

पाठ 15

ज्यामितीय आकृतियाँ

आइए सीखें

- किरण एवं रेखाखण्ड में अंतर करना।
- दो किरणों के बीच बने कोण की समझ।
- स्केल एवं चांदे की सहायता से विभिन्न कोण मापना एवं बनाना।
- समकोण, अधिककोण एवं न्यूनकोण का वर्गीकरण करना।
- परिवेशीय आधार पर समांतर रेखा व लम्बवत रेखा की पहचान।
- तीन रेखाखण्डों से बनी बंद आकृति की त्रिभुज के रूप में समझ।
- त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° है इसका सत्यापन करना।
- स्केल एवं परकार की सहायता से दी गई त्रिज्या का वृत्त बनाना। त्रिज्या एवं व्यास में संबंध।
- सममित आकृतियाँ पहचानना।

पिछली कक्षाओं में हमने ज्यामितीय आकृतियों के विषय में समझा है। हमने परिवेश में उपलब्ध वस्तुओं में कोणों की पहचान भी सीखी है। परकार या पेन की नोक से बनाए गए छोटे से चिह्न को बिन्दु कहते हैं।

रेखाखण्ड

दो बिन्दु A एवं B लेते हैं इन्हें चित्रानुसार मिलाते हैं यह एक सरल रेखा का भाग है। इसे रेखाखण्ड AB कहते हैं।

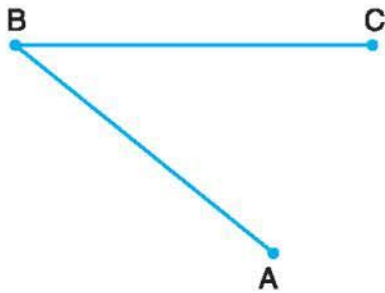
बिन्दु A और B रेखाखण्ड AB के दो अंत बिन्दु हैं।

इसे रेखाखण्ड BA भी कहते हैं।



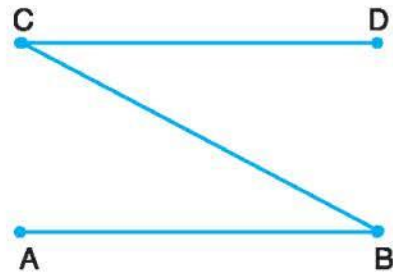
आकृति 15.1

उदाहरण 1. नीचे दिए गए रेखाचित्रों में कितने रेखाखण्ड हैं? इन रेखाखण्डों के नाम भी लिखिए।



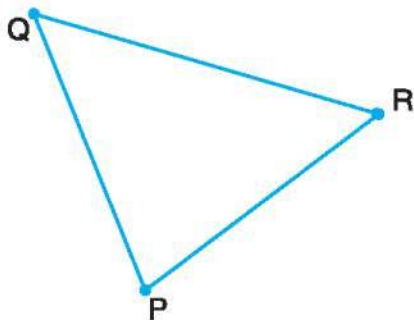
रेखाखण्ड AB
रेखाखण्ड BC

(i)



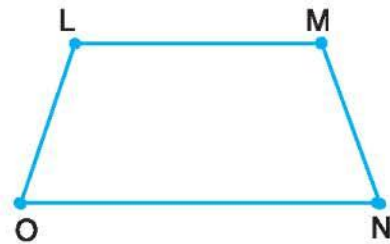
रेखाखण्ड AB
रेखाखण्ड BC
रेखाखण्ड CD

(ii)



रेखाखण्ड PQ
रेखाखण्ड QR
रेखाखण्ड RP

(iii)



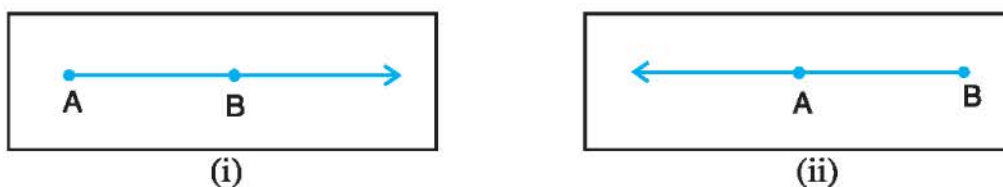
रेखाखण्ड LM
रेखाखण्ड MN
रेखाखण्ड NO
रेखाखण्ड OL

(iv)

आकृति 15.2

किरण

जब कोई रेखाखण्ड AB किसी एक दिशा में अपरिमित रूप से विस्तृत होता है तो, उसे किरण कहते हैं। अपरिमित विस्तार को चिन्ह ($\rightarrow$) के द्वारा प्रदर्शित करते हैं।

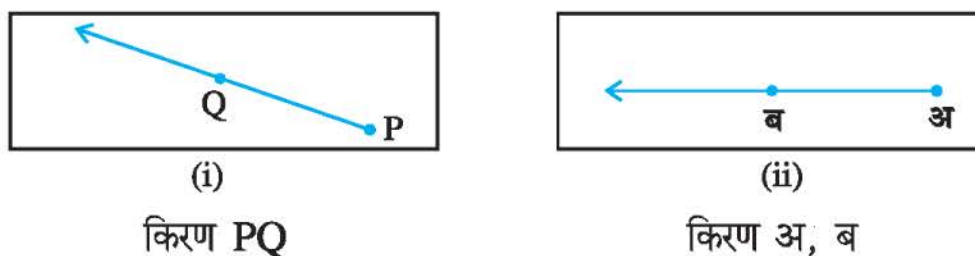


आकृति 15.3

आकृति 15.3 (i) में किरण AB और आकृति 15.3 में किरण BA दर्शाई गई है।

किरण एक निश्चित बिन्दु से आरंभ होती है और अपरिमित रूप से एक दिशा में विस्तृत होती है। यह निश्चित बिन्दु उस किरण का प्रारंभिक बिन्दु या अंत बिन्दु कहलाता है।

उदाहरण 2 नीचे दिए गए रेखाचित्रों में किरण पहचानिए



आकृति 15.4

रेखाखण्ड और किरण में अंतर

	रेखाखण्ड	किरण
रेखाचित्र		
लम्बाई	रेखाखण्ड की लम्बाई निश्चित (परिमित) होती है।	किरण की लम्बाई निश्चित नहीं (अपरिमित) होती है।
अंतबिन्दु	रेखाखण्ड के दो अंत बिन्दु होते हैं।	किरण का एक अंत बिन्दु होता है।

रेखा

रेखाखण्ड को दोनों ओर अपरिमित रूप से बढ़ाया जाए तो उसे रेखा कहते हैं।

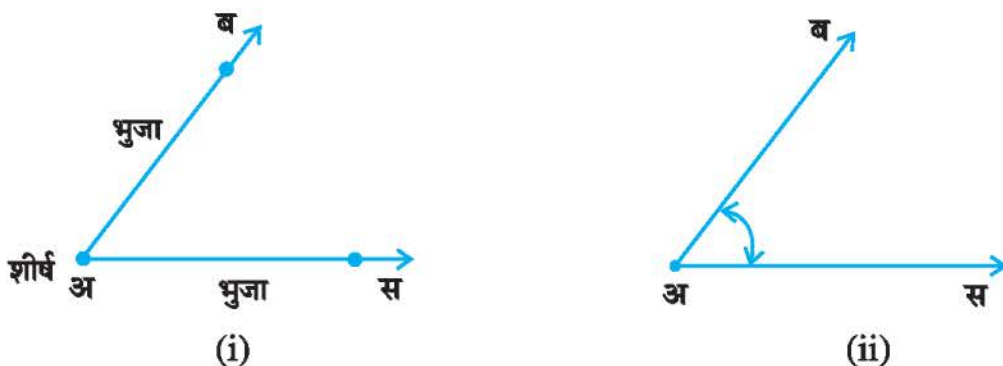


आकृति 15.5

रेखा का कोई अंत बिन्दु नहीं होता है। A, और B रेखा पर स्थित कोई दो बिन्दु हैं।

कोण

पिछली कक्षा में हमने परिवेश में कोणों के कई उदाहरण देखे हैं। हम जानते हैं कि एक ही प्रारंभिक बिंदु वाली दो किरणें कोण बनाती हैं।



आकृति 15.6

प्रारंभिक बिंदु अ कोण का शीर्ष और दो किरणें अ ब एवं अ स कोण की भुजा कहलाती हैं। कोण की भुजाओं के मध्य में कोण को प्रदर्शित करते हैं। 'कोण' शब्द को व्यक्त करने के लिए '∠' चिह्न का प्रयोग किया जाता है।

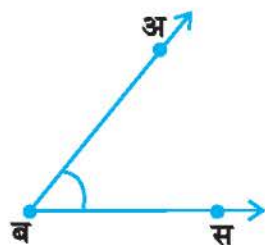
ऊपर बने चित्र में हम कोण स अ ब या ∠ स अ ब कहते हैं। इसे ही ∠ ब अ स भी कह सकते हैं।

कोण दर्शाते समय कोण के शीर्ष को मध्य में लिखते हैं।

शिक्षण संकेत : धागे की रील की सहायता से रेखा, किरण, रेखाखण्ड, सरल रेखा एवं वक्र रेखा की अवधारणा समझाएँ। परिवेश में रेखाखण्ड एवं किरण के उदाहरण ढूँढ़ने के लिए कहें।

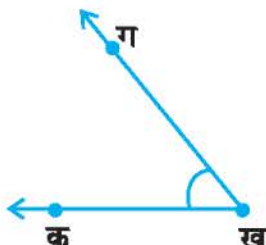
अभ्यास 15.1

1. नीचे बने कोणों के नाम लिखिए



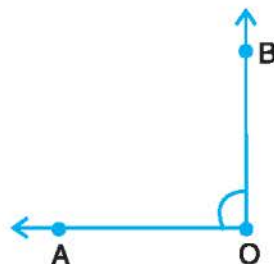
∠ अ ब स

(i)



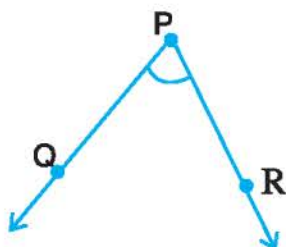
∠

(ii)

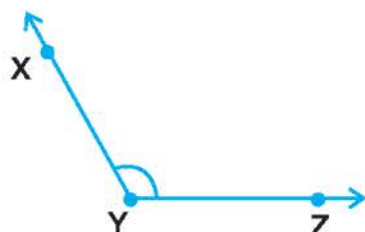


∠

(iii)

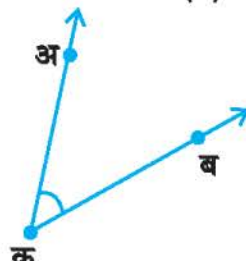


(iv)



(v)

आकृति 15.7

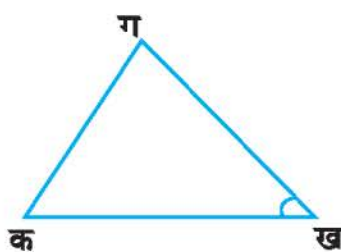


(vi)

2. नीचे बनी आकृति में दर्शाये गये कोणों के नाम लिखिए

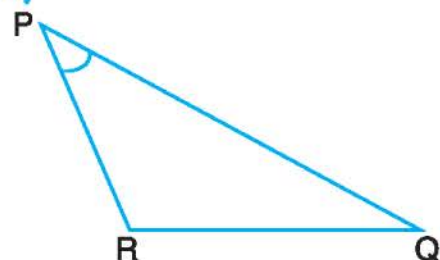


(i)



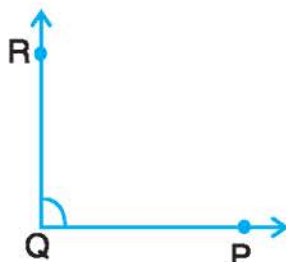
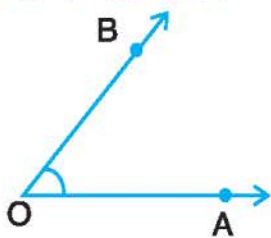
(ii)

आकृति 15.8

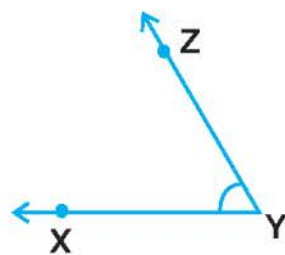


(iii)

3. कोण का मापन



आकृति 15.9

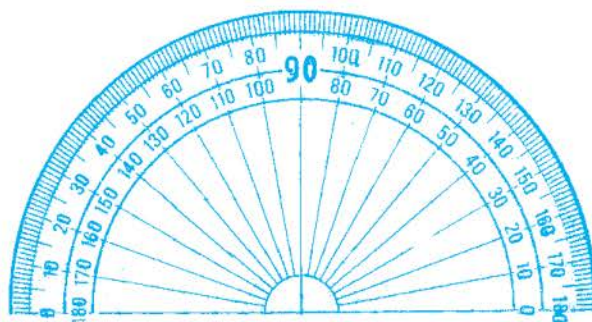


शिक्षण संकेत : ज्यो बोर्ड से कोण समझाएँ।

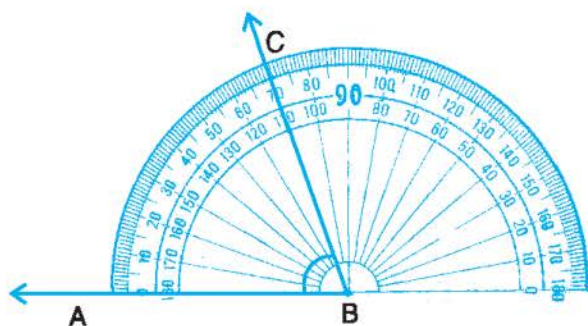
इन आकृतियों को देखकर हम कह सकते हैं कि आकृति (i) में किरणों OA तथा OB के बीच का फैलाव आकृति 15.9 (ii) में किरणों QP तथा QR के बीच के फैलाव से कम है अतः हम कहेंगे कि $\angle AOB$, $\angle PQR$ से छोटा है परंतु चित्र 15.9(i) एवं चित्र 15.9 (iii) में देखकर बता पाना कठिन है कि कौन सा कोण छोटा है। ऐसी समस्याओं में निष्कर्ष निकालने के लिए कोण के मापन की आवश्यकता होती है।

कोण को मापने के लिए 'चाँदा' का प्रयोग किया जाता है।

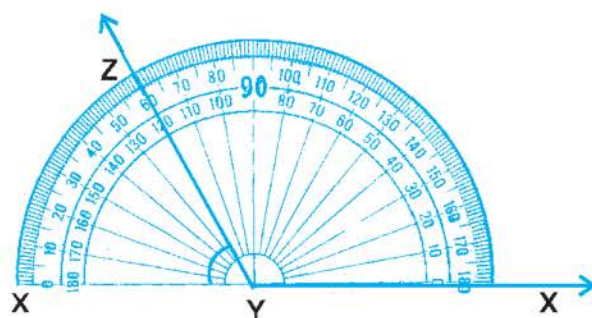
चाँदा आधे वृत्ताकार आकृति वाला उपकरण है। इसमें '0°' से लेकर 180° तक के कोण के मापने के चिह्न (भाग) बने होते हैं। प्रत्येक भाग को एक अंश कहते हैं। 1 अंश को 1° लिखते हैं।



उदाहरण 3. कोणों की माप पढ़िए



$$\angle ABC = 70^\circ$$



$$\angle XYZ = 120^\circ$$

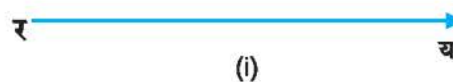
आकृति 15.10

ध्यान दें : किसी कोण का मापन करते समय सदैव कोण की एक भुजा के ठीक ऊपर चाँदी की आधार रेखा को रखते हैं तथा कोण के शीर्ष के ठीक ऊपर चाँदी की आधार रेखा के मध्य बिंदु को रखते हुए चाँदी में अंश माप लिखा भाग कोण की दूसरी भुजा की ओर रखते हैं।

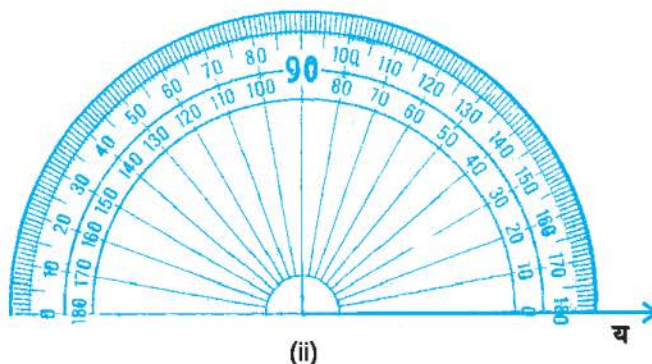
शिक्षण संकेत : विद्यार्थियों को चाँदा दिखाएँ तथा दाएँ से बाएँ एवं बाएँ से दाएँ चाँदा पढ़ना समझाएँ। चाँदी की सहायता से कोण मापन सिखाएँ। चाँदी की सहायता से कोण बनाना सिखाएँ।

चाँदे से कोण बनाना

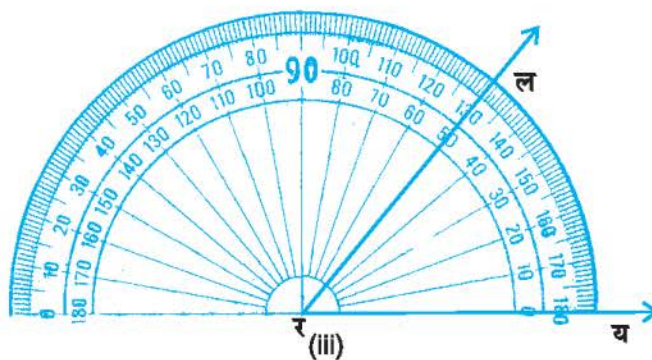
1. किसी बिन्दु पर कोई कोण बनाने के लिये सबसे पहले उस बिन्दु से जाती हुई एक किरण स्केल की सहायता से खींचते हैं।



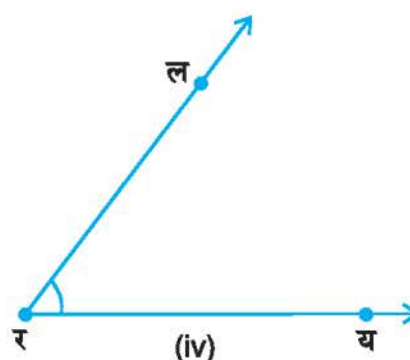
2. चाँदे की आधार भुजा से किरण को ढंक देते हैं और मध्य बिन्दु को किरण के प्रारंभिक बिन्दु पर रखते हैं।



3. अब देखते हैं कि चाँदे का कौन सा शून्य किरण पर है। उस शून्य से आगे बढ़ते हुये बनाये जाने वाले कोण के चिह्न के ठीक सामने एक बिन्दु बना देते हैं। जैसे 50° का कोण बनाने के लिए 50° के सामने बिंदु बनाते हैं।



4. चाँदे को हटाकर दोनों बिन्दुओं को मिलाते हुए एक किरण बनाते हैं। दोनों किरणों के बीच अभीष्ट कोण होता है। इसे पढ़ते हैं



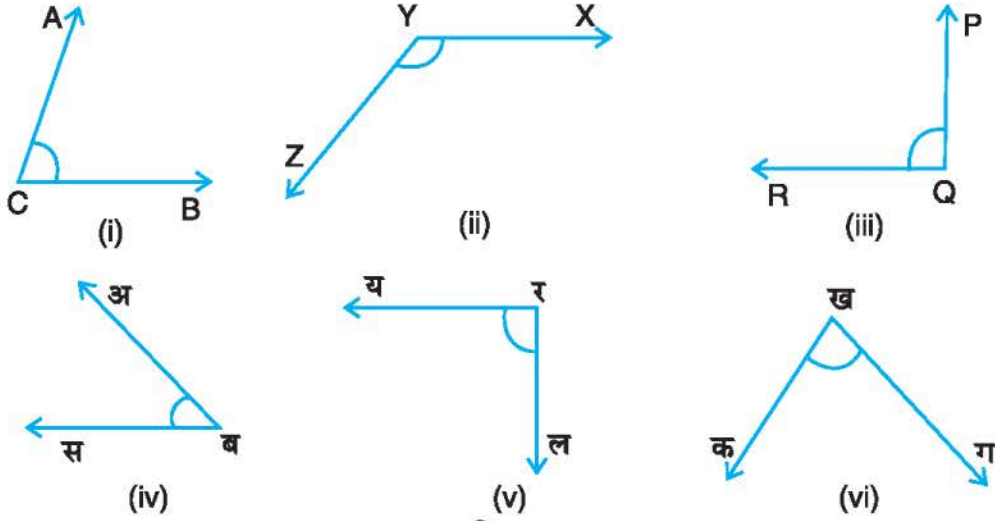
$$\angle \text{य र ल} = 50^\circ$$

आकृति 15.11

जिस बिन्दु पर कोण बनता है वह बिन्दु कोण का नाम लिखते समय मध्य में लिखा जाता है। इसीलिए $\angle \text{य र ल}$ में र को मध्य में लिखा गया है।

अभ्यास 15.2

1. चाँदी की सहायता से कोण मापकर अंश माप लिखिए



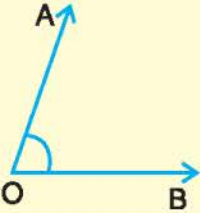
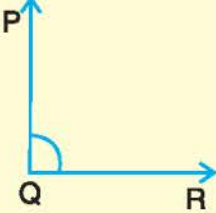
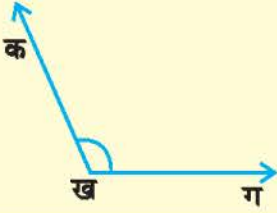
आकृति 15.12

2. चाँदी की सहायता से निम्नलिखित कोणों की रचना कीजिए

- | | | | |
|------------------|------------------|-------------------|-------------------|
| (i) 30° | (ii) 45° | (iii) 55° | (iv) 80° |
| (v) 90° | (vi) 110° | (vii) 180° | (viii) 15° |
| (ix) 155° | (x) 160° | | |

कोणों के प्रकार

अंशीय माप के आधार पर कोणों का वर्गीकरण न्यूनकोण, समकोण और अधिक कोण में निम्नानुसार किया जाता है।

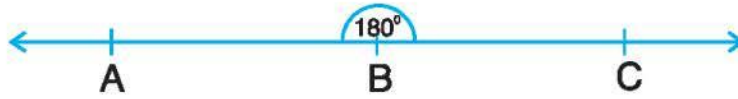
वह कोण जिसका माप 0° और 90° के बीच में होता है, न्यूनकोण कहलाता है। 	वह कोण जिसका माप 90° होता है समकोण कहलाता है। 	वह कोण जिसका माप 90° से 180° के बीच होता है, अधिककोण कहलाता है। 
न्यूनकोण $< 90^\circ$	समकोण $= 90^\circ$	$90^\circ < \text{अधिककोण} < 180^\circ$

आकृति 15.13

याद रखिए

(1) 0° माप के कोण को शून्य कोण कहते हैं।

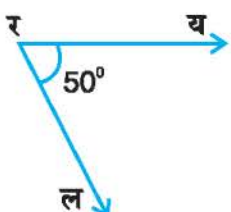
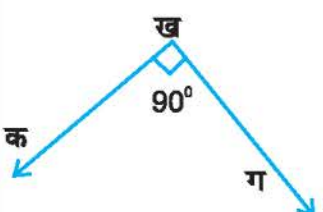
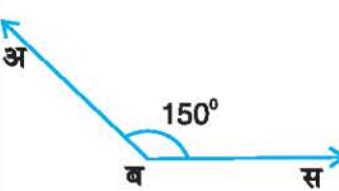
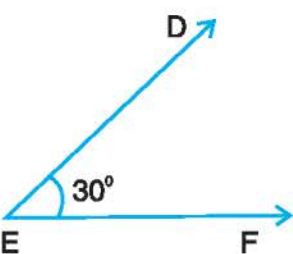
(2) 180° माप के कोण को “सरल कोण” अथवा “ऋजु कोण” कहते हैं।



अभ्यास 15.3

1. नीचे बने कोणों को न्यूनकोण, समकोण और अधिक कोण में वर्गीकरण कीजिए।

कोण	अंश माप	कोण का प्रकार
	80°	न्यूनकोण

कोण	अंश माप	कोण का प्रकार
		
		
		
		

2. रिक्त स्थान भरिए

- 90° माप वाले कोण को कहते हैं।
- न्यूनकोण की माप अंश से कम होती है।
- अधिककोण की माप कोण से अधिक होती है।
- 110° माप वाला कोण कोण कहलाता है।
- सरल कोण अंश माप का होता है।

(vi) श्यामपट के दो मिलने वाले किनारों के मध्य कोण बनता है।

(vii) कोण 90° से कम माप का होता है।

3. सही जोड़ी बनाइए

(i)	समकोण	90° से कम माप
(ii)	180°	90°
(iii)	अधिककोण	सरल कोण
(iv)	न्यूनकोण	90° से अधिक माप

4. सही विकल्प चुनिए

(i) 30° माप वाला कोण होगा।

(अ) सरल कोण (ब) अधिककोण (स) न्यूनकोण (द) समकोण

(ii) सरल कोण की माप होती है।

(अ) एक समकोण (ब) दो समकोण (स) 0° (द) 80°

(iii) अधिककोण की माप होगी।

(अ) 60° (ब) 80° (स) 90° (द) 91°

(iv) समकोण की माप होगी।

(अ) 100° (ब) 90° (स) 180° (द) 45°

समांतर रेखाएँ

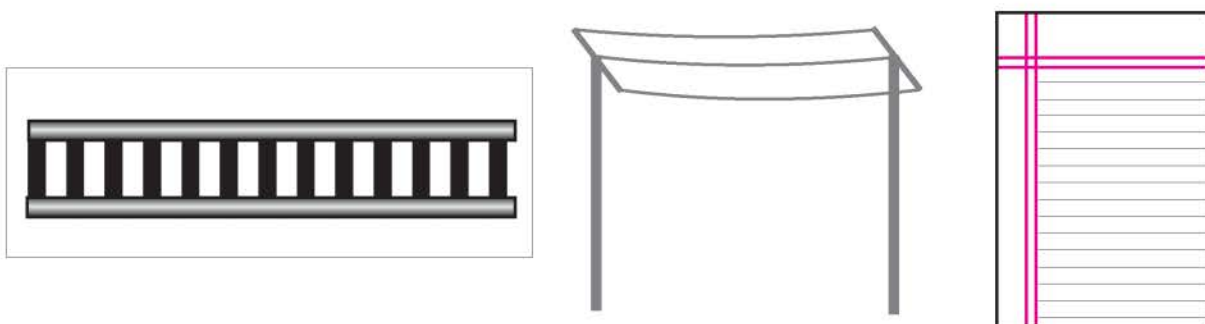
टेबिल के विपरीत किनारे, दरवाजे के आमने-सामने के किनारे, श्यामपट के विपरीत किनारे, स्केल के विपरीत किनारे आदि का अवलोकन कीजिए।



आकृति 15.14



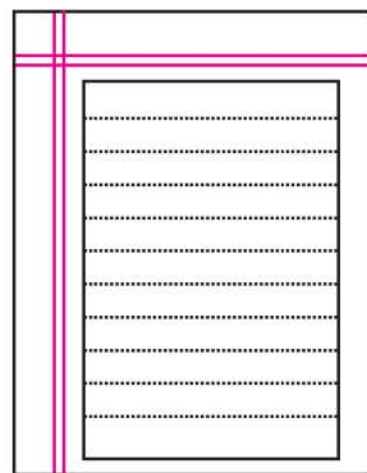
इसी तरह से रेल की पटरी, बिजली के दो खंभों के बीच लगे दो सीधे तार, पुस्तक के दो विपरीत किनारे, कॉपी में बनी लाईने देखिए।



आकृति 15.15

ये सभी समांतर रेखाओं के उदाहरण हैं। आयताकार कागज को मोड़ने से भी चित्रानुसार समांतर रेखाएँ प्राप्त की जा सकती हैं।

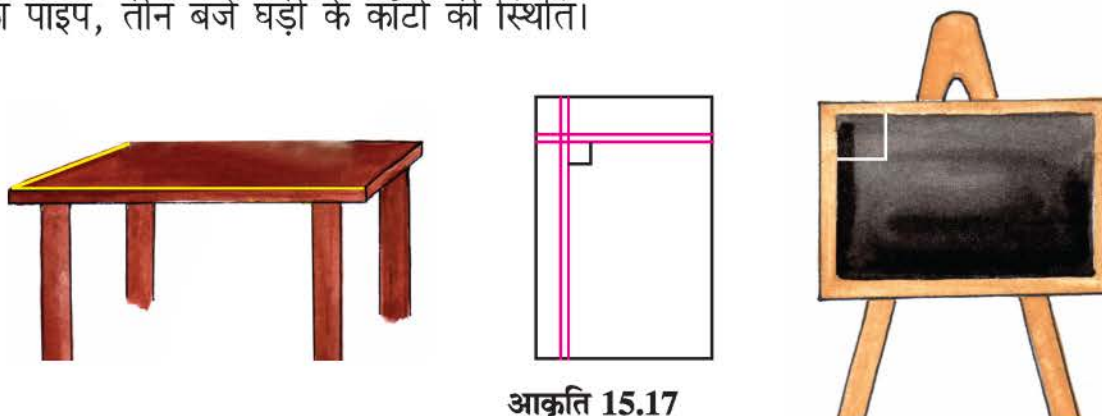
समांतर रेखाएँ एक-दूसरे से नहीं मिलती हैं तथा इनके बीच की दूरी सदैव समान रहती हैं।



लम्ब रेखाएँ

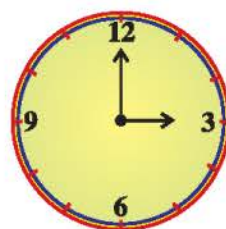
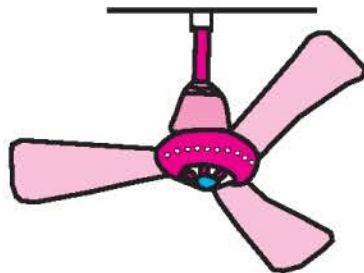
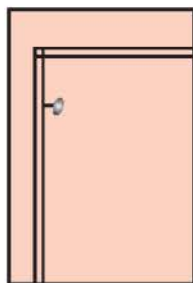
आकृति 15.16

मेज की ऊपरी सतह के मिलने वाले किनारे, कॉपी में हशिया की मिलती लाईनें, दो दीवारों के मिलने वाले किनारे, दीवार पर लगी कील, जमीन में लगा खंभा, छत में लटके पंखे का पाइप, तीन बजे घड़ी के काँटों की स्थिति।



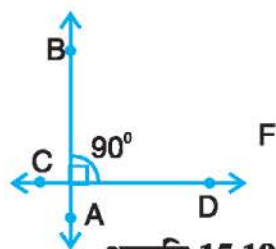
आकृति 15.17

शिक्षण संकेत : परिवेश में समांतर रेखाओं के उदाहरण बताएँ। कक्षा चौथी में सीखी गई परिवेशिय वस्तुओं में कोणों को कागज के समकोण से मापने की विधि का प्रयोग करके लम्ब रेखाओं को समझाएँ।



आकृति 15.18

लम्ब रेखाएँ एक-दूसरे से समकोण पर मिलती हैं।



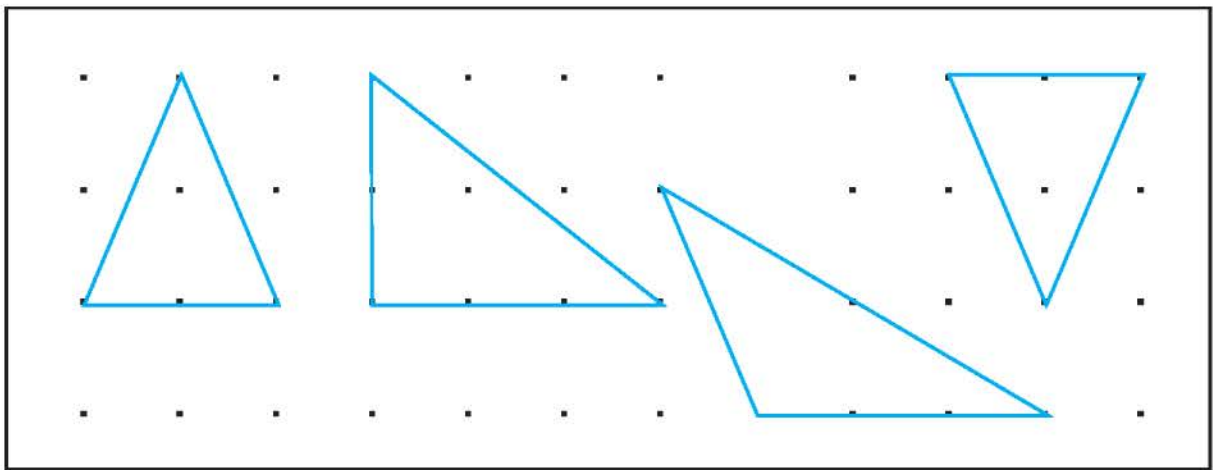
आकृति 15.19

त्रिभुज

पिछली कक्षाओं में आपने सीखा है किसी त्रिभुज में तीन भुजाएँ एवं तीन शीर्ष होते हैं। नीचे बने चित्रों को देखते हैं



तीन भुजाओं से घिरी आकृति को त्रिभुज कहते हैं।

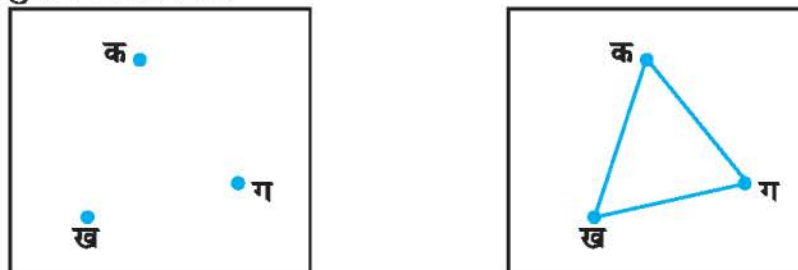


आकृति 15.20

त्रिभुज बनाने के लिए कोई तीन ऐसे बिंदु लेते हैं जो सीधी (सरल) रेखा में न हों तथा उन बिंदुओं को स्केल की सहायता से मिला देते हैं।

तीन भुजाओं से बनी बंद आकृति को त्रिभुज कहते हैं।

कॉपी में तीन बिंदु क ख ग इस प्रकार लेते हैं कि वे एक ही सीधी रेखा में न हों। इन बिंदुओं को चित्रानुसार मिलाते हैं।



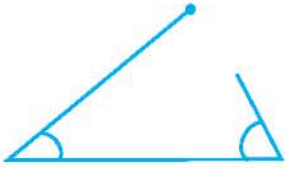
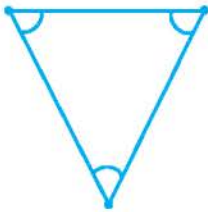
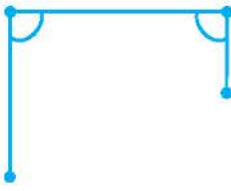
आकृति 15.21

इन बिंदुओं को मिलाने से तीन रेखाखण्ड क ख, ख ग और ग क मिलते हैं। यह आकृति तीन रेखाखण्डों (भुजाओं) से बनी बंद आकृति है अतः यह त्रिभुज है। इसे त्रिभुज क ख ग कहते हैं तथा Δ क ख ग लिखते हैं।

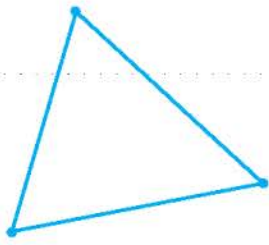
अभ्यास 15.4

1. नीचे दी गई आकृतियों में भुजाओं, शीर्षों एवं कोणों की संख्या लिखिए

आकृति	भुजाएँ	शीर्ष	कोण
(i)	3	3	3

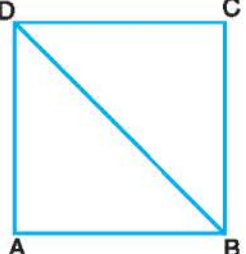
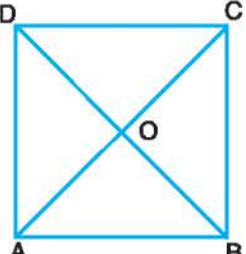
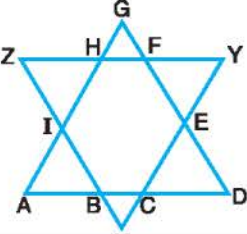
(ii)				
(iii)				
(iv)				

2. दिए गए बिंदुओं को मिलाकर बताइए बनने वाली आकृति त्रिभुज है अथवा नहीं है

	त्रिभुज है	R • • Q P •	
X • Y • Z •		अ • ब • स •	
अ • स • ब •		L • M • N •	

आकृति 15.22

3. त्रिभुजों की संख्या बताकर उनके नाम लिखिए

(i) 	त्रिभुजों की संख्या 2 $\triangle ABD$ तथा $\triangle BCD$
(ii) 	
(iii) 	

आकृति 15.23

4. परिवेश में उपलब्ध लम्ब रेखा एवं समांतर रेखा के तीन-तीन उदाहरण बताइए।

त्रिभुजों का वर्गीकरण

हम त्रिभुजों का वर्गीकरण दो प्रकार से करते हैं : एक भुजाओं के आधार पर और दूसरा कोणों के आधार पर।

(क) भुजाओं के आधार पर त्रिभुजों का वर्गीकरण

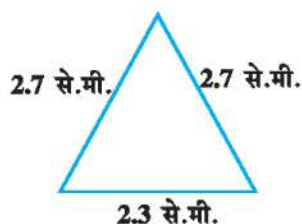
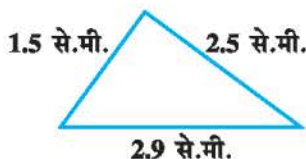
आओ इन त्रिभुजों की भुजाओं को मापें



आकृति 15.24

शिक्षण संकेत : ज्योबोर्ड पर कई त्रिभुज बनवाएँ तथा उनके भुजाएँ, शीर्ष कोणों का नामांकन कराएँ एवं भुजाओं, कोणों की संख्या लिखवाएँ। तीलियों से भी त्रिभुज बनवाकर भुजाएँ गिनवाएँ।

भुजाओं को मापने पर ज्ञात होता है



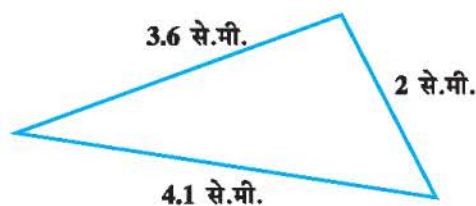
आकृति 15.25

सभी भुजाएँ भिन्न
लम्बाई की हैं।

दो भुजाएँ समान
लम्बाई की हैं।

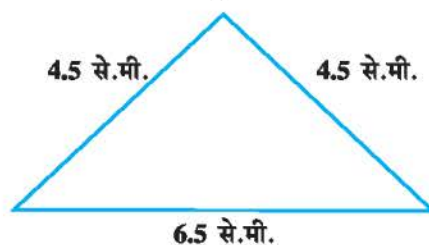
सभी तीनों भुजाएँ
समान लम्बाई की हैं।

- यदि किसी त्रिभुज की तीनों भुजाएँ भिन्न-भिन्न लम्बाई की हैं, तो वह त्रिभुज **विषमबाहु** त्रिभुज कहलाता है।



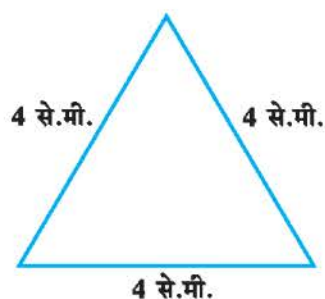
आकृति 15.26

- यदि किसी त्रिभुज की कम से कम दो भुजाएँ एक ही लम्बाई की हैं तो वह त्रिभुज **समद्विबाहु** त्रिभुज कहलाता है।



आकृति 15.27

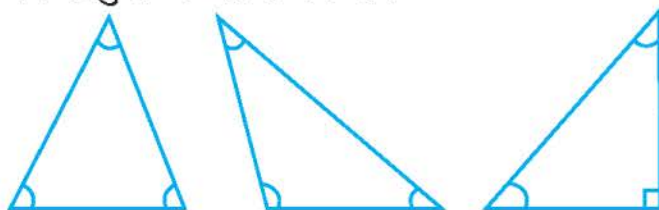
- यदि किसी त्रिभुज की सभी तीन भुजाएँ एक ही लम्बाई की हैं, तो वह त्रिभुज **समबाहु** त्रिभुज कहलाता है।



आकृति 15.28

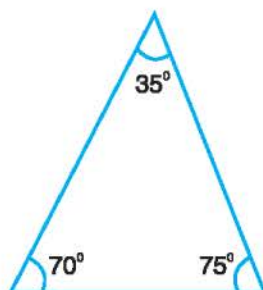
(ख) कोणों के अनुसार त्रिभुजों का वर्गीकरण

आओ नीचे बने त्रिभुजों के कोणों को मापें

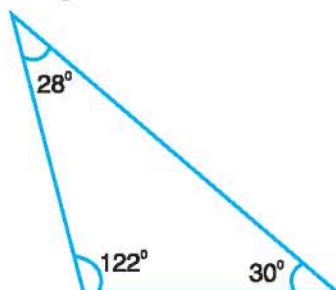


आकृति 15.29

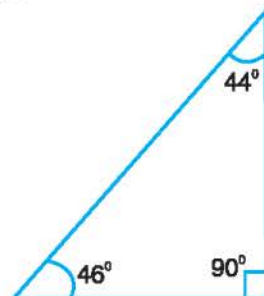
कोणों को मापने पर हमें निम्नानुसार जानकारी मिलती है।



सभी न्यूनकोण



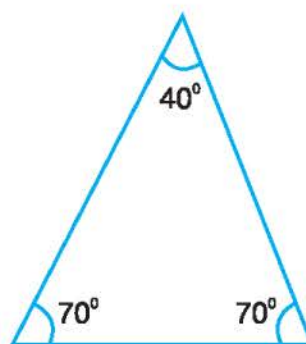
एक अधिककोण



एक समकोण

आकृति 15.30

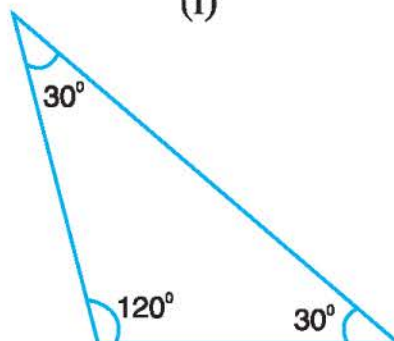
1. **न्यूनकोण त्रिभुज** यह एक न्यूनकोण त्रिभुज है। इसके सभी कोण न्यूनकोण अर्थात् 90° से कम है। यदि किसी त्रिभुज के सभी कोण 90° से कम होते हैं उस त्रिभुज को न्यूनकोण त्रिभुज कहते हैं।



(i)

2. **अधिककोण त्रिभुज** यह एक अधिककोण त्रिभुज है। इसका एक कोण 90° से बड़ा है। अर्थात् अधिक कोण है।

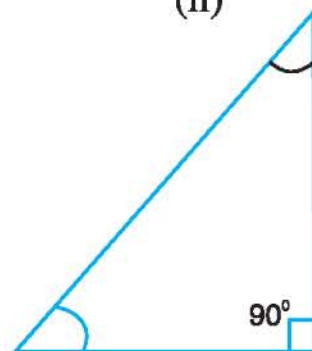
यदि किसी त्रिभुज का एक कोण 90° से अधिक होता है तो उस त्रिभुज को अधिक कोण त्रिभुज कहते हैं।



(ii)

3. **समकोण त्रिभुज** यह एक समकोण त्रिभुज है। क्योंकि इसका एक कोण 90° के बराबर है।

यदि किसी त्रिभुज का एक कोण 90° का होता है तो उस त्रिभुज को समकोण त्रिभुज कहते हैं।



(iii)

आकृति 15.31

अभ्यास 15.5

1. सही कथन पर (✓) का चिह्न लगाइए।

(i) त्रिभुज में तीन कोण होते हैं।

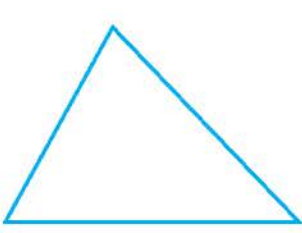
(ii) त्रिभुज में तीन भुजाएँ होती हैं।

(iii) विषमबाहु त्रिभुज में तीनों भुजाएँ भिन्न-भिन्न लम्बाई की होती हैं।

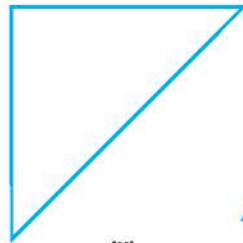
(iv) समद्विबाहु त्रिभुज की कोई भी दो भुजाएँ एक ही लम्बाई की होती हैं।

(v) समबाहु त्रिभुज की सभी तीन भुजाएँ एक ही लम्बाई की होती हैं।

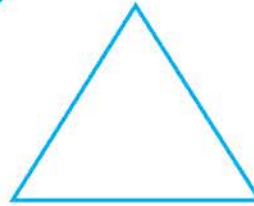
2. भुजाओं के आधार पर नीचे दिये त्रिभुजों के प्रकार बताइए



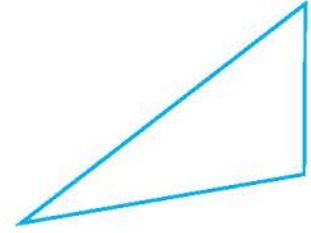
(i)



(ii)



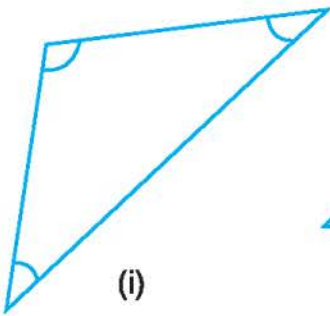
(iii)



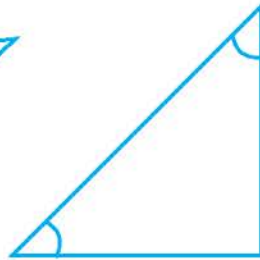
(iv)

आकृति 15.32

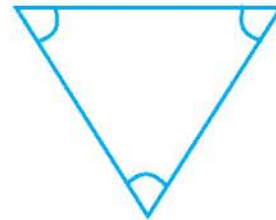
3. कोणों के आधार पर नीचे दिये गये त्रिभुजों के प्रकार बताइए



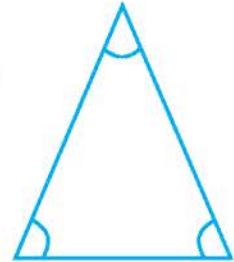
(i)



(ii)



(iii)



(iv)

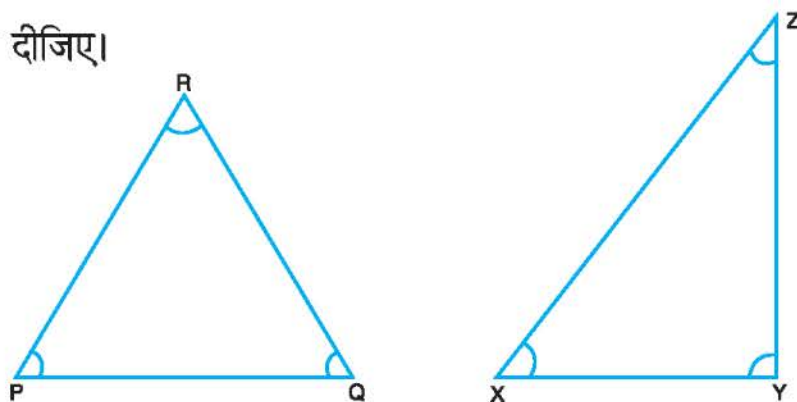
आकृति 15.33

त्रिभुज के अंतःकोणों का योग

गतिविधि 1 : कुछ त्रिभुज बनाइए। प्रत्येक के तीनों कोणों को चाँदी की सहायता से मापिए। तीनों कोणों का योग कीजिए। योगफल को देखिए।

गतिविधि 2 : कंपास बाक्स से दो त्रिभुजाकार आकृति वाले उपकरण (सेट-स्क्वेयर) निकालकर उनके बाहरी किनारों की सहायता से दो त्रिभुज बनाइए इन्हें चित्रानुसार ΔPQR तथा

$\triangle XYZ$ नाम दीजिए।



आकृति 15.34

चाँदा की सहायता से $\triangle PQR$ के $\angle RPQ$, $\angle PQR$, $\angle QRP$ तथा $\triangle XYZ$ के $\angle ZXY$, $\angle XYZ$ और $\angle YZX$ नापिए।

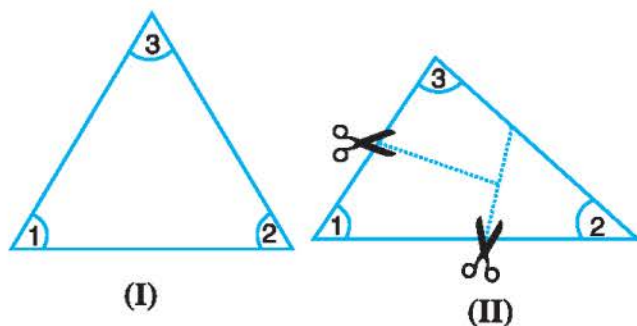
अब लिखिए

$\angle RPQ =$	$\angle ZXY =$
$\angle PQR =$	$\angle XYZ =$
$\angle QRP =$	$\angle YZX =$
तीनों का योग =	तीनों का योग =

प्रत्येक स्थिति में तीनों कोणों का योगफल 180° आता है।

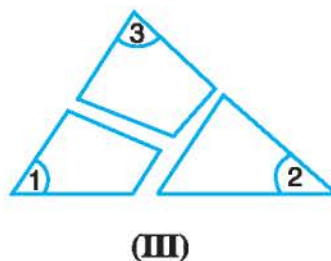
गतिविधि 3 :

- चित्रानुसार एक त्रिभुजाकार कागज काटिए। इसके कोणों को $\angle 1$, $\angle 2$ तथा $\angle 3$ नाम दीजिए।

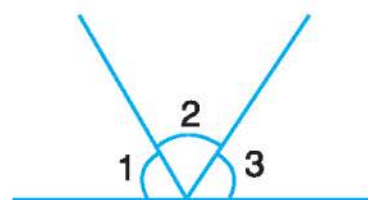


- त्रिभुज के तीनों कोणों को चित्र (II) के अनुसार काटिए।

- कटे कोणों की आकृतियाँ चित्र (III) के अनुसार होंगी।



- तीनों कटे हुए कोण एक-दूसरे के पास इस प्रकार रखिए कि $\angle 1$, $\angle 2$ से सटा हुआ हो और $\angle 2$, $\angle 3$ से सटा हो। चित्र (IV) $\angle 1$ और $\angle 3$ की बाह्य भुजाएँ एक ही सरल रेखा में हैं।



(IV)

हम देख सकते हैं कि तीनों कोणों का योगफल सरल रेखा (180°) बनाता है।

$$\text{अतः } \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$$

त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° होता है।

अभ्यास 15.6

1. निम्नलिखित में से कौन-कौन से एक ही त्रिभुज के कोण हैं?

- (i) 20° , 90° , 70° (ii) 120° , 15° , 75° (iii) 30° , 60° , 90°
 (iv) 110° , 60° , 20° (v) 45° , 80° , 75° (vi) 60° , 60° , 60°

2. त्रिभुज के दो कोण निम्नलिखित हैं तीसरा कोण ज्ञात कीजिए?

- (i) 50° , 50° (ii) 110° , 40° (iii) 60° , 60°
 (iv) 75° , 45° (v) 80° , 40° (vi) 45° , 80°

3. त्रिभुज बनने के लिए उचित कोण की जोड़ी बनाइए?

	A	B
(i)	60° , 60°	90°
(ii)	45° , 30°	70°
(iii)	30° , 60°	60°
(iv)	90° , 20°	105°

4. रिक्त स्थान भरिए

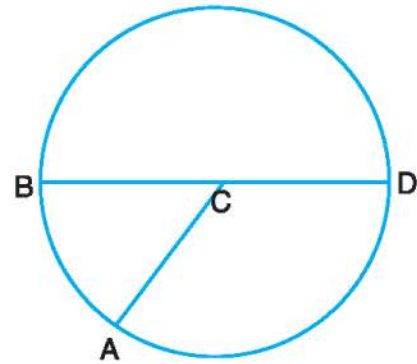
- (i) किसी त्रिभुज में भुजाएँ होती हैं।
- (ii) त्रिभुज में कोण होते हैं।
- (iii) त्रिभुज के तीनों अंतःकोणों का योग होता है।
- (iv) किसी त्रिभुज के दो कोण 60° , 60° के हों तो तीसरा कोण अंश होगा।

वृत्त

कक्षा चौथी में आपने वृत्त बनाना सीखा था। आपने चूड़ी, सिक्का, कील और तार तथा परकार की सहायता से वृत्त बनाया है। परकार द्वारा वृत्त बनाते समय आपने कुछ परिभाषाएँ भी सीखी थी इनकी पुनरावृत्ति करते हैं

(क) केन्द्र : वृत्त के अंदर एक निश्चित बिंदु वृत्त के प्रत्येक बिंदु से बराबर दूरी पर होता है, इस बिंदु को वृत्त का केन्द्र कहते हैं।

वृत्त बनाने के लिए जिस बिंदु पर परकार की नोक रखी जाती है वह बिंदु वृत्त का केन्द्र होता है। चित्र में C वृत्त का केन्द्र है।



आकृति 15.35

(ख) त्रिज्या : वृत्त पर स्थित किसी बिंदु की केन्द्र से दूरी वृत्त की त्रिज्या कहलाती है। चित्र में C से A की दूरी त्रिज्या है।

(ग) व्यास : वृत्त के केन्द्र से जाने वाला एक रेखाखण्ड जिसके अंतर्बिंदु वृत्त पर स्थित हों, वृत्त का व्यास कहलाता है। चित्र में BD वृत्त का व्यास है। व्यास वृत्त को दो समान भागों में बाँटता है।

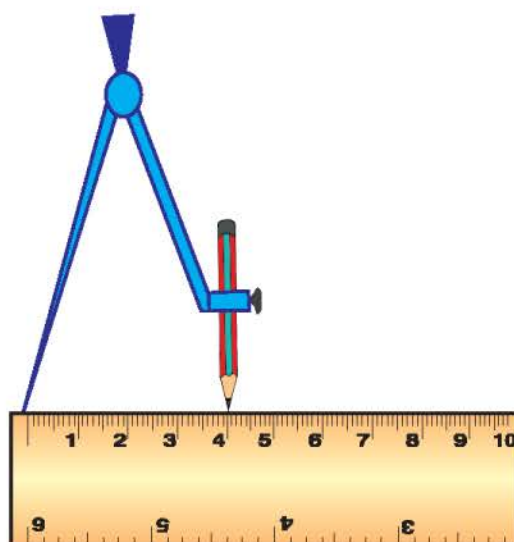
(घ) परिधि : वृत्त पर एक चक्कर पूरा करने पर चली गई दूरी को वृत्त की परिधि कहते हैं।

शिक्षण संकेत : वृत्त की परिधि पर धागा रखवाएँ तथा स्केल से धागे को नापकर परिधि की लम्बाई बताएँ। वृत्त एवं वृत्ताकार आकृति में अंतर स्पष्ट करवाएँ।

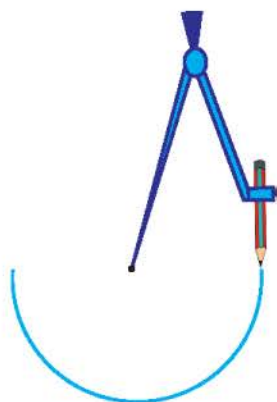
दी हुई त्रिज्या का वृत्त खींचना

अब हम किसी दी गई त्रिज्या का वृत्त खींचना सीखेंगे। मान लीजिए दी गई त्रिज्या 4 सेमी है। इस त्रिज्या का वृत्त खींचने के लिए निम्न चरणों को पूरा कीजिए-

- परकार को इस प्रकार खोलिए कि सुई जैसा नुकीला सिरा और पेंसिल की नोक एक-दूसरे से 4 से.मी. दूर हो।
- कागज पर कोई सुविधाजनक बिन्दु 'क' चुनिये।
- सुई जैसे नोक के सिरे को बिन्दु 'क' पर रखिये और परकार को ऊपर से पकड़कर, पेंसिल की नोक को घुमाइए। हमें वांछित वृत्त प्राप्त होता है।

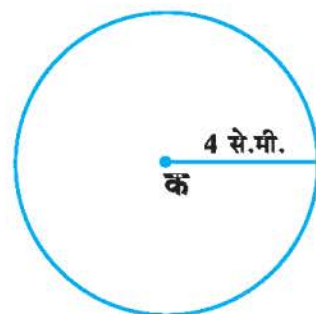


(i)



(ii)

आकृति 15.36



(iii)

अभ्यास 15.7

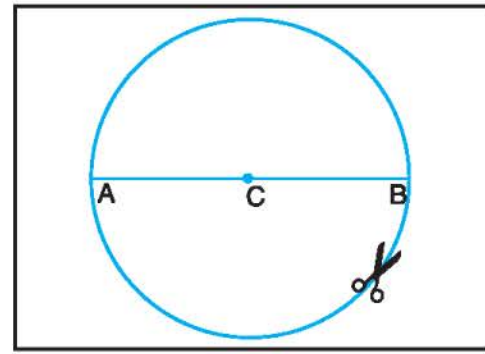
परकार एवं स्केल की सहायता से दी गई त्रिज्याओं का वृत्त बनाइए

- | | | |
|----------------------|------------------------|---------------------|
| (i) 4 सेमी | (ii) 3 सेमी | (iii) 5 सेमी |
| (iv) 3 सेमी 5 मि.मी. | (v) 4 सेमी 5 मि.मी. | (vi) 5 सेमी 5 मिमी. |
| (vii) 6 सेमी | (viii) 2 सेमी 5 मि.मी. | (ix) 3.5 से.मी. |
| (x) 2.5 से.मी. | | |

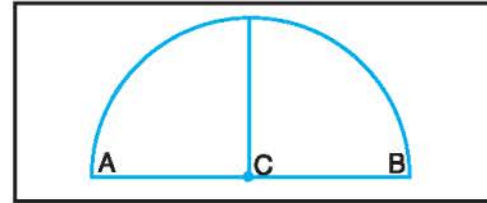
वृत्त की त्रिज्या और व्यास में संबंध

1. कागज पर एक वृत्त खींचकर उसे उसकी परिधि से काटते हैं।

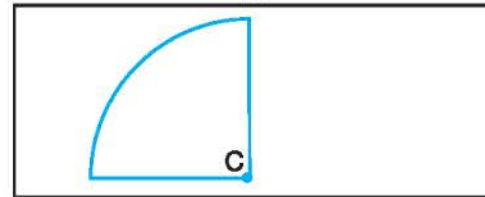
2. इसके केंद्र को **C** नाम देते हैं।
3. इसका एक व्यास **AB** बनाते हैं।
4. आकृति (II) की तरह इस कागज के वृत्त को व्यास **AB** पर मोड़ते हैं।
5. केंद्र **C** पर इसे चित्रानुसार मोड़ते हैं। इससे बिंदु **A**, बिंदु **B** से मिल जाता है। इससे ज्ञात होता है कि वृत्त की त्रिज्याएँ **CA**, **CB**, व्यास **AB** की आधी हैं।



(i)



(ii)



(iii)

आकृति 15.37

गतिविधि 4 : 2 से.मी., 3 से.मी., 4 से.मी., 5 से.मी. और 3 से.मी. 5 मि.मी. की अलग-अलग त्रिज्याएँ लेकर पाँच वृत्त बनाइए।

इन वृत्तों में से प्रत्येक की त्रिज्या और व्यास बनाकर इनकी लंबाईयाँ मापिए और दी गई तालिका में भरिए।

वृत्त	त्रिज्या की लम्बाई	व्यास की लम्बाई	त्रिज्या और व्यास में संबंध
1.	2 से.मी.	4 से.मी.	$2 \times \dots \text{से.मी.} = \dots \text{से.मी.}$
2.	3 से.मी.	6 से.मी.	$2 \times \dots \text{से.मी.} = \dots \text{से.मी.}$
3.	4 से.मी.	8 से.मी.	$2 \times \dots \text{से.मी.} = \dots \text{से.मी.}$
4.	5 से.मी.	10 से.मी.	$2 \times \dots \text{से.मी.} = \dots \text{से.मी.}$
5.	3.5 से.मी.	7 से.मी.	$2 \times \dots \text{से.मी.} = \dots \text{से.मी.}$

उपरोक्त सारणी से हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि वृत्त के व्यास की लम्बाई उसकी त्रिज्या की लम्बाई की दोगुनी होती है।

$$\text{व्यास} = 2 \times \text{त्रिज्या}$$

अभ्यास 15.8

1. वृत्तों की त्रिज्याएँ दी गई हैं व्यास ज्ञात कीजिए

- (i) 1 से.मी. (ii) 3 से.मी. (iii) 6 से.मी.
(iv) 7 से.मी. (v) 10 से.मी.

2. वृत्तों के व्यास दिए गए हैं त्रिज्या का मान रिक्त स्थान में लिखिए

- (i) वृत्त का व्यास 10 से.मी. तो त्रिज्या से.मी. होगी।
(ii) वृत्त का व्यास 6 से.मी. तो त्रिज्या से.मी. होगी।
(iii) वृत्त का व्यास 2 से.मी. तो त्रिज्या से.मी. होगी।
(iv) वृत्त का व्यास 4 से.मी. तो त्रिज्या से.मी. होगी।

3. सही विकल्प चुनिए

- (i) वृत्त का व्यास त्रिज्या का होता है।
(I) बराबर (II) दो गुना (III) तिगुना
(ii) वृत्त की त्रिज्या व्यास की होती है।
(I) बराबर (II) दो गुना (III) आधी
(iii) एक वृत्त की सभी त्रिज्याएँ होती हैं।
(I) बराबर (II) अलग-अलग लम्बाई की (III) व्यास के बराबर।

4. रिक्त स्थान भरिए

- (i) एक वृत्त की सभी त्रिज्याएँ होती हैं।
(ii) एक वृत्त के सभी व्यास नाप के होते हैं।
(iii) वृत्त का व्यास उसकी त्रिज्या का होता है।

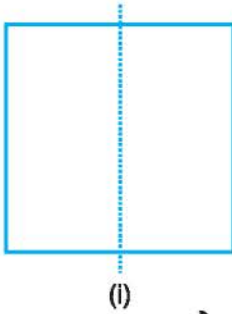
सममित आकृतियाँ

पिछली कक्षा में हमने सममित आकृतियों को देखा था। पुनः सममित आकृतियों की पहचान एवं समझ हेतु कुछ गतिविधियाँ करते हैं

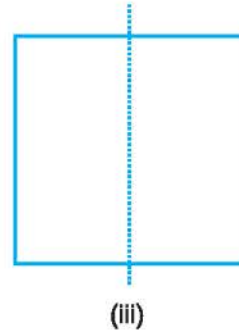
गतिविधि 5.

सममित आकृतियों को समझने के लिए एक वर्गाकार कागज का टुकड़ा लीजिए अब इस कागज को बीच में से इस प्रकार मोड़िए कि मुड़े हुये दोनों भाग एक-दूसरे को पूरा-पूरा ढक लें।

वर्गाकार कागज



मुड़ा हुआ कागज

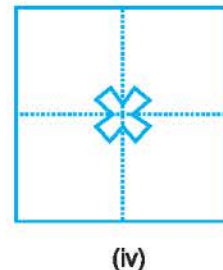
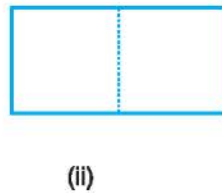
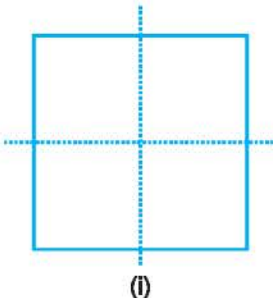


अब इस कागज को खोल कर देखिए। मोड़ने वाले भाग पर एक रेखा सी दिखाई देगी इस रेखा को दोनों तरफ के कागज के आयताकार भाग पूर्णतः एक जैसे बराबर हैं। नीचे के चित्र में मोड़ने वाली रेखा को टूटी रेखा से दर्शाया गया है।

आकृति 15.38

ऐसी आकृति जो किसी रेखा के दोनों तरफ पूर्णतः एक जैसी होती है। सममित आकृति कहलाती है। वह रेखा जिस पर से आपने कागज को मोड़ा था उसको सममित रेखा अथवा सममित अक्ष कहते हैं।

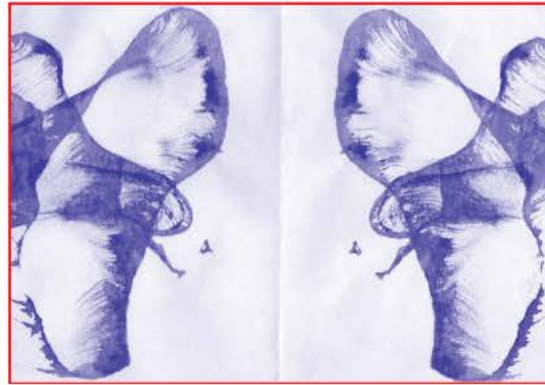
गतिविधि 6 : एक वर्गाकार कागज लीजिए उसे चित्रानुसार दो बार मोड़िए और काटकर नीचे दी गई सममित आकृतियाँ बनाइए।



आकृति 15.39

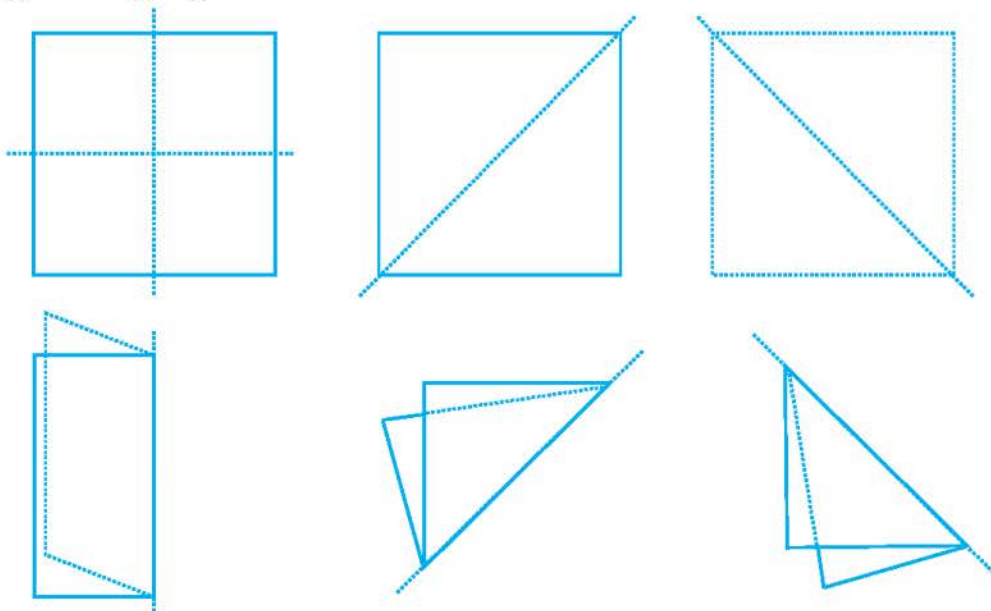
गतिविधि 7 : एक कागज को ठीक बीच से मोड़िए। धागे को रंग में डुबाकर मुड़े कागज के बीच में इस प्रकार से रखिए कि धागे का दूसरा छोर कागज के बाहर हो। अब कागज को ऊपर से दबाते हुए पूरे धागे को कागज से बाहर खींच लीजिए। कागज खोलकर उसमें सममित रेखा के दोनों ओर बनी आकृतियों को देखिए।

इसी प्रकार से धागे को रंग में डुबाकर अलग-अलग ढंग से कागज में रखकर कई आकृतियाँ बनाइए। ये सभी सममित आकृतियाँ होंगी।



आकृति 15.40

आइए देखें कि एक वर्गाकार कागज को और कितने प्रकार से मोड़ सकते हैं कि मुड़े हुए भाग एक-दूसरे को पूरा-पूरा ढंक लें।



मोड़ने का पहला प्रकार

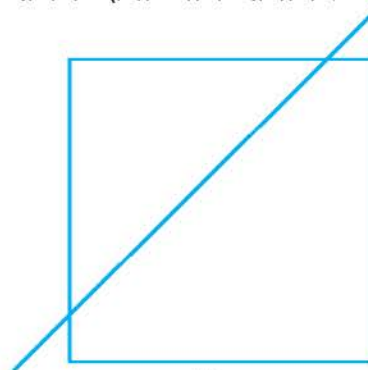
मोड़ने का दूसरा प्रकार

मोड़ने का तीसरा प्रकार

आकृति 15.41

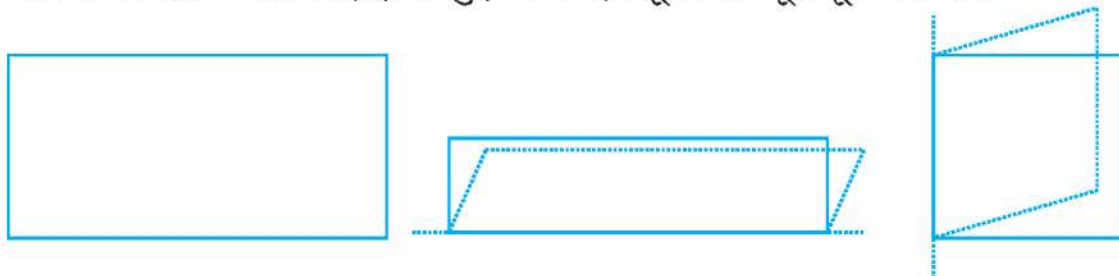
मुड़े हुए भाग को खोल कर ध्यान से देखिए। दोनों मुड़े हुये भाग एक-दूसरे को पूरा-पूरा ढक लेते हैं अर्थात् उपरोक्त सभी आकृतियाँ सममित आकृतियाँ हैं। सभी चित्रों में 'सममित अक्ष' को दिखाया गया है। यहाँ ध्यान रखना होगा यदि तुमने सही वर्गाकार कागज नहीं लिया है अथवा गलत स्थान से मोड़ दिया है तो मुड़े हुए कागज के भाग एक-दूसरे को पूरा-पूरा नहीं ढकेंगे। उस स्थिति में जो अक्ष प्राप्त होगी उसके संगत दोनों भाग सममित नहीं होंगे।

इस आकृति में सममित अक्ष गलत खींची गई है अब अगर तुम इस स्थान से कागज को मोड़ोगे तो दोनों मुड़े कागज एक-दूसरे को पूरा-पूरा नहीं ढकेंगे। अर्थात् अक्ष सममित अक्ष नहीं है।



आकृति 15.42

एक आयताकार कागज से सममित आकृतियाँ बनाते हैं। एक आयताकार कागज लीजिए, इस कागज को इस प्रकार मोड़िए कि मुड़े भाग एक-दूसरे को पूरा-पूरा ढक लें।



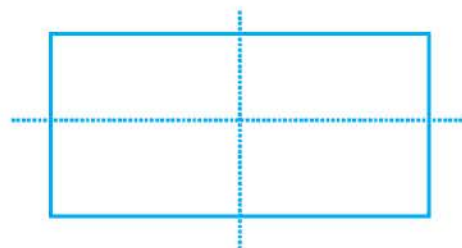
आकृति 15.43

आयताकार कागज

मोड़ने का पहला तरीका

मोड़ने का दूसरा तरीका

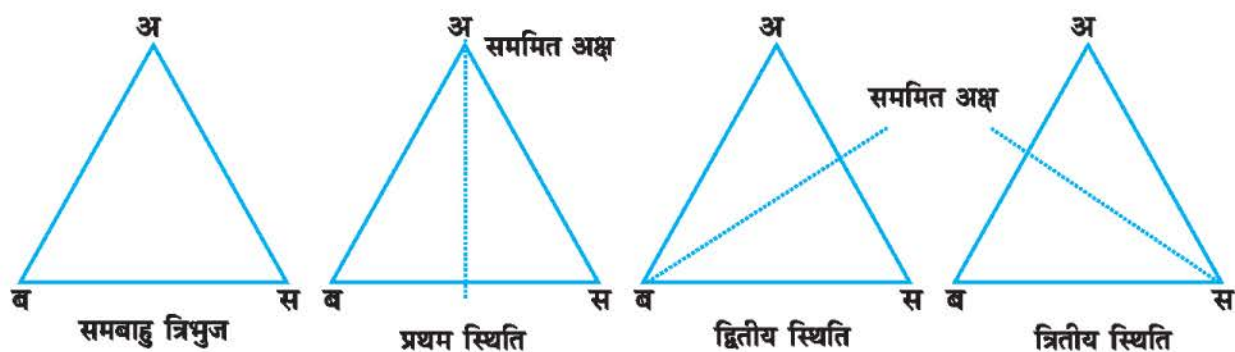
आयताकार कागज को उपरोक्त दो प्रकार से ऐसे मोड़ सकते हैं, जिससे सममित आकृतियाँ प्राप्त हो। अर्थात् आयताकार कागज में दो सममित अक्ष खींच सकते हैं।



आकृति 15.44

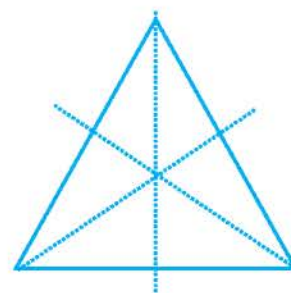
चित्र में दूटी रेखा से दोनों सममित अक्षों को दर्शाया गया है।

अब एक समबाहु त्रिभुज है। हम इस त्रिभुज को विभिन्न प्रकार से मोड़ते हैं कि मुड़े हुए दोनों भाग एक-दूसरे को पूरा-पूरा ढक लें। ऐसी हमें तीन स्थितियाँ प्राप्त होती हैं।



आकृति 15.45

समबाहु त्रिभुज को हम तीन प्रकार से मोड़ कर सममित अक्ष प्राप्त कर सकते हैं। उपरोक्त समबाहु त्रिभुज में टूटी रेखा द्वारा सममित अक्षों को दर्शाया गया है।



आकृति 15.46

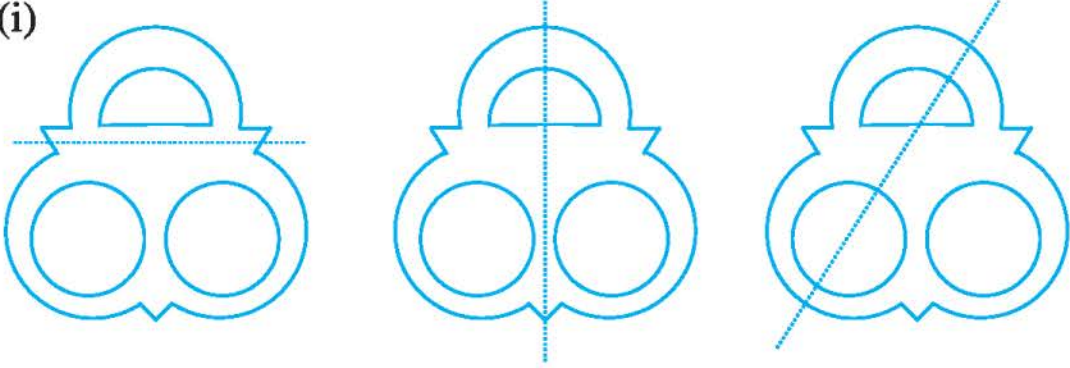
- सममित की रेखा को सममित अक्ष भी कहते हैं।
- सममितता किसी अक्ष के परितः देखी जाती है।
- सममित अक्ष के दोनों तरफ की आकृतियाँ एक जैसी होती हैं।
- सममित अक्ष एक से ज्यादा भी हो सकती हैं।

शिक्षण संकेत : बच्चों को विभिन्न प्रकार की कागज से बनी आकृतियों को मोड़कर सममित अक्ष की पहचान करवाएँ।

अभ्यास 15.9

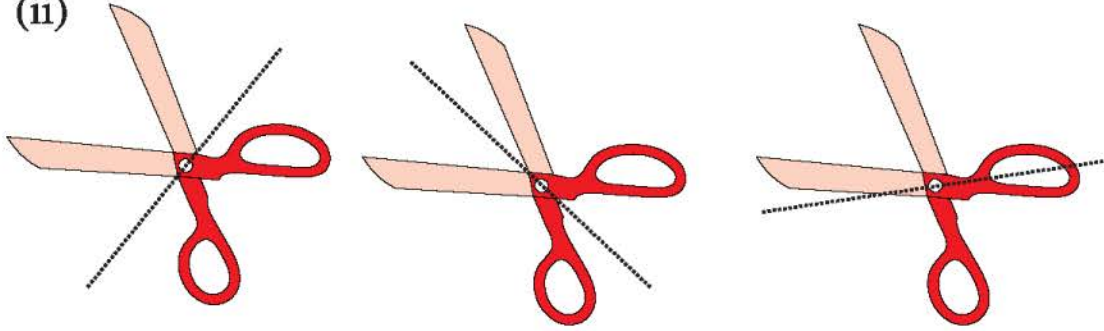
1. नीचे कुछ आकृतियों में सममित की अक्ष खींची गई है। देखिए और सही सममित अक्ष को पहचानकर (✓) का निशान लगाइए।

(i)



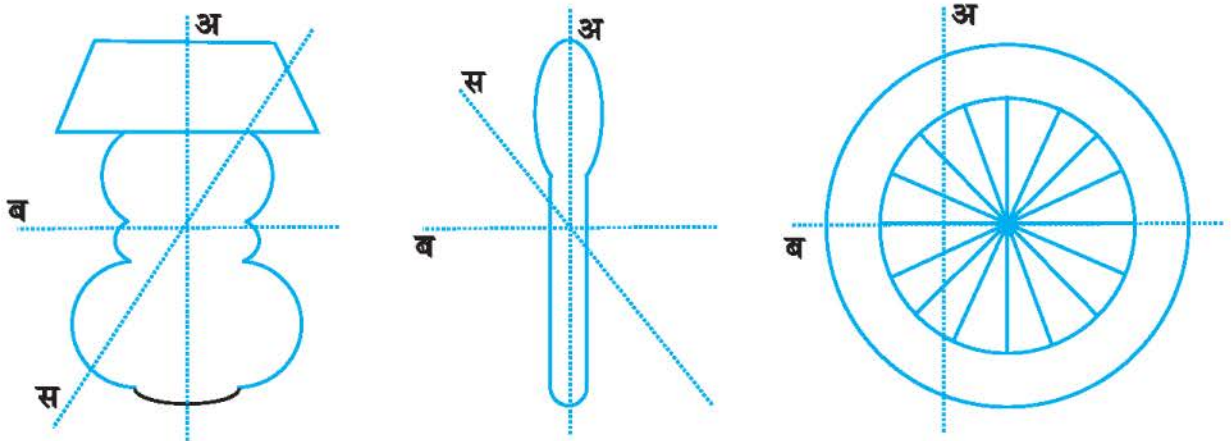
आकृति 15.47

(ii)



आकृति 15.48

2. नीचे दिये गये प्रत्येक चित्र को कई टूटी रेखाओं द्वारा दो भागों में बाँटा गया है। बताइए कौन सी रेखा चित्र को दो समान भागों में बाँटती है।



आकृति 15.49

3. नीचे कुछ आकृतियाँ बनी हुई हैं इनमें सममित अक्ष खींचिए एवं रिक्त स्थान में सममित अक्षों की संख्या लिखिए।

(1)  उत्तर 4	(2)  	(3)  	(4) 
(5)  	(6)  	(7)  	(8) 
(9)  	(10)  	(11)  	(12) 
(13)  	(14)  	(15)  	(16) 

आकृति 15.50

गतिविधि 8 :

- परकार की सहायता से एक कागज पर वृत्त बनाइए और देखिए इसमें कितनी सममित अक्ष खींची जा सकती हैं। सही उत्तर प्राप्त करने में शिक्षक से मदद लीजिए।
- A, B, C Z तक लिखिए एवं इनमें सममित अक्षों को छाँटकर सममित अक्ष भी खींचिए।
- अपने आसपास के पेड़ों से टूटी हुई पत्तियों को एकत्रित कीजिए उनमें से कौन-सी पत्तियाँ सममित हैं छाँटिए।

शिक्षण संकेत : वृत्त में सममित अक्षों की संख्या अनन्त होती है, इस निष्कर्ष को बच्चों से चर्चा एवं गतिविधि के माध्यम से निकलवायें।

विविध प्रश्नावली 3

1. रिक्त स्थानों को भरिए

- (i) त्रिभुज के तीनों कोणों का योग होता है।
- (ii) वह त्रिभुज जिसमें दो भुजाओं की लंबाइयाँ बराबर होती हैं, उसे त्रिभुज कहते हैं।
- (iii) समद्विबाहु त्रिभुज में सममित अक्ष होते हैं।
- (iv) आयत में किनारे एवं कोने होते हैं।
- (v) एक रेखाखण्ड में कम-से-कम बिंदु होते हैं।

2. कथन सत्य है या असत्य, लिखिए

- (i) किरण की निश्चित लम्बाई नहीं होती है।
- (ii) दो समांतर रेखाएँ एक-दूसरे से नहीं मिलती हैं।
- (iii) किसी त्रिभुज में दो समकोण हो सकते हैं।
- (iv) वृत्त की त्रिज्या उसकी व्यास की लगभग तीन गुनी होती है।
- (v) सममित अक्ष के दोनों तरफ की आकृतियाँ एक जैसी होती हैं।

3. 5 से.मी. व्यास वाले एक वृत्त की रचना कीजिए।

4. एक आयताकार दर्पण की लम्बाई 20 से.मी. और चौड़ाई 14 से.मी. है। दर्पण की परिमाप ज्ञात कीजिए।

5. एक आयताकार कमरे के फर्श की लम्बाई 14 मी. और चौड़ाई 12 मी. है। कमरे का फर्श पक्का कराने में 25 रुपये प्रति वर्ग मीटर की दर से कुल कितना रुपया व्यय होगा?

6. एक कमरा 8 मीटर लंबा और 5 मीटर चौड़ा है। उस कमरे में पत्थर की फर्शियाँ लगानी हैं, तो इसमें एक वर्गमीटर की कितनी फर्शियाँ लगेगी?

7. ऐसे आयत का परिमाप ज्ञात कीजिए जिसकी चौड़ाई 53.5 से.मी. तथा जिसकी लम्बाई उसकी चौड़ाई की दुगुनी है?

8. 8.4 मी. लम्बी तथा 2.5 मी. चौड़ी दीवार में 10 से.मी. भुजा वाली वर्गाकार पत्थर की

सिल्लियाँ लगवानी हैं। पूरी दीवार में कितनी सिल्लियाँ लगोगी।

9. 5 से.मी. लम्बाई तथा 1 से.मी. चौड़ाई वाले आयत का परिमाप तथा क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 4 से.मी. लम्बाई तथा 2 से.मी. चौड़ाई वाले आयत का परिमाप और क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए साथ ही बताइए

(अ) क्या दोनों के परिमाप बराबर हैं?

(ब) क्या दोनों के क्षेत्रफल बराबर हैं?

10. खाली स्थान भरिए

(i) 425 से.मी. = मीटर

(ii) 25 से.मी. 7 मि.मी. = से.मी.।

(iii) 5 किलोग्राम 240 ग्राम = ग्राम।

(iv) 750 मिलीलीटर = लीटर।

(v) 310 मिनट = घंटे मिनट।

11. खाली स्थान भरिए

(i) 1:00 पूर्वाह्न से 4:00 अपराह्न तक = घंटे।

(ii) 6:30 अपराह्न से 7:00 पूर्वाह्न तक = घंटे।

(iii) 3 घंटा 10 मिनट में 4 घंटा 58 मिनट का जोड़ = घंटा मिनट।

(iv) 2 घंटा 20 मिनट में से 1 घंटा 20 मिनट का अंतर = घंटा मिनट।

(v) 12:00 मध्य रात्रि से 12:00 दोपहर तक = घंटे।

12. 6 किलोमीटर लम्बी सड़क के एक किनारे पर 16 मीटर की दूरी पर पेड़ लगाने के लिए गड्ढे खोदने हैं। कितने गड्ढे खोदने की आवश्यकता पड़ेगी यदि दोनों छोरों पर भी पेड़ लगाने हों?

13. 100 मीटर कपड़े के थान में से 5 मीटर 50 से.मी. के 12 टुकड़े बेच दिये गये, बताइए कितना कपड़ा शेष बचा?

14. एक किसान के पास 500 किलो 800 ग्राम गेहूं था। उसने 100 किलो गेहूं अपने खर्च

के लिए रख लिया तथा शेष गेहूं को 4 व्यक्तियों में बराबर-बराबर बेच दिया। बताइए एक व्यक्ति को कितना गेहूं मिला?

15. राजेश अपने घर से 10:30 पूर्वाह्न विद्यालय के लिए निकला तथा 5:00 अपराह्न अपने घर लौटा। यदि आने एवं जाने में उसे कुल 30 मिनट का समय लगा तो बताइए वह विद्यालय में कितने समय रहा?
16. एक टंकी में 20 लीटर दूध था जिसमें से 5 लीटर 600 मि.ली. दूध रमेश ने, 2 लीटर 400 मि.ली. दूध सुरेश ने ले लिया। शेष दूध को 6 परिवारों में बराबर-बराबर बाँट दिया गया। बताइए प्रत्येक परिवार को कितना-कितना दूध मिलेगा?
17. एक त्रिभुज की भुजाओं की लम्बाई क्रमशः 20 से.मी., 25 से.मी. और 30 से.मी. है। त्रिभुज का परिमाप ज्ञात कीजिए।
18. एक आयताकार खेत का क्षेत्रफल 108 वर्ग मीटर है। यदि उसकी लम्बाई 12 मीटर है, तो चौड़ाई ज्ञात कीजिए।