्या) = 5; 5 + 3 = 8; 8 + 4 = 12, 4 पर चिह्न अंकित करें एवं शेष 2(12 – 10) के साथ आगे बढ़ें; 2 + 2 = 4; 4 + 5 = 9; 9 + 8 = 17; 8 पर एक चिह्न अंकित करें एवं अधोरेखा के नीचे 7 लिख दें]

इसी प्रक्रिया को हम तीसरे एवं चौथे कॉलम के साथ दुहराते हैं।

4 2 3 4
8′ 2 3 8′
6′ 4′ 6
53 2 1
3 5 0
9′9′ 8′ 9′
कुल 28778

नोट: आपने पाया कि सबसे बायीं ओर स्थित कॉलम में दो चिह्न लगाए गए हैं। इन्हें आप इस कॉलम की बायीं ओर अधोरेखा के नीचे लिख दें। इस प्रकार हम पहले की अपेक्षा कहीं अधिक शीघ्रता से जोड़ने की प्रक्रिया पूरी कर लेते हैं।

एक और उदाहरण लीजिए।

प्रश्न: 707.325 + 1923.82 + 58.009 + 564.943 + 65.6 = ?

उत्तर:

```
        707.325
       19'23'.8'2
         58'.009'
       5'6'4'.9'43
         6'5.6
कुल:   3319.697
```

स्वाभाविक रूप से आपके मन में यह जिज्ञासा उठ रही होगी कि क्या संख्याओं को कॉलम के रूप में सजाकर लिखना जरूरी है? हमारा उत्तर है- कतई नहीं। आप बिना ऐसी औपचारिकता निभाए भी उत्तर तक पहुँच सकते हैं। ऐसे प्रश्नों में, जिनमें संख्याएँ कतार [row-form] के रूप में सजी होती हैं, संख्याओं को एकत्र करना जरा मुश्किल होता है। पर यदि आप ऐसा करने का अभ्यास कर लें तो शायद इससे बेहतर कुछ होगा भी नहीं। वैसे इस समस्या से निबटने का एक सुगम तरीका भी है। आइए, इस पर विचार करें।

पहला चरण: दशमलव के बाद स्थित अंकों की संख्या बराबर करने के लिए अंतिम अंक के दायीं ओर शून्य का इस्तेमाल करें। उदाहरण के लिए उपर्युक्त प्रश्न को निम्न रूप से लिखा जा सकता है:

707.325 + 1923.820 + 58.009 + 544.943 + 65.600

दूसरा चरण: दायीं ओर के अंतिम अंक से जोड़ना शुरू करें। जोड़ की प्रक्रिया में जिन अंकों का इस्तेमाल हो जाए उन्हें काटते चलें, इससे पुनरावृत्ति जैसी भूल नहीं होगी। जहाँ परिणामी योगफल (running total) 10 से ऊपर हो जाए, वहाँ एक चिह्न लगाना न भूलें। शेष के साथ आगे बढ़ते चलें।

707.325 + 1923.820 + 58.009 + 564.943 + 65.600 = _ _ _ _ . _ _ 7

[5 + 0 = 5; 5 + 9 = 14, यहाँ एक चिह्न अंकित करें तथा 4 के साथ आगे बढ़ जाएँ; 4 + 3 = 7, 7 + 0 = 7 अत: 7 लिख दें। इस प्रक्रिया में इस्तेमाल हो गए सभी अंकों को काट दें ताकि भूल की गुंजाइश न रहे।].

तीसरा चरण: दूसरे चरण से प्राप्त चिह्नों की संख्या को संख्याओं के दूसरे स्थान पर स्थित अंकों से जोड़ने की क्रिया को दुहराएँ।

707.325 + 1923.820 + 58.009 + 564.943 + 65.600 = _ _ _ _ . _ 97

[1 (पहला चरण में प्रयुक्त चिह्नों की संख्या) + 2 = 3; 3 + 2 = 5; 5 + 0 = 5; 5 + 4 = 9; 9 + 0 = 9; इसलिए दूसरे स्थान पर 9 लिख दें।]

चौथा चरण:

707.325 + 1923.820 + 58.009 + 564.943 + 65.600 = _ _ _ _ .697

3 + 8 = 11; यहाँ एक चिह्न अंकित कर दें, एवं शेष 1 के साथ आगे बढ़ें; 1 + 0 = 1; 1 + 9 = 10, फिर एक चिह्न अंकित कर दें एवं '0' के साथ आगे बढ़ें; 0 + 6 = 6; इसलिए तीसरे स्थान पर 6 लिख दें।

पाँचवाँ चरण: उपर्युक्त प्रक्रिया के सहारे हम निम्नलिखित परिणाम पर पहुँचते हैं:

707.325 + 1923.820 + 58.009 + 564.943 + 65.600 = 3319.697

कतार में सजी हुई दशमलव रहित संख्याओं का जोड़

प्रश्न: 53921 + 6308 + 86 + 7025 + 11132 = ?

उत्तर: पहला चरण: 53921 + 6308 + 86 + 7025 + 11132 = _ _ _ _ 2

दूसरा चरण: 53921 + 6308 + 86 + 7025 + 11132 = _ _ _ 72

तीसरा चरण: 53921 + 6308 + 86 + 7025 + 11132 = _ _ 472

चौथा चरण: 53921 + 6308 + 86 + 7025 + 11132 = _ 8472

पाँचवाँ चरण: 53921 + 6308 + 86 + 7025 + 11132 = 78472

नोट: उपर्युक्त विधि का बार-बार अभ्यास करके दक्षता हासिल कर लें। यदि अच्छी तरह नहीं समझ पाए हों, तो एक बार फिर से प्रयास करें।

***यदि एक ही प्रश्न में जोड़ एवं घटाव दोनों हों* (Addition and subtraction in a single Problem)**

इस तरह के प्रश्नों को हल करने की पद्धति को उदाहरणों के सहारे बखूबी समझा जा सकता है।

उदा. 1 : 412 – 83 + 70 = ?

***चरण* I :** हमारे उत्तर के इकाई अंक के लिए दी गई संख्याओं के अपने-अपने इकाई स्थान के अंकों को उसके चिह्नों के अनुसार जोड़ें या घटाएँ। उदाहरण के लिए, उपर्युक्त स्थिति में हमारे अस्थाई परिणाम का इकाई अंक निम्नलिखित है :

2 – 3 + 0 = –1

इसलिए, हम इसे इस प्रकार लिखते हैं:

412 – 83 + 70 = _ _ (–1)

उसी प्रकार, दहाई स्थान का अस्थाई मान है

1 – 8 + 7 = 0

इसलिए,

412 – 83 + 70 = _ (0) (–1)

उसी प्रकार, सैकड़ा स्थान का अस्थाई मान 4 है। इसलिए हम इसे निम्न प्रकार से लिखते हैं :

412 – 83 + 70 = (4) (0) (–1)

***चरण* II:** अब, उपरोक्त अस्थाई मान को वास्तविक मान में परिवर्तित करना होगा। (–1) को धनात्मक अंक से प्रतिस्थापित करने के लिए हम दहाई या सैकड़ा स्थान के अंकों से उधार लेते हैं। चूंकि दहाई स्थान का अंक शून्य (0) है, हमें सैकड़ा से उधार लेना होगा। हम 4 (सैकड़ा स्थान से) 1 उधार लेते हैं जो दहाई पर 10 हो जाता है तथा साथ ही सैकड़ा पर 3 हो जाता है। पुनः हम दहाई से 1 उधार लेते हैं जो कि दहाई पर 9 हो जाता है तथा इकाई 10 हो जाता है।

इस प्रकार इकाई स्थान पर (10–1=) 9 होता है। अतः, हमारा अंतिम परिणाम = 399
उपरोक्त व्याख्या को निम्न प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है :

(–1) (10) (–1) (10)
(4) (0) (–1)
(3) (9) (9)

नोट : उपरोक्त व्याख्या को काफी आसानी से समझा जा सकता है। तथा विधि का निष्पादन उससे भी ज्यादा आसान है। यदि आप अच्छा से अभ्यास करते हैं, तो दोनों चरणों को एक साथ निष्पादित किया जा सकता है। दूसरे चरण को निम्नलिखित तरीके से भी निष्पादित किया जा सकता है :

(4) (0) (–1) = 400 – 1 = 399

उदा. 2 : 5124 – 829 + 731 – 435

हल : चरण I के अनुसार, अस्थाई परिणाम निम्नलिखित हैं :

(5) (– 4) (0) (– 9)

चरण II : 5 से 1 उधार लें। हजार का स्थान (5 – 1 = 4) हो जाता है। हजार के स्थान से 1 उधार लिया गया तो सैकड़ा के स्थान पर 10 हो जाता है अब, सैकड़ा के स्थान पर (10 – 4 =) 6 हो जाता है, लेकिन दहाई के लिए 1 उधार लिया जाता है। इसलिए सैकड़ा के स्थान का अंक (6-1=) 5 हो जाता है। सैकड़ा के स्थान से 1 उधार लेने पर दहाई के स्थान पर 10 हो जाता है। पुनः, हम दहाई के स्थान से इकाई के लिए 1 उधार लेते हैं तथा दहाई के स्थान का अंक (10–1=) 9 हो जाता है। अब, दहाई के स्थान से 1 उधार लेने पर इकाई के स्थान पर 10 हो जाता है। इस प्रकार इकाई के स्थान पर परिणाम (10–9=) 1 हो जाता है। अतः, हमारा अभीष्ट उत्तर = 4591

नोट : चरण I के बाद हम निम्न प्रकार से गणना कर सकते हैं:
5 (– 4) (0) (– 9) = 5000 – 409 = 4591
लेकिन एक साथ निष्पादित करने के लिए इस विधि को चरण I के साथ संयोजित नहीं किया जा सकता है। इसलिए, हमें चरण I एवं II को अच्छी तरह से समझ लेना चाहिए ताकि भविष्य में हम इनका निष्पादन एक साथ कर सकें।

उदा. 3 : 73216 – 8396 + 3510 – 999 = ?

हल : चरण I से हमें निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होता है :
(7) (–2) (–5) (–16) (–9)

चरण II: इकाई के अंक = 10 – 9 = 1 [(–16) से 1 उधार लिया जाता है तथा
परिणाम = –16 –1 = –17]

दहाई के अंक = 20 –17 = 3 [(–5) से 2 उधार लिया जाता है तथा
परिणाम = –5 – 2 = –7]

सैकड़ा के अंक = 10 – 7 = 3 [(–2) से 1 उधार लिया जाता है तथा
परिणाम = –2 –1 = – 3]

हजार के अंक = 10 – 3 = 7 [(7 से 1 उधार लिया जाता है तथा
परणाम = (7–1=6]

इसलिए, अभीष्ट मान 67331 है।

उपरोक्त गणना को सबसे बाईं ओर के अंक से भी शुरू किया जा सकता है जैसा कि अंतिम दो उदाहरणों में किया गया है। इस स्थिति में हमने सबसे दाईं ओर के अंक से शुरू किया है। लेकिन दोनों चरणों को संयोजित रूप से एक साथ करने के लिए सबसे दाईं ओर के अंक (अर्थात् इकाईं अंक) से शुरू करना होगा। उदा.-4 देखें।

नोट : **चरण II** के लिए अन्य विधि : (–2)(–5)(–16)(–9) = (–2)(–6)(–6)(–9) = (–2669)

∴ उत्तर = 70000 - (2669) = 67331

उदा. 4 : 89978 - 12345 - 36218 = ?

हल : **चरण I :** (4) (1) (4) (2) (–5)

चरण II : 4 1 4 1 5

***एक चरण में हल* (Single step solution) :**

अब, आपको दोनों चरणों को एक साथ निष्पादित करना अवश्य सीखना चाहिए। संयोजित विधि को समझने का यह एक सबसे सरल उदाहरण है। ***इकाई के स्थान पर :*** 8-5-8 = (-5). इसे घनात्मक बनाने के लिए दहाई से हमें उधार लेना होगा। हमें यह याद रखना चाहिए कि हम ऋणात्मक मान से उधार नहीं ले सकते (अर्थात् 12345 से) ***हमें घनात्मक मान से (अर्थात् 89978 से) उधार लेना होगा।*** अतः, हमने 7 (89978 के दहाई अंक) से 1 उधार लिया।

(-1)

8 9 9 7 8 - 12345 - 36218 = _ _ _ _ 5

अब, दहाई का अंक : (7 - 1 =) 6 - 4 - 1 = 1

सैकड़ा का अंक : 9 - 3 - 2 = 4

हजार का अंक : 9 - 2 - 6 = 1

दस हजार का अंक : 8 - 1 - 3 = 4

∴ अभीष्ट मान = 41415

उदा. 5 : 28369 + 38962 - 9873 = ?

हल : एक चरण में हल : इकाई का अंक = 9 + 2 – 3 = 8

दहाई का अंक : = 6 + 6 – 7 = 5

सैकड़ा का अंक : = 3 + 9 – 8 = 4

हजार का अंक : = 8 + 8 - 9 = 7

दस हजार का अंक : = 2 + 3 = 5 ∴ अभीष्ट मान = 57458

उदा. 6: ***उदा.***-2 को एक चरण विधि द्वारा हल करें।

हल: 5124 – 829 + 731 – 435 =

इकाई का अंक : 4 – 9 + 1 – 5 = (–9). दहाई के अंक के घनात्मक मान से 1 उधा लें। माना कि हमने 731 के 3 से उधार लिया। तो,

–1

5124 – 829 + 7 3 1 – 435 = _ _ _ 1

दहाई का अंक : 2 – 2 + 2 – 3 = (–1). सैकड़ा के अंक के घनात्मक मान से 1 उधार लें। माना कि हमने 731 के 7 से उधार लिया। तो,

–1 –1

5124 – 829 + 7 3 1 – 435 = _ _ 9 1

सैकड़ा का अंक : 1 – 8 + 6 – 4 = (–5). हजार के अंक के घनात्मक मान से 1 उधार लें। हमारे पास इस प्रकार का केवल एक अंक है, अर्थात् 5124 का 5, तो,

-1 -1 -1

5 1 2 4 – 829 + 7 3 1 - 435 = 4591

[हजार का अंक (5 - 1 =) 4 रहता है।]

अब, आप संपूर्ण गणना बिना कुछ अतिरिक्त लिखे एक चरण में कर सकते हैं।

उदा. 7: **उद.-3** के उत्तर के अलावा बिना कुछ लिखे एक चरण में हल करें। स्वयं प्रयास करें। जब तक आप इस प्रकार के प्रश्नों को आत्मविश्वास के साथ कुछ सेकेंडों के भीतर हल नहीं कर लेते हैं अगले उदाहरणों पर मत जाएँ।

उदा. 8: 10789 + 3946 – 2310 – 1223 = ?

हल: जब कभी हम इकाई स्थान के सभी अंकों को जोड़ने पर 10 से ज्यादा मान प्राप्त करते हैं, हम परिणाम के इकाई अंक को लिख देते हैं तथा दहाई के अंक के साथ आगे बढ़ते हैं। ***हम दहाई के अंक को धनात्मक मान से जोड़ते हैं, न कि ऋनात्मक मान से।*** सभी अंकों के लिए समान प्रक्रिया को अपनाते हैं।

+1 +l+1

1 0 7 8 9 + 3946 – 2310 – 1223 = 11202

नोट:

1. हम धनात्मक मान 10789 के अंकों के ऊपर +1 रखते हैं। इसे 3946 के अंकों के ऊपर भी रख सकते हैं। लेकिन इसे 2310 तथा 1223 के ऊपर नहीं रखा जा सकता है।
2. परीक्षा में जब आप प्रश्न पत्र पर कलम के प्रयोग करने के लिए स्वतंत्र हों तो आप अंकों के ऊपर +1, +2, -1, -2, ... अपनी कलम से लिखने के बजाए अंकों को परिवर्तित कर सकते हैं। अत: 8 लिखने के बजाए आपको कलम से 8 के ऊपर 9 लिखना चाहिए। उसी प्रकार $\overset{+1}{7}$ के स्थान पर 8 लिखें।

उदा. 9: 765.819 – 89.003 + 12.038 – 86.89 = ?

हल : सर्वप्रथम दशमलव के बाद के अंकों की संख्याओं को अंत में शून्य लिखकर बराबर करें। अत: ? = 765.819 – 89.003 + 12.038 – 86.890

अब, उदा. - 4, 5, 6, 7 एवं 8 में दिए गए विधि को यहाँ लागू करें।

-1 -1 -l -l +1

7 6 5. 8 1 9 - 89.003 + 12.038 - 86.890 = 601.964

उदा. 10 : 5430 - 4321 + 3216 - 6210 = ?

हल : उपर्युक्त स्थिति भिन्न है। अंतिम उत्तर ऋणात्मक प्राप्त होता है। चूँकि हम इसे प्रारंभ में नहीं जान पाते हैं, हम पहले किए गए चरणों को ही निष्पादित करते हैं।

चरण I: (-2)(1)(1)(5)

चरण II: सबसे बाईं ओर का अंक ऋणात्मक है। इसे धनात्मक नहीं बनाया जा सकता है क्योंकि बाईं ओर कोई और अंक नहीं है जिसे हम उधार ले सकते हैं।

अतः, हमारा उत्तर है :

$$\begin{array}{r} -2000 \\ +\ 115 \\ \hline -\ 1885 \end{array}$$

नोट : इस बात को ध्यान में रखते हुए कि सबसे बाईं ओर के अंक के अतिरिक्त अन्य सभी अंक घनात्मक हैं, दूसरे चरण की क्रिया को मन में ही करनी चाहिए।

अतः अंतिम उत्तर ऋणात्मक होगा लेकिन (–)2115 नहीं। यहाँ -2000 +115 होनी चाहिए।

***उदा.* 11 :** 2695 - 4327 + 3214 - 7350 = ?

हल : अतः, चरण **I:** (-6) (2) (3) (2)

अत :, अभीष्ट उत्तर =
$$\begin{array}{r} -6000 \\ +\ 232 \\ \hline -\ 5768 \end{array}$$

गणना की जाँच की विधि: 'डिजिट-सम मेथड' (Digit-sum Method)

इस विधि को 'नाइन्स रिमेन्डर मेथड' (nines-remainder method) भी कहते हैं। इसकी संकल्पना कुछ इस तरह से है:

I. दी हुई संख्या के सभी अंकों को जोड़कर आंकिक योगफल [डिजिट-सम] प्राप्त करें। उदाहरण के लिए, 13022 का आंकिक योगफल होगा: 1 + 3 + 0 + 2 + 2 = 8

II. आंकिक योगफल हमेशा एक अंक की संख्या होनी चाहिए। यदि कोई आंकिक योगफल दो अंकों की संख्या हो तो उसे आपस में जोड़कर एक अंक की संख्या बना लें।

उदाहरण के लिए,

5264 का आंकिक योगफल है:
5 + 2 + 6 + 4 = 17
1 + 7 = 8

III. यदि दी हुई संख्या में 9 के अंकों का इस्तेमाल हुआ हो तो इन्हें छोड़ दें। ऐसी संख्याएँ जिनका योग 9 आता हो, जैसे 2 एवं 7, तो उन्हें भी छोड़ा दिया जाता है। इस प्रकार 990919 का आंकिक योगफल पहली नजर में ही (1) हो जाता है। यदि आप 9 को जोड़ें भी तो नतीजा वही आएगा।

IV. चूँकि इस प्रक्रिया में 9 को शामिल नहीं किया जाता है, इसलिए 9 का आंकिक योगफल उतना ही है, जितना कि शून्य का। उदाहरण के लिए 441 का आंकिक योगफल शून्य है।

आंकिक-योगफल (डिजिट-सम) निकालने की संक्षिप्त विधि

किसी संख्या के अंकों को आपस में जोड़ने के क्रम में योगफल जैसे ही दो अंकों की संख्या में परिणत हो, उन्हें परस्पर जोड़कर एक अंक की संख्या बना लें, तभी आगे बढ़ें। उदाहरण के लिए,

886542932851 का आंकिक योगफल प्राप्त करने के क्रम में- **8 + 8** = 16 [यह दो अंकों की संख्या है, इसलिए इन अंकों को परस्पर जोड़ लें 1 + 6 = 7]; 7 + 6 = 13 (1 + 3 = 4); 4 + 5 = 9 (अब चूँकि 9 का कोई महत्त्व नहीं होता, इसलिए इसे भूल जाएँ]; 4 + 2 = 6; फिर 9 आ गया। इसे छोड़ दें। ... इस तरह से बढ़ने पर आंकिक योगफल आया 7.

दशमलव युक्त संख्याओं को भी इसी प्रकार जोड़ा जाता है, पर जोड़ने की इस प्रक्रिया में दशमलव पर बिल्कुल ही ध्यान नहीं दिया जाता है। उदाहरण के लिए 6.256 का आंकिक योगफल 1 है।

नोट: इस दिलचस्प प्रक्रिया का 'क्यों' जानना उतना महत्वपूर्ण नहीं है। पर यह एक आधारभूत तथ्य है कि किसी संख्या का आंकिक योगफल उतना ही होता है, जितना उस संख्या को 9 से विभाजित करने पर शेष बचता है।

उदाहरण: 523 का आंकिक योगफल है 1। यदि 523 को 9 से विभाजित करें तो शेष बचता है 1।

***गणना का परीक्षण* (Checking of Calculation)**

मूल सिद्धांत: जो कोई गणितीय क्रिया संख्या के साथ घटित होती है, उन संख्याओं के आंकिक योगफल के साथ भी ठीक वही प्रक्रिया घटित होती है। इसलिए प्रदत्त संख्याओं के आंकिक योगफल से जो परिणाम प्राप्त होता है, वह गणितीय क्रिया द्वारा प्राप्त परिणाम के आंकिक योगफल के बराबर होगा।

उदाहरण के लिए

संख्याएँ: $23 + 49 + 15 + 30 = 117$

आंकिक योग: $5 + 4 + 6 + 3 = 0$

$0 = 0$

उपर्युक्त नियम न केवल जोड़ पर बल्कि घटाव एवं गुणा के साथ-साथ एक सीमा तक भाग के साथ भी लागू होता है। अगले अध्यायों में विस्तार से इसकी चर्चा की जाएगी। जोड़ का एक और उदाहरण देखिए:

$1.5 + 32.5 + 23.9 = 57.9$

आंकिक योग: $6 + 1 + 5 = 3$

$3 = 3$

इस प्रकार यदि वाम पक्ष (LHS) = दायाँ पक्ष (RHS), तो आप इस निष्कर्ष पर पहुँचेंगे कि आपकी गणना सही है।

अभ्यास के लिए इस अध्याय में दिए गए सभी गणनाओं की जाँच करें।

नोट: मान लीजिए, दो छात्रों को निम्नलिखित प्रश्न हल करने के लिए दिया जाता है

$1.5 + 32.5 + 23.9 = ?$

इनमें से एक का उत्तर है 57.9 एवं दूसरे का उत्तर है 72.3। यदि उपर्युक्त विधि से ये अपनी गणना को परखते हैं तो दोनों को अपना उत्तर सही मालूम होता है। इस प्रकार उपर्युक्त परीक्षण-प्रणाली की भी अपनी सीमाएँ हैं।

मिश्र संख्याओं का योग **(Addition of Mixed Numbers)**

प्र. $3\frac{1}{2}+4\frac{4}{5}+9\frac{1}{3}=?$

हल: परंपरागत विधि (Traditional Method) यह है कि उपर्युक्त संख्याओं को सर्वप्रथम भिन्न में बदल लें, फिर उनके हर (denominators) का लघुत्तम समापवर्त्य (LCM) निकाल लें। पर समय बचाने के लिए हम पूर्ण संख्याओं को एक जगह जोड़ लें तथा भिन्न को अलग से जोड़ें। जैसे यहाँ,

$$3\frac{1}{2}+4\frac{4}{5}+9\frac{1}{3}=(3+4+9)+\left(\frac{1}{2}+\frac{4}{5}+\frac{1}{3}\right)$$

$$=16+\frac{5+24+10}{30}=16+1\frac{19}{30}$$

$$=(16+1)+\frac{19}{30}$$

$$=17+\frac{19}{30}=17\frac{19}{30}$$

प्र.: $5\frac{2}{3}-4\frac{1}{6}+2\frac{3}{4}-1\frac{1}{4}=?$

हल: $(5-4+2-1)+\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}+\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)$

$$=2+\left(\frac{8-2+9-3}{12}\right)$$

$$=2+\frac{12}{12}=2+1=3$$