अध्याय

4 दो चर राशी के रैखिक समीकरणों का युग्म
(Pair of Linear Equations in Two Variables)

4.1 प्रस्तावना

एक दिन सिरी उसके पिताजी के साथ एक पुस्तक की दूकान पर गई और 3 कापियाँ और 2 पेन खरीदी। इसके लिए उसके पिताजी ने ₹80 दिए। उसकी सहेली लक्ष्मी को कापियाँ और पेन पसंद आए। अतः उसने उसी प्रकार की 4 कापियाँ और 3 पेन ₹110 में खरीदे। पुनः उसकी सहपाठी रुबीना को पेन खरीदना है और जोसेफ को कापियाँ खरीदना है। उन्होंने सिरी को एक पेन का मूल्य और 1 कापी का मूल्य पूछा। परन्तु सिरि को 1 पेन का मूल्य और 1 कापी का मूल्य अलग से ज्ञात नहीं था। इन वस्तुओं का मूल्य वे कैसे ज्ञात कर सकते है?

इस उदाहरण में, 1 कापी और 1 पेन का मूल्य ज्ञात नहीं है। ये अज्ञात परिमाण है। हमारे दैनिक जीवन में ऐसी कई स्थितियाँ आती है।

विचार कीजिए - चर्चा कीजिए।

नीचे दो स्थितियाँ दी हुयी है :

(i) किसी निश्चित दिन पर 1 कि.ग्रा आलू और 2 कि.ग्रा टमाटर का मूल्य ₹30 था। दो दिन पश्चात, 2 कि.ग्रा. आलू और 4 कि.ग्रा. टमाटर का मूल्य ₹66 पाया गया।

(ii) एम. के. नगर विद्यालय के क्रिकेट टीम के शिक्षक ने ₹3900 में 3 बल्ले और 6 गेंद खरीदे। तदन्तर उसने और 1 बल्ला और 2 गेंद ₹1300 में खरीदे।

प्रत्येक स्थिति में अज्ञात राशियाँ पहचानिए। हम देखते है कि प्रत्येक स्थिति में दो अज्ञात राशियाँ हैं।

4.1.1 हम अज्ञात परिमाण कैसे ज्ञात कर सकते है?

प्रस्तावना में, सिरी ने 3 कापियाँ और 2 पेन ₹80 में खरीदी। 1 कापी का मूल्य अथवा 1 पेन का मूल्य हम कैसे ज्ञात कर सकते है?

रुबीना और जोसेफ़ ने अनुमान लगाने का प्रयत्न किया। रुबीना ने कहा कि प्रत्येक कापी की कीमत ₹25 हो सकती है। तब तीन कापियों की कीमत ₹75 होगी और दो पेन का मूल्य ₹5 होगा तथा प्रत्येक पेन ₹2.50 का होगा।

जोसेफ को प्रतीत हुआ कि एक पेन के लिए ₹2.50 बहुत कम थे। यह कम से कम ₹16 की होनी चाहिए। तब प्रत्येक कापी की कीमत भी ₹16 होगी।

हम देख सकते है कि कापी और पेन के एक से अधिक मान संभव है ताकि उनका कुल मूल्य ₹80 होता हो। अतः हम इनका मूल्य कैसे ज्ञात कर सकते है? जिस मूल्य पर सिरी और लक्ष्मी ने उन्हे खरीदा? केवल सिरी की स्थिति का उपयोग करते हुए हम मूल्य ज्ञात नही कर सकते। हमें लक्ष्मी की स्थिति का भी उपयोग करना आवश्यक है।

4.1.2 दोनों समीकरणों को एक साथ उपयोग करना :

लक्ष्मी ने भी उसी प्रकार की कापियाँ और पेन खरीदी जैसे सिरी ने खरीदी। उसने 4 कापियाँ और 3 पेन के लिए ₹110 दिए। अतः हमारे पास दो स्थितियाँ है जो निम्नानुसार निरूपित कर सकते है:

(i) 3 कापियाँ + 2 पेन का मूल्य = ₹80.

(ii) 4 कापियाँ + 3 पेन का मूल्य = ₹110.

1 पेन और 1 कापी का मूल्य ज्ञात करने के लिए क्या इससे हमे सहायता मिलेगी?

रुबीना द्वारा कथित मूल्यों को लीजिए। यदि एक कापी का मूल्य ₹25 और 1 पेन का मूल्य ₹2.50 है तब,

4 कापियों का मूल्य : $4 \times 25 =$ ₹100 होगा।

और 3 पेन का मूल्य : $3 \times 2.50 =$ ₹7.50 होगा।

यदि रुबीना सही है तब लक्ष्मी को ₹100 + ₹7.50 = ₹107.50 देने पडते थे किन्तु उसने ₹110 दिए।

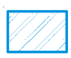
अब, जोसेफ द्वारा कथित मूल्यों को लीजिए। तब, यदि।

कापी का मूल्य ₹16 हो तब 4 कापियों का मूल्य होगा : $4 \times 16 =$ ₹64

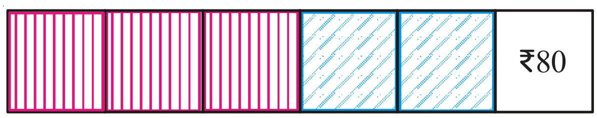
और यदि 1 पेन का मूल्य ₹16 हो तब 3 पेन का मूल्य होगा : $3 \times 16 =$ ₹ 48

यदि जोसेफ सही है तब लक्ष्मी को ₹64 + ₹48 = ₹112 देने पडते थे किन्तु यहाँ उसने जितना मूल्य चुकाया उससे अधिक है। अतः हम क्या करेंगे? कापी और पेन का उचित (exact) मूल्य हम कैसे ज्ञात करते है?

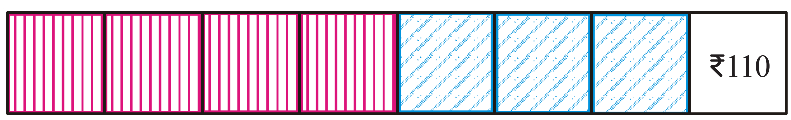
(यदि हमारे पास केवल एक समीकरण है परन्तु दो अज्ञात परिमाण (चर) है, हम बहुत से हल ज्ञात कर सकते है। अतः जब हमारे पास दो चर है, तब हमें इसका अद्वितीय (unique) हल प्राप्त करने के लिए कम से कम दो स्वतंत्र समीकरणों की आवश्यकता है। अज्ञात परिमाण ज्ञात करने का एक प्रकार, प्रतिरूप (Model) पद्धति का उपयोग है। इस पद्धति में, आयत अथवा आयत के भागों को अज्ञात परिमाण को निर्देशित करने के लिए उपयोग में लिए जाते है। प्रतिरूप पद्धति का उपयोग करते हुए प्रथम स्थिति का अवलोकन कीजिए।)

सोपान-1 : कापियों को  और पेन को  द्वारा निर्दिष्ट कीजिए।

सिरी ने 3 कापियाँ और 2 पेन ₹80 में खरीदी।

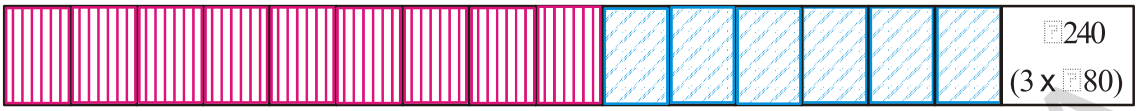


लक्ष्मी ने 4 कापियाँ और 3 पेन ₹110 में खरीदी।

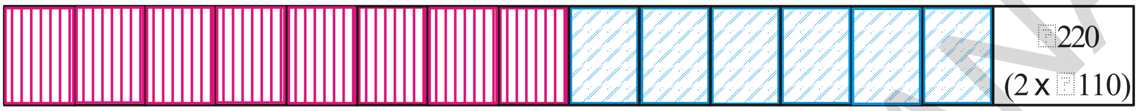


सोपान-2 : दोनो स्थितियों में, कोई एक परिमाण (मात्रा) बराबर बनाने के लिए मात्राओं को समानुपात में बढाइए अथवा घटाइए। यहाँ हम पेन की संख्या समान बनाते है।

(3 पुस्तके × 3) 9 पुस्तके (2 पेन × 3) 6 पेन



(4 पुस्तके × 2) 8 पुस्तके (3 पेन × 2) 6 पेन



सोपान 2 में, हम सरल समानुपात का अवलोकन (reasoning) करते है।

क्योंकि सिरी 3 कापियाँ और 2 पेन ₹80 में खरीदी। इसलिए 9 कापियाँ और 6 पेन के लिए:

$3 \times 3 = 9$ कापियाँ और $3 \times 2 = 6$ पेन का मूल्य होगा : $3 \times 80 =$ ₹240 (1)

इसी प्रकार, लक्ष्मी 4 कापियाँ और 3 पेन ₹110, में खरीदी। इसलिए

$2 \times 4 = 8$ कापियाँ और $2 \times 3 = 6$ पेन का मूल्य होगा : $2 \times 110 =$ ₹220 (2)

(1) और (2), तुलना करने पर, हम आसानी से 1 अधिक कापी का मूल्य बता सकते है :

₹ 240 - ₹ 220 = ₹ 20. अतः एक कापी का मूल्य ₹ 20 है।

अतः, एक कापी का मूल्य ₹20 है। सिरी 3 कापियाँ और 2 पेन ₹80 में खरीदी। क्योंकि 1 कापी का मूल्य ₹ 20 होने के कारण, 3 कापियों का मूल्य ₹ 60 होगा। अतः 2 पेन का मूल्य ₹ 80 - ₹60 = ₹20.

इसलिए 1 पेन का मूल्य ₹20 ÷ 2 = ₹10.

इन मूल्यों का उपयोग हम लक्ष्मी की स्थिति में करने का प्रयत्न करते है। 4 कापियों का मूल्य ₹80 और 3 पेन का मूल्य ₹ 30 अर्थात कुल मूल्य ₹110, होता है, जो सत्य है।

ऊपर की गई चर्चा और गणना से यह स्पष्ट है कि यथार्थ एक (अद्वितीय या unique) हल प्राप्त करने के लिए हमें कम से कम ''दो स्वतंत्र, समान चरों के रैखिक समीकरणों'' (two independent linear equations) की आवश्यकता है।

सामान्यतः, $ax + by + c = 0$ जहाँ a, b, c वास्तविक संख्याएँ है और जहाँ a अथवा b में कम से कम एक अशून्य हो, इस रूप का समीकरण x और y में ''द्वि-चरीय रैखिक समीकरण'' (Linear Equation in two variables) कहलाता है।

प्रयास कीजिए।

निम्न प्रश्नो में सही विकल्प चिन्हित कीजिए।

1. निम्न समीकरणों में कौनसा रैखिक समीकरण नहीं है?

a) $5 + 4x = y + 3$ b) $x+2y = y - x$

c) $3 - x = y^2 + 4$ d) $x + y = 0$

2. निम्न में से कौनसा एक चर में रैखिक समीकरण है?

   a) $2x + 1 = y - 3$ b) $2t - 1 = 2t + 5$

   c) $2x - 1 = x^2$ d) $x^2 - x + 1 = 0$

3. निम्न मे से कौनसी संख्या, समीकरण $2(x + 3) = 18$ के लिए हल है?

   a) 5 b) 6 c) 13 d) 21

4. समीकरण $2x - (4 - x) = 5 - x$ को संतुष्ट करनेवाला x का मान होगा।

   a) 4.5 b) 3 c) 2.25 d) 0.5

5. समीकरण $x - 4y = 5$ को :......... है

   a) हल नही b) अद्‌वितीय हल

   c) दो हल d) अनन्त हल

4.2 दो चर राशि के रैखिक समीकरणों के युग्मों का हल (Solutions of Pairs of Linear Equations in two variables)

कापियों के और पेन के परिचित उदाहरण में, हमारे पास कितने समीकरण थे? हमारे पास दो समीकरण थे अथवा दो चर राशि में रैखिक समीकरणों का युग्म था। रैखिक समीकरणों के युग्म के हल का अर्थ क्या है?

चर x और y के मूल्यों का युग्म जो एक साथ समीकरणों में से प्रत्येक को संतुष्ट करता है, रैखिक समीकरणों के युग्म का हल कहलाता है।

4.2.1 रैखिक समीकरणों के युग्म का हल ज्ञात करने की आलेखीय पद्‌धति (Graphical Method of finding solutions of a pair of Linear Equations):

द्‌वि-चरीय रैखिक समीकरणों के युग्म के लिए समाधानों की (हल) संख्या क्या होगी? क्या यह अनंत अथवा अद्‌वितीय के नहीं होंगे?

प्रारंभिक विभाग में हमने रैखिक समीकरणों का युग्म हल करने के लिए प्रतिरूप पद्‌धति का उपयोग किया। अब हम समीकरणों को हल करने के लिए आलेख का उपयोग करेंगे।

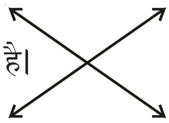
माना कि : $a_1x + b_1y + c_1 = 0, (a_1^2 + b_1^2 \neq 0)$ और $a_2x + b_2y + c_2 = 0;\ (a_2^2 + b_2^2 \neq 0)$ द्‌वि-चरीय रैखिक समीकरणों का युग्म बनता है।

द्‌वि-चरीय रैखिक समीकरण का आलेख, एक सरल रेखा रहती है। रेखा पर स्थित बिन्दु जो वास्तविक संख्याओं (x, y) के क्रमित युग्म से निर्देषांक है, समीकरण के हल रहते है। और वास्तविक संख्या (x, y) के क्रमित युग्म से निर्दिष्ट बिन्दु जो रेखा पर नहीं है, हल नहीं रहते है।

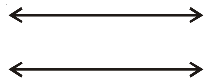
यदि एक ही समतल मे दो रेखाएँ है तो इनमे कौनसा संबंध संभव हो सकता है? इस संबंध का महत्व क्या है?

जब दो रेखाएँ एक ही समतल में खींची गई हों तब निम्न तीन स्थितियों में से केवल कोई एक स्थिति संभव है :

i) दो रेखाएँ, एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करना संभव है।



ii) दो रेखाएँ प्रतिच्छेद नही करेंगी अर्थात, वे समानान्तर है।



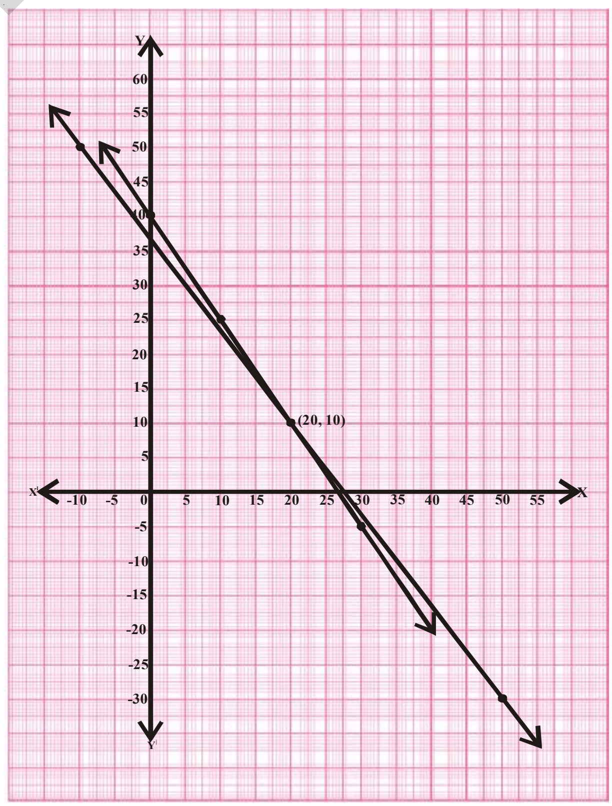
iii) दो रेखाएँ संपाती (coincident) रहना संभव है।

(वस्तुतः दोनों रेखायें समान है।)

अब हम प्रथम उदाहरण के समीकरणों को x और y के पदों में लिखते है जहाँ एक कापी का मूल्य x और एक पेन का मूल्य y है। तब समीकरण होंगे : $3x + 2y = 80$ और $4x + 3y = 110$.

समीकरण $3x + 2y = 80$ के लिए		
x	$y = \frac{80 - 3x}{2}$	(x, y)
0	$y = \frac{80 - 3(0)}{2} = 40$	(0, 40)
10	$y = \frac{80 - 3(10)}{2} = 25$	(10, 25)
20	$y = \frac{80 - 3(20)}{2} = 10$	(20, 10)
30	$y = \frac{80 - 3(30)}{2} = -5$	(30, -5)

समीकरण $4x + 3y = 110$ के लिए		
x	$y = \frac{110 - 4x}{3}$	(x, y)
-10	$y = \frac{110 - 4(-10)}{3} = 50$	(-10, 50)
20	$y = \frac{110 - 4(20)}{3} = 10$	(20, 10)
50	$y = \frac{110 - 4(50)}{3} = -30$	(50, -30)



कार्तियन समतल में ऊपर के बिन्दुओं को आलेखित करने के पश्चात, हमे पता चलता है कि दो सरल रेखाएँ बिन्दु (20, 10) पर प्रतिच्छेद करती है।

x और y के मान, समीकरणों में प्रति स्थापित करने पर हमें प्राप्त होता है: $3(20) + 2(10) = 80$ और $4(20) + 3(10) = 110$. जो दोनों समीकरणों को संतुष्ट करता है।

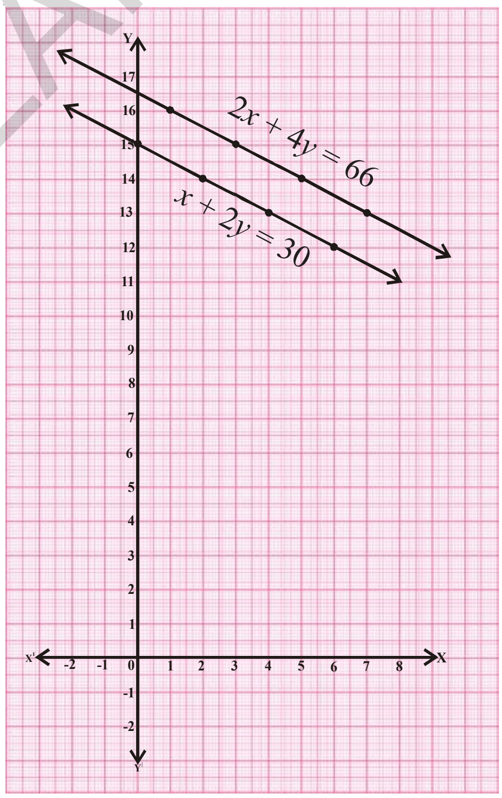
इस तरह, आलेखीय पद्धति द्वारा निर्धारित, प्रत्येक कापी का मूल्य ₹20 और प्रत्येक पेन का मूल्य ₹10 है। याद कीजिए कि प्रतिरूप पद्धति का उपयोग करते हुए हमे यही हल प्राप्त हुआ था।

क्योंकि (20, 10) यह केवल एक सामान्य बिंदु है, इस द्वितीय रैखिक समीकरणों के युग्म का केवल एक हल है। ऐसे समीकरण, रैखिक समीकरणों के सुसंगत (consistent) युग्म कहलाते है। इनका अद्वितीय हल रहता है।

अब, प्रथम उदाहरण देखिए और विचार करते हुए इस विभाग की चर्चा कीजिये। हमें एक किलो ग्राम आलू का मूल्य और एक कि.ग्रा. टमाटर का मूल्य ज्ञात करना है। माना कि 1 कि.ग्रा. आलू का मूल्य ₹x और 1 कि.ग्रा. टमाटर का मूल्य ₹y है। तब समीकरण $1x+2y=30$ और $2x+4y=66$ होंगे।

समीकरण $x + 2y = 30$ के लिए		
x	$y = \frac{30-x}{2}$	(x, y)
0	$y = \frac{30-0}{2} = 15$	(0, 15)
2	$y = \frac{30-2}{2} = 14$	(2, 14)
4	$y = \frac{30-4}{2} = 13$	(4, 13)
6	$y = \frac{30-6}{2} = 12$	(6, 12)

समीकरण $2x + 4y = 66$ के लिए		
x	$y = \frac{66-2x}{4}$	(x, y)
1	$y = \frac{66-2(1)}{4} = 16$	(1, 16)
3	$y = \frac{66-2(3)}{4} = 15$	(3, 15)
5	$y = \frac{66-2(5)}{4} = 14$	(5, 14)
7	$y = \frac{66-2(7)}{4} = 13$	(7, 13)



यहाँ, हम निरीक्षण करते हैं कि, इस स्थिति का आलेख दो समानान्तर रेखाओं द्वारा निर्देशित किया गया है। क्योंकि रेखाएँ प्रतिच्छेद नहीं करती हैं, समीकरणों का संयुक्त हल नही रहता। इसका अर्थ है कि आलू और टमाटर का मूल्य दोनों में भिन्न रहता है। यह हम वास्तविक जीवन में भी देखते हैं। हम आशा नहीं कर सकते हैं कि प्रत्येक दिन सब्जियों का मूल्य समान रहेगा। यह परिवर्तनशील रहता है। और परिवर्तन भी स्वतंत्र रहता है।

ऐसे रैखिक समीकरणों के युग्म जिनका संयुक्त हल नहीं है, रैखिक समीकरणों के असंगत (in consistent) युग्म कहलाते है।

दूसरे उदाहरण को विचार करते हुए, विभाग की चर्चा करते हैं। माना कि एक बल्ले (bat) का मूल्य ₹x और 1 गेंद मूल्य ₹y है। तब हम समीकरणों को इस प्रकार लिख सकते है: $3x + 6y = 3900$ और $x + 2y = 1300$.

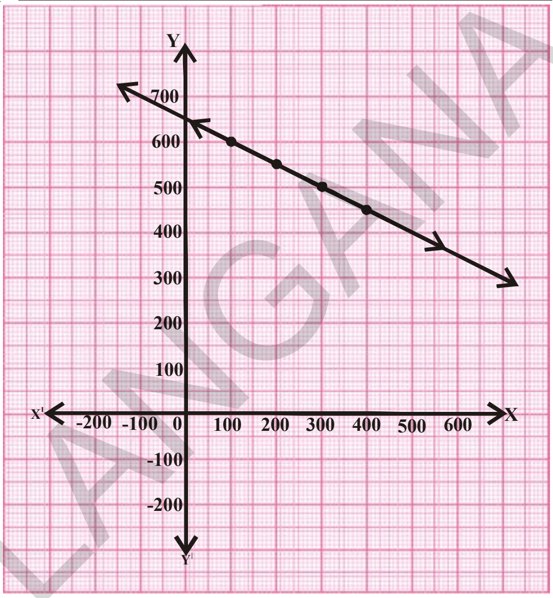
समीकरण $3x + 6y = 3900$ के लिए		
x	$y = \frac{3900-3x}{6}$	(x, y)
100	$y = \frac{3900-3(100)}{6} = 600$	(100, 600)

समीकरण $x + 2y = 1300$ के लिए		
x	$y = \frac{1300-x}{2}$	(x, y)
100	$y = \frac{1300-100}{2} = 600$	(100, 600)

200	$y = \dfrac{3900-3(200)}{6} = 550$	(200, 550)
300	$y = \dfrac{3900-3(300)}{6} = 500$	(300, 500)
400	$y = \dfrac{3900-3(400)}{6} = 450$	(400, 450)

200	$y = \dfrac{1300-200}{2} = 550$	(200, 550)
300	$y = \dfrac{1300-300}{2} = 500$	(300, 500)
400	$y = \dfrac{1300-400}{2} = 450$	(400, 450)

हम देखते हैं कि समीकरणों को ज्यामितीय रूप से संपाती (coincident) रेखाओं द्वारा दर्शाया है। यदि समीकरणों के हल, उभयनिष्ठ (common) बिन्दुओं द्वारा दिये जाते हैं, तब इस स्थिति में उभयनिष्ट बिन्दु क्या है?



आलेख से हम अवलोकन करते हैं कि रेखा पर स्थित प्रत्येक बिंदु, दोनों समीकरणों का उभयनिष्ट हल है। क्योंकि दोनों समीकरण समतुल्य है इसलिए इनके अनंत हल रहते हैं। ऐसे समीकरणों के युग्मों को, दो चरों में रैखिक समीकरणों का निर्भर **(dependent)** युग्म कहते है।

प्रयत्न कीजिए।

ऊपर दिये हुए उदाहरण में, क्या आप प्रत्येक बल्ला और गेंद का मूल्य ज्ञात कर सकते हैं?

सोचिए - चर्चा कीजिए।

क्या रैखिक समीकरणों का निर्भर युग्म हमेशा सुसंगत (consistent) रहता है? क्यों?

यह कीजिए।

1. निम्न समीकरणों को आलेख द्वारा दर्शाकर उनके हल की चर्चा किजिए।

   i) $x - 2y = 0$, $3x + 4y = 20$

   ii) $x + y = 2$, $2x + 2y = 4$

   iii) $2x - y = 4$, $4x - 2y = 6$

2. निम्न समीकरणों को आलेख द्वारा दर्शाकर उनके हल की चर्चा किजिए।
   $x + 2y - 4 = 0$ और $2x + 4y - 12 = 0$. तो इस स्थिति को ज्यामितीय रूप से निरूपित करते है।

4.2.3 समीकरणों के प्रणाली की प्रकृति और गुणांको (Coefficient) के बीच संबंध

माना कि, दो चरों में रैखिक समीकरणों के दिये हुए युग्म के गुणांक a_1, b_1, c_1 और a_2, b_2, c_2 है। तब, ऊपर के उदाहरणों में $\dfrac{a_1}{a_2}$, $\dfrac{b_1}{b_2}$ और $\dfrac{c_1}{c_2}$ के मान लिखिए और तुलना कीजिए।

रेखाओं का युग्म	$\frac{a_1}{a_2}$	$\frac{b_1}{b_2}$	$\frac{c_1}{c_2}$	अनुपातों की तुलना	बीजगणितीय विश्लेषण	आलेखिय निर्देशन	हल
1. $3x+2y-80=0$ $4x+3y-110=0$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{-80}{-110}$	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	सुसंगत और निराश्रित	प्रतिच्छेदित	एक हल
2. $1x+2y-30=0$ $2x+4y-66=0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{-30}{-66}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	असंगत	समानान्तर	हल नही
3. $3x+6y=3900$ $x+2y=1300$	$\frac{3}{1}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{3900}{1300}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	सुसंगत और निर्भर (आश्रित)	संपाती	अनंत और अनेक हल

कुछ उदाहरण देखिए :

उदाहरण -1. दिये गये समीकरणों का युग्म प्रतिच्छेदी, समानान्तर या संपाती रेखाओं को निर्देशित करता है, इसकी जाँच कीजिए। यदि समीकरण सुसंगत (consistent) हो तो हल ज्ञात कीजिए।

$2x + y - 5 = 0, \quad 3x - 2y - 4 = 0$

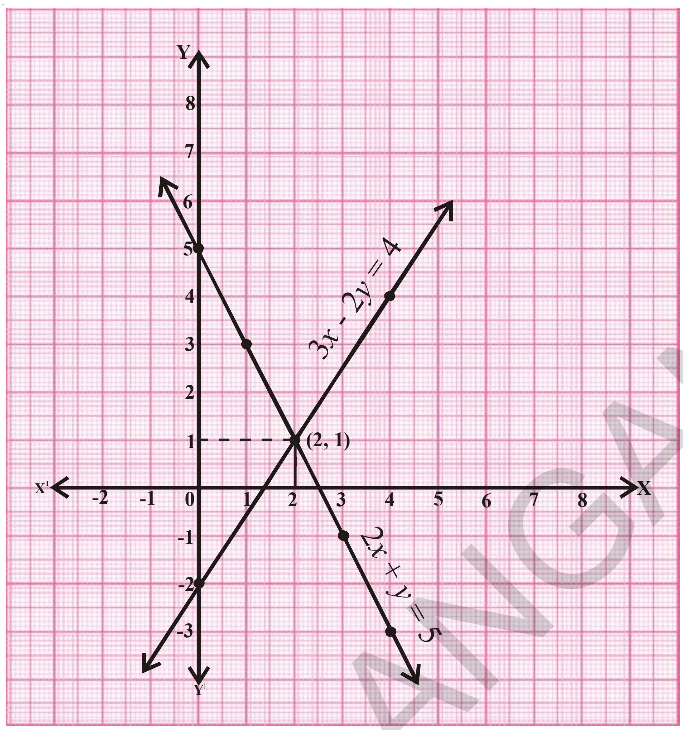
हल : $\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{3}$ $\quad \frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{-2}$ $\quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{-5}{-4}$

क्यूँकि $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, इसलिए ये प्रतिच्छेदी रेखाएँ है। अतः यह रैखिक समीकरणों का सुसंगत युग्म है।

समीकरण $2x + y = 5$ के लिए		
x	$y = 5 - 2x$	(x, y)
0	$y = 5 - 2(0) = 5$	(0, 5)
1	$y = 5 - 2(1) = 3$	(1, 3)
2	$y = 5 - 2(2) = 1$	(2, 1)
3	$y = 5 - 2(3) = -1$	(3, -1)
4	$y = 5 - 2(4) = -3$	(4, -3)

समीकरण $3x - 2y = 4$ के लिए		
x	$y = \frac{4-3x}{-2}$	(x, y)
0	$y = \frac{4-3(0)}{-2} = -2$	(0, -2)
2	$y = \frac{4-3(2)}{-2} = 1$	(2, 1)
4	$y = \frac{4-3(4)}{-2} = 4$	(4, 4)

यह समीकरणों के युग्म का अद्‌वितीय हल (2,1) है।



उदाहरण -2. निम्न समीकरणों का युग्म सुसंगत है या नहीं, इसकी जाँच कीजिए। $3x + 4y = 2$ और $6x + 8y = 4$. आलेखीय निरूपण द्‌वारा जाँच कीजिए।

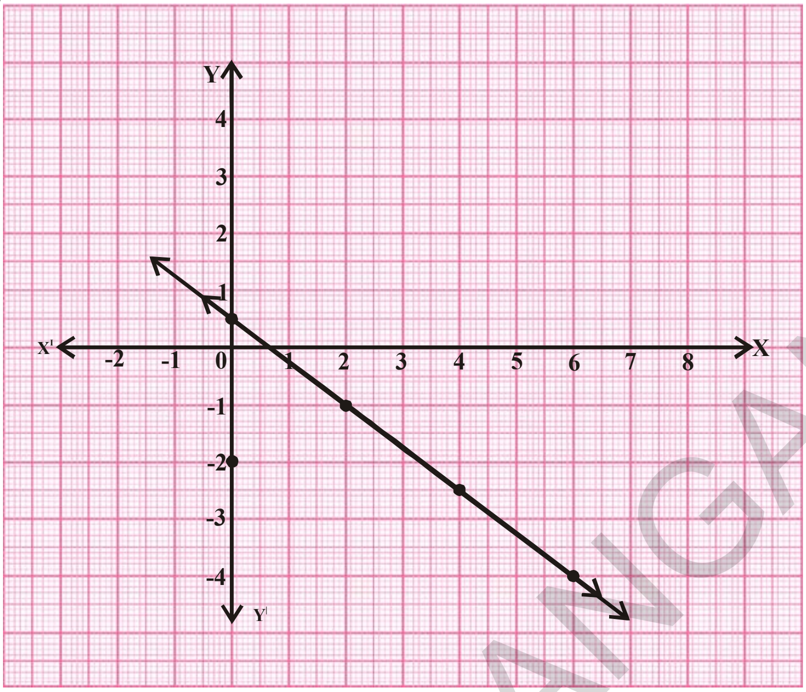
हल : $3x + 4y - 2 = 0, \quad 6x + 8y - 4 = 0$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \qquad \frac{b_1}{b_2} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \qquad \frac{c_1}{c_2} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

क्योंकि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, इसलिये, ये संपाती रेखाएँ हैं। अतः रैखिक समीकरणों का युग्म निर्भर है और इसके अनन्त हल हैं।

समीकरण $3x + 4y = 2$ के लिए		
x	$y = \frac{2-3x}{4}$	(x, y)
0	$y = \frac{2-3(0)}{4} = \frac{1}{2}$	$(0, \frac{1}{2})$
2	$y = \frac{2-3(2)}{4} = -1$	(2, -1)
4	$y = \frac{2-3(4)}{4} = -2.5$	(4, -2.5)
6	$y = \frac{2-3(6)}{4} = -4$	(6, -4)

समीकरण $6x + 8y = 4$ के लिए		
x	$y = \frac{4-6x}{8}$	(x, y)
0	$y = \frac{4-6(0)}{8} = \frac{1}{2}$	$(0, \frac{1}{2})$
2	$y = \frac{4-6(2)}{8} = -1$	(2, -1)
4	$y = \frac{4-6(4)}{8} = -2.5$	(4, -2.5)
6	$y = \frac{4-6(6)}{8} = -4$	(6, -4)



उदाहरण -3. समीकरण 2x-3y = 5 और 4x-6y = 15 सुसंगत हैं या नहीं इसकी जाँच कीजिए। आलेखीय निरूपण द्वारा भी जाँच कीजिए।

हल : 4x-6y - 15 = 0 , 2x-3y - 5 = 0

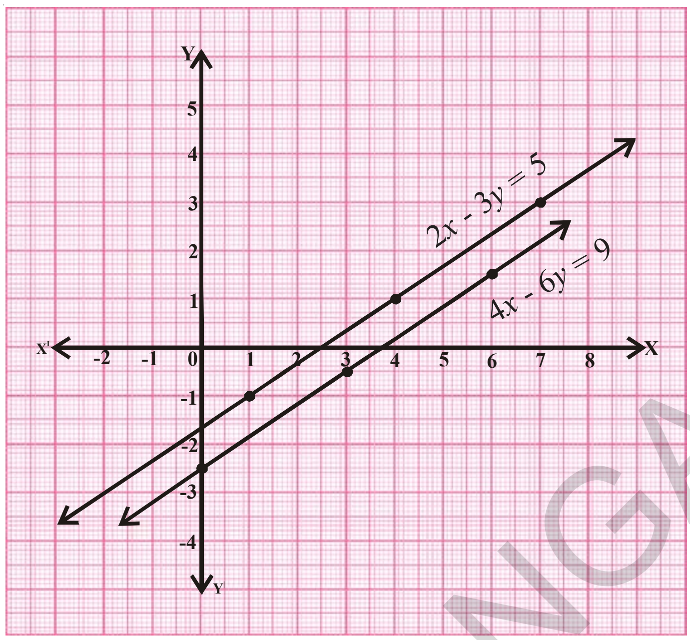
$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1} \qquad \frac{b_1}{b_2} = \frac{-6}{-3} = \frac{2}{1}$$

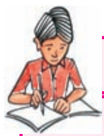
$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{-15}{-5} = \frac{3}{1} \qquad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

अतः, समीकरण असंगत (in consistent) है और इसका आलेख, समानान्तर रेखाओं का रहता है।

समीकरण **4x - 6y = 15** के लिए		
x	$y = \frac{15-4x}{-6}$	(x, y)
0	$y = \frac{15-0}{-6} = \frac{-5}{2}$	(0, -2.5)
3	$y = \frac{15-4(3)}{-6} = \frac{-1}{2}$	(3, -0.5)
6	$y = \frac{15-4(6)}{-6} = \frac{3}{2}$	(6, 1.5)

समीकरण **2x - 3y = 5** के लिए		
x	$y = \frac{5-2x}{-3}$	(x, y)
1	$y = \frac{5-2(1)}{-3} = -1$	(1, -1)
4	$y = \frac{5-2(4)}{-3} = 1$	(4, 1)
7	$y = \frac{5-2(7)}{-3} = 3$	(7, 3)





यह कीजिए।

दिये गये समीकरणों की तालिका में प्रत्येक को यह देखने के लिए जाँच कीजिए कि उनके अद्‌वितीय हल, अनन्त हल है अथवा हल नहीं हैं। इन्हें आलेख द्‌वारा हल कीजिए।

(i)	(ii)	(iii)
$2x+3y = 1$	$x + 2y = 6$	$3x + 2y = 6$
$3x-y = 7$	$2x + 4y = 12$	$6x + 4y = 18$

प्रयत्न कीजिए।

1. 'p' के किस मान के लिए, निम्न समीकरणों के युग्म का अद्‌वितीय हल रहता है?
   $2x + py = - 5$ और $3x + 3y = - 6$
2. 'k' का मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए समीकरणों का युग्म $2x - ky + 3 = 0$, $4x + 6y - 5 = 0$ समानान्तर रेखाओं का निरूपण करता है।
3. 'k' के किस मान के लिए, $3x + 4y + 2 = 0$ और $9x + 12y + k = 0$ समीकरणों का युग्म, संपाती रेखाओं का निरूपण करता है?
4. 'p' के किस मान के लिए निम्न रैखिक समीकरणों को युग्म के अनंत हल रहते है?
   $px + 3y - (p - 3) = 0$, $12x + py - p = 0$

और कुछ उदाहरणों को देखिए।

उदाहरण-4. एक बगीचे में कुछ भौंरे और फूल हैं। यदि प्रत्येक फूल पर एक भौंरा बैठा हो तब एक फूल खाली रहता है। भौरों की संख्या और फूलों की संख्या बताइए।

हल : माना कि भौरों की संख्या $= x$ और

फूलों की संख्या $= y$

यदि एक भौंरा प्रत्येक फूल पर बैठता है तो एक फूल खाली बचता है। अतः, $x = y + 1$

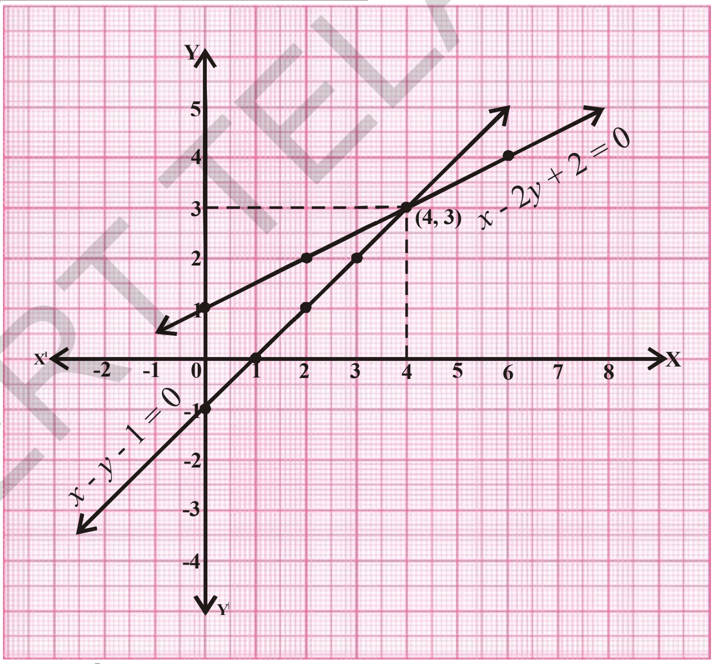
अथवा $x - y - 1 = 0$ ... (1)

यदि दो भौंरे प्रत्येक फूल पर बैठे तो 1 फूल खाली रहता है। अतः, $x = 2(y - 1)$

अथवा $x - 2y + 2 = 0$ ... (2)

समीकरण $x - y - 1 = 0$ के लिए		
x	$y = x - 1$	(x, y)
0	$y = 0 - 1 = -1$	(0, -1)
1	$y = 1 - 1 = 0$	(1, 0)
2	$y = 2 - 1 = 1$	(2, 1)
3	$y = 3 - 1 = 2$	(3, 2)
4	$y = 4 - 1 = 3$	(4, 3)

समीकरण $x - 2y + 2 = 0$ के लिए		
x	$y = \frac{x+2}{2}$	(x, y)
0	$y = \frac{0+2}{2} = 1$	(0, 1)
2	$y = \frac{2+2}{2} = 2$	(2, 2)
4	$y = \frac{4+2}{2} = 3$	(4, 3)
6	$y = \frac{6+2}{2} = 4$	(6, 4)



इसलिए, 4 भौंरे और 3 फूल है।

उदाहरण-5. एक आयताकार भूखण्ड का परिमाप 32 मी. है। यदि इसकी लम्बाई 2 मी. से बढाई जाये और चौडाई 1 मी. कम कर दी जाये, तब भूखण्ड का क्षेत्रफल समान रहता है। भूखण्ड की लम्बाई और चौडाई ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि आयताकार भूखण्ड की लम्बाई और चौडाई क्रमशः l और b है।

क्षेत्रफल $= lb$ और परिमाप $= 2(l + b) = 32$ मी.

$l + b = 16$ अथवा $l + b - 16 = 0$ ... (1)

जब लम्बाई 2 मी. से बढाई जाए तो नई लम्बाई $(l+2)$ होगी। और चौडाई 1 मी. से कम कर दी जाये तो चौडाई $(b - 1)$

तब, क्षेत्रफल $= (l+2)(b-1)$

क्योंकि क्षेत्रफल में कोई परिवर्तन नहीं होता है।

$(l+2)(b-1) = lb$

$lb - l + 2b - 2 = lb$ अथवा $lb - lb = l - 2b + 2$

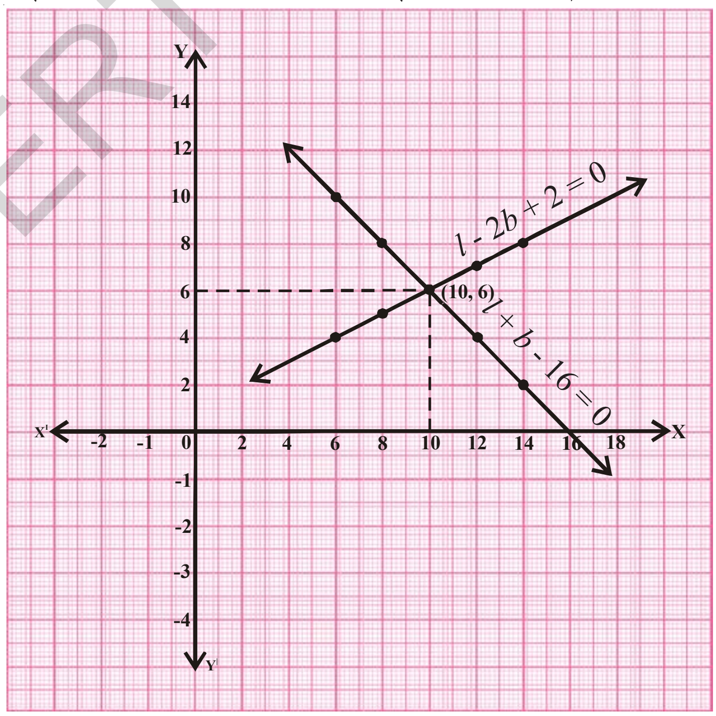
$l - 2b + 2 = 0$ ... (2)

समीकरण $l + b - 16 = 0$ के लिए		
l	$b = 16 - l$	(l, b)
6	$b = 16 - 6 = 10$	(6, 10)
8	$b = 16 - 8 = 8$	(8, 8)
10	$b = 16 - 10 = 6$	(10, 6)
12	$b = 16 - 12 = 4$	(12, 4)
14	$b = 16 - 14 = 2$	(14, 2)

समीकरण $l - 2b + 2 = 0$ के लिए		
l	$b = \frac{l+2}{2}$	(l, b)
6	$b = \frac{6+2}{2} = 4$	(6, 4)
8	$b = \frac{8+2}{2} = 5$	(8, 5)
10	$b = \frac{10+2}{2} = 6$	(10, 6)
12	$b = \frac{12+2}{2} = 7$	(12, 7)
14	$b = \frac{14+2}{2} = 8$	(14, 8)

अतः, भूखण्ड की मूल लम्बाई 10 मी. है और इसकी चौडाई 6 मी. है।

X-अक्ष पर लम्बाई के माप और Y- अक्ष पर चौडाई के माप लेकर, हमें निम्न आलेख प्राप्त होता है।



अभ्यास - 4.1

1. $\frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1}{b_2}, \frac{c_1}{c_2}$, अनुपातों की तुलना करते हुए, निम्न रैखिक समीकरणों के युग्मों द्वारा निरूपित रेखाएँ, किसी बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती हैं या समानान्तर हैं अथवा संपाती हैं, यह ज्ञात कीजिए।

   a) $5x - 4y + 8 = 0$, $7x + 6y - 9 = 0$
   b) $9x + 3y + 12 = 0$, $18x + 6y + 24 = 0$
   c) $6x - 3y + 10 = 0$, $2x - y + 9 = 0$

2. निम्न समीकरण सुसंगत और निर्भर सुसंगत और निर्भर नही रहने वाले और असंगत है इसकी जाँच किजिए और आलेख द्वारा हल किजिए।

   a) $3x + 2y = 5$, $2x - 3y = 7$
   b) $2x - 3y = 8$, $4x - 6y = 9$
   c) $\frac{3}{2}x + \frac{5}{3}y = 7$, $9x - 10y = 12$
   d) $5x - 3y = 11$, $-10x + 6y = -22$
   e) $\frac{4}{3}x + 2y = 8$, $2x + 3y = 12$
   f) $x + y = 5$, $2x + 2y = 10$
   g) $x - y = 8$, $3x - 3y = 16$
   h) $2x + y - 6 = 0$, $4x - 2y - 4 = 0$
   i) $2x - 2y - 2 = 0$, $4x - 4y - 5 = 0$

3. नेहा कुछ पैंट और स्कर्ट खरीदने के लिए एक 'दुकान' में गई। जब उसके दोस्त ने उसे पूछा कि उसने प्रत्येक कितने खरीदे तब उसने उत्तर दिया, ''स्कर्ट्स की संख्या, खरीदे हुए पैंट की संख्या की दुगुने से दो कम हैं। तथा स्कर्ट्स की संख्या, खरीदे हुए पैंट की संख्या के चार गुणा से चार कम हैं।'' नेहा ने कितने पैंट और स्कर्ट खरीदे यह जानने के लिए उसके दोस्त की सहायता कीजिए।

4. 10 वीं कक्षा के 10 छात्रों ने गणित की कूट प्रश्नावली (quiz) में भाग लिया। यदि लड़कियों की संख्या लडकों की संख्या से 4 अधिक है तो कूट प्रश्नावली में भाग लिए हुए लडकों की संख्या और लड़कियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

5. 5 पेन्सिल और 7 पेन का कुल मूल्य ₹50 है जबकि 7 पेन्सिल और 5 पेन का कुल मूल्य ₹46 है। एक पेन का मूल्य और 1 पेन्सिल का मूल्य ज्ञात कीजिए।

6. एक आयताकार बगीचे की लम्बाई, उसकी चौडाई से 4 मी. अधिक है। और परिमाप का आधा भाग 36 मी. है। बगीचे का माप (dimensions) ज्ञात कीजिए।

7. हमारे पास रैखिक समीकरण $2x + 3y - 8 = 0$ है। एक दूसरा द्वि-चरीय रैखिक समीकरण इस प्रकार लिखिए कि बने हुए युग्म का आलेखीय निरूपण, प्रतिच्छेदी रेखाएँ हो।

   अब, और दो रैखिक समीकरण इस प्रकार के लिखिए कि दिए हुए समीकरण के साथ एक से ''समानान्तर रेखाओं'' का युग्म बने और दूसरे के साथ ''संपाती रेखाएँ'' बन जाए।

8. यदि एक आयत की लम्बाई 5 इकाई से कम की जाये और चौडाई 2 इकाइयों से बढाई जाए तो इसको क्षेत्रफल में 80 वर्ग इकाई की कमी होती है। यदि हम इसकी लम्बाई में 10 इकाई से बढोतरी की और चौडाई को 5 इकाई से कम कर दी तो क्षेत्रफल में 50 वर्ग इकाई की बढोतरी होगी। आयत की लम्बाई और चौडाई ज्ञात कीजिए।
9. 10 वीं कक्षा में, यदि प्रत्येक बेंच (bench) पर 3 छात्र बैठते हैं, तो एक छात्र के लिए स्थान उपलब्ध नहीं रहता है। यदि एक बेंच पर 4 छात्र बैठते हैं तो एक तख्त खाली रहता है। उस कक्षा में छात्रों की संख्या और तख्तों की संख्या ज्ञात कीजिए।

4.3 रैखिक समीकरणों के युग्म के लिए हल ज्ञात करने की बीजगणितीय पद्धतियाँ

(Algebraic Methods of Finding the solutions for a pair of Linear Equations) :

हमने रैखिक समीकरणों का युग्म आलेख द्वारा कैसे हल करते हैं, सीखा है। परन्तु, आलेख पद्धति ऐसी स्थितियों में सुविधाजनक नहीं रहती जहाँ हल को निरूपित करने वाले बिन्दु के निर्देशांक पूर्णांक नहीं होते। उदाहरण के लिए, जब हल $(\sqrt{3}, 2\sqrt{7})$, $(-1.75, 3.3)$, $(\frac{4}{13}, \frac{1}{19})$ आदि के रूप में होता है। ऐसे निर्देशांक पढते समय, गलतियाँ होने की संभावना अधिक रहती है। क्या कोई वैकल्पिक पद्धति, हल ज्ञात करने के लिए है? ऐसी विविध बीजगणितीय पद्धतियाँ है, जिसकी अब हम चर्चा करेंगे।

4.3.1 प्रतिस्थापना (Substitution) पद्धति

यह पद्धति द्वि-चरीय रैखिक समीकरणों का युग्म हल करने के लिए उपयुक्त है जहाँ एक चर, दूसरे चर के पदों में सरलता पूर्वक लिख सकते है। इस पद्धति को समझने के लिए इसे क्रम से देखेंगे।

सोपान-1 : किसी एक समीकरण में, एक चर को, दूसरे चर के पदों में व्यक्त कीजिए। जैसे y को x के पदों में,

सोपान-2 : सोपान - 1 में y का प्राप्त मान, दूसरे समीकरण में प्रतिस्थापित कीजिए।

सोपान-3 : सोपान - 2 में प्राप्त समीकरण का सरलीकरन कीजिए और x का मान ज्ञात कीजिए।

सोपान-4 : सोपान - 3 में प्राप्त x का मान, किसी भी समीकरण में प्रतिस्थापित कीजिए और इसे y के लिए हल कीजिए।

सोपान-5 : प्राप्त हल, दोनों मूल समीकरणों में x और y के मान प्रतिस्थापित करते हुए जाँच कीजिए।

उदाहरण-6. प्रतिस्थापन पद्धति द्वारा दिए हुए समीकरणों का युग्म हल कीजिए।

$2x - y = 5, \quad 3x + 2y = 11$

हल :

$2x - y = 5 \qquad (1)$

$3x + 2y = 11 \qquad (2)$

समीकरण (1) इस प्रकार लिख सकते है।

$y = 2x - 5$

समीकरण (2) में प्रतिस्थापन करने पर हमें प्राप्त होता है।

$3x + 2(2x - 5) = 11$

$3x + 4x - 10 = 11$

$7x = 11 + 10 = 21$

$x = 21/7 = 3.$

समीकरण 1 में $x = 3$ रखने पर

$2(3) - y = 5$

$y = 6 - 5 = 1$

समीकरण (2) में x और y के मानों को प्रतिस्थापित करने पर, हमें प्राप्त होता है $3(3) + 2(1) = 9 + 2 = 11$ यह मान समीकरण (2) को संतुष्ट करता है। $x = 3$ और $y = 1$ द्वारा संतुष्ट होते हैं।
इसलिए, अपेक्षित हल $x = 3$ और $y = 1$ है।

यह कीजिए।

प्रतिस्थापन पद्धति द्वारा समीकरणों का प्रत्येक युग्म हल कीजिए।

1) $3x - 5y = -1$, $x - y = -1$

2) $x + 2y = -1$, $2x - 3y = 12$

3) $2x + 3y = 9$, $3x + 4y = 5$

4) $x + \frac{6}{y} = 6$, $3x - \frac{8}{y} = 5$

5) $0.2x + 0.3y = 13$, $0.4x + 0.5y = 2.3$

6) $\sqrt{2}x + \sqrt{3}y = 0$, $\sqrt{3}x - \sqrt{8}y = 0$

4.3.2 विलोपन (Elimination) पद्धति

इस पद्धति में, सर्वप्रथम हम किसी एक चर के गुणांकों को समान करते हुए, उसका लोप करते है. इससे हमें एक समीकरण प्राप्त होता है जो दूसरे का मान ज्ञात करने के लिए हल किया जा सकता है। इस पद्धति को समझने के लिए इसे क्रम से देखिए।

सोपान -1 : दोनों समीकरणों को $ax + by = c$ के रूप में लिखिए।

सोपान -2 : किसी एक चर 'x' के गुणांक, प्रत्येक समीकरण को किसी उचित वास्तविक संख्या से गुणा करके, संख्या में बराबर बनाइए।

सोपान-3 : यदि दोनों समीकरणों में चर, जिसे लुप्त करना है, समान चिन्हों वाले हो तब दोनो समीकरणों को घटाइए जिससे एक चर का समीकरण प्राप्त होता है। यदि उनके चिन्ह विपरीत हो तब उनका योग कीजिए।

सोपान -4 : शेष चर के लिए समीकरण हल कीजिए।

सोपान -5 : इस चर का मान किसी भी मूल समीकरण में प्रतिस्थापित कीजिए और लुप्त हुए चर का मान ज्ञात कीजिए।

उदाहरण-7 विलोपन पद्धति द्वारा निम्न रैखिक समीकरणों का युग्म हल कीजिए।

$3x + 2y = 11,$ $\qquad$ $2x + 3y = 4$

हल: $3x + 2y = 11$ (1)

$2x + 3y = 4$ (2)

दिए हुए समीकरणों से अब हम 'y' का लोप करते है।

दिए हुए समीकरणों में 'y' के गुणांक 2 और 3 है। 2 और 3 का ल.स.अ 6 है। अतः, समीकरण (1) को 3 से और समीकरण (2) को 2 से गुणा करते है।

समीकरण (1) × 3 $\quad 9x + \cancel{6y} = 33$

समीकरण (2) × 2 $\quad 4x + \cancel{6y} = 8$

$\underline{(-)\quad(-)\quad(-)}$

$5x = 25$

$$x = \frac{25}{5} = 5$$

समीकरण (1) में $x = 5$, प्रतिस्थापित करने पर, $3(5) + 2y = 11$

$$2y = 11 - 15 = -4 \Rightarrow y = \frac{-4}{2} = -2$$

इसलिए, अपेक्षित हल $x = 5, y = -2$ है।

यह कीजिए।

प्रतिस्थापन पद्धति द्वारा निम्न समीकरणों के युग्मों में से प्रत्येक को हल कीजिए।

1. $8x + 5y = 9$
   $3x + 2y = 4$
2. $2x + 3y = 8$
   $4x + 6y = 7$
3. $3x + 4y = 25$
   $5x - 6y = -9$

प्रयत्न कीजिए।

दिए हुए रैखिक समीकरणों के युग्म को हल कीजिए।

$(a - b)x + (a + b)y = a^2 - 2ab - b^2$

$(a + b)(x + y) = a^2 + b^2$

कुछ और उदाहरण देखते हैं :

उदाहरण-8. रुबीना बैंक में से ₹2000 निकालने के लिए गई। उसने रोकड़िये (cashier) से नकदी रकम केवल ₹50 और ₹100 के नोट देने के लिए कहा। उसे कुल 25 नोट मिले। क्या आप बता सकते हैं कि उसे ₹50 और ₹100 के कितने नोट प्राप्त हुए?

हल : माना कि, ₹50 के नोटों की संख्या x है और

₹100 के नोटों की संख्या y है, तब $x + y = 25$ (1)

और $50x + 100y = 2000$ (2)

कविता ने प्रतिस्थापन पद्धति का उपयोग किया।

समीकरण (1) से, $x = 25 - y$

समीकरण (2) में रखने पर, $50(25 - y) + 100y = 2000$

$1250 - 50y + 100y = 2000$

$50y = 2000 - 1250 = 750$

$$y = \frac{750}{50} = 15$$

$x = 25 - 15 = 10$

अतः, रुबीना को ₹50 के 10 नोट और ₹100 के 15 नोट प्राप्त हुए।

श्वेता ने इसका हल ज्ञात करने के लिए विलोपन पद्धति का उपयोग किया।

समीकरणों में,, x के गुणांक क्रमशः 1 और 50 है। अतः

समीकरण (1) × 50 : $50x + 50y = 1250$

समीकरण (2) × 1 : $50x + 100y = 2000$ (समान चिन्ह, इसलिए घटाइए)

(-) (-) (-)

$-50y = -750$

$$y = \frac{-750}{-50} = 15$$

समीकरण (1) में y का मान रखने पर, $x + 15 = 25$

$x = 25 - 15 = 10$

अतः, रुबीना को ₹50 के 10 नोट और ₹100 के 15 नोट प्राप्त हुए।

उदाहरण-9. एक प्रतियोगिता परीक्षा में, प्रत्येक सही उत्तर के लिए 3 अंक प्रदान करना है और प्रत्येक गलत उत्तर के लिए 1 अंक घटाना है। इस परीक्षा में मधु को 40 अंक प्राप्त हुए। यदि प्रत्येक सही उत्तर के लिए 4 अंक प्रदान करते हैं और प्रत्येक गलत उत्तर के लिए 2 अंक काटते हैं, तो मधु को 50 अंक प्राप्त होते हैं। परीक्षा में कुल कितने प्रश्न हैं? (मधु ने सभी प्रश्न हल किए।))

हल : माना कि, सही उत्तरों की संख्या x है और गलत उत्तरों की संख्या y है।

जब प्रत्येक सही उत्तर के लिए 3 अंक दिये गये और प्रत्येक गलत उत्तर के लिए 1 अंक काटा गया, तब उसे 40 अंक प्राप्त हुए।

अतः $3x - y = 40$ (1)

जब उसके अंक 50 होते हैं तब प्रत्येक सही उत्तर के लिए 4 अंक दिये जाते हैं और प्रत्येक गलत उत्तर के लिए 2 अंक काटे जाते हैं।

इसलिए $4x - 2y = 50$ (2)

प्रतिस्थापना पद्धति :

समीकरण (1) से, $y = 3x - 40$

समीकरण (2) में प्रतिस्थापित करने पर $4x - 2(3x - 40) = 50$

$$4x - 6x + 80 = 50$$

$$-2x = 50 - 80 = -30$$

$$x = \frac{-30}{-2} = 15$$

समीकरण (1) में x का मान रखने पर

$$3(15) - y = 40$$

$$45 - y = 40$$

$$y = 45 - 40 = 5$$

$\therefore$ प्रश्नों की कुल संख्या $= 15 + 5 = 20$

यह कीजिए

ऊपर दिया गया उदाहरण-9 हल करने के लिए विलोपन पद्धति का उपयोग कीजिए।

उदाहरण-10. मेरी ने उसकी बेटी से कहा, ''7 वर्ष पूर्व, मेरी आयु, आपकी उस समय की आयु के 7 गुणा थी। और अब से तीन वर्ष पश्चात, मेरी आयु आपकी आयु के तीन गुणा होगी।'' मेरी और उसकी बेटी की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि मेरी की वर्तमान आयु x वर्ष है और

उसकी बेटी की वर्तमान आयु $x - 7$ और बेटी की आयु $y - 7$ थी।

$$x - 7 = 7(y - 7)$$

$$x - 7 = 7y - 49$$

$$x - 7y + 42 = 0 \qquad (1)$$

तीन वर्ष पश्चात, मेरी की आयु $(x + 3)$ और बेटी की आयु $(y + 3)$ होगी।

$$x + 3 = 3(y + 3)$$

$$x + 3 = 3y + 9$$

$$x - 3y - 6 = 0 \qquad (2)$$

विलोपन पद्धति

समीकरण (1) $\cancel{x} - 7y = -42$

समीकरण (2) $\cancel{x} - 3y = 6$

$\underline{(-) \quad (+) \quad (-)}$ x के समान चिन्ह, अतः घटाइए।

$-4y = -48$

$$y = \frac{-48}{-4} = 12$$

y का मान समीकरण (2) में प्रतिस्थापित कीजिए।

x-3 (12) - 6 = 0

x = 36 + 6 = 42

इसलिए, मेरी की वर्तमान आयु 42 वर्ष और उसकी बेटी की आयु 12 वर्ष है।

यह कीजिए।

उदाहरण-10 प्रतिस्थापन पद्धति से हल कीजिए।

उदाहरण-11. एक प्रकाशक, पाठ्य पुस्तक तैयार करने की योजना बना रहा है। स्थायी मूल्य (पुनरावलोकन, संपादन, अक्षर योजना, इत्यादि) ₹3,20,000 है। इसके अतिरिक्त उसने पुस्तक तैयार करने में ₹31.25 प्रति पुस्तक खर्च किये। थोक मूल्य (प्रकाशक द्वारा प्राप्त रकम) (whole sale price) प्रति पुस्तक ₹43.75 बेचना चाहिए जिससे बिना हानि-लाभ के व्यापार हो (to break even) अर्थात उत्पाद मूल्य और आमदनी (revenue) बराबर हो?

वह बिंदु जो दर्शाता है कि आपको कितनी राशी अर्जित करनी है, जो उत्पादन के समान है, वह लाभ-हानि की आमदनी कहलाती है।

हल : प्रकाशक बिना हानि-लाभ के व्यापार करता है अर्थात लागत और प्राप्त बराबर रहती है। यदि छपी हुई और विक्रय की गई पुस्तकों की संख्या x है और बिना लाभ-हानि की आमदनी (break even point) y है तब प्रकाशक के लिए मूल्य और आमदनी के समीकरण होंगे :

लागत समीकरण दिया जाता है: $y = 320000 + 31.25x$ (1)

प्राप्त समीकरण दिया जाता है: $y = 43.75x$ (2)

प्रथम समीकरण में y के प्रतिस्थापन के लिए समीकरण (2) का उपयोग करते हुए,

$43.75x = 3,20,000 + 31.25x$

$$12.5x = 3,20,000 \;=\; x = \frac{3,20,000}{12.5} = 25,600$$

इस तरह, प्रकाशक का बिना हानि-लाभ का व्यापार होगा जब उसने 25,600 पुस्तकों की छपाई की और उनका विक्रय किया।

अभ्यास - 4.2

निम्न प्रश्नों में प्रत्येक के लिए रैखिक समीकरणों का युग्म बनाइए और इनका हल ज्ञात कीजिए।

1. दो व्यक्तियों की आय का अनुपात 9 : 7 है और उनके व्यय का अनुपात 4 : 3 है। यदि प्रत्येक व्यक्ति प्रतिमाह ₹2000 की बचत करता है, तो उनकी प्रतिमाह आय ज्ञात कीजिए।
2. कोई दो अंको की संख्या है। इनके अंकों का स्थान बदलने पर प्राप्त संख्या का योग 66 है। यदि संख्या के अंको में अन्तर 2 हो तो वह संख्या ज्ञात कीजिए। ऐसी कितनी संख्याएँ है?

3. दो अनुपूरक (Supplementary) कोणों में बडा कोण, छोटे कोण से 18° अधिक है। कोण ज्ञात कीजिए।
4. हैदराबाद में, तय की गई दूरी के लिए किराये (charges) में दो घटक है। निश्चित किराया तथा प्रति किलोमीटर का किराया। कि.मी. दूरी के लिए किराया ₹220 दिया। 15 कि.मी. यात्रा के लिए किराया ₹310 दिया गया है।
   i. निश्चित (fixed) किराया और प्रति कि.मी. किराया क्या है?
   ii. एक व्यक्ति को 25 कि.मी. दूरी तय करने के लिए कितना किराया देना होगा?
5. एक भिन्न के अंश और हर दोनों में यदि 1 मिलाया जाए तो भिन्न $\frac{4}{5}$ बनता है। और यदि अंश और हर दोनों से यदि 5 घटाया गया तो भिन्न $\frac{1}{2}$ बनता है। भिन्न क्या है?
6. राजपथ (highway) पर दो स्थान A और B एक दूसरे से 100 कि.मी. दूरी पर है। एक ही समय पर, असमान वेग से एक कार A से और दूसरी कार B से प्रारंभ होती है। यदि दोनों कार एक ही दिशा में जा रहे हैं तो, वे 5 घण्टे में मिलती है। दोनों कार के वेग बताइए।
7. दो कोण, पूरक (complementary) हैं। बडा कोण, छोटे कोण के माप के दुगने से 3° कम है। प्रत्येक कोण के माप ज्ञात कीजिए।
8. बीजगणित के पाठ्यपुस्तक में कुल 1382 पृष्ठ हैं। यह दो भागों में हो गया। पुस्तक के दूसरे भाग में, प्रथम भाग से 64 पृष्ठ अधिक है। पुस्तक के प्रत्येक भाग में पृष्ठों की संख्या कितनी होगी?
9. एक रसायनज्ञ (chemist) के पास भंडार में हायड्रोक्लोरिक आम्ल के दो घोल (solution) हैं। एक 50% घोल है और दूसरा 80% घोल है। 68% घोल का 100 मि.ली. प्राप्त करने के लिए प्रत्येक का कितना घोल उपयोग में लेना चाहिए?
10. मान लीजिए, आप को ₹12000 निवेश करना है। आपको इसमें से कुछ धनराशि 10% से और शेष 15% से निवेश करना है। कुल निवेशित धनराशी पर 12% लाभ पाने के लिए आपको प्रत्येक दर से कितना धन निवेश करना चाहिए?

4.4 समीकरण जो द्विचरीय रैखिक समीकरणों के युग्म में लघुकृत होते हैं (Equations Reducible to a Pair of Linear Equations in Two Variables) :

अब हम समीकरणों के युग्म के हल की चर्चा करेंगे जो रैखिक नहीं है परन्तु उचित प्रतिस्थापन द्वारा उन्हे रैखिक समीकरणों में लघुकृत कर सकते है।

उदाहरण-12. निम्न समीकरणों का युग्म हल कीजिए।
$$\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=13$$
$$\frac{5}{x}-\frac{4}{y}=-2$$

हल : दिये हुए समीकरणों के युग्म को ध्यान से देखिए। ये रैखिक समीकरण नहीं है। (क्यों?)

$$2\left(\frac{1}{x}\right)+3\left(\frac{1}{y}\right)=13 \qquad (1)$$

$$5\left(\frac{1}{x}\right)-4\left(\frac{1}{y}\right)=-2 \qquad (2)$$

यदि हम $\frac{1}{x}=p$ और $\frac{1}{y}=q$, प्रतिस्थापित करते है, तो हमें निम्न रैखिक समीकरणों का युग्म प्राप्त होता है:

$$2p+3q=13 \qquad (3)$$

$$5p-4q=-2 \qquad (4)$$

q के गुणांक 3 और 4 हैं और उनका ल.स.अ. 12 है। विलोपन पद्धति का उपयोग करते हुये,

समीकरण (3) × 4 $\quad 8p+12q=52$

समीकरण (4) × 3 $\quad \underline{15p-12q=-6}$ ('q' के पदों के विपरीत चिन्ह है, अतः हम दो समीकरणों का योग करते है।)

$$23p=46$$

$$p=\frac{46}{23}=2$$

p का मान समीकरण (3) में रखने पर

$$2(2)+3q=13$$

$$3q=13-4=9$$

$$q=\frac{9}{3}=3$$

किन्तु, $\frac{1}{x}=p=2 \qquad \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{y}=q=3 \qquad \Rightarrow y=\frac{1}{3}$

उदाहरण-13. कविता ने उसके घर में और 2 कमरे बनाने का निश्चय किया। उसने मजदुर तथा समय के बारे में पूछताछ की। उसे पता चला कि 6 पुरुष और 8 स्त्रियाँ यह कार्य 14 दिनों में पूर्ण कर सकते है। किन्तु वह इस कार्य को केवल 10 दिनों में पूर्ण करना चाहती है। जब उसने दुसरी जगह पूछताछ की, उसे बताया गया कि 8 पुरूष और 12 स्त्रियाँ इस कार्य को 10 दिन में पूर्ण कर सकते हैं। ज्ञात कीजिए कि यदि इस कार्य को केवल 1 पुरुष अथवा 1 स्त्री अकेले कितने दिनों में पूर्ण कर सकते हैं?

हल : मान लीजिए, एक आदमी द्वारा कार्य पूर्ण करने के लिए लिया गया समय $= x$ दिन।

एक पुरूष द्वारा 1 दिन में किया हुआ कार्य $= \frac{1}{x}$

माना कि 1 स्त्री द्वारा कार्य पूर्ण करने के लिये लिया गया समय $= y$ दिन

1 स्त्रि द्वारा 1 दिन में किया गया कार्य $= \frac{1}{y}$

अब, 8 पुरूष और 12 स्त्रियाँ कार्य को 10 दिन में पूर्ण कर सकते हैं।

अत:, 8 पुरूष द्वारा 1 दिन में किया गया कार्य $= \frac{1}{10}$ (1)

और 8 पुरूष द्वारा 1 दिन में किया गया कार्य $8 \times \frac{1}{x}$. $= \frac{8}{x}$

इसी तरह, 12 स्त्रियों द्वारा 1 दिन में किया गया कार्य $12 \times \frac{1}{y} = \frac{12}{y}$

1 दिन में 8 पुरूष और 12 स्त्रियों द्वारा किया गया कार्य $= \frac{8}{x} + \frac{12}{y}$ (2)

समीकरण (1) और (2) को समीकृत (equating) करने पर, $\left(\frac{8}{x} + \frac{12}{y}\right) = \frac{1}{10}$

$$10\left(\frac{8}{x} + \frac{12}{y}\right) = 1$$

$$\frac{80}{x} + \frac{120}{y} = 1 \qquad (3)$$

इस तरह 6 पुरुष और 8 स्त्रियाँ यह कार्य 14 दिन में पूर्ण कर सकते है।

6 पुरुष और 8 स्त्रियों द्वारा 1दिन में किया गया कार्य $= \frac{6}{x} + \frac{8}{y} = \frac{1}{14}$

$$\Rightarrow \qquad 14\left(\frac{6}{x} + \frac{8}{y}\right) = 1$$

$$\left(\frac{84}{x} + \frac{112}{y}\right) = 1 \qquad (4)$$

समीकरण (3) और (4) का निरीक्षण कीजिए। क्या ये रैखिक समीकरण है? इसे हम कैसे हल करेंगे?

हम इन्हे $\frac{1}{x} = u$ और $\frac{1}{y} = v$ प्रतिस्थापित करते हुए रैखिक समीकरणों में परिवर्तित कर सकते है।

समीकरण (3) होता है : $\quad 80u + 120v = 1 \quad (5)$

समीकरण (4) होता है : $\quad 84u + 112v = 1 \quad (6)$

80 और 84 का ल स (L.C.M.) 1680 है। विलोपन पद्धति का उपयोग करते हुए,

समीकरण (3) × 21 $\quad (21 \times 80)\text{u} + (21 \times 120)\text{v} = 21$

समीकरण (4) × 20 $\quad (20 \times 84)\text{u} + (20 \times 112)\text{v} = 20$

$$\cancel{1680u} + 2520v = 21$$
$$\cancel{1680u} + 2240v = 20$$
$$(-) \quad (-) \quad (-)$$

u, का समान चिन्ह है, अतः घटाइये

$$280v = 1$$

$$v = \frac{1}{280}$$

समीकरण (5) में प्रतिस्थापित करने पर, $\quad 80u + 120 \times \frac{1}{280} = 1$

$$80u = 1 - \frac{3}{7} = \frac{7-3}{7} = \frac{4}{7}$$

$$u = \frac{\cancel{4}^{1}}{7} \times \frac{1}{\cancel{80}_{20}} = \frac{1}{140}$$

अतः, 1 पुरुष अकेला इस कार्य को 140 दिनों में पूर्ण कर सकता है और 1 स्त्री अकेली इस कार्य को 280 दिनों में पूर्ण कर सकती है।

उदाहरण-14. एक व्यक्ति 370 कि.मी. की दूरी कुछ रेलगाड़ी से और कुछ दूरी कार से तय करता है। यदि वह 250 कि.मी. की दूरी रेलगाडी द्वारा और शेष कार के द्वारा तय करता है तब उसे 4 घण्टे लगते हैं। किन्तु यदि वह 130 कि.मी. रेलगाडी द्वारा और शेष दूरी कार द्वारा तय करता है तब उसे 18 मिनट अधिक लगते हैं। रेलगाडी का वेग और कार का वेग ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि, रेलगाडी का वेग प्रति घण्टा x कि.मी. है। कार का वेग प्रति घण्टा y कि.मी. है।

हम यह भी जानते है कि समय $= \frac{\text{दूरी}}{\text{वेग}}$

प्रथम स्थिति में, रेलगाडी द्वारा लिया गया समय $= \frac{250}{x}$ घण्टे।

और कार द्वारा लिया गया समय $= \frac{120}{y}$ घण्टे।

अतः, कुल समय $=$ रेलगाडी में व्यतीत (spent) किया गया समय $+$ कार में व्यतीत किया गया समय

$$= \frac{250}{x} + \frac{120}{y}$$

किन्तु, सफर के लिए व्यतीत किया गया कुल समय 4 घण्टे है, अतः

$$\frac{250}{x} + \frac{120}{y} = 4$$

$$\frac{125}{x} + \frac{60}{y} = 2 \qquad \rightarrow (1)$$

पुनः, जब वह 120 कि.मी. की दूरी रेलगाडी द्वारा और शेष कार द्वारा तय करता है,

130 कि.मी. की दूरी तय करने के लिए रेलगाडी द्वारा लगा समय $= \frac{130}{x}$ घण्टे

(370 - 130) 240 कि.मी. दूरी कार द्वारा तय करने के लिए लगा समय $= \frac{240}{y}$ घण्टे.

कुल समय $= \frac{130}{x} + \frac{240}{y}$

किन्तु, दिया गया है कि सफर का समय 4 घण्टे 18 मिनट अर्थात, $4\frac{\cancel{18}^{3}}{\cancel{60}_{10}}$ घण्टे $= 4\frac{3}{10}$ घण्टे।

अतः, $$\frac{130}{x} + \frac{240}{y} = \frac{43}{10} \qquad (2)$$

समीकरण (1) और (2) में $\frac{1}{x} = a$ और $\frac{1}{y} = b$ रखने पर

$125a + 60b = 2$ (3)

$130a + 240b = 43/10$ (4)

60 और 240 का ल स (l.c.m.) 240 है। विलोपन पद्धति का उपयोग करने पर,

समीकरण (3) × 4 $\quad 500a+240b= 8$

समीकरण (4) × 1 $\quad 130a+240b = \frac{43}{10}$ (समान चिन्ह, अतः घटाइये)

$\quad$ (-) $\quad$ (-) $\quad$ (-)

$$370a = 8 - \frac{43}{10} = \frac{80-43}{10} = \frac{37}{10}$$

$$a = \frac{\cancel{37}}{10} \times \frac{1}{\cancel{370}_{10}} = \frac{1}{100}$$

$a = \frac{1}{100}$, समीकरण (3) में प्रतिस्थापित करने पर

$$\left(\cancel{125}^{5} \times \frac{1}{\cancel{100}_{4}}\right) + 60b = 2$$

$$60b = 2 - \frac{5}{4} = \frac{8-5}{4} = \frac{3}{4}$$

$$b = \frac{\cancel{3}}{4} \times \frac{1}{\cancel{60}_{20}} = \frac{1}{80}$$

अतः, $a = \frac{1}{100}$ और $b = \frac{1}{80}$

इसलिए, $\frac{1}{x} = \frac{1}{100}$ और $\frac{1}{y} = \frac{1}{80}$

$\therefore$ $x = 100$ कि.मी./ घण्टा और $y = 80$ कि.मी./ घण्टा

इसलिए, रेलगाडी का वेग 100 कि.मी./ घण्टा है और कार का वेग 80 कि.मी./ घण्टा है।

अभ्यास - 4.3

निम्न समीकरणों के युग्म में से प्रत्येक को रैखिक समीकरणों के युग्म में संक्षिप्त करते हुए, हल कीजिए।

i) $\frac{5}{x-1} + \frac{1}{y-2} = 2$

$\frac{6}{x-1} - \frac{3}{y-2} = 1$

ii) $\frac{x+y}{xy} = 2$

$\frac{x-y}{xy} = 6$

iii) $\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{y}} = 2$

$\frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{9}{\sqrt{y}} = -1$

iv) $6x+3y = 6xy$

$2x + 4y = 5xy$

v) $\frac{5}{x+y} - \frac{2}{x-y} = -1$

vi) $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 13$

$\frac{15}{x+y} + \frac{7}{x-y} = 10$ जहाँ $x \neq 0, y \neq 0$ $\qquad$ $\frac{5}{x} - \frac{4}{y} = -2$ जहाँ $x \neq 0, y \neq 0$

vii) $\frac{10}{x+y} + \frac{2}{x-y} = 4$ $\qquad$ viii) $\frac{1}{3x+y} + \frac{1}{3x-y} = \frac{3}{4}$

$\frac{15}{x+y} - \frac{5}{x-y} = -2$ $\qquad$ $\frac{1}{2(3x+y)} - \frac{1}{2(3x-y)} = \frac{-1}{8}$

2. निम्न समस्याओं को समीकरणों के युग्म जैसे सूचित कीजिए और तदन्तर इनके हल ज्ञात कीजिए।

i. एक नाव नदी की धारा के प्रतिकूल 30 कि.मी. और धारा के साथ 44 कि.मी. की दूरी 10 घण्टों में तय करती है। वह 13 घण्टे में, धारा के प्रतिकूल 40 कि.मी.और धारा के साथ 55 कि.मी. जा सकती है। प्रवाह (stream) का वेग और निश्चल पानी में नाव के वेग का निर्धारण कीजिए।

ii. रहीम उसके घर तक की 600 कि.मी. की दूरी कुछ रेलगाडी से और कुछ कार से तय करता है। यदि वह 120 कि.मी. रेलगाडी द्वारा और शेष दूरी कार द्वारा तय करता है तो यात्रा 8 घण्टे की रहती है। यदि वह 200 कि.मी. रेलगाडी से और शेष कार से जाता है तो उसे 20 मिनट अधिक लगते हैं। रेलगाडी और कार का वेग ज्ञात कीजिए।

iii. 2 स्त्रियाँ और 5 पुरूष इकट्ठा एक कसीदा कारी (embroidary) कारी का कार्य 4 दिन में पूर्ण कर सकते हैं। जब कि 3 स्त्रियाँ और 6 पुरुष उस कार्य को 3 दिन में पूर्ण कर सकते हैं। वह कार्य पूर्ण करने के लिए एक अकेली स्त्री और एक अकेले पुरुष को कितना समय लगेगा?

वैकल्पिक अभ्यास (Optional Exercise)

[यह अभ्यास परीक्षा के लिए नहीं है।]

1. निम्न समीकरणों को हल कीजिए।

(i) $\frac{2x}{a} + \frac{y}{b} = 2$

$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 4$

(ii) $\frac{x+1}{2} + \frac{y-1}{3} = 8$

$\frac{x-1}{3} + \frac{y+1}{2} = 9$

(iii) $\frac{x}{7} + \frac{y}{3} = 5$

$\frac{x}{2} - \frac{y}{9} = 6$

(iv) $\sqrt{3}x + \sqrt{2}y = \sqrt{3}$

$\sqrt{5}x + \sqrt{3}y = \sqrt{3}$

(v) $\frac{ax}{b} - \frac{by}{a} = a + b$

$ax - by = 2ab$

(vi) $2^x + 3^y = 17$

$2^{x+2} - 3^{y+1} = 5$

2. जंतुओं को किसी प्रयोग में सख्ती से नियमित आहार पर रखा जाता है। प्रत्येक जन्तु को दूसरे वस्तुओं से 20 ग्रा. प्रोटीन और 6 ग्रा. वसा (fat) प्राप्त होना चाहिए। प्रयोगशाला प्रबिधिज्ञ (laboratory technicians) ने दो आहारज्य मिश्रण A और B खरीदे। मिश्रण A में 10% प्रोटीन और 6% वसा है। मिश्रण B में 20% प्रोटीन और 2% वसा है। प्रत्येक मिश्रण के कितने ग्राम उपयोग में लाना चाहिए।

प्रस्तावित परियोजना

- दैनिक जीवन की घटनाओं से रैखिक समीकरणों के युग्मों को तैयार कर उसे आरेख द्वारा हल कीजिए ।

हमने क्या चर्चा की:

1. दो समान चरों में, दो रैखिक समीकरण, द्वि-चरीय रैखिक समीकरणों का युग्म कहलाता है।

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \ (a_1^2 + b_1^2 \neq 0)$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \ (a_2^2 + b_2^2 \neq 0)$$

जहाँ $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ वास्तविक संख्याएँ हैं।

2. विविध पद्धतियों का उपयोग करते हुए द्वि-चरीय रैखिक समीकरणों का युग्म हल किया जा सकता है।
3. द्वि-चरीय रैखिक समीकरणों के युग्म का आलेख, दो रेखाओं द्वारा निर्देशित होता है।
   i. यदि रेखाएँ किसी बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती है तब दो समीकरणों का अद्वितीय (unique) हल वह बिन्दु रहता है। ऐसी स्थिति में, समीकरणों का युग्म सुसंगत रहता है।
   ii. यदि रेखाएँ संपाती हो, तब समीकरणों के अनन्त हल रहते है रेखा पर स्थित प्रत्येक बिन्दु का हल रहता है। ऐसी स्थिति में रेखाओं का युग्म निर्भर रहता है।
   iii. यदि रेखाएँ समानान्तर हो तब समीकरणों के युग्म का कोई हल नहीं रहता। ऐसी स्थिति में समीकरणों का युग्म असंगत रहता है।
4. हमने रैखिक समीकरणों के युग्म का हल ज्ञात करने के लिए निम्न पद्धतियों की चर्चा की।
   i. प्रतिरूप (Model) पद्धति ii. आलेखीय पद्धति
   iii. बीजगणितीय पद्धतियाँ :- प्रतिस्थापना पद्धति और विलोपन पद्धति
5. समीकरणों की प्रणाली के प्रकार (nature) और गुणांको (co-efficients) के बीच संबंध रहता है।
   i. यदि $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ तब रैखिक समीकरणों का युग्म सुसंगत रहता है।
   ii. यदि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ तब रैखिक समीकरणों का युग्म असंगत रहता है।
   iii. यदि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ तब रैखिक समीकरणों का युग्म सुसंगत और निर्भर रहता है।
6. ऐसी विविध स्थितियाँ है जो गणितीय रूप में दो समीकरणों द्वारा प्रारंभ में जो रैखिक नहीं है, निर्देशित कर सकते हैं। किन्तु हम उन्हे बदल सकते हैं ताकि वह रैखिक समीकरणों के युग्म लघुकृत होते है।