باب-3

اعداد کا کھیل

اجزائے ضربی یا مقسوم علیہ (Factors) اور ضروب (اصنعاف) (Multiple)

آیئے دیکھیں عدد 4 کن کن اعداد سے پوری طرح تقسیم ہوتی ہے۔ اسے تقسیم دے کر دیکھیں۔

4) 4 (1	3) 4 (1	2) 4 (2	1) 4 (4
-4	3	-4	-4
0	1	0	0
خارج تقسیم =1	خارج تقسیم = 1	خارج تقسیم = 2	خارج تقسیم = 4
باقی = 0	باقی = 1	باقی = 0	باقی = 0

اب ہم عدد 4 کو ضرب کی صورت میں لکھ سکتے ہیں:

$$4 = 1 \times 4 \quad 4 = 2 \times 2 \quad 4 = \times 1$$

اس طرح ہم پاتے ہیں کہ 2.1 کے اور 4 عدد 4 کو پورے پورے مقسوم علیہ ہیں۔ اس لئے یہ اعداد 4 کے اجزائے ضربی (Factor) ہیں۔ اسی طرح آپ بتائیں کہ عدد 8 کے مقسوم علیہ کون کون ہیں۔

کسی عدد کا اجزائے ضربی اس کا پورا پورا مقسوم علیہ ہوتا ہے)

2.1 و 4 کے پہاڑے میں 4 آتا ہے اس لئے عدد 4 عدد 1,2 اور 4 ہر ایک کا مضروب (Multiple) ہے۔

سرگرمی 1 (حرکت وعمل)

ہم جماعت کے بچوں کے تعداد کے مطابق کارڈ لیتے ہیں۔ جس پر - - - 4 ,3 ,2 ,1 وغیرہ اعداد لکھے ہوں ہر ایک عدد کارڈ میں ایک دھاگا باندھ دیتے ہیں۔ جسے گلے میں آسانی سے لٹکایا جا سکے۔ کارڈوں کو ہر ایک بچوں

کے بیچ بانٹ کراسے گلے میں پہننے کو کہیں گے اور پھر انھیں ایک دائرہ نما گول گھیرے میں کھڑا ہونے کے لئے کہیں اب ایک بچے کو بیچ میں بلائیں۔ مان لیا کہ عدد 18 نمبر کا کارڈ والا بچہ بیچ میں آیا۔ پھر بچوں سے کہیں گے کہ وہ بچے بھی بیچ میں آئیں جن کا نمبر کارڈ اس نمبر کارڈ کو پورا پورا تقسیم کرتا ہے، بچوں کو نمبر کارڈوں سے بیچ میں آئے نمبر کو تقسیم کرنے والے عدد کو تختہ سیاہ پر نوٹ کروائیں۔ اس طرح عدد 18 کو مکمل طور پر تقسیم کرنے والے عدد ہوں گے۔ 18 اور 9, 6, 3, 2, 1۔ یہ سارے اعداد 18 کے اجزائے ضربی ہیں۔ اب چارٹ بنائیں۔

اجزائے ضربی	عدد
1, 2, 6, 9 ,18	18
	12
	25

☆ سوچئے اور بتایئے ایسے کونسا عدد ہیں جس عدد والے بچے کو بیچ میں بلانے پر ایک بھی دوسرے بچے گھیرے کے بیچ میں نہ آئیں؟۔

سرگرمی 2. (حرکت و عمل)

یہ کھیل دو آدمیوں، مان لیجئے A اور B کے ذریعہ کھیلا جاسکتا ہے۔ آپ نیچے دیئے گئے کارڈوں کی طرح نمبر کارڈوں کو فرش پر یا ٹیبل پر پھیلالیں۔

1	2	3	4	6	7
8	9	10	11	13	14
15	16	17	18	20	21
22	23	24	25	27	28
29	30	31	32	34	35
36	37	38	39	41	42
43	44	45	46	48	49
50					

مرحلہ:

(a) فیصلہ کیجئے کہ پہلے کون کھیلے گا۔A یا B

(b) مان لیجئے A پہلے کھیلتا ہے وہ میز سے ایک کارڈ اٹھالیتا ہے اور اپنے نزدیک رکھ لیتا ہے۔مان لیجئے اس کارڈ ر 28 لکھا ہے۔

(c) کھلاڑی B اب وہ سبھی کارڈ اٹھاتا ہے جن پر A کے کارڈ پر لکھے عدد (یعنی 28) کیا جزائے ضربی لکھے ہیں اور انہیں اپنے نزدیک ایک ڈھیر میں رکھ دیتا ہے۔

(d) پھر کھلاڑی B میز پر رکھے کارڈوں میں سے ایک کارڈ اٹھالیتا ہے۔اب میز پر بچے کارڈوں سے A وہ سبھی کارڈ اٹھاتا ہے، جن پر B کے کارڈ کے عدد کے اجزائے ضربی لکھے ہیں۔

(e) یہ کھیل تب تک جاری رہتا ہے جب تک کہ سبھی کارڈ نہ اٹھالیا جائے۔

(d) A اپنے پاس رکھے کارڈوں پر لکھے اعداد کو جوڑتا ہے اور B بھی اپنے پاس رکھے کارڈوں پر لکھے اعداد کو جوڑتا ہے۔جس کھلاڑی کا جوڑ زیادہ ہوگا اسے ہی جیتا ہوا مانا جائے گا۔کارڈوں کی تعداد کو بڑھا کر اس کھیل کو

اورزیادہ لطف انگیز بنایا جاسکتا ہے۔

اس کھیل کو اپنے دوست کے ساتھ کھیلئے۔کیا آپ اس کھیل کو جیتنے کا کوئی قاعدہ معلوم کر سکتے ہیں۔

خود کر کے دیکھئے اور نتیجہ نکالئے:

8 کے کچھ مضروب (multiple) دیئے ہیں ....,8, 16, 24 آگے آپ لکھئے؟

اسی طرح 6 کے 8 مضروب لکھئے۔

آپ پاتے ہیں کہ کسی عدد کا سب سے چھوٹا مضروب وہ عدد خود بھی ہوتا ہے، اسی طرح 15 کے مختلف اجزائے ضربی ہیں 3 x 5 x 15 x 1, 5 x 3

اس لئے عدد 15 ,5 ,3 عدد 15 کے اجزائے ضربی ہیں۔اسی طرح آپ 20 کے مختلف اجزائے ضربی لکھئے۔

کیا آپ اوپر دیئے گئے مثالوں کی بنیاد پر کہہ سکتے ہیں کہ کسی عدد کا سب سے بڑا اجزائے ضربی وہ عدد خود ہوتا ہے۔ ہاں/نہیں

کیا کوئی ایسا عدد ہے جو ہر ایک عدد کے اجزائے ضربی کی صورت میں آتے ہیں۔

$$6 = 1 \times 6$$

$$7 = 1 \times 7$$

$$12 = 1 \times 12$$

کیا ہم کہہ سکتے ہیں کہ ہر ایک عدد کا اجزائے ضربی ہے؟ ہاں/نہیں۔دوسرے اعداد کے لئے اسے جانچئے

جب ہم 9 x 2 =18 لکھتے ہیں تو ہم کہتے ہیں کہ اور 9 عدد 18 کے اجزائے ضربی ہیں۔ہم یہ بھی کہتے ہیں کہ 18 عدد 2،9 کا مضروب ہیں۔9 x 2 = 18 مضروب

اجزائے ضربی

اس طرح آپ 20 کے اجزائے ضربی لکھئے یہ بھی بتایئے کہ 20 کن کن اعداد کا مضروب ہیں۔ہم کہہ سکتے

ہیں کہ ایک عدد اپنے ہر ایک اجزائے ضربی کا ایک مضروب ہوتا ہے۔

اوپر دیئے گئے مثالوں کی بنیاد پر ذیل کے قول کی جانچ کیجئے۔

1. ایک عدد کے اجزائے ضربی Factor کی تعداد متعین (محدود) ہوتی ہے۔ ہاں/نہیں۔

وجہ...

2. کس عدد کے مضروب (multiple) کی تعداد بھی متعین (محدود) ہوتی ہے۔ ہاں/نہیں

وجہ...

کامل اعداد (Perfect Number)

جیسے۔ 6 کے سبھی اجزائے ضربی = 3 ,2 ,1 اور 6 ہیں۔

ان کے اجزائے ضربی کا حاصل جوڑ = $1 + 2 + 3 + 6 = 12 = 2 \times 6$ یعنی 6 کے سبھی اجزائے ضربی کا حاصل جوڑ 6 کا دگنا ہے۔

پھر 28 کے سبھی اجزائے ضربی = ,1 ,2 ,4 ,7 ,14 اور 28 ہیں۔

ان اجزائے ضربی کا حاصل جوڑ = $1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 56 = 2 \times 28$

یعنی 28 کے سبھی اجزاء ضربی کا حاصل جمع 28 کا دگنا ہے۔

وہ سبھی عدد جس کے سبھی اجزائے ضربی کا جوڑ اس عدد کا دگنا ہو ایک مکمل عدد (Perfect number) کہلاتا ہے۔ یہاں 6 اور 28 مکمل اعداد ہیں۔

خود کریں:

کیا 12 ایک مکمل عدد ہیں؟

3.2 منقسم یا مرکب (Comound) اور غیر منقسم یا مفرد (Prime) اعداد

عدد	اجزائے ضربی (مقسوم علیہ)
1	1
2	1,2
3	1,3
4	1,2,4
5	1,5
6	1,2,3,6
7	1,7
8	1,2,4,8
9	1,3,9
----	----

مندرجہ بالا جدول کو دیکھنے سے پتا چلتا ہے کہ تین طرح کے اعداد ہیں۔ وہ اعداد:

i. جن کا صرف ایک جز ضربی ہوتا ہے۔

ii. جن کے صرف دو اجزائے ضربی ہوتے ہیں۔

iii. جن کے دو سے زائد اجزائے ضربی ہوتے ہیں۔

نتیجہ:

☆ جن کا صرف ایک جز ضربی ہے وہ 1 ہے۔ یہ نہ تو منقسم ہے اور نہ غیر منقسم

☆ جن کے صرف دو اجزائے ضربی ہیں وہ اعداد ہیں۔

17,13,11,7,5,3,2 .... ان اعداد کو غیر منقسم یا مفرد عدد (Prime number) کہتے ہیں۔

☆ جن کے دو سے زائد اجزائے ضربی ہوتے ہیں وہ اعداد ہیں۔

16,15,14,12,10,9,8,6,4 .... ان اعداد کو منقسم یا مرکب (Composite) عدد کہتے ہیں۔

غیر منقسم اعداد کو چھانٹنے کا ایک آسان طریقہ یونانی ماہر ریاضی Eratosthernes نے تیسری صدی قبل مسیح میں دریافت کی۔ اس کا یہ طریقہ ایریٹوس تھینس کی چھلنی (Sieve of Eratostheres) کہلاتی ہے۔ پہلے ہم 1 سے 100 تک کے مثبت اعداد صحیح کا جدول بناتے ہیں۔ جیسا کہ نیچے دیا گیا ہے۔

ہم 1 کو کاٹ دیتے ہیں۔ کیونکہ ہم جانتے ہیں کہ 1 غیر منقسم عدد نہیں ہے۔ اب ہم 2 پر دائرہ کھینچتے ہیں اور 2 کے ہر مضروب multiple یعنی 8 ,6 ,4 وغیرہ کو کاٹ دیتے ہیں۔ جیسا کہ نیچے کیا جارہا ہے۔

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	99	~~100~~

اگلی عدد جو نہیں کاٹی گئی ہے 3 ہیں۔ اس لئے 3 کے ہر ایک مضروب یعنی 15 ,12 ,9 ,6 وغیرہ کو کاٹ دیتے ہیں۔

ہم یہ عمل تب تک جاری رکھتے ہیں جب تک کہ ہر ایک عدد یا تو کٹ جائے یا اس پر دائرہ لگ جائے۔

جدول میں دائرہ والے سبھی اعداد وغیرہ منقسم ہیں۔ 1 کو چھوڑ کر کاٹ دیئے گئے سبھی اعداد منقسم یا مرکب ہیں۔

3 اور 5 کے درمیان صرف ایک منقسم عدد 4 ہے اور 5 اور 7 کے درمیان صرف ایک منقسم عدد 6 ہے۔

11 اور 13 کے درمیان صرف ایک منقسم عدد ہے۔ وہ ہے 12۔ اس طرح کے غیر منقسم اعداد کے جوڑے کو جن کے

درمیان صرف ایک ہی منقسم عدد ہو، جڑواں غیر منقسم (Twinsprime) کہتے ہیں۔

خود کریں: 1اور100 کے درمیان سبھی غیر منقسم جوڑوں کو لکھیے۔

مثال 1: 42 کے سبھی اجزائے ضربی کو معلوم کیجئے

حل: ہم دیکھتے ہیں کہ:

$$42 = 1 \times 42 \quad , \quad 42 = 2 \times 21$$

$$42 = 3 \times 14 \quad , \quad 42 = 6 \times 7$$

$$42 = 7 \times 6$$

یہاں رک جایئے کیونکہ 6اور 7 پہلے ہی آچکا ہے۔اس طرح 42 کے سبھی اجزائے ضربی

1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42, ہیں۔

مثال 2:

81 کے اجزائے ضربی معلوم کیجئے:

حل: $81 = 1 \times 81 \quad , \quad 81 = 3 \times 27 \quad , \quad 81 = 9 \times 9$

کیونکہ دونوں اجزائے ضربی (9) یکساں ہیں۔اس طرح مطلوبہ

اجزائے ضربی 1,2,9,27,81 ہیں۔

مثال 3: کیا12 ،عدد8736 کا جز ضربی ہے؟

حل: اگر 12 عدد8736 کا ایک جز ضربی ہیں تو8736 میں 12 کی تقسیم پورا پورا جانا چاہئے۔

```
12) 8736 (728
   -84
   ----
     33
    -24
    ----
      96
     -96
     ----
       0
```

کیونکہ باقی 0 ہے یعنی 12,8736 سے مکمل طور پر تقسیم پذیر ہے۔ اس لئے 12 عدد 8736 کا ایک جز ضربی ہے۔

سوالنامہ - 3.1

1. 15 کے سبھی اجزائے ضربی لکھیں۔
2. 64 کے سبھی اجزائے ضربی لکھیں۔
3. ذیل میں ہر ایک کے سبھی اجزائے ضربی لکھیں۔

(I) 36 (II) 45 (III) 78 (IV) 125 (V) 144

4. 14 کا مضروب (multiple) لکھیں
5. 18 کے مضروب لکھیں۔
6. ذیل میں ہر ایک کے پہلے پانچ مضروب لکھیں۔

(I) 4 (II) 12 (III) 30 (IV) 24 (V) 50

7. سب سے چھوٹا غیر منقسم عدد بتائیں۔
8. جفت غیر منقسم عدد بتائیں۔
9. تین غیر منقسم جوڑے کی مثال دیجئے۔
10. ذیل میں کون سے غیر منقسم عدد ہیں؟

(a) 23 (b) 28 (c) 42 (d) 9 (e) 31

11. سب سے چھوٹا مرکب عدد بتائیں۔
12. 100 سے کم 5 لگاتار منقسم اعداد لکھئے جن کے درمیان کوئی غیر منقسم عدد نہ ہو۔
13. کسی عدد کے اکائی جگہ پر 5 ہے۔ اگر وہ عدد 150 اور 200 کے درمیان کی ہوں تو وہ منقسم ہوگا یا غیر منقسم۔

14. 10 سے بڑے کسی عدد کے غیر منقسم ہونے کے لئے اس کے اکائی کے جگہ پر کون کون سے ہندسہ ہوسکتے ہیں۔

15. کیا کوئی ایسا بھی عدد ہے جس کا کوئی بھی جز ضربی نہ ہو۔؟

16. 1 اور 100 کے درمیان صرف دو کامل اعداد ہیں، وہ کون کون سے ہیں؟

17. ذیل میں ہر ایک عدد کے دو طاق غیر منقسم عدد کے جوڑ کی شکل میں لکھیں۔

(I) 32 (II) 40 (III) 56 (IV) 80

18. 16 سے چھوٹے سبھی غیر منقسم اور منقسم اعداد الگ الگ لکھیں۔

19. کیا 1729 غیر منقسم عدد ہیں۔

20. مندرجہ ذیل میں جو قول صحیح ہیں اس کے آگے صحیح (✓) کا نشان اور جو غلط ہوں اس کے آگے (✗) غلط کا کا نشان لگائیں۔

(i) وہ عدد جس کا صرف ایک مقسوم علیہ ہوتا ہے، وہ عدد 1 ہیں۔

(ii) سب سے چھوٹا جفت غیر منقسم عدد 2 ہے۔

(iii) سب سے چھوٹا منقسم عدد 6 ہیں۔

(iv) دو غیر منقسم اعداد کا جوڑ جفت عدد ہوتا ہے۔

(v) 2 کو چھوڑ کر کسی بھی دو غیر منقسم عدد کا جوڑ جفت عدد ہوتا ہے۔

(vi) سبھی جفت اعداد منقسم عدد ہے۔

(vii) تین طاق اعداد کا حاصل جمع طاق عدد ہوتا ہے۔

(viii) دو جفت اعداد کا حاصل جمع ہمیشہ جفت عدد ہوتا ہے۔

3.3 تقسیم پذیری کی جانچ (Test fo Divisibility)

کیا عدد 54 عدد 2 سے مکمل طور پر منقسم ہیں؟ آیئے 54 میں 2 سے تقسیم کر کے دیکھیں۔

```
2) 54 (27
   -4
   --
   14
  -14
  ---
    0
```

کیا 9876548، عدد 2 سے منقسم ہیں۔ آیئے تقسیم دے کر دیکھیں۔

```
   (4938274
2) 9876548
   -8
   18
  -18
  ---
   07
   -6
   --
   16
  -16
  ---
   05
   -4
   --
   14
  -14
  ---
   08
   -8
   --
    0
```

اس لئے عدد 9876548 عدد 2 سے مکمل طور پر منقسم ہیں۔

لیکن مندرجہ بالا تقسیمی عمل کے ذریعہ جانچ کرنے میں زیادہ محنت اور وقت لگتا ہے اس کی جانچ کیلئے بہت سے آسان قاعدے وطریقے موجود ہیں۔ جن سے فوری طور پر جانچ کیا جاسکتا ہے کہ کوئی عدد کچھ دیگر اعداد سے مکمل

طور پر منقسم ہیں یا نہیں۔ صرف عدد کے ہندسوں کی جانچ کر کے ہم بلا شبہ سکتے ہیں وہ عدد ان میں سے کس عدد سے منقسم ہے۔ آیئے جانچ کے ان طریقوں اور قاعدوں کا یہاں اختصار میں ذکر کرتے ہیں۔

1. **2 سے تقسیم پذیری** 18 ,16 ,14 ,12 ,10 ان اعداد کو دیکھئے، یہ دو سے مکمل طور پر منقسم ہیں، ان کے اکائی کا ہندسہ ,6 ,4 ,2 ,0 ہیں اور 8 ہیں۔ اس لئے جس عدد کا اکائی کا ہندسہ 6 ,4 ,2 ,0 اور 8 ہو وہ 2 سے پوری طرح منقسم ہو جاتا ہے۔

2. **3 سے تقسیم پذیری۔** دیئے ہوئے عدد کے ہندسوں کا حاصل جمع 3 سے پورے طور پر منقسم ہو تو دیا گیا عدد بھی 3 سے پورے طور سے منقسم ہوگا۔ جیسے عدد 8745 عدد 3 سے منقسم ہیں کیونکہ 8 + 7 + 4 + 5 = 24 ,3 سے پورے طور سے منقسم ہیں۔

3. **4 سے تقسیم پذیری۔** عدد کے دہائی اور اکائی کے ہندسوں سے بنے عدد اگر 4 سے پورے طور سے منقسم ہیں تو دیا گیا عدد بھی 4 سے پورے طور سے منقسم ہوگا۔ جیسے عدد 5832 ، عدد 4 سے پورے طور سے منقسم ہیں، کیونکہ اس عدد کی دہائی اور اکائی سے بنا عدد 32 ہے جو 4 سے منقسم ہے۔ دیئے گئے عدد کے دہائی اور اکائی کا ہندسہ صفر ہو تو وہ بھی 4 سے منقسم ہے جیسے 4100 وغیرہ۔

4. **5 سے تقسیم پذیری:** دیئے گئے عدد کا اکائی ہندسہ اگر 0 اور 5 ہو تو دیا گیا عدد 5 سے پورے طور پر منقسم ہوگا۔ جیسے: 10 , 105 وغیرہ۔

5. **6 سے تقسیم پذیری۔** 6 کا غیر منقسم اجزائے ضربی 3 x 2 ہے۔ اس لئے دیا گیا عدد اگر 2 اور 3 دونوں سے منقسم تو دیا گیا عدد 6 سے بھی مکمل طور سے منقسم ہوگا۔ جیسے عدد 8556 عدد 2 اور 3 دونوں سے منقسم ہے (2 اور 3 کے تقسیم کے قاعدے سے دیکھیں) اس لئے دیا گیا عدد 8556 بھی پورے طور سے منقسم ہیں۔

6. **7 سے تقسیم پذیری۔** چھ ہندسوں کا ویسا عدد جو تین ہندسوں کے عدد کی دوہرانے سے بنے ہوں، 7 سے پوری طور پر منقسم ہیں۔ جیسے: 3 2 1 3 2 1 یا 405 405 وغیرہ ویسے عدد جو ایک ہی ہندسہ سے چھے بار، بارہ، بار، 18 بار...... وغیرہ کو دوہرانے سے بنے ہوں وہ 7 سے پورے طور سے منقسم ہیں۔ جیسے :

111 111,   222 222,   555 555

222 222 222 222 , 111 111 111 111 وغیرہ

7. 8 سے تقسیم پذیری۔ دیئے گئے عدد کا سینکڑہ، دہائی اور اکائی کے ہندسہ اگر صفر ہوں، یا سیکڑہ، دہائی اور اکائی کے ہندسوں سے بنا عدد 8 سے منقسم ہو تو دیا گیا عدد بھی 8 سے منقسم ہوگا۔ جیسے 58000، 8 سے منقسم ہے کیونکہ سینکڑا ، دہائی اور اکائی کا ہندسہ صفر ہے۔ 58928 یہ عدد بھی 8 سے منقسم ہوتا ہے۔ کیونکہ سینکڑہ، دہائی اور اکائی سے بنا عدد 928 ہے جو 8 سے منقسم ہوتا ہے۔

8. 9 سے تقسیم پذیری۔ دیئے گئے عدد کے ہندسوں کا حاصل جمع اگر 9 سے منقسم ہو تو دیا گیا عدد بھی 9 سے پوری طرح منقسم ہوگا۔ جیسے 549، 9 سے منقسم ہے کیونکہ 18 = 9 + 4 + 5 جو 9 سے پوری طرح منقسم ہے۔

9. 10 سے تقسیم پذیری۔ دیئے گئے عدد کے اکائی کا ہندسہ صفر ہوں تو وہ 10 سے منقسم ہوتا ہے جیسے: 5000, 100, 8530, وغیرہ۔

10. 11 سے تقسیم پذیری۔ اگر دیئے ہوگئے عدد کے دائیں سے طاق عدد کے مقاموں پر ہندسہ کا حاصل جوڑ اور جفت عدد کے مقاموں پر کے ہندسوں کے حاصل جمع کا فرق اگر صفر یا 11 کے مضروب ہوں تو دیا گیا عدد 11 سے منقسم ہوگا۔ جیسے عدد 4653 کے

جفت عدد کے مقام کے ہندسوں کا حاصل جوڑ $= 4 + 5 = 9$

طاق عدد کے مقام کے ہندسوں کے حاصل جوڑ $= 6 + 3 = 9$

فرق $= 0$

اس لئے 4653، 11 سے پوری طرح منقسم ہوجاتا ہے۔ پھر عدد 8293846 کے طاق مقام یعنی پہلا، تیسرا، پانچواں، ساتواں وغیرہ کے ہندسوں کا حاصل جوڑ

$8 + 9 + 8 + 6 = 31$

جفت مقام کے ہندسوں کا حاصل جوڑ

$2 + 3 + 4 = 9$

فرق $= 22$

یہاں 22, 11 سے منقسم ہے اس لئے 8293846، 11 سے منقسم ہوتا ہے۔

3.1 تقسیم پذیری کے کچھ عام اوصاف

صفت 1: ہم جانتے ہیں کہ 84 منقسم ہیں 12 سے کیونکہ 7 x 12 = 84 اور 4 x 3 = 12 اس لئے 84، 3 سے بھی منقسم ہونا چاہئے، اور ہیں بھی کیونکہ 28 x 3 = 84 اسی طرح 84، 4 سے بھی منقسم ہونا چاہئے اور ہیں بھی کیونکہ 21 x 4 = 84، یہ بات سبھی اعداد کے لئے موجب ہیں، اس لئے اگر ایک عدد دوسرے عدد سے منقسم ہیں تو وہ اس عدد کے سبھی اجزائے ضربی سے بھی منقسم ہوتے ہیں۔

صفت 2: ہم جانتے ہیں کہ

2 اجزائے ضربی ہیں 36 کا کیونکہ 2 x 18 = 36

3 اجزائے ضربی ہیں 36 کا کیونکہ 3 x 12 = 36

3 x 2 یعنی 6 اجزائے ضربی ہیں 36 کا کیونکہ 36 = 6 x 6، اس کی جانچ دوسرے مثالوں سے بھی کر سکتے ہیں اور صحیح بھی ہیں۔

اس لئے اگر کوئی عدد دو یا زائد باہم غیر منقسم اعداد (Co- prime Numbers) اعداد میں ہر ایک سے منقسم ہوں تو وہ عدد، ان کے حاصل ضرب سے بھی منقسم ہیں۔

نوٹ: (ویسے اعداد جن کا مشترک جز ضربی) صرف '1' ہو تو وہ دونوں جوڑے اعداد باہم غیر منقسم اعداد (Co- prime Numbers) کہلاتے ہیں۔ جیسے: 4 اور 17 باہم غیر منقسم ہیں کیونکہ

4 کا اجزائے ضربی = 1, 2, 4

17 کا اجزائے ضربی = 1, 17

مشترک اجزائے ضربی (Common factor) =1

صفت 3:

24 اور 6، 12 سے منقسم ہیں کیونکہ 6 x 4 = 24

12 = 6 x 2

تو 24 + 12 = 36 عدد 6 سے منقسم ہیں کیونکہ 36 = 6 x 6 ,

ایک اور مثال دیکھیں، 42 اور 49، 7 سے منقسم ہیں، کیونکہ 6 x 7 = 42 اور 49 = 7 x 7

تو 42 + 49 = 91 بھی 7 سے تقسیم ہیں کیونکہ 13 x 7 = 91

نتیجہ: اگر دیئے ہوئے دو اعداد کسی بھی عدد سے منقسم ہوں تو ان اعداد کا جوڑ بھی اس عدد سے منقسم ہوگا۔

صفت 4: اب اس مثال کو دیکھیں:

60 اور 45، 15 سے منقسم ہیں کیونکہ

60 = 15 x 4

45 = 15 x 3

اب ان اعداد کا فرق 15 = 45 - 60 جو 15 سے منقسم ہیں، یہ دوسرے کیلئے بھی صحیح ہیں۔

اس لئے اگر دو دی ہوئی اعداد کسی عدد سے منقسم ہوں کو ان اعداد کا فرق بھر اس عدد سے منقسم ہوتا ہیں۔

3.5 مشترک اجزائے ضربی (Common factor)

اور مشترک مضروب (Common muttiple)

(a) آیئے ہم ایک مثال لیتے ہیں۔

12 اور 24 کے اجزائے ضربی کیا ہیں؟

12 کے اجزائے ضربی = 1, 2, 3, 4, 6 اور 12

24 کے اجزائے ضربی = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 اور 24

عدد 12 اور 24 دونوں میں ملنے والے اجزائے ضربی = 1, 2, 3, 4, 6 اور 12 ہیں۔

ان اجزائے ضربی کو مشترک اجزائے ضربی کہتے ہیں۔

پھر ایک اور مثال لیتے ہیں:

(b) 23 , 12 اور 16 کے اجزائے ضربی پر غور کرتے ہیں۔

32 کے اجزائے ضربی = 1, 2, 4, 8, 16 اور 32

12 کے اجزائے ضربی = 1, 2, 3, 4, 6 اور 12

16 کے اجزئے ضربی = 1, 2, 4, 8 اور 16

32 , 12 اور 16 تینوں اعداد میں ملنے والے اجزائے ضربی ہیں = 1 ,2 اور 4

اس لئے 32 ,12 اور 16 کے مشترک اجزائے ضربی = 1 ,2 اور 4 ہیں۔

(c) **8** اور **15** کے مشترک اجزائے ضربی پر غور کریں۔

8 کے اجزائے ضربی = 1 ,2 ,4 اور 8

15 کے اجزائے ضربی = 1 ,3 ,5 اور 15

8 اور 15 کا مشترک اجزائے ضربی = 1

ایسے بہت سے جوڑے ہیں جن کا باہم اجزائے ضربی صرف 1 ہوتا ہے، اس طرح کے عدد کے جوڑوں کو باہم غیر منقسم (Co- Prime) اعداد کہتے ہیں، یعنی ویسے اعداد، جنکا صرف 1 ہی مشترک اجزائے ضربی ہوتا ہے۔ باہم غیر منقسم اعداد کہلاتے ہیں۔ جیسے 3 اور 5، 4 اور 9 وغیرہ

آیئے اب اعداد کے مشترک مضروب کو دیکھیں۔

(a) **4** اور **5** کے مضروبوں کو غور سے دیکھیں:

4 کے مضروب = 4 ,8 ,12 ,16 ,20 ,24 ,28 ,36, 40 ....

5 کے مضروب = 5 ,10 ,15 ,20 ,25 ,30 ,35 ,40 ,45..........

عدد 4 اور 5 کے ویسے مضروب جو دونوں میں ملتے ہیں۔ - 20 ,40..........

اس لئے عدد 4 اور 5 کے مشترک مضروب 20 ,40.......... ہیں۔

(b) **3** ,**4** اور **9** کے مشترک مضروبوں پر غور کریں۔

3 کے مضروب = 3 ,6 ,9 ,12 ,15 ,18 ,21 ,24 ,27 ,30 ,33 ,36 ....

4 کے مضروب = 4 ,8 ,12 ,16 ,20 ,24 ,28 ,32 ,36 ,40..........

9 کے مضروب = 9 ,18, 27 ,36 ,45 ,54 ,63 ,72 ....

3، 4 اور 9 کے ویسے مضروب جو تینوں میں ہیں ۔36 ....

اس لئے 3 ,4 اور 9 کے مشترک مضروب = 36 ,72 ....

خود کر کے دیکھیں:

1. ذیل کا مشترک اجزائے ضربی معلوم کیجیے

(a) 8, 12 (b) 9, 27 اور 12

2. ذیل کا مشترک مضروب معلوم کیجیے۔

(a) 4, 16 (b) 12, 16 اور 18

3. باہم غیر منقسم اعداد کا تین مثال دیجیے۔

ہم اجزائے ضربی اور غیر منقسم اعداد کے بارے میں پہلے سے ہی جانتے ہیں۔ آیئے ہم 24 کے اجزائے ضربی پر غور کریں۔

24 = 2 x 2	24 = 3 x 8	24 = 4 x 6
= 2 x 2 x 6	24 = 3 x 2 x 4	= 2 x 2 x 3
= 2 x 2 x 2 x 3	24 = 3 x 2 x 2 x 2	

24 کے مندرجہ بالا سبھی اجزائے ضربی میں آخیر میں ہم ایک ہی اجزائے ضربی 3 x 2 x 2 x 2 پر پہنچتے ہیں۔ ان اجزائے ضربی میں 2 اور 3 ہی اجزائے ضربی ہیں اور یہ غیر منقسم اعداد ہیں۔ کسی عدد کا اس طرح کا اجزائے ضربی غیر منقسم اجزائے ضربی (Prime factorisation) نکالنا کہلاتا ہے۔ دوسرے الفاظوں میں کوئی اجزائے ضربی غیر منقسم ہوتا ہے، جبکہ اس کے سبھی اجزائے ضربی کے اعداد غیر منقسم ہوں۔

مثال 1 : 360 کا غیر منقسم اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

حل:

2	360
2	180
2	90
3	45
3	15
	5

360 کا غیر منقسم اجزائے ضربی = 2 x 2 x 2 x 3 x 3 x 5 ہیں

اس لئے تقسیم پذیری کا طریقہ و قاعدہ لگا کر ہم کسی بھی عدد کا غیر منقسم اجزائے ضربی نکال سکتے ہیں۔

سوالنامہ - 3.2

1. تقسیم پذیری کے جانچ کے طریقے کا استعمال کرتے ہوئے پتا کیجئے کہ مندرجہ ذیل اعداد میں سے کون سے اعداد 2 سے 3 سے 4 سے 5 سے ,7 سے ,8 سے ,9 سے ,10 سے اور 11 سے منقسم ہیں۔؟ صرف یا نہیں میں جواب دیں۔

عدد	منقسم ہیں									
	2 سے	3 سے	4 سے	5 سے	6 سے	7 سے	8 سے	9 سے	10 سے	11 سے
124										
286										
546										
15864										
428428										
333333										
429714										
54685										
45600										

2. تقسیم پذیری کے طریقوں کے استعمال کے ذریعہ معلوم کیجئے کہ مندرجہ ذیل اعداد میں کون سا عدد منقسم ہیں، 2 سے ,3 سے ,5 سے اور 9 سے۔ منقسم ہیں؟

(I) 126 (II) 672 (III) 990

(IV) 2050 (V) 2856 (VI) 406839

3. تقسیم پذیری کی جانچ کے طریقوں کے استعمال کے ذریعہ بتائیں کہ کون سے اعداد 4 سے 8 سے منقسم ہیں۔

(I) 512 (II) 12159 (III) 4096

(IV) 14540 (V) 21084 (VI) 31795012

4. ذیل اعداد کو 6 سے تقسیم پذیری کی جانچ کیجیے

(I) 12583 (II) 639210 (III) 546534

5. ذیل میں کون سا قول صحیح ہیں؟

(i) اگر کوئی 3 سے تقسیم ہے تو وہ 9 سے بھی منقسم ہوگا۔

(ii) اگر کوئی عدد 9 سے منقسم ہے تو وہ 3 سے بھی منقسم ہوگا۔

(iii) سبھی اعداد جو 8 سے منقسم ہیں تو وہ 3 اور 6 سے دونوں سے منقسم ہوں گے۔

(iv) سبھی اعداد جو 8 سے منقسم ہیں 4 سے بھی منقسم ہوگا۔

(v) جو عدد 9 سے اور 10 دونوں سے منقسم ہیں وہ 90 سے منقسم بھی ہوتا ہے۔

(vi) اگر کوئی عدد دیئے ہوئے دو اعداد کے جوڑ کو پورا منقسم کرتا ہے تو ان دونوں اعداد کو الگ الگ بھی پوری طرح منقسم کرتا ہے۔

(vii) دو باہم غیر منقسم اعداد میں کم سے کم ایک غیر منقسم عدد ہونا چاہئے۔

(viii) دو لگا تار طاق اعداد کا جوڑ ہمیشہ 4 سے منقسم ہوتا ہے۔

6. 32, 24, 8 کا اجزائے ضربی معلوم کیجیے

7. مندرجہ ذیل کا مشترک جز ضربی بتائیں

(a) 4, 32 (b) 8, 32, 42 (c) 14, 56, 28

8. ذیل کے مضروب نکالئے

(a) 8, 10 (b) 4, 12 (c) 3, 5, 8

9 ذیل کا مشترک مضروب نکالیں

(a) 4, 14 (b) 8, 24 (c) 6, 21 27 اور

10. مندرجہ ذیل کا غیر منقسم اجزائے ضربی معلوم کیجئے۔

(a) 450 (b) 450 (c) 420

مشترکہ مقسوم علیہ اعظم یا سب سے بڑا مشترک اجزائے ضربی (**Highest common factor**) یا **H.C.F**

اسے بڑا تقسیم کنندہ (greatest common divisor) یا (GCD) بھی کہا جاتا ہے۔

آیئے ہم سب سے پہلے مقسوم علیہ طریقہ کے ذریعہ 18 اور 24 کا مشترک مقسوم علیہ اعظم (H.C.F) معلوم کریں۔

18 کے مقسوم علیہ (اجزائے ضربی) = 1, 2, 3, 9,6 اور 18

24 کے مقسوم علیہ = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 اور 24

18 اور 24 میں مشترک مقسوم علیہ (اجزائے ضربی) 1,4,3,6 ہیں

اس میں سب سے بڑا مشترک جز ضربی 6 ہے اس لئے H.C.F-6

خود کر کے دیکھیں:

ذیل کا H.C.F معلوم کیجئے۔

(i) 28, 30 (ii) 9, 24, 36, (iii) 12 , 15, 18 (iv) 50, 60, 80

اس طرح دو یا زیادہ اعداد کا H.C.F ان اعداد کا زیادہ سے زیادہ یا مشترک مقسوم علیہ (اجزائے ضربی) اعظم ہوتا ہے۔

اب غیر منقسم اجزاء ضربی کے طریقہ سے دیئے ہوئے اعداد کا مشترک مقسوم علیہ اعظم (H.C.F) معلوم کریں گے۔

طریقہ یا قاعدہ : سب سے پہلے ہم دیئے ہوئے اعداد کا غیر منقسم اجزائے ضربی نکالتے ہیں۔ تب ہر ایک مشترک غیر منقسم اجزائے ضربی کو صرف اتنی بار جتنی بار وہ کم سے کم ان میں سے کسی عدد کے غیر منقسم اجزائے ضربی میں آتا ہے، ان کا حاصل ضرب معلوم کر لیتے ہیں۔

اس مثال کو دیکھئے:

24 اور 28 کا H.C.F غیر منقسم اجزائے ضربی کے ذریعہ اس طرح معلوم کرتے ہیں۔

24اور28 کا غیر منقسم اجزائے ضربی۔

کام کا طریقہ 2	28	2	24
(i) سب سے پہلے اعداد کا اجزائے ضربی لکھتے ہیں 2	14	2	12
(ii) پھر ان میں مشترک اجزائے ضربی لکھتے ہیں 7	7	2	6
(iii) پھر H.C.F کے لئے ان کا حاصل ضرب لکھتے ہیں 1		3	3
		1	

اس طرح $3 \times 2 \times 2 \times 2 \times = 24$

$7 \times 2 \times 2 = 18$

24اور28 میں مشترک اجزائے ضربی $= 2, 2$

اس لئے 24 اور 28 کا H.C.F $= 2 \times 2 = 4$

اور مثالیں دیکھیں:

32, 24 اور 36 کا H.C.F غیر منقسم اجزائے ضربی کے طریقہ سے معلوم کریں

اس طرح

2 | 36	2 | 32	2 | 24
2 | 18	2 | 16	2 | 12
3 | 9	2 | 8	2 | 6
3 | 3	2 | 4	3 | 3
| 1	| 1	| 1

$24 = 2 \times 2 \times 2$

$32 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$

32, 24 اور 36 میں مشترک اجزائے ضربی $= 2, 2$

مشترک مقسوم علیہ اعظم $4 = 2 \times 2$

نوٹ: چونکہ باہم غیر منقسم اعداد جیسے 8 اور 15 H.C.F 8 کے غیر منقسم اجزائے ضربی = 2x2x2، 15 غیر منقسم اجزائے ضربی = 5 x 3 کے ان اجزائے کے مضروب میں کوئی غیر منقسم مشترک اجزائے ضربی نہیں ہیں اس لئے 8 اور 15 کا مشترک مقسوم علیہ اعظم 1 ہوگا۔ یا جب کوئی غیر منقسم اجزائے ضربی دونوں اعداد میں مشترک نہ ہو تو 1 ہمیشہ ان کا مشترک مقسوم علیہ ہوتا ہے اور یہی ان کا مشترک مقسوم علیہ اعظم کہلاتا ہے۔

سوالنامہ - 3.3

1. مندرجہ ذیل اعداد کے مشترک مقسوم علیہ اعظم (H.C.F) معلوم کریں، (غیر منقسم اجزائے ضربی کے ذریعہ) معلوم کیجئے۔

(a) 24, 36, (b) 40, 60 (c) 20,
(d) 4, 12 (e) 12 , 72, 84 (f) 70, 105, 175
(g) 91, 112, 49

2. ذیل کا مشترک مقسوم علیہ اعظم کیا ہے؟
(a) دو بالترتیب اعداد (b) دو لگاتار جفت اعداد
(c) دو بالترتیب طاق اعداد

3. درج ذیل کا مشترک مقسوم علیہ اعظم معلوم کریں (غیر منقسم اجزائے ضربی کے ذریعہ) معلوم کیجئے۔
(a) 4 اور 15 (b) 8 اور 9 (c) 4 اور 13

3.7 مشترک مقسوم علیہ اعظم (تقسیم کے عمل کے ذریعہ)

مثال -1 12 اور 32 کا H.C.F تقسیمی طریقہ کے ذریعہ اس طرح معلوم کرتے ہیں۔

```
12| 32| (2
  |-24|
  -----
    8| 12 |1
     | -8 |
     ------
        4
          8 | 2
         -8 |
         ----
          0
```

مشترکہ مقسوم علیہ اعظم = 4

(آخری مقسوم علیہ جس سے مقسوم پورپورا تقسیم ہوجاتا ہے دیئے گئے اعداد کا مشترک مقسوم علیہ اعظم ہوتا ہے)

طریقہ کار:

سب سے پہلے دو اعداد کے بیچ تقسیم کرتے ہیں، ہم بڑے عدد کو چھوٹے عدد سے تقسیم دیتے ہیں، اس طرح جو باقی بچتا ہے اس سے پہلے کے مقسوم علیہ کو تقسیم کردیتے ہیں اور دوسرا باقی حاصل ہوتا ہے۔ دوبارہ دوسرے مقسوم علیہ کو دوسرے باقی بچے ہوئے سے تقسیم کرتے ہیں۔ یہ عمل اس وقت تک دہراتے ہیں جب تک آخری باقی صفر نہ ہوجائے۔ اس عمل کا آخری مقسوم علیہ دیئے ہوئے اعداد کا مشترک مقسوم علیہ اعظم ہوتا ہے۔

مثال 2. 160, 380, 120 کا مشترک مقسوم علیہ اعظم (H.C.F) تقسیم کے قاعدے کے ذریعہ نکالئے۔

```
120| 380 |3
   |-360 |
   -------
     20| 120 |6
       |-120 |
       -------
          0
```

اب 20 اور 160 کا مقسوم علیہ اعظم نکالئے

20) 160 (8

-160

0

اس لئے مشترک مقسوم علیہ اعظم = 20

اس لئے تین اعداد کا مقسوم علیہ اعظم معلوم کرنے کا طریقہ اس طرح ہے۔

(i) ان میں سے پہلے کسی دو کا مشترک مقسوم علیہ اعظم حاصل کرتے ہیں۔

(ii) پھر (i) میں حاصل مشترک مقسوم علیہ اعظم اور تیسرے عدد کا مشترک مقسوم علیہ اعظم معلوم کرتے ہیں۔

(iii) (ii) میں حاصل مشترک مقسوم علیہ اعظم تینوں دیئے ہوئے اعداد کا مطلوبہ مشترک مقسوم علیہ اعظم ہے۔ جیسا کہ مثال کے ذریعہ بتایا گیا ہے۔

مثال : 3 وہ بڑا سے بڑا عدد معلوم کریں، جس سے اگر 280 اور 1245 کو تقسیم کریں تو بالترتیب 4 اور 3 باقی بچیں گے۔

حل: جب کوئی عدد 280 کو تقسیم کرنا ہے تو 4 باقی بچتا ہے۔ اس لئے 276 = (280-4) اس عدد سے پورا تقسیم ہوں گے۔ اسی طرح 1442 = (1445-3) بھی اس عدد سے پورا تقسیم ہوگا۔

اس لئے مطلوبہ عدد 276 اور 1442 کا مشترک مقسوم علیہ اعظم ہوگا۔

276 | 1242

-1104

138 | 276 2

-276

0

مشترکہ مقسوم علیہ اعظم = 138

اس لئے جب کسی بھی بڑے سے بڑے عدد سے مقسوم کو تقسیم کرتے ہیں تو جو باقی عدد بچتا ہے۔ اسے مقسوم میں گھٹانے سے مقسوم پورا تقسیم ہو جاتا ہے۔

مثال 4 : ایک سمینار میں ہندی، انگریزی اور حساب کے موضوع پر حصہ لینے والوں کی تعداد ترتیب سے 60, 84 اور 108 ہے۔ ان کے بیٹھنے کے لئے کم سے کم کتنے کمرے چاہئے۔ اگر ہر ایک کمرے میں ایک ہی مضمون کے لوگ بیٹھیں گے اور ان کی تعداد بھی برابر ہوں؟

حل: ہر ایک کمرے میں بیٹھنے والے لوگوں کی تعداد 84, 60 اور 108 کا مشترک مقسوم علیہ اعظم ہوگا۔

60,84 اور 108 کا مشترک مقسوم علیہ اعظم = 12 ہے۔

اس لئے ہر ایک کمرے میں بیٹھنے والوں کی زیادہ سے زیادہ تعداد 12 ہے۔

کمروں کی تعداد جن کی ضرورت پڑے گی۔

$$21 = \frac{60 + 84 + 108}{12}$$

سوالنامہ 3.4

1. درج ذیل کا مشترک مقسوم علیہ اعظم غیر منقسم اجزائے ضربی طریقہ سے معلوم کریں۔

(i) 81 ,117 (ii) 18, 48 (iii) 27, 63

(iv) 36 , 84 (v) 70, 105, 175 (vi) 12, 45, 75

(vii) 120, 144, 204 (viii) 106, 159, 265

(vi) 625, 3125, 15625

2. درج ذیل کا مشترک مقسوم علیہ اعظم تقسیم کے طریقے سے معلوم کریں۔

(i) 300, 450 (ii) 442, 1261 (iii) 252, 576

(iv) 935, 1320 (v) 1624, 522, 1276

(vi) 2241,8217, 747

3. 65610 کا منقسم ہے 27 سے 65610 کے دو قریبی اعداد معلوم کریں جو 27 سے منقسم ہوں۔

4. کسی دو لگاتار اعداد کا مشترک مقسوم علیہ اعظم کیا ہوگا۔

5. دو چھوٹے ٹینکروں میں بالترتیب 85 اور 68 لیٹر پٹرول آتا ہے۔اس پیمانے والے برتن کی زیادہ سے زیادہ حجم معلوم کریں جس سے ہر ایک ٹینکر کا پٹرول پورا پورا پیمائش کیا جاسکے۔

6. وہ بڑا سے بڑا عدد معلوم کریں جس سے 389,436 اور 542 کو تقسیم دینے پر بالترتیب سے 4,7 اور 3 باقی بچے۔

7. ایک اسکول کی جماعت 6,7,8 میں بالترتیب 220,116 اور 132 طلباء ہیں۔ان کے برابر برابر بچے کے گروپ میں زیادہ سے زیادہ کتنے طلباء ہوں گے۔

8. ایک مستطیل نما فرش کی لمبائی 20 میٹر 16 سنٹی میٹر اور چوڑائی 15 میٹر 60 سنٹی میٹر ہے۔اس کو یکساں مربع نما ٹائلس (Tiles) لگا کر پختہ کرنا ہے۔معلوم کریں کہ اس کے لئے کم سے کم کتنے ٹائلس (Tiles) چاہئے۔

مشترک ذو اضعاف اقل (L.C.M)(Lowest common multiple)

ہم جانتے ہیں کہ دو یا زیادہ اعداد کا مشترک ذو اضعاف اقل (L.C.M) وہ چھوٹے سے چھوٹا عدد ہے جو دیئے ہوئے ہر ایک عدد کا مضروب ہے۔

12 کا اضعاف یا مضروب = 12,24,36,48,60,72,84,96..........

9 کا اضعاف یا مضروب = 9,18,27,36,45,54,63,72,81..........

12 اور 9 کے مضروبوں میں سب سے چھوٹا ذو اضعاف اقل یعنی 9 اور 12 کا ذو اضعاف اقل = 36

خود کر کے دیکھیں:

مثال: 1 ذیل کا ذو ضعاف اقل مضروب طریقہ سے معلوم کریں۔

(a) 8, 16 (b) 12, 18, 24

(c) 20,30,40,50 (d) 15, 24, 32, 36

اب ہم لوگ غیر منقسم اجزائے ضربی کے ذریعہ دو یا زیادہ اعداد کے ذواضعاف اقل پر غور کریں۔

مثال 2 : 18,12 اور 24 کا ذواضعاف اقل معلوم کریں۔

سب سے پہلے ہم ہر ایک عدد کا غیر منقسم اجزائے ضربی نکالتے ہیں، جو اس طرح ہیں۔

$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$ ⟶ 2 تین بار، 3 ایک بار

$12 = 2 \times 2 \times 3$ ⟶ 2 دو بار، 3 ایک بار

$18 = 2 \times 3 \times 3$ ⟶ 2 ایک بار، 3 دو بار

ذواضعاف اقل $72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$

ان اعداد میں زیادہ بار آئے غیر منقسم اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ہی ان کا مطلوبہ مشترک ذواضعاف اقل ہیں۔ ظاہر ہوتا ہے کہ دو یا زیادہ اعداد کا غیر منقسم اجزائے ضربی قاعدے سے ذواضعاف اقل (LCM) معلوم کرنے کے لئے پہلے ہم ہر ایک عدد کا غیر منقسم اجزائے ضربی معلوم کرتے ہیں۔ تب ہم ان سب مختلف غیر منقسم اجزائے ضربی کو اتنے بار لیکر جتنے بار وہ ان میں سے کسی عدد کے غیر منقسم اجزائے ضربی میں زیادہ سے زیادہ شامل ہیں۔ ضرب کر لیتے ہیں۔

مثال: 3 24, 16 اور 36 کا ذواضعاف اقل معلوم کیجئے۔

حل: $16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$ — 2 چار بار

$24 = 3 \times 2 \times 2 \times 2$ — 2 تین بار، 3 ایک بار

$36 = 3 \times 3 \times 2 \times 2$ — 2 دو بار اور 3 دو بار

ذواضعاف اقل = ان میں سب سے زیادہ بار آئے غیر منقسم اجزائے ضربی کا حاصل ضرب

$= 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 144$

سوالنامہ 3.5

1. مندرجہ ذیل کا ذواضعاف اقل غیر منقسم اجزائے ضربی طریقہ سے معلوم کریں۔

(a) 16, 36　(b) 14,28　(c)32, 36

(d) 50, 60　(e) 160,120　(f) 32, 42

(g) 15,18,21　(h) 24,32,36　(i) 9, 12, 18

(j) 9,12,18,21　(k) 12, 16,24,30

آئے ذواضعاف اقل نکالنے کے ایک دوسرے طریقہ پر غور کرتے ہیں۔ جسے تقسیم کا قاعدہ کہتے ہیں۔

مثال:1

24.16 اور 36 کا ذواضعاف اقل تقسیم کے قاعدے کے مطابق معلوم کیجئے۔

حل:

2	16, 24, 36
2	8, 12, 18
2	4, 6 , 9
3	2, 3 , 9
	2, 1, 3

ذواضعاف اقل= $2 \times 2 \times 3 \times 2 \times 3 = 24$

عمل:

1. سب سے پہلے ان اعداد کو سب سے چھوٹے غیر منقسم عدد سے تقسیم دیتے ہیں، اور ہم یہ بھی دیکھتے ہیں کہ دیئے گئے اعداد میں کم سے کم دو عدد کو تقسیم دیں گے۔ یا پھر مطلوبہ دوسرے بچے ہوئے غیر منقسم عدد سے تقسیم کریں گے۔ جو عدد اس مطلوبہ عدد سے پورا پورا تقسیم ہوجاتا ہے اس کا حاصل تقسیم اس کے نیچے لکھ دیتے ہیں۔ جو عدد اس مطلوبہ عدد سے مکمل طور پر تقسیم نہیں ہوتا ہے۔ اس عدد کو اس کے نیچے ہی ویسا کا ویسا لکھ دیا جاتا ہے۔

2. یہ تب تک جاری رکھتے ہیں جب تک کم سے کم دو عدد اس سے کٹتے رہیں۔

3. جب اس مطلوبہ غیر منقسم عدد سے تقسیم نہیں ہوتب دوسرے مطلوبہ غیر منقسم عدد لیتے ہیں اور اوپر کی طرح کے عمل کو اپناتے ہیں۔ یہی عمل تب تک کرتے رہتے ہیں، جب تک عدد مکمل طور سے تقسیم نہ ہو جائیں۔ جب ہم اطمینان ہو جائیں کہ اب اعداد کسی بھی مطلوبہ غیر منقسم عدد سے تقسیم نہیں ہوتے ہیں تب آخیر میں سبھی غیر منقسم اعداد کا حاصل ضرب حاصل کرتے ہیں اور یہی حاصل ضرب ان اعداد کا مشترک ذواضعاف اقل ہوتا ہے۔

مثال 2:

وہ چھوٹے سے چھوٹا عدد معلوم کریں جسے 36, 24, 18, 15 سے تقسیم دینے پر ہر حالت میں 4 باقی بچے۔

حل:

2	15, 18, 24, 36
2	15, 9, 12, 18
3	15, 9 , 6, 9
3	5, 3 , 2 , 3
	5, 1, 2, 1

ذواضعاف اقل = $=2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 2 = 360$

اس لئے مشترک ذواضعاف اقل $= 360 + 4 = 364$

مشترک مقسوم علیہ اعظم (H.C.F) اور ذواضعاف اقل (L.C.M) کے خواص (صفت)

اس باب میں اس موضوع پر بیان کی گئی باتوں کی روشنی میں ہم یہاں اعداد کے مشترک مقسوم علیہ اعظم (HCF) اور ذواضعاف اقل (LCM) سے متعلق کچھ اہم صفتوں وصداقتوں کی فہرست دے رہے ہیں۔

1. دیئے ہوئے اعداد کا مشترک مقسوم اعظم ان اعداد میں کسی سے بھی بڑا نہیں ہوتا ہے۔

2. دیئے ہوئے اعداد کا ذواضعاف اقل (L.C.M) ان میں سے کسی بھی عدد سے چھوٹا نہیں ہوتا۔

3. دو باہم غیر منقسم (Co- prime Numbers) اعداد کا مقسوم علیہ اعظم۔ ہوتا ہے۔

4. ظاہر ہے دو یا زیادہ باہم غیر منقسم اعداد کا اضعاف اقل ان سب کا حاصل ضرب ہوتا ہے۔

5. اگر مان لیا جائے کہ a کسی دوسرے عدد b کا جز ضربی ہے تو a اور b کا M.C.F اور ان کا b,L.C.M ہوتا ہے

6. دو یا دو سے زیادہ اعداد کا H.C.F ان اعداد میں ہر ایک کو مکمل طور پر تقسیم کرتا ہے اور ہر ایک دیا ہوا عدد اپنے L.C.M کو مکمل طور پر تقسیم کرتا ہے۔ اس لئے ان کا H.C.F ان کے L.C.M کا جز ضربی ہوتا ہے۔

مشترک مقسوم علیہ اعظم اور ذو اضعاف اقل میں تعلق

ایک مثال لیتے ہیں۔ ہم دو اعداد 48 اور 60 لیں اور اس کا مشترک مقسوم علیہ اعظم (H.C.F) ذو اضعاف اقل (L.C.M) نکالیں۔

48 اور 60 کا مشترک مقسوم علیہ اعظم = 12

48 اور 60 کا ذو اضعاف اقل = 240

مشترک مقسوم علیہ اعظم اور اضعاف اقل کا حاصل ضرب = 12 x 2 240 = 2880

دیئے ہوئے اعداد 48 اور 60 کا حاصل ضرب = 48 x 60 = 2880

اب ایک اور عدد جوڑے 24 اور 36 پر غور کریں۔

24 اور 36 کا مشترک مقسوم علیہ اعظم = 12

24 اور 36 کا ذو اضعاف اقل = 72

مشترک مقسوم علیہ اعظم اور ذو اضعاف اقل کا حاصل ضرب = 12x 72 = 864

اعداد 24 اور 36 کا حاصل ضرب = 36 x 24 = 864

ہر حالت میں ہم دیکھتے ہیں کہ مشترک مقسوم علیہ اعظم اور ذو اضعاف اقل کا حاصل ضرب دونوں اعداد کے حاصل ضرب کے برابر ہیں۔ یا مشترک مقسوم علیہ اعظم x ذو اضعاف اقل = پہلا عدد x دوسرا عدد اس سے نکلے فارمولے نیچے دیئے جاتے ہیں۔

مشترک مقسوم علیہ اعظم = $\frac{\text{پہلا عدد} \times \text{دوسرا عدد}}{\text{ذو اضعاف اقل}}$

ذو اضعاف اقل = $\frac{\text{پہلا عدد} \times \text{دوسرا عدد}}{\text{مشترک مقسوم علیہ اعظم}}$

پہلا عدد = $\frac{\text{مشترک مقسوم علیہ اعظم} \times \text{ذو اضعاف اقل}}{\text{دوسرا عدد}}$

دوسرا عدد = $\frac{\text{مشترک مقسوم علیہ اعظم} \times \text{ذو اضعاف اقل}}{\text{پہلا عدد}}$

مثال 1 : دو اعداد کا ذو اضعاف اقل 72 مشترک مقسوم علیہ اعظم 12 ہیں اور ایک عدد 36 ہیں تو دوسرا عدد بتائیں......؟

حل: مشترک مقسوم علیہ اعظم × ذو اضعاف اقل پہلا عدد × دوسرا عدد

72 x 12 = 36 x دوسرا عدد

دوسرا عدد $\frac{\overset{2}{\cancel{72}} \times 12}{\cancel{36}}$ = 2 x 12 = 24

مثال 2 : کسی دن دہلی سے میرٹھ کی بسیں 40 منٹ کے فرق سے اور میرٹھ سے دہلی کی بسیں 45 منٹ کے فرق سے چلتی ہیں۔ اگر مخالف سمت سے آنے والی دو بسیں کسی خاص پل (Bridge) سے 10.15 صبح میں گذرتی ہوں تو وہ جلدی سے جلدی اس کے بعد میں اس پل سے کس وقت گذرے گی۔

حل: جلدی سے جلدی جس وقت وہ بسیں ملیں گی وہ ہے 40 اور 45 ذو اضعاف اقل (منٹوں میں) 10.15 صبح میں جوڑنے پر حاصل ہوں گے۔

40اور45 کا ذو اضعاف اقل = 360

اس لئے دونوں بسیں اس پل سے دوبارہ 360 منٹ کے بعد ایک ساتھ گزریں گی 10.15 صبح کے 6 گھنٹے بعد۔

یعنی دونوں بسیں پھر ایک ساتھ اس پل سے 4.15 شام میں گذریں گی۔

سوالنامہ 3.6

1. درج ذیل اعداد کا ذو اضعاف اقل تقسیم کے قاعدے کے مطابق معلوم کریں۔

(i) 18, 28 (ii) 32, 36

(iii) 24, 36 (iv) 12, 36, 48

(v) 25, 20, 15, 45 (vi) 8, 5

(vii) 6, 15, 18, 30, 3 (viii) 180, 384, 144

(ix) 112, 168, 266 (x) 240, 420, 660

2. نیچے دیئے گئے ہر ایک اعداد کے جوڑے کے لئے ثابت کریں کہ ان کا حاصل ضرب ان کے مشترک مقسوم علیہ اعظم اور ذو اضعاف اقل کے حاصل ضرب کے برابر ہوں۔

(i) 24, 34 (ii) 36, 42

(iii) 25, 40 (iv) 15, 45

3. دو اعداد کا H.C.F 6 اور L.C.M 36 اور ایک عدد 18 ہو تو دوسرا عدد معلوم کریں۔

4. دو اعداد کا مشترک مقسوم علیہ اعظم اور ان کا حاصل ضرب 6400 ہے۔ اس کا ذو اضعاف اقل معلوم کریں۔

5. دو اعداد کا مشترک مقسوم علیہ اعظم و ذو اضعاف اقل بالترتیب 13 اور 1989 ہیں اگر ان میں سے ایک عدد 117 ہو تو دوسرا عدد معلوم کریں۔

6. وہ چھوٹے سے چھوٹا عدد معلوم کریں جس کو 40 ,25 اور 60 سے تقسیم کرنے پر 7 باقی بچے۔

7. تین آدمی ایک صبح سیر کو نکلے۔ ان کی لمبائی پر بالترتیب 80 سینٹی میٹر۔ 85 سینٹی میٹر اور 90 سینٹی میٹر ہیں۔ معلوم کریں کہ چلنے کے مقام سے کتنی دوری پر ان کے قدم پھر ایک ساتھ پڑیں گے۔

8. 1000 کے نزدیک وہ عدد معلوم کریں جو 6, 5, 4, 3, 2 اور 7 سے پورا پورا تقسیم ہو سکے۔

9. 100000 کے نزدیک اس سے بڑا عدد معلوم کریں جو 15,8 اور 21 سے پورا پورا تقسیم ہو سکے۔

10. ایک سڑک کے ساتھ ساتھ تار کے کھمبے 220 میٹر کی دوری پر لگے ہیں اور اس سڑک کے ساتھ ساتھ پتھر کے ڈھیر 300 میٹر کی برابری دوری پر لگے ہیں۔ اگر پہلا ڈھیر پہلے کھمبے کے ساتھ ہی ہے تو اس سے کتنی دوری پر دوسرا ڈھیر اور کھمبے کے ایک ساتھ لگے ہوں گے۔؟

نوٹ: 1729 ایک ایسا چھوٹے سے چھوٹا عدد ہے۔ جنہیں دو مکعبوں کے جوڑ کی صورت میں دو مختلف طریقوں سے ظاہر کر سکتے ہیں جیسے ایک $1^3 + 12^3$ اور دوسرا $9^3 + 10^3$ اس عدد (1729) کا پتا ہمارے ماہر ریاضیات راما نوجن نے کیا تھا۔ جسے راما نوجن عدد کہتے ہیں۔