শাংকৱ ছেদ
(CONIC SECTIONS)

❖ *Let the relation of knowledge to real life be very visible to your pupils and let them understand how by knowledge the world could be transformed. – BERTRAND RUSSELL* ❖

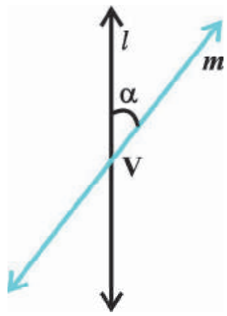
11.1 অৱতাৰণা (Introduction)

Apollonius
(262 B.C.-190B.C.)

পূৰ্ব্বৱৰ্তী অধ্যায়-10 ত আমি সৰল ৰেখাৰ সমীকৰণৰ বিভিন্ন আৰ্হিৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিছোঁ। এই অধ্যায়ত আন কিছুমান বক্ৰ, যেনে— বৃত্ত (circle), উপবৃত্ত (ellipse), অধিবৃত্ত (parabola) আৰু পৰাবৃত্ত (hyperbola) ৰ বিষয়ে আলোচনা কৰা হ'ব। অধিবৃত্ত (parabola) আৰু পৰাবৃত্ত (hyperbola) নাম দুটা **এপ'লনিয়াছে** (Apollonius) দিছিল। দৰাচলতে, এই বক্ৰবোৰক শাংকৰ-ছেদ (conic sections) বা সংক্ষেপে, শাংকৰ (conic) বোলা হয়। ইয়াৰ কাৰণ হ'ল এই বক্ৰবোৰ এখন সমতল আৰু এটা দুইমুখীয়া (double napped) লম্ব বৃত্তাকাৰ শংকু (right circular cone)ৰ ছেদনৰ পৰা উৎপন্ন হয়। এই বক্ৰ সমূহৰ ব্যাৱহাৰিক ক্ষেত্ৰ ত ব্যাপক প্ৰয়োগ আছে। উদাহৰণস্বৰূপে, গ্ৰহৰ কক্ষপথ, দূৰবীণ (telescope) আৰু এণ্টেনা (antenna) ৰ আৰ্হিৰ প্ৰস্তুতি, চমক বাতিৰ প্ৰতিফলক (reflector of flash lights) আৰু যান-বাহনৰ মুখ্য বাতি (headlights) ইত্যাদিত এইবক্ৰবোৰৰ ব্যৱহাৰ আছে। পৰৱৰ্তী অনুচ্ছেদত এই বক্ৰবোৰ এখন সমতল আৰু এটা দুইমুখীয়া লম্ব বৃত্তাকাৰ শংকুৰ ছেদনৰ ফলতকেনেকৈ সৃষ্টি হয়, সেইবিষয়ে আলোচনা কৰা হ'ব।

11.2 এটা শংকুৰ ছেদ (Sections of a cone)

ধৰা হ'ল l এডাল উলম্বৰেখা, আন এডাল ৰেখা m এ ইয়াক V বিন্দুত ছেদ কৰিছে আৰু ৰেখা দুডালৰ মাজৰ কোণ α (চিত্ৰ 11.1)



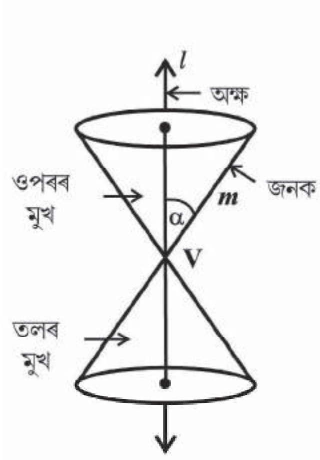
চিত্ৰ 11.1

এতিয়া α কোণটো সলনি নোহোৱাকৈ m ৰেখাডাল l ৰ চাৰিওফালে ঘূৰালে এটা পৃষ্ঠৰ সৃষ্টি হ'ব। এই পৃষ্ঠটোক এটা দুইমুখীয়া লম্ব বৃত্তাকাৰ ফোপোলা শংকু (double-napped right circular hollow cone) বোলা হয় আৰু এই শংকুটো দুয়ো দিশত অসীমলৈ বাঢ়ি যায়। পৰৱৰ্তী আলোচনাত এইটোক সংক্ষেপে শংকু (cone) বুলি কোৱা হ'ব।

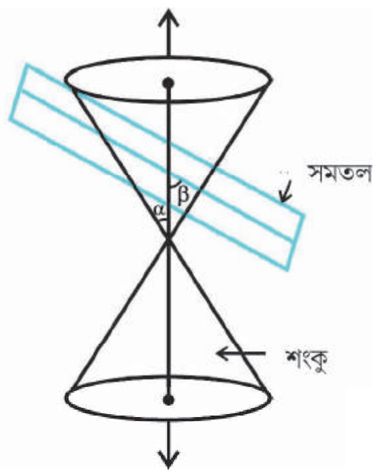
V বিন্দুটোক শীৰ্ষবিন্দু (vertex), l ৰেখাডালক অক্ষ (axis), m ৰেখাডালক জেনক (generator) বোলা হয় (চিত্ৰ 11.2)।

এখন সমতল আৰু এটা শংকুৰ ছেদনৰ ফলত সৃষ্টি হোৱা উমৈহতীয়া বক্ৰটোক শাংকৰ ছেদ (conic section) বোলা হয়। অৰ্থাৎ, এখন সমতল আৰু এটা শংকুৰ ছেদনৰ ফলত উদ্ভৱ হোৱা বক্ৰকেই শাংকৰ ছেদ বোলা হয় ।

শংকুটো সাপেক্ষে ছেদ কৰা তলখনৰ বিভিন্ন অৱস্থান আৰু তলখনে শংকুটোৰ অক্ষৰ লগত কৰা কোণটোৰ বিভিন্ন মানৰ ফলত বিভিন্ন আৰ্হিৰ শাংকৰ ছেদ পোৱা যায়। ধৰাহ'ল তলখনে শংকুৰ অক্ষৰ লগত কৰা কোণটো β (চিত্ৰ 11.3)।



চিত্ৰ 11.2



চিত্ৰ 11.3

তলখন আৰু শংকুটোৰ ছেদন শংকুটোৰ শীৰ্ষবিন্দুত বা শীৰ্ষবিন্দুৰ ওপৰৰ ফালে বা তলৰ ফালে যিকোনো অংশত হ'ব পাৰে।

11.2.1 *বৃত্ত, উপবৃত্ত, অধিবৃত্ত আৰু পৰাবৃত্ত (Circle, ellipse, parabola and hyperbola)*

সমতলখনে শংকুটোক (শীৰ্ষ বিন্দুৰ বাহিৰে) ওপৰৰ অংশ বা তলৰ অংশত ছেদ কৰাৰ নিম্ন প্ৰদত্ত চৰ্তবোৰ সাপেক্ষে উল্লিখিত বক্ৰবোৰ পোৱা যায়।

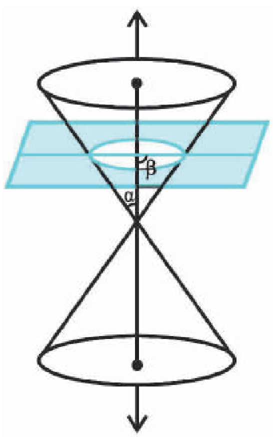
(a) $\beta = 90^0$ হ'লে, বক্ৰটো বৃত্ত হয়। (চিত্ৰ 11.4)

(b) $\alpha < \beta < 90^0$ হ'লে, বক্ৰটো উপবৃত্ত হয় (চিত্ৰ 11.5)

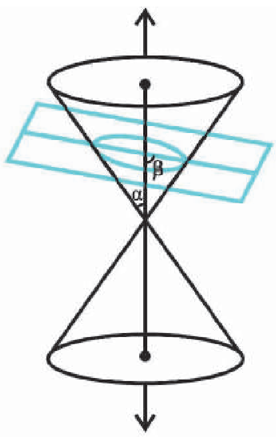
(c) $\beta = \alpha$ হ'লে, বক্ৰটো অধিবৃত্ত হয় (চিত্ৰ 11.6)

(ওপৰৰ প্ৰতিটো ক্ষেত্ৰতে সমতলখনে শংকুটোক এটা অংশত ছেদ কৰে।

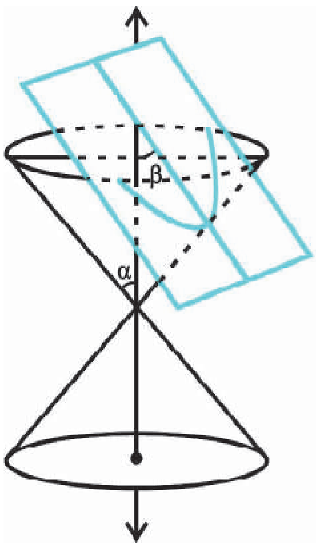
(d) $0 \leq \beta < \alpha$ হ'লে, সমতলখনে শংকুৰ দুয়োটা অংশ ছেদ কৰে আৰু বক্ৰটো পৰাবৃত্ত হয় (চিত্ৰ 11.7)



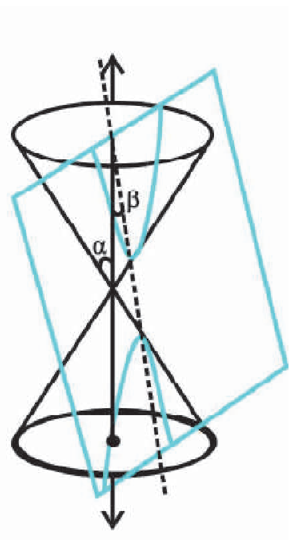
চিত্ৰ 11.4



চিত্ৰ 11.5



চিত্র 11.6



চিত্র 11.7

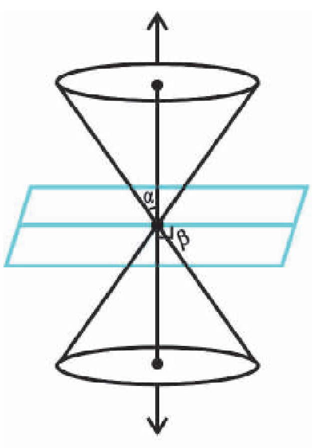
11.2.2 অপভ্ৰষ্ট শাংকৱ ছেদ *(Degenerated Conic Sections)*

সমতলখনে শংকুটোক শীৰ্ষবিন্দুত ছেদ কৰিলে নিম্নলিখিত পৰিস্থিতিবোৰৰ সৃষ্টি হয় ঃ

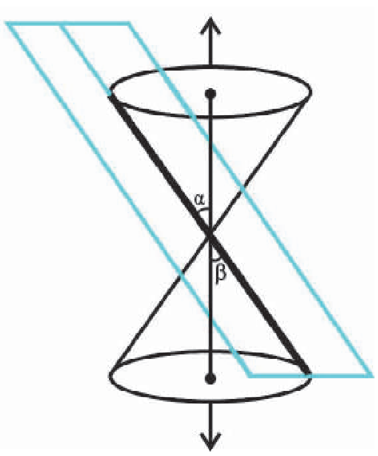
(a) $\alpha \angle \beta \leq 90^0$ হ'লে, ছেদটো এটা বিন্দু হয় (চিত্ৰ 11.8)

(b) $\beta = \alpha$ হ'লে, সমতলখনত শংকুৰ জেনেৰেটৰ এডাল থাকে আৰু আমি এডাল সৰলৰেখা পাওঁ (চিত্ৰ 11.9)। এইটো অধিবৃত্তৰ অপভ্ৰষ্ট পৰিস্থিতি।

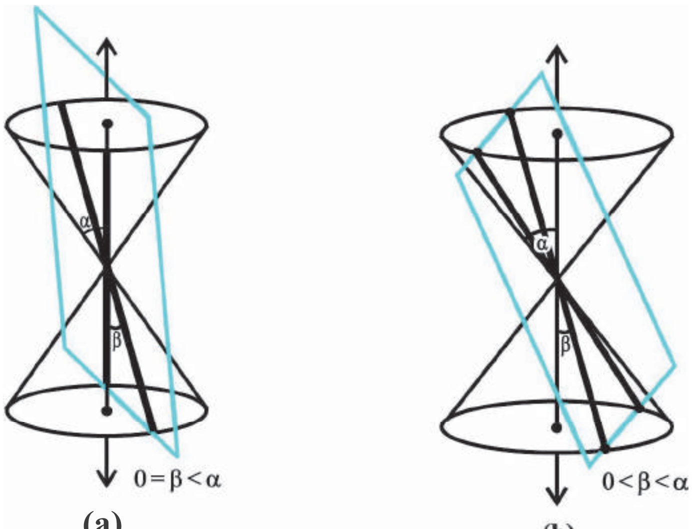
(c) $0 \leq \beta \angle \alpha$ হ'লে, তল আৰু শংকুৰ ছেদনৰ ফলত এযোৰ সৰলৰেখা পোৱা যায় (চিত্ৰ 11.10)। এইটো পৰাবৃত্তৰ অপভ্ৰষ্ট পৰিস্থিতি।



চিত্ৰ 11.8



চিত্ৰ 11.9



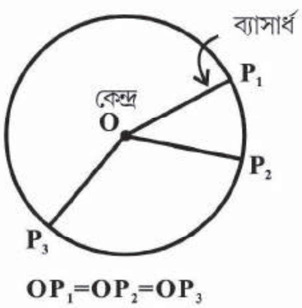
চিত্ৰ 11.10

11.3 বৃত্ত (Circle)

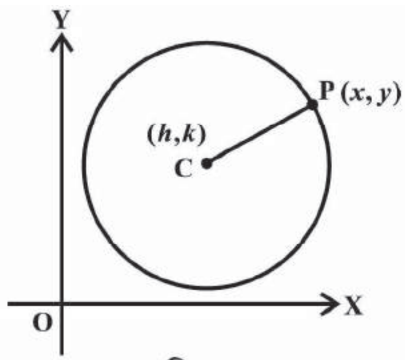
সংজ্ঞা-1

এখন সমতলৰ এটা নিৰ্দিষ্ট বিন্দুৰ পৰা সমান দূৰত্বত অৱস্থিত উক্ত সমতলৰ আটাইবোৰ বিন্দুৰ সংহতিক এটা বৃত্ত বোলা হয়।

নিৰ্দিষ্ট বিন্দুটোক বৃত্তৰ কেন্দ্ৰ (Centre of the circle) আৰু এই কেন্দ্ৰৰ পৰা বৃত্তৰ ওপৰৰ যিকোনো বিন্দুলৈ দূৰত্বক বৃত্তৰ ব্যাসাৰ্ধ (radius) বোলা হয় (চিত্ৰ 11.11)।



চিত্ৰ 11.11



চিত্ৰ 11.12

কেন্দ্ৰটো মূলবিন্দু হ'লে, বৃত্তৰ সমীকৰণ সৰলতম হয়। আমি এতিয়া প্ৰদত্ত কেন্দ্ৰ আৰু ব্যাসাৰ্ধ সাপেক্ষে বৃত্তৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰিম (চিত্ৰ 11.12)।

ধৰা হ'ল এটা বৃত্তৰ কেন্দ্ৰ C (h, k) আৰু ব্যাসাৰ্ধ r। বৃত্তটোৰ ওপৰত (চিত্ৰ 11.12) P (x, y) যিকোনো এটা বিন্দু লোৱা হ'ল। সংজ্ঞা মতে $|CP| = r$ । দূৰত্ব সূত্ৰৰ সহায়ত,

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=\pi$$

অৰ্থাৎ
$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

এইটোৱেই (h, k) কেন্দ্ৰ আৰু r ব্যাসাৰ্ধ বিশিষ্ট বৃত্তৰ সমীকৰণ।

উদাহৰণ 1 $(0, 0)$ কেন্দ্ৰ আৰু r ব্যাসাৰ্ধ বিশিষ্ট বৃত্তৰ সমীকৰণ উলিওৱা।

সমাধান ইয়াত $h = k = 0$. গতিকে বৃত্তটোৰ সমীকৰণ হ'ব $x^2 + y^2 = r^2$.

উদাহৰণ 2 $(-3, 2)$ কেন্দ্ৰ আৰু 4 ব্যাসাৰ্ধবিশিষ্ট বৃত্তৰ সমীকৰণ উলিওৱাঁ।

সমাধান ইয়াত $h = -3,\ k = 2$ আৰু $r = 4$ । গতিকে বৃত্তটোৰ নিৰ্ণেয় সমীকৰণ হ'ব

$$(x+3)^2 + (y-2)^2 = 16$$

উদাহৰণ 3 $x^2 + y^2 + 8x + 10y - 8 = 0$ বৃত্তটোৰ কেন্দ্ৰ আৰু ব্যাসাৰ্ধ উলিওৱাঁ।

সমাধান প্ৰদত্ত সমীকৰণটো হ'ল

$$(x^2 + 8x) + (y^2 + 10y) = 8$$

বন্ধনীৰ ভিতৰত বৰ্গ সম্পূৰ্ণ কৰি পোৱা যাব

$$(x^2 + 8x + 16) + (y^2 + 10y + 25) = 8 + 16 + 25$$

বা, $$(x+4)^2 + (y+5)^2 = 49$$

বা, $$\{x-(-4)\}^2 + \{y-(-5)\}^2 = 7^2$$

গতিকে বৃত্তটোৰ কেন্দ্ৰ হ'ল $(-4,\ -5)$ বিন্দুটো আৰু ব্যাসাৰ্ধ 7.

উদাহৰণ 4 $(2, -2)$ আৰু $(3, 4)$ বিন্দুৰে যোৱা আৰু $x + y = 2$ ৰেখাৰ ওপৰত কেন্দ্ৰ থকা বৃত্তৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰাঁ।

সমাধান ধৰা হ'ল বৃত্তটোৰ সমীকৰণ $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

যিহেতু বৃত্তটো $(2, -2)$ আৰু $(3, 4)$ বিন্দুৰে যায়, স্পষ্টতঃ

$$(2-h)^2 + (-2-k)^2 = r^2 \qquad \ldots (1)$$

আৰু $$(3-h)^2 + (4-k)^2 = r^2 \qquad \ldots (2)$$

তদুপৰি কেন্দ্ৰটো $x + y = 2$ ৰেখাত অৱস্থিত।

গতিকে $$h + k = 2 \qquad \ldots (3)$$

(1), (2) আৰু (3) সমাধান কৰি পোৱা যাব

$$h = 0.7,\ k = 1.3 \text{ আৰু } r^2 = 12.58$$

গতিকে বৃত্তৰ নিৰ্ণেয় সমীকৰণটো হ'ল

$$(x-0.7)^2 + (y-1.3)^2 = 12.58$$

অনুশীলনী 11.1

1 ৰ পৰা 5 লৈ অনুশীলনীবোৰত বৃত্তৰ সমীকৰণ উলিওৱাঁ ঃ

1. কেন্দ্ৰ $(0, 2)$, ব্যাসাৰ্ধ 2
2. কেন্দ্ৰ $(2, 3)$, ব্যাসাৰ্ধ 4
3. কেন্দ্ৰ $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, ব্যাসাৰ্ধ $\frac{1}{12}$
4. কেন্দ্ৰ $(1, 1)$, ব্যাসাৰ্ধ $\sqrt{2}$

5. কেন্দ্ৰ $(-a,\ -b)$, ব্যাসাৰ্ধ $\sqrt{a^2 - b^2}$

6 ৰ পৰা 9 লৈ অনুশীলনীবোৰত প্ৰদত্ত বৃত্তৰ কেন্দ্ৰ আৰু ব্যাসাৰ্ধ উলিওৱাঁ ঃ

6. $(x+5)^2 + (y-3)^2 = 36$

7. $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 45 = 0$

8. $x^2 + y^2 - 8x + 10y - 12 = 0$

9. $2x^2 + 2y^2 - x = 0$

10. (4, 1), (6, 5) বিন্দুৰে যোৱা বৃত্তৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা যাৰ কেন্দ্ৰ $4x + y = 16$ ৰেখাৰ ওপৰত থাকে।

11. যদি এটা বৃত্তৰ কেন্দ্ৰ $x - 3y - 11 = 0$ ৰেখাৰ ওপৰত থাকে আৰু বৃত্তটো (2, 3) আৰু (–1, 1) বিন্দুৰে যায় তেন্তে বৃত্তটোৰ সমীকৰণ উলিওৱা।

12. 4 ব্যাসাৰ্ধযুক্ত বৃত্তৰ সমীকৰণ উলিওৱা যাৰ কেন্দ্ৰ x অক্ষৰ ওপৰত থাকে আৰু বৃত্তটো (2, 3) বিন্দুৰে যায়।

13. (0, 0) বিন্দুৰে যোৱা আৰু অক্ষদ্বয়ত a, b ছেদাংশ উৎপন্ন কৰা বৃত্তৰ সমীকৰণ উলিওৱাঁ।

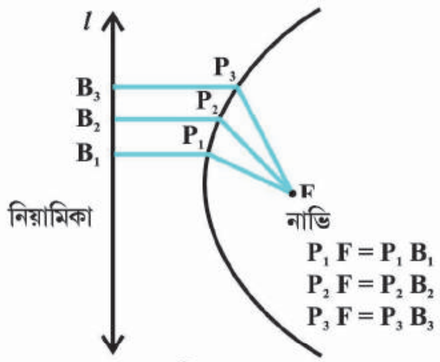
14. (2, 2) বিন্দুত কেন্দ্ৰ থকা আৰু (4, 5) বিন্দুৰে যোৱা বৃত্তৰ সমীকৰণ উলিওৱাঁ।

15. (–2.5, 3.5) বিন্দুটো $x^2 + y^2 = 25$ বৃত্তটোৰ ভিতৰত, বাহিৰত নতুবা বৃত্তটোৰ ওপৰত, ক'ত থাকে নিৰ্ণয় কৰাঁ।

11.4 অধিবৃত্ত (Parabola)

সংজ্ঞা 2 এডাল নিৰ্দিষ্ট সৰলৰেখা আৰু ৰেখাডালৰ ওপৰত নথকা এটা নিৰ্দিষ্ট বিন্দুৰ সমদূৰৱৰ্তী উক্ত ৰেখা আৰু বিন্দুৰ সমতলীয় সকলোবোৰ বিন্দুৰ সংহতিটোক এটা অধিবৃত্ত বোলা হয়।

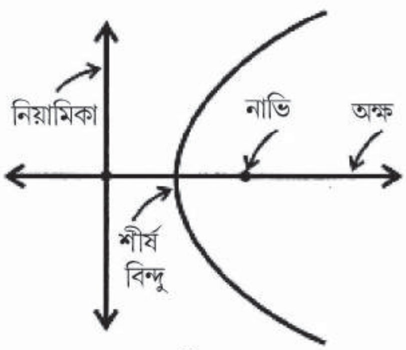
নিৰ্দিষ্ট ৰেখাডালক নিয়ামিকা (directrix) আৰু নিৰ্দিষ্ট বিন্দুটোক অধিবৃত্তটোৰ নাভি (focus) বোলা হয় (চিত্ৰ 11.13)। ['Para'ৰ অৰ্থ হ'ল 'for' আৰু 'bola'ৰ অৰ্থ হ'ল 'throwing' অৰ্থাৎ বায়ুত বল এটা দলিয়ালে সৃষ্টি হোৱা পথ]



চিত্ৰ 11.13

> ☛ **টোকা** যদি নিৰ্দিষ্ট বিন্দুটো নিৰ্দিষ্ট ৰেখাডালৰ ওপৰত থাকে, তেনেহ'লে ৰেখা আৰু বিন্দুটোৰ পৰা সমদূৰৱৰ্তী বিন্দুবোৰৰ সংহতিটোৱে বিন্দুটোৰ মাজেৰে ৰেখাডালৰ লম্বভাৱে থকা ৰেখাডাল বুজাব। এই ৰেখাডালক অধিবৃত্তটোৰ অপভ্ৰষ্ট ৰূপ বুলি কোৱা হয়।

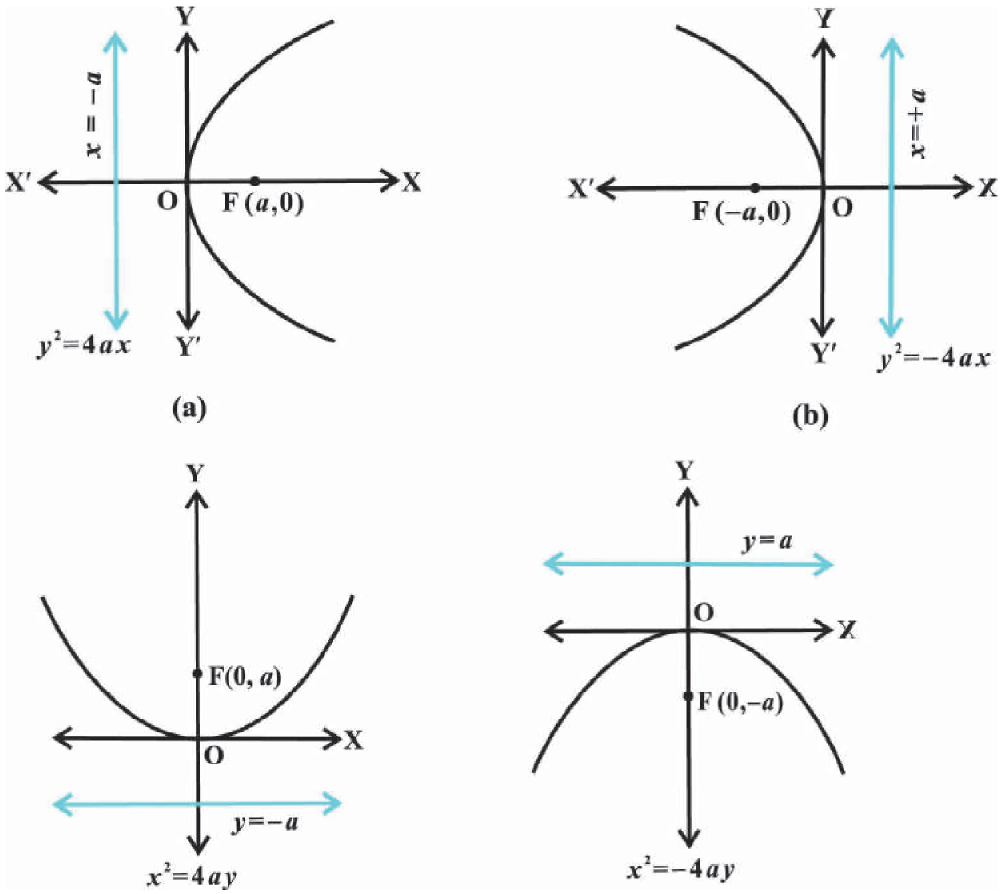
নাভিৰ মাজেৰে নিয়ামিকাৰ লম্বভাৱে টনা ৰেখাডালক অধিবৃত্তটোৰ অক্ষ (axis) বোলা হয়



চিত্ৰ 11.14

11.4.1 অধিবৃত্তৰ প্ৰামাণিক সমীকৰণ (Standard equation of Parabola)

শীৰ্ষ বিন্দুটো মূল বিন্দুত থাকিলে আৰু সমমিতিৰ অক্ষডাল (axis of symmetry) X-অক্ষ বা Y-অক্ষ হ'লে, অধিবৃত্তৰ সমীকৰণটো আটাইতকৈ সৰল সমীকৰণ হয়। অধিবৃত্তৰ এনে ধৰণৰ সম্ভৱপৰ চাৰিটা দিক্‌বিন্যাস (orientations) চিত্ৰ11.15 (a)ৰ পৰা 11.15 (d) লৈ দেখুওৱা হৈছে।

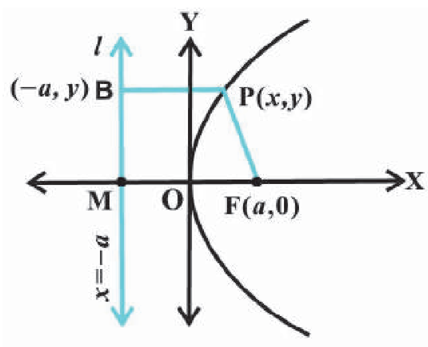


(c) (d)

চিত্ৰ **11.15 (a)** ৰপৰা **(d)**

এতিয়া আমি চিত্ৰ 11.15 (a) ত প্ৰদৰ্শিত (a, o) নাভি আৰু $x=-a$ নিয়ামিকা বিশিষ্ট অধিবৃত্তটোৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰিম।

ধৰা হ'ল অধিবৃত্তটোৰ নাভি F আৰু নিয়ামিকা l। ধৰা হ'ল FM ৰেখা নিয়ামিকাৰ লম্ব। ইয়াক Oবিন্দুত সমদ্বিখণ্ডিত কৰা হ'ল। MO ক X লৈ বৰ্ধিত কৰা হ'ল। অধিবৃত্তৰ সংজ্ঞামতে, FM ৰ মধ্যবিন্দু O অধিবৃত্তটোৰ ওপৰত আছে আৰু এইটো শীৰ্ষবিন্দু (vertex)। O ক মূলবিন্দু, OX-ক x-অক্ষ আৰু ইয়াৰ লম্ব OY ক y- অক্ষ লোৱা হ'ল। ধৰা হ'ল নিয়ামিকাৰ পৰা নাভিলৈ দূৰত্ব $2a$. তেতিয়া নাভিৰ স্থানাংক হ'ব (a, o) আৰু নিয়ামিকাৰ সমীকৰণ হ'ব $x+a=0$ (চিত্ৰ 11.16)। ধৰা হ'ল অধিবৃত্তটোৰ ওপৰত $P(x, y)$ যি কোনো এটা বিন্দু। PF সংযোজন কৰা হ'ল আৰু l ৰ ওপৰত PB লম্ব টনা হ'ল। গতিকে,



চিত্ৰ **11.16**

$$PF = PB \quad \ldots (1)$$

B ৰ স্থানাংক হ'ল $(-a, y)$ । দূৰত্ব-সূত্ৰ মতে,

$$PF = \sqrt{(x-a)^2 + y^2} \text{ আৰু } PB = \sqrt{(x+a)^2}$$

গতিকে (1) ৰ পৰা পোৱা যাব,

$$\sqrt{(x-a)^2 + y^2} = \sqrt{(x+a)^2}$$

বা, $(x-a)^2 + y^2 = (x+a)^2$

বা, $x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = x^2 + 2ax + a^2$

বা, $y^2 = 4ax \ (a > 0)$.

গতিকে অধিবৃত্তৰ ওপৰৰ যিকোনো বিন্দুৱে

$$y^2 = 4ax \qquad \ldots(2)$$

সমীকৰণটো সিদ্ধ কৰে।

বিপৰীত ক্ৰমে; ধৰা হ'ল P(x, y) বিন্দুৱে (2) সমীকৰণটো সিদ্ধ কৰে।

$$PF = \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = \sqrt{(x-a)^2 + 4ax}$$

$$= \sqrt{(x+a)^2 + y^2} = PB \ldots\ldots\ldots(3)$$

সেয়েহে P(x, y) বিন্দুটো অধিবৃত্তটোৰ ওপৰত থাকে।

(2) আৰু (3) ৰ পৰা এইটো প্ৰমাণিত হ'ল যে মূল বিন্দুত শীৰ্ষবিন্দু থকা, (a, o) নাভি আৰু x = −a নিয়ামিকা বিশিষ্ট অধিবৃত্তৰ সমীকৰণ হয় $y^2 = 4ax$.

আলোচনাঃ সমীকৰণ (2) ত $a>0$ আৰু সেয়েহে x ৰ মান শূন্য বা যিকোনো ধনাত্মক সংখ্যা হ'ব, কিন্তু ঋণাত্মক হ'ব নোৱাৰে। গতিকে বক্ৰটো প্ৰথম আৰু চতুৰ্থ চোকত অসীমলৈ বৃদ্ধি হ'ব। ধনাত্মক x অক্ষডাল অধিবৃত্তটোৰ অক্ষ।

একেধৰণে, বাকী তিনিটা ক্ষেত্ৰত অধিবৃত্তৰ সমীকৰণকেইটা নিম্নলিখিত ধৰণৰ হ'ব ঃ

চিত্ৰ 11.15 (b)ত, $y^2 = -4ax$

চিত্ৰ 11.15 (c)ত, $x^2 = 4ay$

চিত্ৰ 11.15 (d)ত, $x^2 = -4ay$

এই চাৰিটা সমীকৰণক অধিবৃত্তৰ **প্ৰামাণিক সমীকৰণ** (Standard equations) বোলা হয়।

টোকা অধিবৃত্তৰ প্ৰামাণিক সমীকৰণৰ ক্ষেত্ৰত শীৰ্ষ বিন্দু মূলবিন্দুত, নাভি এডাল স্থানাংক অক্ষৰ ওপৰত থাকে আৰু সেয়েহে নিয়ামিকা আনডাল স্থানাংক অক্ষৰ সমান্তৰাল হয়। কিন্তু, যিকোনো বিন্দুক নাভি আৰু যিকোনো সৰলৰেখাক নিয়ামিকা হিচাপে লৈ অধিবৃত্তৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় এই পাঠ্যক্ৰমৰ গণ্ডীৰ বাহিৰত।

চিত্ৰ 11.15 সাপেক্ষে নিৰ্ধাৰণ কৰা অধিবৃত্তৰ প্ৰামাণিক সমীকৰণৰ ক্ষেত্ৰত নিম্নলিখিত কথাখিনি মন কৰিব লগীয়া ঃ

1. অধিবৃত্তটো ইয়াৰ অক্ষ সাপেক্ষে প্ৰতিসম। সমীকৰণটোত y^2 পদ থাকিলে, সমমিতিৰ অক্ষডাল x-

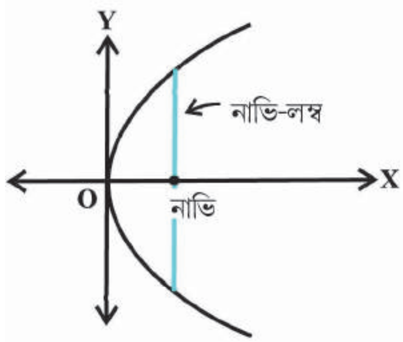
অক্ষৰ লগত আৰু x^2 পদ থাকিলে সমমিতিৰ অক্ষডাল y অক্ষৰ লগত মিলি থাকে।

2. সমমিতিৰ অক্ষ x অক্ষৰ দিশত থাকিলে, অধিবৃত্তটো
   (a) সোঁফালে বাঢ়ি যায় যদিহে x-ৰ সহগ ধনাত্মক হয়,
   (b) বাওঁফালে বাঢ়ি যায় যদিহে x-ৰ সহগ ঋণাত্মক হয়।
3. সমমিতিৰ অক্ষ y- অক্ষৰ দিশত থাকিলে, অধিবৃত্তটো
   (a) ওপৰৰ ফালে বাঢ়ি যায় যদিহে y-ৰ সহগ ধনাত্মক হয়,
   (d) তলৰ ফালে বাঢ়ি যায় যদিহে y-ৰ সহগ ঋণাত্মক হয়।

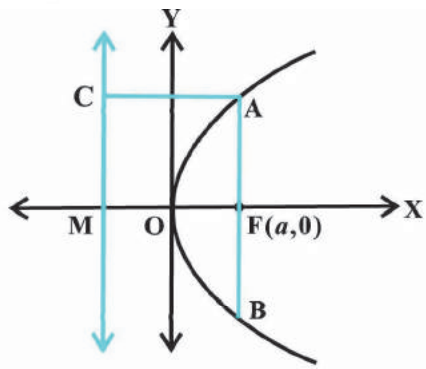
11.4.2 *নাভি-লম্ব (Latus -rectum)*

সংজ্ঞা 3 অধিবৃত্তৰ নাভি-লম্ব হ'ল সমমিতিৰ অক্ষৰ লম্বভাৱে নাভিৰ মাজেৰে অংকন কৰা আৰু অধিবৃত্তটোৰ ওপৰত প্ৰান্তবিন্দু থকা ৰেখাখণ্ডটো (চিত্ৰ 11.17)

$y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তটোৰ নাভি-লম্বৰ দৈৰ্ঘ্য নিৰ্ণয় (চিত্ৰ 11.18) ঃ



চিত্ৰ 11.17



চিত্ৰ 11.18

অধিবৃত্তৰ সংজ্ঞামতে AF= AC

কিন্তু AC=FM = $2a$,

গতিকে AF=$2a$

আকৌ, অধিবৃত্তটো X- অক্ষ সাপেক্ষে প্ৰতিসম আৰু সেয়েহে, AF= FB

গতিকে, AB= নাভিলম্বৰ দৈৰ্ঘ্য =$4a$

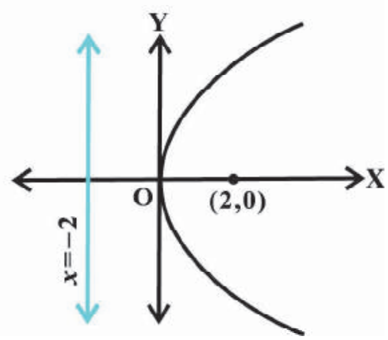
উদাহৰণ 5 $y^2 = 8x$ অধিবৃত্তটোৰ নাভিৰ স্থানাংক, অক্ষ, নিয়ামিকাৰ সমীকৰণ আৰু নাভি-লম্ব নিৰ্ণয় কৰাঁ।

সমাধান প্ৰদত্ত সমীকৰণটোত y^2 পদ আছে। গতিকে, সমমিতিৰ অক্ষ x-অক্ষৰ দিশত থাকে।

x-ৰ সহগ ধনাত্মক। গতিকে, অধিবৃত্তটো সোঁফালে মেল খাই যায়। প্ৰদত্ত সমীকৰণটোক $y^2 = 4ax$ ৰ লগত তুলনা কৰি পোৱা যায়, a=2

গতিকে, নাভিৰ স্থানাংক (2,0) আৰু নিয়ামিকাৰ সমীকৰণ হ'ল $x = -2$ (চিত্ৰ11.19)।

নাভি-লম্বৰ দৈৰ্ঘ্য $= 4a = 4 \times 2 = 8$



চিত্ৰ 11.19

উদাহৰণ 6 নাভি (2, 0) আৰু নিয়ামিকাৰ সমীকৰণ $x = -2$ হ'লে, অধিবৃত্তটোৰ সমীকৰণ উলিওৱাঁ।

সমাধান যিহেতু নাভি (2, 0) x-অক্ষৰ ওপৰত আছে, x অক্ষই অধিবৃত্তটোৰ সমমিতিৰ অক্ষ। সেয়েহে অধিবৃত্তটোৰ সমীকৰণ $y^2 = 4ax$ বা $y^2 = -4ax$ হ'ব। যিহেতু নিয়ামিকাৰ সমীকৰণ $x = -2$ আৰু নাভি (2, 0), অধিবৃত্তটো $y^2 = 4ax$ হ'ব আৰু $a = 2$ হ'ব। সেয়েহে, নিৰ্ণেয় সমীৰণটো হ'ল

$$y^2 = 4(2)x = 8x .$$

উদাহৰণ 7 শীৰ্যবিন্দু (0, 0) আৰু নাভি (0, 2) বিশিষ্ট অধিবৃত্তৰ সমীকৰণ উলিওৱাঁ।

সমাধান যিহেতু শীৰ্যবিন্দু (0, 0) আৰু নাভি (0, 2) y-অক্ষত অৱস্থিত, গতিকে সমমিতিৰ অক্ষ হ'ল y-অক্ষ। সেয়েহে অধিবৃত্তটোৰ সমীকৰণ $x^2 = 4ay$ হ'ব। গতিকে সমীকৰণটো হ'ল

$$x^2 = 4(2)y = 8y \text{ ।}$$

উদাহৰণ 8 y-অক্ষ সাপেক্ষে প্ৰতিসম আৰু $(2, -3)$ বিন্দুৰে যোৱা অধিবৃত্তৰ সমীকৰণ উলিওৱা। অধিবৃত্তটোৰ শীৰ্যবিন্দু হ'ল মূলবিন্দুটো।

সমাধান যিহেতু অধি বৃত্তটো y-অক্ষ সাপেক্ষে প্ৰতিসম আৰু শীৰ্যবিন্দু মূলবিন্দুত আছে, সমীকৰণটো $x^2 = 4ay$ বা $x^2 = -4ay$ হ'ব, য'ত বক্ৰটো ওপৰৰ ফালে বা তল ফালে মেল খোৱাৰ ওপৰত চিন নিৰ্ভৰ কৰিব। কিন্তু অধিবৃত্তটো (2, −3) বিন্দুৰে যায় আৰু (2, −3) বিন্দুটো চতুৰ্থ চোকত আছে। সেয়েহে বক্ৰটো তলৰ ফালে মেল খোৱা, ফলত সমীকৰণটো হ'ব $x^2 = -4ay$

(2, −3) বিন্দুটো ইয়াৰ ওপৰত আছে।

গতিকে

$$2^2 = -4a(-3)$$

$$a = \frac{1}{3}$$

গতিকে নিৰ্ণেয় সমীকৰণটো হ'ল

$$x^2 = -4\left(\frac{1}{3}\right)y$$

$$3x^2 = -4y$$

অনুশীলনী 11.2

1ৰ পৰা 6 লৈ প্ৰতিটো অনুশীলনীত অধিবৃত্তৰ নাভিৰ স্থানাংক, অক্ষ, নিয়ামিকাৰ সমীকৰণ আৰু নাভিলম্ব উলিওৱাঁঃ

1. $y^2 = 12x$
2. $x^2 = 6y$
3. $y^2 = -8x$
4. $x^2 = -16y$
5. $y^2 = 10x$
6. $x^2 = -9y$

7 ৰ পৰা 12 লৈ প্ৰতিটো অনুশীলনীত প্ৰদত্ত চৰ্ত সাপেক্ষে অধিবৃত্তৰ সমীকৰণ উলিওৱা ঃ

7. নাভি (6, 0); নিয়ামিকা $x = -6$,
8. নাভি (0, −3); নিয়ামিকা $y = 3$,

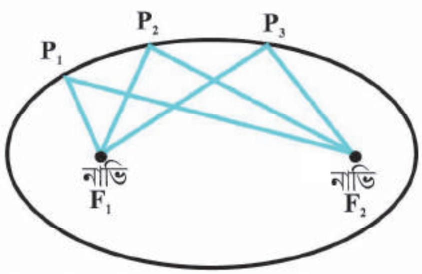
9. শীৰ্ষবিন্দু (0, 0); নাভি (3, 0), 10. শীৰ্ষবিন্দু (0, 0) ; নাভি (–2,0)

11. শীৰ্ষবিন্দু (0, 0),অক্ষ x অক্ষৰ দিশত আৰু (2, 3) বিন্দুৰে যায়।

12. শীৰ্ষবিন্দু (0, 0), y অক্ষ সাপেক্ষে প্ৰতিসম আৰু (5, 2) বিন্দৰে যায়।

11.5 উপবৃত্ত (Ellipse)

সংজ্ঞা 4 এখন সমতলত থকা দুটা নিৰ্দিষ্ট বিন্দুৰ পৰা উক্ত সমতলত থকা যিবোৰ বিন্দুলৈ দূৰত্বৰ যোগফল সদায় এটা ধ্ৰুৱক হয়, সেই আটাইবোৰ বিন্দুৰ সংহতিটোক এটা **উপবৃত্ত** (ellipse) বোলা হয়। নিৰ্দিষ্ট বিন্দু দুটাক উপবৃত্তটোৰ **নাভি** (foci, plural of 'focus') বোলা হয় ।



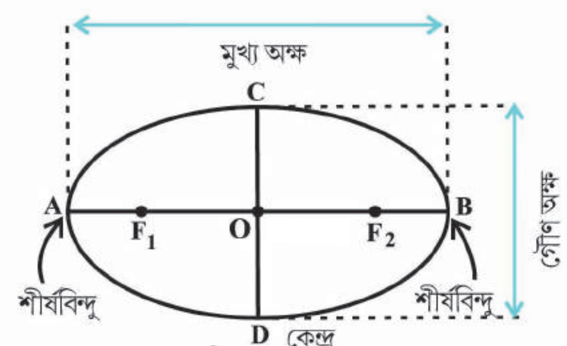
$P_1F_1 + P_1F_2 = P_2F_1 + P_2F_2 = P_3F_1 + P_3F_2$

চিত্ৰ 11.20

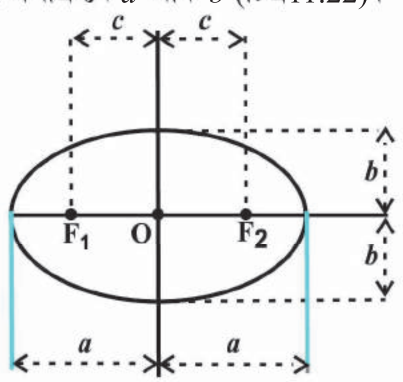
> **টোকা** উপবৃত্তৰ ওপৰৰ এটা বিন্দুলৈ নিৰ্দিষ্ট বিন্দু দুটাৰ পৰা দূৰত্বৰ যোগফল বুজোৱা ধ্ৰুৱকটো, নিৰ্দিষ্ট বিন্দু দুটাৰ মাজৰ দূৰত্বতকৈ সদায় ডাঙৰ।

নাভি দুটা সংযোগী ৰেখাখণ্ডৰ মধ্যবিন্দুটোক উপবৃত্তটোৰ **কেন্দ্ৰ** (Centre) বোলা হয়। নাভি দুটাৰ মাজেৰে যোৱা ৰেখাখণ্ডক **মুখ্য অক্ষ** (major axis) আৰু, কেন্দ্ৰৰে মুখ্য অক্ষৰ লম্বভাৱে অংকন কৰা ৰেখা খণ্ডক **গৌণ অক্ষ** (minor axis) বোলা হয়। মুখ্য অক্ষক **পৰাক্ষ** আৰু গৌণ অক্ষক **উপাক্ষ** বুলিও কোৱা হয়। মুখ্য অক্ষৰ প্ৰান্ত বিন্দু দুটাক উপবৃত্তটোৰ **শীৰ্ষবিন্দু** (vertices) বোলা হয়, চিত্ৰ (11.21)।

মুখ্য অক্ষৰ দীঘ, গৌণ অক্ষৰ দীঘ আৰু নাভিদ্বয়ৰ মাজৰ দূৰত্ব যথাক্ৰমে $2a$, $2b$ আৰু $2c$ ৰে বুজোৱা হয়। গতিকে, উপ-মুখ্য অক্ষৰ দীঘ আৰু উপ-গৌণ অক্ষৰ দীঘ যথাক্ৰমে a আৰু b (চিত্ৰ11.22)।



চিত্ৰ 11.21



চিত্ৰ 11.22

11.5.1 *উপ-মুখ্য অক্ষ, উপ-গৌণ অক্ষ আৰু নাভিলৈ কেন্দ্ৰৰ পৰা দূৰত্বৰ মাজৰ সম্পৰ্ক (Relationship between semi-major axis, semi-minor axis and the distance of the focus from the centre of the ellipse)* (চিত্ৰ11.23):

মুখ্য অক্ষৰ এটা প্ৰান্ত বিন্দু P লোৱা হ'ল। নাভিদ্বয়ৰ পৰা P লৈ দূৰত্বৰ যোগফল হ'ল

$$\begin{aligned} F_1P + F_2P &= F_1O + OP + F_2P \\ &= c + a + a - c \\ &= 2a \end{aligned}$$

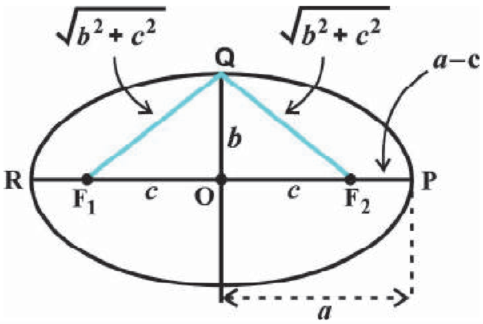
গৌণ অক্ষৰ এটা প্ৰান্ত বিন্দু Q লোৱা হ'ল। নাভিদ্বয়ৰ পৰা Q লৈ দূৰত্বৰ যোগফল হ'ল

$$F_1Q + F_2Q = \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{b^2 + c^2} = 2\sqrt{b^2 + c^2}$$

যিহেতু P আৰু Q উভয়েই উপবৃত্তটোত থাকে, উপবৃত্তৰ সংজ্ঞামতে,

$$2\sqrt{b^2+c^2}=2a \qquad \text{অৰ্থাৎ} \qquad a=\sqrt{b^2+c^2}$$

বা $\qquad a^2=b^2+c^2, \qquad$ অৰ্থাৎ $\qquad c=\sqrt{a^2-b^2}$ ।



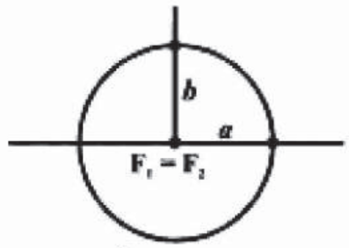
চিত্ৰ 11.23

11.5.2 *উপবৃত্তৰ বিশেষ অৱস্থা (Special cases of an ellipse)*

ওপৰৰ $c^2=a^2-b^2$ সমীকৰণটোত a ৰ মান নিৰ্দিষ্ট কৰি যদি c মান o ৰ পৰা a লৈ সলনি কৰা হয়, উপবৃত্তটোৰ আকৃতিও সলনি হ'ব।

ক্ষেত্ৰ 1 $c=0$ হ'লে, দুয়োটা নাভি উপবৃত্তটোৰ কেন্দ্ৰৰ লগত মিলি যাব আৰু $a^2=b^2$ বা, $a=b$ হ'ব। সেয়েহে উপবৃত্তটো এটা বৃত্ত হ'ব। গতিকে বৃত্ত হ'ল উপবৃত্তৰ এক বিশেষ অৱস্থা, (বৃত্তৰ বিষয়ে 11.3 অনুচ্ছেদত আলোচনা কৰা হৈছে।)

ক্ষেত্ৰ 2 $c=a$ হ'লে, $b=0$ হ'ব। এইক্ষেত্ৰত উপবৃত্তটো সলনি হৈ নাভিদ্বয় সংলগ্ন কৰা F_1F_2 ৰেখাখণ্ড হয় (11.25)



চিত্ৰ 11.24

11.5.3 *উৎকেন্দ্ৰতা (Eccentricity)*

সংজ্ঞা 5 কেন্দ্ৰ-নাভি আৰু কেন্দ্ৰ-শীৰ্ষবিন্দু দূৰত্ব দুটাৰ অনুপাতক উপবৃত্তৰ **উৎকেন্দ্ৰতা** (eccentricity) বোলা হয় আৰু অনুপাতটো e প্ৰতীকেৰে লিখা হয়।

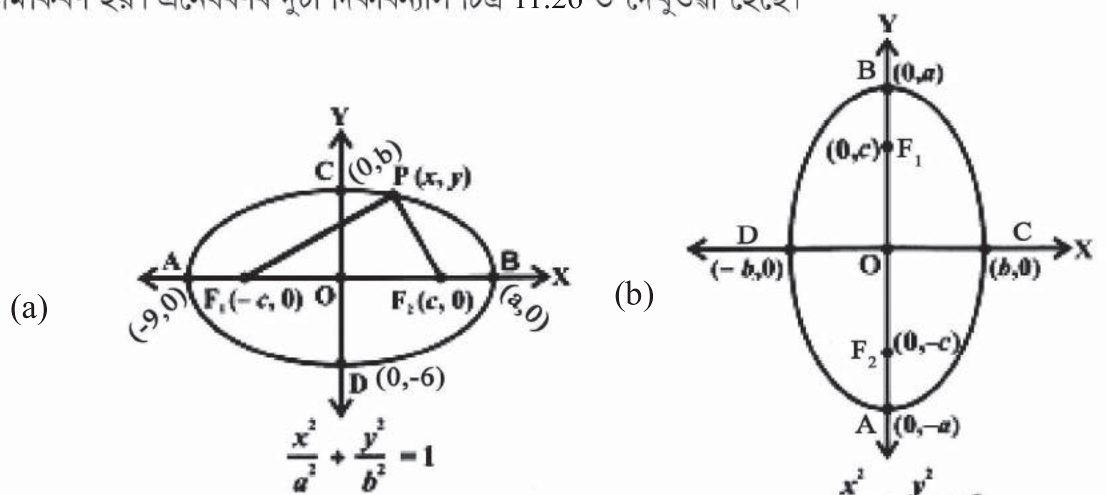
গতিকে, $e=\dfrac{c}{a}$

যিহেতু এটা নাভিৰ কেন্দ্ৰৰ পৰা দূৰত্ব c, উপকেন্দ্ৰতাত প্ৰকাশ কৰিলে নাভি-কেন্দ্ৰ দূৰত্ব ae হ'ব।

চিত্ৰ 11.25

11.5.4 *উপবৃত্তৰ প্ৰামাণিক সমীকৰণ (Standard equation of an ellipse)*

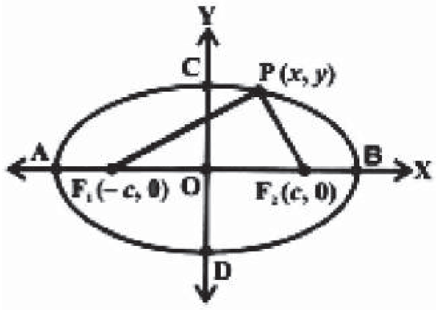
কেন্দ্ৰ মূলবিন্দুত আৰু নাভিদ্বয় x-অক্ষ বা y-অক্ষৰ ওপৰত থাকিলে উপবৃত্তৰ সমীকৰণ আটাইতকৈ সৰল সমীকৰণ হয়। এনেধৰণৰ দুটা দিকবিন্যাস চিত্ৰ 11.26 ত দেখুওৱা হৈছে।



চিত্ৰ 11.26

ওপৰৰ চিত্ৰ 11.26 (a) ত প্ৰদৰ্শিত, x-অক্ষত নাভি থকা উপবৃত্তৰ সমীকৰণ এতিয়া নিৰ্ণয় কৰা হ'ব।

ধৰা হ'ল নাভিদ্বয় F_1 আৰু F_2 , O বিন্দুটো F_1F_2 ৰেখাখণ্ডৰ মধ্যবিন্দু। 0 ক মূলবিন্দু লোৱা হ'ল আৰু 0 ৰ পৰা F_2 ৰ মাজেৰে অংকন কৰা ৰেখাক ধনাত্মক x-অক্ষ, আৰু F_1 ৰ মাজেৰে অংকন কৰা ৰেখাক ঋণাত্মক x-অক্ষ লোৱা হ'ল। O ৰ মাজেৰে x-ৰ লম্বভাৱে টনা ৰেখাডালক y-অক্ষ লোৱা হ'ল। F_1 আৰু F_2 ৰ স্থানাংক যথাক্ৰমে $(-c, o)$ আৰু (c, o) লোৱা হ'ল (চিত্ৰ11.26 (a))



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

চিত্ৰ 11.27

উপবৃত্তৰ ওপৰত $P(x, y)$ এটা যিকোনো বিন্দু লোৱা হ'ল আৰু P ৰ পৰা নাভিদ্বয়লৈ দূৰত্বৰ যোগফল $2a$ লোৱা হ'ল। গতিকে,

$$PF_1 + PF_2 = 2a \qquad \ldots (1)$$

দূৰত্ব-সূত্ৰ প্ৰয়োগ কৰি পোৱা যায়,

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

বা, $$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

দুয়োফালে বৰ্গ কৰি,

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

বা, $$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a-\frac{c}{a}x \text{ (সৰল কৰি)}$$

আকৌ বৰ্গ কৰি আৰু সৰল কৰি পোৱা যাব

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$$

অৰ্থাৎ , $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \; \ldots\ldots (2)$ (যিহেতু $c^2=a^2-b^2$)

বিপৰীতক্ৰমে, ধৰা হ'ল $P(x, y)$ এ সমীকৰণ (2) সিদ্ধ কৰে, য'ত $o<c<a$ । গতিকে,

$$y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

এতিয়া $PF_1 = \sqrt{(x+c)^2+y^2}$

$$=\sqrt{(x+c)^2+b^2\left(\frac{a^2-x^2}{a^2}\right)}=\sqrt{(x+c)^2+(a^2-c^2)\left(\frac{a^2-x^2}{a^2}\right)} \text{ (যিহেতু } b^2=a^2-c^2)$$

$$=\sqrt{\left(a+\frac{cx}{a}\right)^2}=a+\frac{cx}{a}$$

সেইদৰে $PF_2 = a-\frac{c}{a}x$

গতিকে, $\mathrm{PF}_1 + \mathrm{PF}_2 = a + \frac{c}{a}x + a - \frac{c}{a}x = 2a$ ...(3)

দেখা গ'ল যে $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ সমীকৰণটো সিদ্ধ কৰা যিকোনো বিন্দুৱে জ্যামিতিক চৰ্তটোও সিদ্ধ কৰে আৰু সেয়েহে P(x, y) বিন্দুটো উপবৃত্তৰ ওপৰত থাকে।

গতিকে (2) আৰু (3) ৰ পৰা প্ৰমাণিত হ'ল যে মূল বিন্দুত কেন্দ্ৰ থকা আৰু মুখ্য অক্ষ X-অক্ষত থকা উপবৃত্তৰ সমীকৰণ হ'ল $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

আলোচনা ওপৰত নিৰ্ণিত উপবৃত্তৰ সমীকৰণৰ পৰা দেখা যায় যে উপবৃত্তটোৰ ওপৰত থকা যিকোনো P(x, y) বিন্দুৰ বাবে

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} \le 1 \text{ অৰ্থাৎ, } x^2 \le a^2 \text{ অৰ্থাৎ } -a \le x \le a.$$

গতিকে উপবৃত্তটো $x = -a$ আৰু $x = a$ ৰেখা দুডালৰ মাজত থাকে আৰু ৰেখা দুডাল স্পৰ্শ কৰে।

সেইদৰে উপবৃত্তটো $y = -a$ আৰু $y = a$ ৰেখাদুডালৰ মাজত থাকে আৰু ৰেখা দুডাল স্পৰ্শ কৰে।

একে পদ্ধতিৰে, চিত্ৰ 11.26 (b) ত প্ৰদৰ্শিত উপবৃত্তটোৰ সমীকৰণ $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ উলিয়াব পাৰি। এই দুটা সমীকৰণক উপবৃত্তৰ প্ৰামাণিক সমীকৰণ বোলা হয়।

> **টোকা** উপবৃত্তৰ প্ৰামাণিক সমীকৰণৰ ক্ষেত্ৰত কেন্দ্ৰটো মূল বিন্দুত থাকে আৰু মুখ্য অক্ষ, গৌণ অক্ষ হ'ল ক্ৰমে x-অক্ষ আৰু y-অক্ষ। যিকোনো বিন্দুত কেন্দ্ৰ থকা আৰু কেন্দ্ৰৰ মাজেৰে যোৱা যিকেনো দুডাল পৰস্পৰ লম্ব ৰেখাক মুখ্য আৰু গৌণ অক্ষ ধৰি গঠন কৰিব পৰা উপবৃত্তৰ আলোচনা এই পাঠ্যক্ৰমৰ গণ্ডীৰ বাহিৰত।

উপবৃত্ত (চিত্ৰ 11.26) ৰ প্ৰামাণিক সমীকৰণৰ পৰা নিম্নলিখিত কথাখিনি মন কৰিব লগা ঃ

1. দুয়োডাল স্থানাংক অক্ষ ৰেখা সাপেক্ষে উপবৃত্তটো প্ৰতিসম, কাৰণ (x, y) বিন্দুটো উপবৃত্তটোৰ ওপৰত থাকিলে ($-x$, y), (x, $-y$) আৰু ($-x$, $-y$) বিন্দুকেইটাও উপবৃত্তটোৰ ওপৰত থাকে।

2. নাভিদ্বয় সদায় মুখ্য অক্ষৰ ওপৰত থাকে। সমমিতিৰ অক্ষৰ ছেদাংশ উলিয়াই মুখ্য অক্ষ নিৰ্ণয় কৰিব পাৰি। অৰ্থাৎ, যদি x^2 ৰ সহগৰ হৰ ডাঙৰ হয়, তেনেহ'লে মুখ্য অক্ষ x-অক্ষত থাকে আৰু যদি y^2 ৰ সহগৰ হৰ ডাঙৰ হয়, তেনেহ'লে মুখ্য অক্ষ y- অক্ষত থাকে।

11.5.5 *নাভি লম্ব (Latus rectum)*

সংজ্ঞা 6 উপবৃত্তৰ ***নাভি-লম্ব*** হ'ল যিকোনো এটা নাভিৰ মাজেৰে মুখ্য অক্ষৰ লম্বভাৱে অংকন কৰা আৰু প্ৰান্তবিন্দু উপবৃত্তটোৰ ওপৰত থকা ৰেখাখণ্ডটো ।

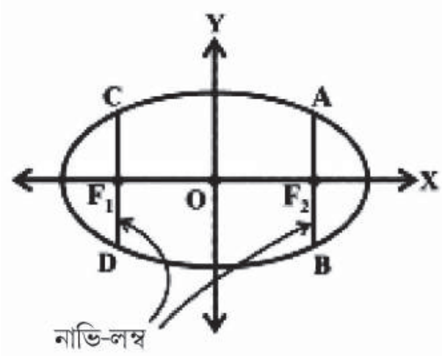
উপবৃত্ত নাভি-লম্বৰ দৈৰ্ঘ্য নিৰ্ণয় (To find the length of the latus rectum of an ellipse) :

ধৰাহ'ল AF_2 ৰ দীঘ l, তেতিয়া A ৰ স্থানাংক হ'ব (c, l), অৰ্থাৎ (ae, l),। যিহেতু A বিন্দুটো $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তটোৰ

ওপৰত থাকে ,

$$\frac{(ae)^2}{a^2}+\frac{l^2}{b^2}=1$$

$$\Rightarrow l^2=b^2\ (1-e^2)$$



চিত্ৰ 11.28

কিন্তু $$e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=1-\frac{b^2}{a^2},$$

অৰ্থাৎ $$1-e^2=\frac{b^2}{a^2}.$$

গতিকে, $$l^2=\frac{b^4}{a^2}\ \text{অৰ্থাৎ}\ l=\frac{b^2}{a}$$

যিহেতু উপবৃত্তটো স্থানাংক অক্ষদ্বয় সাপেক্ষে প্ৰতিসম, সেয়ে $AF_2=F_2B$। সেয়েহে নাভিলম্বৰ দৈৰ্ঘ্য $\frac{2b^2}{a}$ হ'ব ।

উদাহৰণ 9 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$ উপবৃত্তটোৰ নাভি আৰু শীৰ্ষবিন্দুৰ স্থানাংক, মুখ্য আৰু গৌণ অক্ষৰ দীঘ, উৎকেন্দ্ৰতা আৰু নাভিলম্বৰ দীঘ নিৰ্ণয় কৰাঁ।

সমাধান যিহেতু $\frac{x^2}{25}$ ৰ হৰ $\frac{y^2}{9}$ ৰ হৰতকৈ ডাঙৰ, গতিকে মুখ্য অক্ষ x-অক্ষৰ দিশত আছে। প্ৰদত্ত সমীকৰণটোক $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ৰ লগত তুলনা কৰি পোৱা যায় $a=5, b=3$ আৰু $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-9}=4$ ।গতিকে নাভিৰ স্থানাংক হ'ল $(-4, 0)$ আৰু $(4, 0)$, শীৰ্ষবিন্দুৰ স্থানাংক $(-5, 0)$ আৰু $(5, 0)$। মুখ্য অক্ষৰ দীঘ $2a=10$ একক আৰু গৌণ অক্ষৰ দীঘ $2b=6$ একক। উৎকেন্দ্ৰতা হ'ল $\frac{4}{5}$ আৰু নাভিলম্বৰ দৈৰ্ঘ্য $\frac{2b^2}{a}=\frac{18}{5}$ ।

উদাহৰণ 10 $9x^2+4y^2=36$ উপবৃত্তটোৰ শীৰ্ষবিন্দু আৰু নাভিৰ স্থানাংক, মুখ্য আৰু গৌণ অক্ষৰ দীঘ, উৎকেন্দ্ৰতা উলিওৱাঁ।

সমাধান উপবৃত্তটোৰ প্ৰদত্ত সমীকৰণটো প্ৰামাণিক আকাৰত প্ৰকাশ কৰিলে হ'ব

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$$

যিহেতু $\frac{y^2}{9}$ ৰ হৰ $\frac{x^2}{4}$ ৰ হৰতকৈ ডাঙৰ, গতিকে মুখ্য অক্ষ y-অক্ষৰ দিশত আছে। সমীকৰণটোৰ প্ৰামাণিক সমীকৰণ $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ ৰ লগত তুলনা কৰি পোৱা যায়, $b=2$ আৰু $a=3$ ।লগতে, $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$ আৰু $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$ । গতিকে নাভিৰ স্থানাংক হ'ল, $(0,\sqrt{5}),(0,-\sqrt{5})$ আৰু শীৰ্ষবিন্দৰ স্থানাংক $(0, 3)$ আৰু$(0,-3)$। মুখ্য অক্ষৰ দীঘ 6 একক, গৌণ অক্ষৰ দীঘ 4 একক আৰু উৎকেন্দ্ৰতা $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

উদাহৰণ 11 (±13, 0) শীৰ্ষবিন্দু বিশিষ্ট আৰু (±5, 0) নাভি বিশিষ্ট উপবৃত্তৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান যিহেতু শীৰ্ষবিন্দু x-অক্ষত আছে, সমীকৰণৰ আৰ্হি হ'ব $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, উপমুখ্য অক্ষ a. দিয়া আছে a=13, c=±5. গতিকে, $c^2=a^2-b^2$ সম্পৰ্কটোৰপৰা পোৱা যায় $25=169-b^2$ অৰ্থাৎ b=12। সেয়েহে নিৰ্ণেয় সমীকৰণটো হ'ব $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$

উদাহৰণ 12 মুখ্য অক্ষৰ দীঘ 20 আৰু নাভিদ্বয় (0, ±5) হ'লে, উপবৃত্তটোৰ সমীকৰণ উলিওৱা।

সমাধান নাভিদ্বয় y অক্ষত অৱস্থিত, সেয়েহে মুখ্য অক্ষ y-অক্ষৰ দিশত আছে। গতিকে উপবৃত্তটোৰ সমীকৰণ হ'ব

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

দিয়া আছে

$$a=\text{উপমুখ্য অক্ষ } =\frac{20}{2}=10$$

আৰু $c^2=a^2-b^2$ সম্পৰ্কটোৰ পৰা

$5^2=10^2-b^2$ বা, $b^2=75$

গতিকে, সমীকৰণটো হ'ল

$$\frac{x^2}{75}+\frac{y^2}{100}=1.$$

উদাহৰণ 13 মুখ্য অক্ষ x-অক্ষত থকা আৰু (4, 3), (-1,4) বিন্দুৰে যোৱা উপবৃত্তটোৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰাঁ।

সমাধান উপবৃত্তটোৰ প্ৰামাণিক সমীকৰণটো হ'ব $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ... (1)

(4, 3) আৰু (– 1, 4) বিন্দু দুটা (1) ৰ ওপৰত থাকে। গতিকে,

$$\frac{16}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1 \quad \text{...(2)}$$

আৰু $$\frac{1}{a^2}+\frac{16}{b^2}=1 \quad \text{... (3)}$$

(2) আৰু (3) সমাধা কৰি পোৱা যায়, $a^2=\frac{247}{7}$ আৰু $b^2=\frac{247}{15}$

গতিকে, সমীকৰণটো হ'ল

$$\frac{x^2}{\frac{247}{7}}+\frac{y^2}{\frac{247}{15}}=1 \text{ অৰ্থাৎ } 7x^2+15y^2=247.$$

অনুশীলনী 11.3

1 ৰ পৰা 9 লৈ অনুশীলনীবোৰত দিয়া উপবৃত্তবোৰৰ নাভি আৰু শীৰ্ষবিন্দুৰ স্থানাংক, মুখ্য আৰু গৌণ অক্ষৰ দীঘ, উৎকেন্দ্ৰতা আৰু নাভি লম্বৰ দীঘ নিৰ্ণয় কৰাঁ ঃ

1. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$ 2. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$ 3. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

4. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{100}=1$ 5. $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{36}=1$ 6. $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{400}=1$

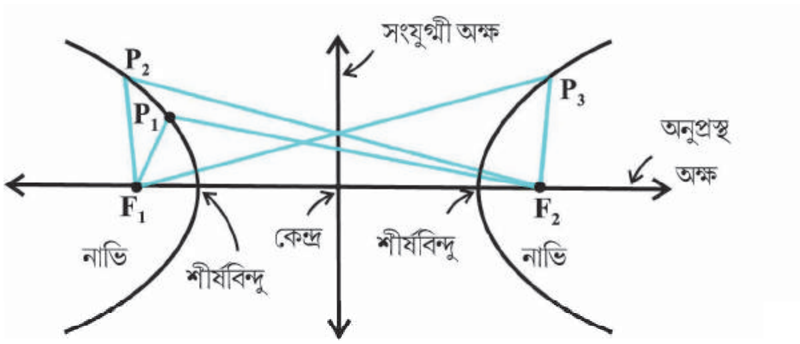
7. $36x^2+4y^2=144$ 8. $16x^2+y^2=16$ 9. $4x^2+9y^2=36$

10 ৰ পৰা 20 লৈ অনুশীলনীবোৰত, প্ৰদত্ত চৰ্তসাপেক্ষে উপবৃত্তবোৰৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰাঃ

10. শীৰ্ষবিন্দ $(\pm 5, 0)$, নাভিদ্বয় $(\pm 4, 0)$;
11. শীৰ্ষবিন্দু $(0, \pm 13)$, নাভিদ্বয় $(0, \pm 5)$
12. শীৰ্ষবিন্দু $(\pm 6, 0)$, নাভিদ্বয় $(\pm 4, 0)$;
13. মুখ্য অক্ষৰ প্ৰান্ত বিন্দু $(\pm 3, 0)$, গৌণ অক্ষৰ প্ৰান্ত বিন্দু $(0, \pm 2)$;
14. মুখ্য অক্ষৰ প্ৰান্তবিন্দু $(0, \pm \sqrt{5})$, গৌণ অক্ষৰ প্ৰান্ত বিন্দু $(\pm 1, 0)$;
15. মুখ্য অক্ষৰ দীঘ 26, নাভিদ্বয় $(\pm 5, 0)$;
16. গৌণ অক্ষৰ দীঘ 16, নাভিদ্বয় $(0, \pm 6)$;
17. নাভিদ্বয় $(\pm 3, 0)$, $a=4$;
18. $b=3$, $c=4$, কেন্দ্ৰ মূলবিন্দুত; নাভি x-অক্ষত ;
19. কেন্দ্ৰ (0,0), মুখ্য অক্ষ y-অক্ষত আৰু (3, 2), (1, 6) বিন্দুৰে যোৱা ;
20. মুখ্য অক্ষ x-অক্ষত আৰু (4, 3),(6, 2) বিন্দুৰে যোৱা।

11.6 পৰাবৃত্ত (Hyperbola)

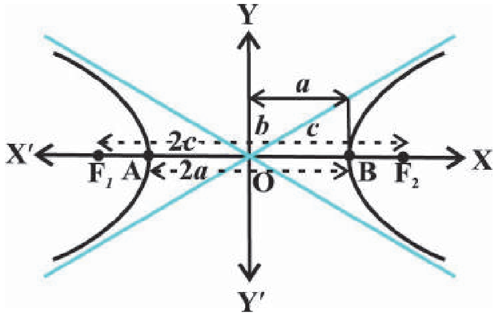
সংজ্ঞা 7 এখন সমতলত থকা দুটা নিৰ্দিষ্ট বিন্দুৰ পৰা উক্ত সমতলত থকা যিবোৰ বিন্দুৰ দূৰত্বৰ পাৰ্থক্য সদায় এটা ধ্ৰুৱক হয়, সেই আটাইবোৰ বিন্দুৰ সংহতিটোক এটা পৰাবৃত্ত (Hyperbola) বোলা হয়



$$P_1F_2 - P_1F_1 = P_2F_2 - P_2F_1 = P_3F_1 - P_3F_2$$

চিত্ৰ 11.29

ওপৰৰ সংজ্ঞাত ব্যৱহাৰ কৰা 'দূৰত্বৰ পাৰ্থক্য'ৰ অৰ্থ হল, আঁতৰত থকা বিন্দুটোলৈ দূৰত্বৰ পৰা ওচৰত থকা বিন্দুটোলৈ দূৰত্ব বিয়োগ কৰা। নিৰ্দিষ্ট বিন্দু দুটাক পৰাবৃত্তটোৰ **নাভি** বোলা হয়। নাভিদ্বয় সংযোগী ৰেখাখণ্ডৰ মধ্যবিন্দুটোক পৰাবৃত্তটোৰ **কেন্দ্ৰ** বোলা হয়। নাভিদ্বয়ৰ মাজেৰে যোৱা ৰেখাডালক **অনুপ্ৰস্থ অক্ষ** (transverse axis) আৰু কেন্দ্ৰৰ মাজেৰে এই অক্ষডালৰ লম্বভাৱে থকা ৰেখাডালক **সংযুগ্মী অক্ষ** (Conjugate axis) বোলা হয়। বৃত্তটোৱে অনুপ্ৰস্থ অক্ষক ছেদ কৰা বিন্দু দুটাক **শীৰ্ষবিন্দু** বোলা হয় (চিত্ৰ11.29)।



চিত্ৰ 11.30

পৰাবৃত্তটোৰ নাভিদ্বয়ৰ মাজৰ দূৰত্ব $2c$ ৰে শীৰ্ষবিন্দু দুটাৰ মাজৰ দূৰত্ব (অনুপ্ৰস্থ অক্ষৰ দীঘ) $2a$ ৰে বুজোৱা হয়, $\sqrt{c^2-a^2}$ ক b ৰে, অৰ্থাৎ, $b=\sqrt{c^2-a^2}$ বুলি লিখা হয়। সংযোগী অক্ষৰ দীঘ $2b$ বুলি ধৰা হয় (চিত্ৰ11.30)।

$(P_1F_2-P_1F_1)$ **ধ্ৰুৱকটো নিৰ্ণয় ঃ**

চিত্ৰ11.30 ত, P বিন্দুটোৰ স্থান A আৰু B ত ধৰি ল'লে,

$BF_1-BF_2=AF_2-AF_1$ (পৰাবৃত্তৰ সংজ্ঞা মতে)

বা, $BA+AF_1-BF_2= AB+BF_2-AF_1$

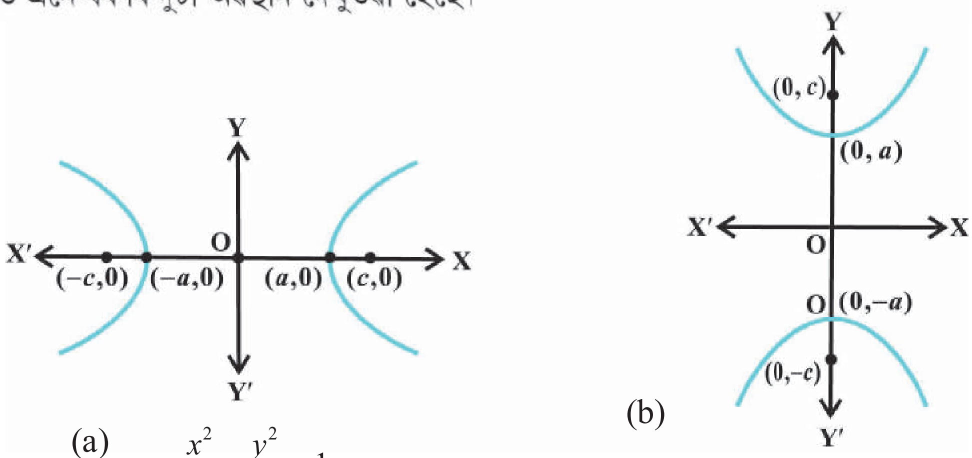
বা, $AF_1=BF_2$.

সেয়েহে, $BF_1-BF_2=BA+AF_1-BF_2=BA=2a$

11.6.1. ***উৎকেন্দ্ৰতা ঃ*** উপবৃত্তৰ দৰে, $e=\dfrac{c}{a}$ অনুপাতটোক পৰাবৃত্তটোৰ উৎকেন্দ্ৰতা বোলা হয়। যিহেতু, $c\geq a$, উৎকেন্দ্ৰতাৰ মান কেতিয়াও একতকৈ সৰু হ'ব নোৱাৰে। উৎকেন্দ্ৰতাত প্ৰকাশ কৰিলে, কেন্দ্ৰ-নাভি দূৰত্ব ae হয়।

11.6.2 *পৰাবৃত্তৰ প্ৰামাণিক সমীকৰণ (Standard equation of Hyperbola)*

কেন্দ্ৰ মূলবিন্দুত আৰু নাভিদ্বয় x অক্ষ বা y-অক্ষত থাকিলে পৰাবৃত্তৰ সমীকৰণ আটাইতকৈ সৰল সমীকৰণ হয়। চিত্ৰ 11.31ত এনে ধৰণৰ দুটা অৱস্থান দেখুওৱা হৈছে।

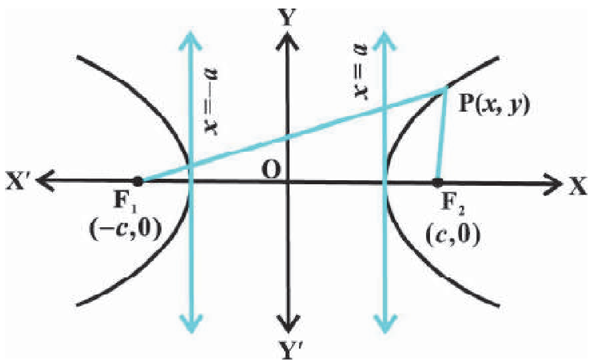


$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

চিত্ৰ 11.31

চিত্ৰ 11.31(a) ত প্ৰদৰ্শিত, x অক্ষত নাভিদ্বয় অৱস্থিত পৰাবৃত্তটোৰ সমীকৰণ তলত নিৰ্ণয় কৰা হ'ল।

ধৰা হ'ল F_1 আৰু F_2 পৰাবৃত্তটোৰ নাভি, F_1F_2 ৰেখা খণ্ডৰ মধ্যবিন্দু O । $\overrightarrow{OF_2}$ ক ধনাত্মক x অক্ষ আৰু OF_1 ক ঋণাত্মক x-অক্ষ লেৱা হ'ল। O ৰ মাজেৰে x-অক্ষৰ লম্বভাৱে y-অক্ষ লোৱা হ'ল। F_1 আৰু F_2 ৰ স্থানাংক যথাক্ৰমে $(-c,0)$ আৰু $(c, 0)$ লোৱা হ'ল (চিত্ৰ 11.32)



চিত্ৰ 11.32

পৰাবৃত্তৰ ওপৰত যিকোনো এটা বিন্দু $P(x, y)$ লোৱা হ'ল। পৰাবৃত্তৰ সংজ্ঞামতে পোৱা যায়, $PF_1-PF_2=2a$ দূৰত্ব সূত্ৰ প্ৰয়োগ কৰি,

$$\sqrt{(x+c)^2}-\sqrt{(x-y)^2+y^2}=2a$$

বা,

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

দুয়োফালে বৰ্গ কৰি পোৱা যাব,

$$(x+c)^2+y^2=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

সৰল কৰি,

$$\frac{cx}{a}-a=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

আকৌ দুয়াফালে বৰ্গ কৰি আৰু তাৰপিছত সৰল কৰি পোৱা যাব

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1$$

অৰ্থাৎ, $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ (যিহেতু } c^2-a^2=b^2\text{)}$$

সেয়েহে, পৰাবৃত্তটোৰ ওপৰৰ যিকোনো বিন্দুৱে $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ সমীকৰণটো সিদ্ধ কৰে।

বিপৰীতক্ৰমে, ধৰা হল $P(x, y)$ এ ওপৰৰ সমীকৰণটো সিদ্ধ কৰে, য'ত $0<a<c$

তেতিয়া, $$y^2=b^2\left(\frac{x^2-a^2}{a^2}\right)$$

গতিকে,

$$PF_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$=\sqrt{(x+c)^2+b^2\left(\frac{x^2-a^2}{a^2}\right)}$$

$$= a + \frac{c}{a}x$$

সেইদৰে, $\mathrm{PF}_2 = \sqrt{\left(a - \frac{c}{a}x\right)^2}$

পৰাবৃত্তত $c>a$; আৰু যিহেতু P বিন্দুটো $x=a$ ৰেখাৰ সোঁহাতে আছে, $x>a$ আৰু সেয়েহে,

$\frac{c}{a}x > a$ । গতিকে $a - \frac{c}{a}x$ ৰাশিটো ঋণাত্মক হয়। সেয়েহে, $\mathrm{PF}_2 = \frac{c}{a}x - a$

গতিকে, $\mathrm{PF}_1 - \mathrm{PF}_2 = a + \frac{c}{a}x - \frac{c}{a}x + a = 2a$

তদুপৰি, মন কৰা উচিত যে যদি P বিন্দুটো $x = -a$ ৰেখাডালৰ বাওঁফালে থাকে,

তেন্তে $\mathrm{PF}_1 = -\left(a + \frac{c}{a}x\right)$, $\mathrm{PF}_2 = a - \frac{c}{a}x$

এইক্ষেত্ৰতো $\mathrm{PF}_2 - \mathrm{PF}_1 = 2a$. গতিকে, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ সমীকৰণ সিদ্ধ কৰা যিকোনো বিন্দু পৰাবৃত্তটোৰ ওপৰত থাকে। এইদৰে প্ৰমাণিত হ'ল যে মূলবিন্দুত কেন্দ্ৰ থকা আৰু অনুপ্ৰস্থ অক্ষ x-অক্ষত থকা পৰাবৃত্তৰ সমীকৰণ হয়

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

টোকা এটা পৰাবৃত্তত $a=b$ হ'লে, পৰাবৃত্তটোক **সমবাহু পৰাবৃত্ত** (equilateral hyperbola) বোলা হয়।

আলোচনা ওপৰত নিৰ্ণিত পৰাবৃত্তৰ সমীকৰণটোৰপৰা দেখা যায় যে

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \geq 1$$

অৰ্থাৎ, $\left|\frac{x}{a}\right| \geq 1$

অৰ্থাৎ, $x \leq -a$ বা $x \geq a$. সেয়েহে বক্ৰটোৰ কোনো অংশ $x = -a$ আৰু $x = +a$ ৰেখা দুডালৰ মাজত নাথাকে (অৰ্থাৎ, সংযুগ্মী অক্ষত কোনো বাস্তৱ ছেদাংশ নাথাকে)।

চিত্ৰ11.31 (a) ত প্ৰদৰ্শিত পৰাবৃত্তটোৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা একে পদ্ধতিৰে চিত্ৰ 11.31(b)ত প্ৰদৰ্শিত পৰাবৃত্তটোৰ সমীকৰণৰ আৰ্হি $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ বুলি নিৰ্ণয় কৰিব পাৰি।

এই সমীকৰণ দুটাক পৰাবৃত্তৰ প্ৰামাণিক সমীকৰণ বোলা হয়।

টোকা প্ৰামাণিক সমীকৰণবিশিষ্ট পৰাবৃত্তৰ অনুপ্ৰস্থ আৰু সংযুগ্মী অক্ষ স্থানাংক অক্ষত আৰু কেন্দ্ৰটো মূলবিন্দুত থাকে। অৱশ্যে যিকোনো দুডাল পৰস্পৰ লম্বৰেখাক অনুপ্ৰস্থ আৰু সংযুগ্মী অক্ষ হিচাপে লৈও পৰাবৃত্তৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰিব পাৰি। কিন্তু এই বিষয়ে উচ্চতৰ শ্ৰেণীতহে আলোচনা কৰা হ'ব।

চিত্ৰ 11.31 ত প্ৰদৰ্শিত পৰাবৃত্তৰ সন্দৰ্ভত তলৰ কথাখিনি মন কৰিব লগা ঃ

1. দুয়োডাল অক্ষ সাপেক্ষে পৰাবৃত্ত প্ৰতিসম, কাৰণ যদি (x, y)বিন্দুটো পৰাবৃত্তৰ ওপৰত থাকে, তেনেহ'লে$(-x, y)$, $(x, -y)$ আৰু $(-x, -y)$ বিন্দুকেইটাও ইয়াৰ ওপৰত থাকে।
2. নাভিদ্বয় সদায় অনুপ্ৰস্থ অক্ষত থাকে। ধনাত্মক সহগ বিশিষ্ট পদটোৰ হৰৰ মানে অনুপ্ৰস্থ অক্ষ নিৰ্ণয় কৰে। উদাহৰণস্বৰূপে, $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ পৰাবৃত্তৰ অনুপ্ৰস্থ অক্ষ x অক্ষত আছে আৰু ইয়াৰ দীঘ 6 একক। আনহাতে $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{16}=1$ পৰাবৃত্তটোৰ অনুপ্ৰস্থ অক্ষ y অক্ষত থাকে আৰু ইয়াৰ দীঘ 10 একক।

11.6.3 *নাভি-লম্ব (Latus rectum)* পৰাবৃত্তৰ নাভি-লম্ব হ'ল, যিকোনো এটা নাভিৰ মাজেৰে অনুপ্ৰস্থ অক্ষত লম্বভাৱে অংকন কৰা আৰু প্ৰান্তবিন্দু পৰাবৃত্তটোৰ ওপৰত থকা ৰেখাখণ্ডটো।

উপবৃত্তত নিৰ্ণয় কৰাৰ দৰে আমি সহজে উলিয়াব পাৰোঁ যে পৰাবৃত্তৰ নাভি-লম্বৰ দীঘ হ'ব $\frac{2b^2}{a}$.

উদাহৰণ 14 নিম্ন প্ৰদত্ত পৰাবৃত্তৰ নাভি আৰু শীৰ্ষবিন্দুৰ স্থানাংক, উৎকেন্দ্ৰতা আৰু নাভিলম্বৰ দীঘ নিৰ্ণয় কৰাঁ ঃ

(i) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ (ii) $y^2-16x^2=16$

সমাধান (i) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ সমীকৰণটো প্ৰামাণিক সমীকৰণ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ৰ লগত তুলনা কৰি পোৱা যায় a=3, b=4 আৰু $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{9+16}=5$. গতিকে, নাভিদ্বয়ৰ স্থানাংক হ'ল (±5, 0) আৰু শীৰ্ষবিন্দু হ'ল (±3, 0)। আকৌ উৎকেন্দ্ৰতা $e=\frac{c}{a}=\frac{5}{3}$ আৰু নাভিলম্বৰ দীঘ $=\frac{2b^2}{a}=\frac{32}{3}$.

(ii) প্ৰদত্ত সমীকৰণটোৰ দুয়োফাল 16 ৰে হৰণ কৰি পোৱা যায়

$$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{1}=1$$

এতিয়া, প্ৰামাণিক সমীকৰণ $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ ৰ লগত তুলনা কৰি পোৱা যায় a=4, b=1আৰু $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{16+1}=\sqrt{17}$. সেয়েহে, নাভিদ্বয়ৰ স্থানাংক হ'ল $\left(0, \pm\sqrt{17}\right)$ আৰু শীৰ্ষবিন্দুৰ স্থানাংক হ'ল (0,±4)। লগতে ,উৎকেন্দ্ৰতা $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{17}}{4}$ আৰু নাভি-লম্বৰ দীঘ $=\frac{2b^2}{a}=\frac{1}{2}$।

উদাহৰণ 15 (0,±3) নাভি আৰু $\left(0, \pm\frac{\sqrt{11}}{2}\right)$ শীৰ্ষবিন্দু বিশিষ্ট পৰাবৃত্তৰ সমীকৰণ উলিওৱাঁ।

সমাধান যিহেতু নাভিদ্বয় y-অক্ষত আছে, পৰাবৃত্তটোৰ প্ৰামাণিক সমীকৰণ হ'ব

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

যিহেতু শীৰ্ষবিন্দু $\left(0,\ \pm\frac{\sqrt{11}}{2}\right)$, গতিকে $a=\frac{\sqrt{11}}{2}$ । আকৌ নাভিদ্বয় $(0,\pm 3)$ৰ পৰা পোৱা যায় $c=3$ আৰু

$b^2=c^2-a^2=\frac{25}{4}$. গতিকে সমীকৰণটো হ'ব

$$\frac{y^2}{\left(\frac{11}{4}\right)}-\frac{x^2}{\left(\frac{25}{4}\right)}=1 \text{ অৰ্থাৎ } 100y^2-44x^2=275$$

উদাহৰণ 16 $(0,\pm 12)$ নাভি আৰু নাভিলম্বৰ দৈৰ্ঘ্য 36 হ'লে, পৰাবৃত্তৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান $(0,\pm 12)$ নাভিৰ পৰা পোৱা যায় $c=12$ । নাভিলম্বৰ দৈৰ্ঘ্য $=\frac{2b^2}{a}=36$ বা, $b^2=18a$. গতিকে, $c^2=a^2+b^2$ সম্পৰ্কৰ পৰা, $144=a^2+18a$

বা, $\quad a^2+18a-144=0$

বা, $\quad a=-24,\ 6\quad$ (সমাধা কৰি)।

a ঋণাত্মক হ'ব নোৱাৰে, সেয়েহে $a=6$, $b^2=108$ । গতিকে পৰাবৃত্তটোৰ সমীকৰণ হ'ব $\frac{y^2}{36}-\frac{x^2}{108}=1$

অৰ্থাৎ, $3y^2-x^2=108$

অনুশীলনী 11.4

1ৰ পৰা 6 অনুশীলনীবোৰত দিয়া পৰাবৃত্তৰ নাভি, শীৰ্ষবিন্দুৰ স্থানাংক, উৎকেন্দ্ৰতা আৰু নাভি-লম্বৰ দীঘ নিৰ্ণয় কৰাঃ

1. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 2. $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{27}=1$ 3. $9y^2-4x^2=36$

4. $16x^2-9y^2=576$ 5. $5y^2-9x^2=36$ 6. $49y^2-16x^2=784$

7 ৰ পৰা 15 অনুশীলনীবোৰত, প্ৰদত্ত চৰ্ত সাপেক্ষে পৰাবৃত্তৰ সমীকৰণ উলিওৱা ঃ

7. শীৰ্ষবিন্দু $(\pm 2,0)$, নাভি $(\pm 3,0)$;
8. শীৰ্ষবিন্দু, $(0,\pm 5)$ নাভি $(0,\pm 8)$;
9. শীৰ্ষবিন্দু $(0,\pm 3)$ নাভি $(0,\pm 5)$;
10. নাভি $(\pm 5,0)$, অনুপ্ৰস্থ অক্ষৰ দীঘ 8;
11. নাভি $(0,\pm 13)$ সংযুগ্মী অক্ষৰ দীঘ 24;
12. নাভি $\left(\pm 3\sqrt{5},\ 0\right)$, নাভি-লম্বৰ দীঘ 8;

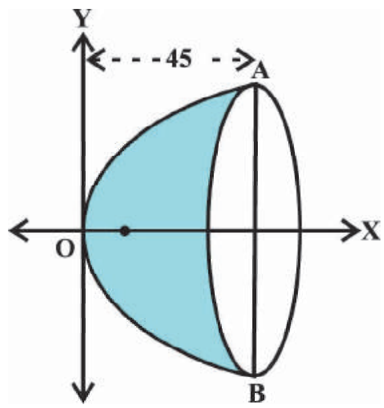
13. নাভি $(\pm 4,0)$, নাভি-লম্বৰ দীঘ 12;

14. শীৰ্ষবিন্দু $(\pm 7,0)$, $e=\frac{4}{3}$;

15. নাভি $\left(0,\pm\sqrt{10}\right)$, $(2,3)$ বিন্দুগামী।

বিবিধ উদাহৰণ

উদাহৰণ 17 চিত্ৰ11.33 ত প্ৰদৰ্শিত অধিবৃত্তাকাৰ দাপোণ এখনৰ শীৰ্ষবিন্দুৰপৰা নাভিলৈ দূৰত্ব 5 ছেমি। দাপোনখনৰ গভীৰতা 45 ছেমি হ'লে, A B ৰ দীঘ নিৰ্ণয় কৰাঁ।



চিত্ৰ 11.33

সমাধান যিহেতু শীৰ্ষবিন্দুৰ পৰা নাভিলৈ দূৰত্ব 5 ছেমি, গতিকে $a=5$। মূলবিন্দু শীৰ্ষবিন্দুত আৰু অক্ষ দাপোণখনৰ অক্ষৰ দিশত ল'লে অধিবৃত্তটোৰ সমীকৰণ হ'ব

$y^2=4(5)x=20x$

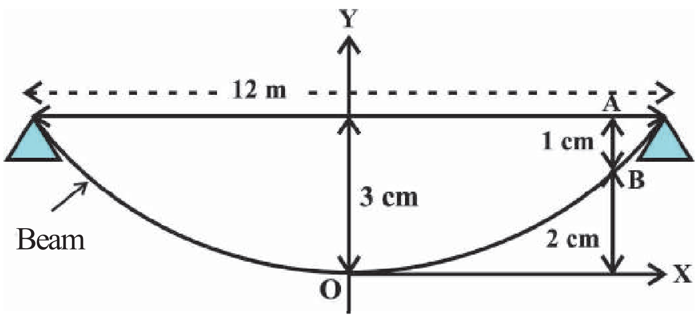
সেয়েহে, $x=45$ ৰ বাবে $y^2=20\times 45=900$

বা, $y=\pm 30$

গতিকে, $AB=2y=2\times 30=60$ ছেমি।

উদাহৰণ 18 এডাল বিম (beam) দুয়ো মূৰে ঠেকা দি ৰখা হৈছে, ঠেকা দুটাৰ মাজৰ দূৰত্ব 12 মিটাৰ। যিহেতু বিমডালৰ ওজন কেন্দ্ৰত ঘনীভূত, কেন্দ্ৰটো 3 ছেমি তললৈ নামি আহিছে আৰু বিমডাল আকাৰত এটা অধিবৃত্ত হৈছে। বিমডাল যি স্থানত 1 ছেমি তললৈ নামি আহিছে, কেন্দ্ৰৰ পৰা সেই স্থানলৈ দূৰত্ব নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান বিমডালৰ নিম্নতম বিন্দুটোক শীৰ্ষবিন্দু আৰু অক্ষডাল উলম্বভাৱে লোৱা হল। চিত্ৰ 11.34 ত দেখুওৱাৰ দৰে স্থানাংক অক্ষ লোৱা হ'ল।



চিত্ৰ 11.34

অধিবৃত্তটোৰ সমীকৰণটো হ'ব $x^2=4ay$। যিহেতু $\left(6,\ \frac{3}{100}\right)$ বিন্দুটো অধিবৃত্তটোৰ ওপৰত আছে, গতিকে

$$(6)^2=4a\left(\frac{3}{100}\right)$$

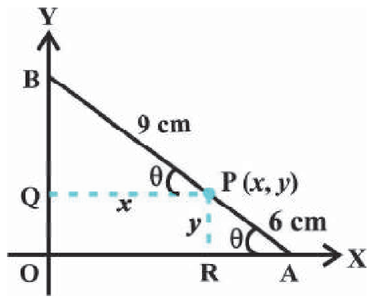
অৰ্থাৎ $a=\dfrac{36\times 100}{3\times 4}=300$ মিটাৰ।

ধৰা হ'ল বিমডাল $AB = \frac{1}{100}$ মিটাৰ তললৈ নামি আহিছে (A স্থানৰ পৰা B স্থানলৈ) Bৰ স্থানাংক হ'ব $\left(x, \frac{2}{100}\right)$। গতিকে,

$$x^2 = 4 \times 300 \times \frac{2}{100} = 24$$

অৰ্থাৎ $x = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ মিটাৰ।

উদাহৰণ 19 15 ছেমি দীঘৰ AB দণ্ড এডাল, A বিন্দু X-অক্ষত আৰু বিন্দু Y অক্ষত থকাকৈ, অক্ষ দুডালৰ মাজত আছে। AP=6 ছেমি হোৱাকৈ দণ্ডডালৰ ওপৰত P(x,y) বিন্দু লোৱা হ'ল। দেখুওৱা যে P ৰ কক্ষপথ এটা উপবৃত্ত হ'ব।



চিত্ৰ 11.35

সমাধান চিত্ৰ 11.35 ত অংকন কৰা AB দণ্ডই XOৰ লগত θ কোণ কৰি আছে। ABৰ ওপৰত P(x,y) বিন্দুটো এনেভাৱে আছে যে
AP=6 ছেমি, PB=9 ছেমি।
Pৰ পৰা Xঅক্ষ আৰু Yঅক্ষলৈ যথাক্ৰমে PR,PQ লম্ব টনা হ'ল।

ΔPBQ ৰ পৰা $\cos\theta = \frac{x}{9}$,

ΔPRA ৰ পৰা $\sin\theta = \frac{y}{6}$

যিহেতু $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

গতিকে $\left(\frac{x}{9}\right)^2 + \left(\frac{y}{6}\right)^2 = 1$

বা, $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{36} = 1$

দেখা গ'ল যে Pৰ কক্ষপথ এটা উপবৃত্ত।

একাদশ অধ্যায়ৰ বিবিধ অনুশীলনী

1. এখন অধিবৃত্তাকাৰ প্ৰতিফলকৰ ব্যাস 20 ছেমি আৰু গভীৰতা 5 ছেমি হ'লে, নাভি নিৰ্ণয় কৰা।
2. অধিবৃত্তাকাৰ আকৃতিৰ বক্ৰপৃষ্ঠ (arch) এটাৰ উচ্চতা 10 মিটাৰ আৰু ইয়াৰ ভূমি তলখন 5 মিটাৰ বহল। অধিবৃত্তটোৰ শীৰ্ষবিন্দুৰ পৰা 2 মিটাৰ দূৰত্বত বক্ৰপৃষ্ঠটো কিমান বহল হ'ব?
3. সুষম ওজনৰ ওলোমা দলং এখনৰ কেবল (cable)ডাল অধিবৃত্তাকাৰ আকৃতিত ওলমি আছে। দলংখনত থকা ৰাস্তাটো 100 মিটাৰ দীঘল আৰু ইয়াক কেবলৰ লগত উলম্ব তাঁৰ সংযোগ কৰি ওলমাই ৰখা হৈছে। এনেধৰণৰ উলম্ব তাঁৰবোৰৰ আটাইতকৈ দীঘল আৰু আটাইতকৈ চুটি তাঁৰ দুডালৰ জোখ যথাক্ৰমে 30 মিটাৰ আৰু 6 মিটাৰ। মধ্যবিন্দুৰ পৰা 18 মিটাৰ দূৰত্বত ৰাস্তা আৰু কেবলৰ লগত সংলগ্ন তাঁৰ ডালৰ দীঘ নিৰ্ণয় কৰাঁ।

4. এটা বক্র-পৃষ্ঠৰ আকৃতি অৰ্ধ উপবৃত্তাকাৰ। এইটো 8 মিটাৰ বহল আৰু কেন্দ্ৰত ইয়াৰ উচ্চতা 2 মিটাৰ। এটা মূৰৰ পৰা 1.5 মিটাৰ দূৰত্বত উচ্চতা উলিওৱাঁ।
5. 12 ছেমি দীঘল দণ্ড এডালে অক্ষদ্বয়ত এনেভাৱে বিচৰণ কৰে যে মূৰ দুটা সদায় অক্ষদ্বয়ত লাগি থাকে। x-অক্ষত স্পৰ্শ কৰি থকা মূৰটোৰ পৰা 3 ছেমি দূৰত দণ্ডডালৰ ওপৰত থকা বিন্দুটোৰ কক্ষপথৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰাঁ।
6. $x^2 = 12y$ অধিবৃত্তটোৰ শীৰ্ষবিন্দুৰ লগত নাভি-লম্বৰ প্ৰান্তবিন্দু দুটা সংযোগ কৰি গঠন কৰা ত্ৰিভুজটোৰ কালি উলিওৱাঁ।
7. দৌৰৰ বাবে নিৰ্ধাৰিত পথেৰে দৌৰি থকা মানুহ এজনে লক্ষ্য কৰিলে যে পতাকা-খুঁটি দুটাৰ পৰা তেওঁৰ দূৰত্বৰ সমষ্টি সদায় 10 মিটাৰ আৰুপতাকা-খুঁটি দুটাৰ মাজৰ দূৰত্ব 8 মিটাৰ। মানুহজনে দৌৰা পথটোৰ সমীকৰণ উলিওৱাঁ।
8. $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তটোত শীৰ্ষবিন্দু থকাকৈ এটা সমবাহু ত্ৰিভুজ অংকন কৰা হ'ল। যদি এটা শীৰ্ষ বিন্দু অধিবৃত্তটোৰ শীৰ্ষবিন্দুত থাকে, তেন্তে ত্ৰিভুজটোৰ বাহুৰ দীঘ নিৰ্ণয় কৰা।

সাৰাংশ

অধ্যায়টোত আলোচিত বিষয়-বস্তুৰ সংক্ষিপ্ত তালিকা ঃ

- এটা নিৰ্দিষ্ট বিন্দুৰপৰা সমদূৰত্বত অৱস্থিত সমতলীয় বিন্দুবোৰৰ সংহতিটো এটা বৃত্ত।
- (h, k) কেন্দ্ৰ আৰু r ব্যাসাৰ্ধ বিশিষ্ট বৃত্তৰ সমীকৰণ হ'ল
$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$
- এখন সমতলত থকা এটা নিৰ্দিষ্ট বিন্দু আৰু এডাল নিৰ্দিষ্ট সৰলৰেখাৰ পৰা সমদূৰত্বত অৱস্থিত সমতলীয় বিন্দুৰ সংহতিটো হ'ল এটা অধিবৃত্ত।
- $(a, 0)$ বিন্দুত নাভি থকা $(a>0)$ আৰু $x = -a$ নিয়ামিকা বিশিষ্ট অধিবৃত্তৰ সমীকৰণ হ'ল $y^2 = 4ax$ ।
- অক্ষৰ লম্বভাৱে নাভিৰ মাজেৰে অংকিত আৰু প্ৰান্তবিন্দু বক্ৰটোৰ ওপৰত থকা ৰেখাখণ্ডক অধিবৃত্তটোৰ নাভি লম্ব বোলা হয়।
- $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তৰ নাভি-লম্বৰ দীঘ হ'ল $4a$.
- এখন সমতলত থকা প্ৰতিটো বিন্দুৰ দুটা নিৰ্দিষ্ট বিন্দুৰ পৰা দূৰত্বৰ যোগফল এটা ধ্ৰুৱক হ'লে, এনেধৰণৰ আটাইবোৰ বিন্দুৰ সংহতিটোক এটা উপবৃত্ত বোলা হয়।
- x-অক্ষত নাভি অৱস্থিত উপবৃত্তৰ সমীকৰণ হ'ল $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
- যিকোনো এটা নাভিৰ মাজেৰে মুখ্য অক্ষৰ লম্বভাৱে অংকন কৰা আৰু বক্ৰটোৰ ওপৰত প্ৰান্তবিন্দু থকা ৰেখাখণ্ডক উপবৃত্তৰ নাভি-লম্ব বোলা হয়।

- $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তৰ নাভি-লম্বৰ দীঘ হ'ল $\frac{2b^2}{a}$ ।
- এটা নাভি আৰু কেন্দ্ৰৰ মাজৰ দূৰত্ব আৰু এটা শীৰ্ষবিন্দু আৰু কেন্দ্ৰৰ মাজৰ দূৰত্বৰ অনুপাতক উপবৃত্তৰ উৎকেন্দ্ৰতা বোলা হয়।
- এখন সমতলত থকা প্ৰতিটো বিন্দুৰ দুটা নিৰ্দিষ্ট বিন্দুৰপৰা দূৰত্বৰ অন্তৰ সদায় এটা ধ্ৰুৱক হ'লে, এনেধৰণৰ আটাইবোৰ বিন্দুৰ সংহতিক এটা পৰাবৃত্ত বোলা হয়।
- x-অক্ষত নাভি অৱস্থিত পৰাবৃত্তৰ সমীকৰণ হ'ল $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
- অনুপ্ৰস্থ অক্ষৰ লম্বভাৱে যিকোনো এটা নাভিৰ মাজেৰে অংকিত আৰু বক্ৰৰ ওপৰত প্ৰান্ত বিন্দু অৱস্থিত ৰেখাখণ্ডক পৰাবৃত্তৰ নাভি-লম্ব বোলা হয়।
- $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পৰাবৃত্তৰ নাভি-লম্বৰ দীঘ হ'ল $\frac{2b^2}{a}$ ।
- কেন্দ্ৰৰ পৰা এটা নাভিলৈ দূৰত্ব আৰু কেন্দ্ৰৰ পৰা এটা শীৰ্ষবিন্দুলৈ দূৰত্বৰ অনুপাতক পৰাবৃত্তৰ উৎকেন্দ্ৰতা বোলা হয়।

ঐতিহাসিক টোকা

গণিতবিজ্ঞানৰ আটাইতকৈ প্ৰাচীন বিভাগসমূহৰ এটা হ'ল জ্যামিতি। গ্ৰীক্ জ্যামিতিবিদসকলে তত্ত্বগতভাৱে আৰু ব্যাৱহাৰিক দিশত যথেষ্ট গুৰুত্বপূৰ্ণ বহুতো বক্ৰৰ ধৰ্মসমূহ অধ্যয়ন কৰিছিল। **ইউক্লিডে** (Euclid) তেওঁৰ জ্যামিতি বিষয়ক কৰ্মৰাজি প্ৰায় খ্ৰীষ্টপূৰ্ব 300 মানত লিপিৱদ্ধ কৰিছিল। ভৌতিক দিশৰ বিবেচনাৰে নিৰ্ধাৰিত কিছুমান স্বতঃসিদ্ধ (axioms)ৰ ওপৰত ভিত্তি কৰি জ্যামিতীয় আকৃতিৰ চিত্ৰসমূহ (figures) শ্ৰেণীবদ্ধ প্ৰথম তেৱেঁই কৰিছিল। প্ৰাচীন কালৰ ভাৰতীয় বা গ্ৰীকসকলে জ্যামিতি অধ্যয়নত বীজগণিতীয় পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰা নাছিল। গ্ৰীকসকলৰ আৰু শুল্বসূত্ৰ, ইত্যাদিত ব্যৱহৃত জ্যামিতি অধ্যয়নৰ ধাৰাটো প্ৰায় তেৰশ বছৰমান অব্যাহত আছিল। খ্ৰীষ্টপূৰ্ব 200 চনত **এপ'লনিয়াছে** (Apollonius) 'শংকু' (The Conic) নামৰ গ্ৰন্থ এখন লিখিছিল। গ্ৰন্থখন হ'ল শাংকৱ ছেদ (Conic section) সম্পৰ্কে। ইয়াত সন্নিবিষ্ট বহুত গুৰুত্বপূৰ্ণ ধৰ্ম ওঠৰটা শতিকাজুৰি কোনেও সালসলনি কৰিব পৰা নাছিল।

আধুনিক যুগৰ বিশ্লেষণাত্মক জ্যামিতিক গণিতজ্ঞ **ৰেনে ডেকাৰ্টৰ** (Rene Descartes, 1596-1650) নামেৰে **কাৰ্টেজীয়** (Cartesian) জ্যামিতি বুলি কোৱা হয়। তেওঁৰ সংশ্লিষ্ট গ্ৰন্থ **'লা জিয়োমেত্ৰি'** (La Geometrie) খন 1637 চনত প্ৰকাশিত হৈছিল। কিন্তু, ইতিমধ্যে **'পিয়াৰে-দা-ফাৰ্মাই** (Pierre de Fermat, 1601-1665) বিশ্লেষণাত্মক জ্যামিতিৰ মৌলিক নীতি আৰু পদ্ধতিসমূহ আৱিষ্কাৰ কৰিছিল। দুৰ্ভাগ্যজনকভাৱে ফাৰ্মাৰ এই বিষয়ক গ্ৰন্থ 'Ad Locus Planos et So LIDOS Isagoge' (Introduction to Plane and solid Loci) খন তেওঁৰ মৃত্যুৰ পিছত 1679 চনতহে প্ৰকাশ হয়। সেয়েহে ডেকাৰ্টক বিশ্লেষণাত্মক জ্যামিতিৰ অনন্য আৱিষ্কাৰক হিচাপে গণ্য কৰা হয়।

আইজাক বেৰোৱে (Isaac Barrow) কাৰ্টেজীয় পদ্ধতিৰ ব্যৱহাৰ এৰাই চলিছিল। **নিউটনে** (Newton) বক্ৰৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয়ৰ বাবে **'অনিৰ্ণিত সহগ'** (undetermined coefficients) ৰ পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰিছিল। তেওঁ ধ্ৰুৱীয় আৰু দ্বিধ্ৰুৱীয় স্থানাংক পদ্ধতি সমন্বিতে বিভিন্ন স্থানাংক পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰিছিল। **লাৱনিৎজে** (Leibnitz) **'ভুজ'** (abscissa), **'কোটি'** (ordinate) আৰু 'স্থানাংক' শব্দকেইটা ব্যৱহাৰ কৰিছিল। 1700 চন মানত L' Hospital এ বিশ্লেষণাত্মক জ্যামিতিৰ ওপৰত এখন দৰকাৰী পাঠ্যপুথি লিখিছিল।

1729 চনত **ক্লেইৰটে** (Clairaut) প্ৰথম দূৰত্ব সূত্ৰ নিৰ্ণয় কৰে, অৱশ্যে যথেষ্ট খেলিমেলিভাৱে। তেৱেঁই ৰৈখিক সমীকৰণৰ ছেদাংশ আৰ্হিটোৱো নিৰ্ণয় কৰে। **ক্ৰেমাৰে** (Cramer, 1750) দুডাল অক্ষ ব্যৱহাৰ কৰে আৰু বৃত্তৰ সমীকৰণ $(y-a)^2+(b-x)^2=r$ আৰ্হিত প্ৰকাশ কৰে। তেওঁৰ সময়ছোৱাত বিশ্লেষণাত্মক জ্যামিতিৰ আটাইতকৈ ভাল ব্যাখ্যা তেৱেঁই দাঙি ধৰে। **মংগে** (Monge) 1781 চনত সৰল ৰেখাৰ 'বিন্দু-প্ৰৱণতা' আৰ্হিৰ সমীকৰণ $y-y^{/}=a(x-x^{/})$ আৰু দুডাল ৰেখাৰ লম্ব হোৱাৰ চৰ্ত $aa^{/}+1=0$ উলিয়ায়।

S.F. Lacroix (1765-1843) এজন বহু সংখ্যক পাঠ্যপুথিৰ লিখক আছিল, কিন্তু তেওঁৰ বিশ্লেষণাত্মক জ্যামিতিৰ ওপৰত লিখা-মেলা সিচঁৰতি হৈ থকা অৱস্থাত পোৱা যায়। তেওঁ সৰলৰেখাৰ 'দুটা-বিন্দু' আৰ্হিৰ সমীকৰণ

$$y-\beta=\frac{\beta^{/}-\beta}{\alpha'-\alpha}(x-\alpha)$$

উলিয়াইছিল। লগতে, (α,β) বিন্দুৰ পৰা $y=ax+b$ ৰেখালৈ লম্বদূৰত্ব $\frac{(\beta-a\alpha-b)}{\sqrt{1+a^2}}$ হিচাপে নিৰ্ণয় কৰিছিল। দুডাল ৰেখাৰ মাজৰ কোণ নিৰ্ণয়ৰ তেওঁৰ সূত্ৰটো হ'ল $\tan\theta=\left(\frac{a^{/}-a}{1+aa^{/}}\right)$। এইটো অৱশ্যে আশ্চৰ্যজনক যে বিশ্লেষণাত্মক জ্যামিতিৰ উদ্ভাৱনৰ পৰা 150 বছৰতকৈও অধিক কালৰ পিছতহে বিষয়টোৰ আৱশ্যকীয় প্ৰাথমিক সূত্ৰবোৰ আৱিষ্কাৰ হৈছিল। 1818 চনত C. Lame নামৰ এজন চিভিল ইঞ্জিনিয়াৰে E=0 আৰু $E^{/}=0$ দুটা কক্ষৰ মাজেৰে যোৱা বক্ৰৰ সমীকৰণ $mE+m^{/}E^{/}=0$ হিচাপে নিৰ্ণয় কৰিছিল।

গণিত আৰু বিজ্ঞানৰ বহুতো আৱশ্যকীয় আৱিষ্কাৰ শাংকৱ-ছেদনৰ সৈতে জড়িত হৈ আছে। শাংকৱ-ছেদনৰ নিজস্ব সৌন্দৰ্যৰ বাবেই গ্ৰীকসকলে, প্ৰধানকৈ **আৰ্কিমিডিছ** (Archimedes, 287 – 212 B.C.) আৰু **এপ'লনিয়াছে** (200 B.C.) এই বিষয়টো অধ্যয়ন কৰিছিল। বৰ্তমান সময়ৰ বহিঃমহাকাশ (outer space)ৰ তথ্য সংগ্ৰহ আৰু পাৰমাণৱিক কণিকাৰ বৈশিষ্ট সম্পৰ্কীয় গৱেষণাত এই বক্ৰসমূহ আৱশ্যকীয় আছিলা।

— ❖ —