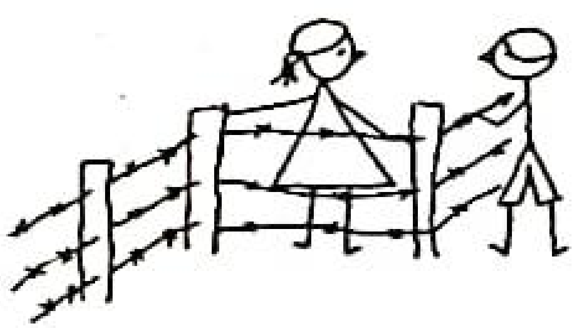
পৰিশিষ্ট-1

গণিতত প্ৰমাণ (Proofs in Mathematics)

A1.1 অৱতাৰণা (Introduction) :



ধৰি লোৱা হওক, তোমালোকৰ পৰিয়ালৰ এটুকুৰা মাটি আছে আৰু এই মাটি টুকুৰাৰ চৌপাশে কোনো ধৰণৰ বেৰা নাই। কোনোবা এদিন তোমালোকৰ চুবুৰীয়াজনে তেওঁৰ মাটি টুকুৰা বেৰা দি আগুৰিবলৈ ঠিক কৰিলে। তেওঁ মাটি টুকুৰা বেৰা দি আগুৰাৰ পিছত তোমালোকে লক্ষ্য কৰিলা যে তোমালোকৰ পৰিয়ালৰ মাটিৰ এটা অংশ তেওঁ বেৰাৰ অন্তৰ্ভূক্ত কৰি লৈছে। তেওঁ যে তোমালোকৰ মাটি বেদখল কৰাৰ চেষ্টা কৰিছে সেই কথাটো তেওঁক কিদৰে প্ৰমাণ কৰি দেখুৱাবা? প্ৰথম পদক্ষেপ হিচাপে সীমাৰ ক্ষেত্ৰত থকা মতভেদ আঁতৰোৱাৰ বাবে তুমি হয়তো গাঁৱৰ জ্যেষ্ঠ লোকসকলৰ সহায় বিচাৰিব পাৰা। কিন্তু ধৰা হওঁক, জ্যেষ্ঠসকলৰ মাজত এই ক্ষেত্ৰত ঐকমত সম্ভৱ নহ'ল। কিছুমানৰ মতে তোমালোক শুদ্ধ আৰু আন কিছুমানৰ মতে তোমালোকৰ চুবুৰীয়াহে শুদ্ধ। তোমালোকৰ কৰণীয় কি হ'ব? তোমালোকৰ মাটিৰ সীমাৰ দাবীটো আটাইৰে গ্ৰহণযোগ্য হোৱাকৈ উপায় এটা বিচাৰি উলিওৱাটোৱেই হ'ব তোমালোকৰ বাবে একমাত্ৰ বিকল্প। উদাহৰণ স্বৰূপে, চৰকাৰৰ দ্বাৰা অনুমোদিত তোমালোকৰ গাঁৱৰ এখন জৰীপ মানচিত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰিব পৰা যায়, প্ৰয়োজন সাপেক্ষে আইনৰ, আদালতৰ সহায় ল'বও পাৰি, যাতে এইটো প্ৰমাণ কৰিব পৰা যায় যে তোমালোক শুদ্ধ আৰু তোমালোকৰ চুবুৰীয়াগৰাকী অশুদ্ধ।

অন্য এক পৰিস্থিতি আমি লক্ষ্য কৰি চাওঁহক। ধৰি লোৱা, তোমাৰ মাৰাই তোমালোকৰ ঘৰৰ 2005 চনৰ আগষ্ট মাহৰ বাবে বিদ্যুৎ মাচুলৰ বিলখন পৰিশোধ কৰিছে। যি হওক, 2005 চনৰ

ছেপ্তেম্বৰ মাহৰ বিলত দেখুওৱা হৈছে যে তোমালোকৰ আগষ্ট মাহৰ বিলখন পৰিশোধ কৰা হোৱা নাই। বিদ্যুৎ বিভাগৰ দাবীটো কেনেকৈ তুমি নস্যাৎ কৰিবা? ইয়াৰ বাবে তুমি আগষ্ট মাহৰ বিল পৰিশোধৰ ৰছিদখন বিভাগীয় কাৰ্যালয়ত দেখুৱাব লাগিব।

এইমাত্ৰ তুমি কিছুমান উদাহৰণ প্ৰত্যক্ষ কৰিলা য'ত দেখা গৈছে যে আমাৰ দৈনন্দিন জীৱনত প্ৰায়ে কিছুমান উক্তি বা দাবীক সত্য বা অসত্য বুলি প্ৰমাণ কৰি দিবলগীয়া হয়। যি হওক, বহুতো উক্তিক আকৌ প্ৰমাণ কৰিবলগীয়া বিষয় বুলি নভবাকৈও আমি গ্ৰহণ কৰোঁহঁক। কিন্তু গণিতত আমি কোনো উক্তিক (কিছুমান স্বীকাৰ্যৰ বাহিৰে) সঁচা বা মিছা বুলি গ্ৰহণ কৰোঁ তেতিয়াহে, যেতিয়া গণিতৰ যুক্তি (Logic) অনুসাৰে ই সেইধৰণে প্ৰমাণিত হয়।

প্ৰকৃততে, গণিতত প্ৰমাণৰ ধাৰাটো বহু হাজাৰ বছৰ ধৰি চলি আছে আৰু গণিতৰ যিকোনো শাখাতে সেইবোৰে কেন্দ্ৰীয় ভূমিকা পালন কৰি আহিছে। গ্ৰীক দাৰ্শনিক তথা গণিতজ্ঞ থেলছকেই প্ৰথমটো জ্ঞাত প্ৰমাণ আগবঢ়োৱা ব্যক্তিজন বুলি বিশ্বাস কৰা হয়। মেছ'প'টেমিয়া, ইজিপ্ত, চীনদেশ আৰু ভাৰতবৰ্ষৰ দৰে বহু প্ৰাচীন সভ্যতাত গাণিতিক কৰ্মকাণ্ডই কেন্দ্ৰীয় ভূমিকা গ্ৰহণ কৰিলেও আজিকালি আমি কৰাৰ দৰে সেইবোৰত গাণিতিক প্ৰমাণ ব্যৱহাৰ কৰাৰ কোনো পৰিস্কাৰ সাক্ষ্য পোৱা নাযায়।

এই অধ্যায়ত উক্তি কি, গণিতত কি ধৰণৰ যুক্তি জড়িত থাকে আৰু এটা গাণিতিক প্ৰমাণত কি থাকে, এনেধৰণৰ বিষয়সমূহৰ ওপৰত আলোকপাত কৰা হ'ব।

A1.2 গাণিতিকভাৱে গ্ৰহণীয় উক্তি (Mathematically Acceptable Statements) :

এই অনুচ্ছেদত আমি গাণিতিকভাৱে গ্ৰহণীয় উক্তিৰ অৰ্থ ব্যাখ্যা কৰিবলৈ চেষ্টা কৰিমহঁক। এটা 'উক্তি' হ'ল এনে এটা বাক্য যিয়ে কোনো ধৰণৰ আদেশ নাইবা আবেগ, অনুভূতি আদি ভাব প্ৰকাশ নকৰে। অৱশ্যে, লগতে প্ৰশ্নসূচক বাক্যসমূহকো উক্তি হিচাপে ধৰা নহয়। উদাহৰণ স্বৰূপে—

'তোমাৰ চুলিৰ বৰণ কি?' এটা উক্তি নহয়, ই এটা প্ৰশ্ন।

'অনুগ্ৰহ কৰি যোৱা আৰু মোৰ বাবে অলপ পানী আনা' ই এটা অনুৰোধ নাইবা এটা আদেশ; উক্তি নহয়।

'কেনে বিস্ময়কৰ সূৰ্যাস্ত!' এটা আবেগ বা অনুভূতি সূচক মন্তব্য; উক্তি নহয়।

যি কি নহওক, 'তোমাৰ চুলিৰ বৰণ ক'লা' এটা উক্তি।

সাধাৰণতে, উক্তিসমূহ তলত উল্লেখ কৰা যিকোনো এক ধৰণৰ হ'ব পাৰে—

- সদায় সত্য
- সদায় অসত্য
- দ্ব্যৰ্থবোধক

'দ্ব্যৰ্থবোধক' কথাটোৰ কিছু ব্যাখ্যাৰ প্ৰয়োজন আছে। দুই ধৰণৰ পৰিস্থিতিৰ বাবে এটা উক্তি

দ্ব্যৰ্থবোধক হ'ব পাৰে। প্ৰথম পৰিস্থিতিটো হ'ল যেতিয়া আমি নিশ্চিত হ'ব নোৱাৰো যে উক্তিটো সদায় সঁচা নে সদায় মিছা। উদাহৰণ স্বৰূপে, 'কাইলৈ বৃহস্পতিবাৰ' এই উক্তিটো দ্ব্যৰ্থবোধক, কাৰণ উক্তিটো সঁচা বা মিছা জানিবলৈ পৰ্যাপ্ত প্ৰাসংগিক তথ্য নাই।

দ্ব্যৰ্থবোধক উৎপত্তিৰ দ্বিতীয় পৰিস্থিতিটো হ'ল— যেতিয়া উক্তিটো ধাৰণা বা ভাবৰ ওপৰত নিৰ্ভৰশীল হয় অৰ্থাৎ যেতিয়া কিছুমান মানুহৰ বাবে ই সঁচা আৰু আন কিছুমানৰ বাবে মিছা হয়। উদাহৰণ স্বৰূপে, 'কুকুৰবোৰ বুধিয়ক' উক্তিটো দ্ব্যৰ্থক কিয়নো কিছুমান মানুহে বিশ্বাস কৰে যে ই সঁচা আৰু আন কিছুমানে এনেধৰণে বিশ্বাস নকৰে।

উদাহৰণ 1 : নিম্নোক্ত উক্তিসমূহ কোন শ্ৰেণীত পৰে— সদায় সঁচা, সদায় মিছা নে দ্ব্যৰ্থবোধক? তোমাৰ উত্তৰৰ যুক্তিযুক্ততা প্ৰতিপন্ন কৰা।

(i) এক সপ্তাহত 8 দিন থাকে।

(ii) ইয়াত বৰষুণ হৈ আছে।

(iii) বেলি পশ্চিমত অস্ত যায়।

(iv) গৌৰী এজনী মৰমীয়াল ছোৱালী।

(v) দুটা অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যাৰ গুণফল যুগ্ম।

(vi) দুটা যুগ্ম স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ গুণফল যুগ্ম।

সমাধান :

(i) উক্তিটো সদায় মিছা, যিহেতু এসপ্তাহত 7 দিনহে থাকে।

(ii) উক্তিটো দ্ব্যৰ্থবোধক, কিয়নো 'ইয়াত' শব্দটোৱে কি ঠাৰি উল্লেখ কৰিছে সেইটো স্পষ্ট নহয়।

(iii) উক্তিটো চিৰসত্য। আমি য'তেই নাথাকো কিয় বেলি পশ্চিমত অস্ত যায়।

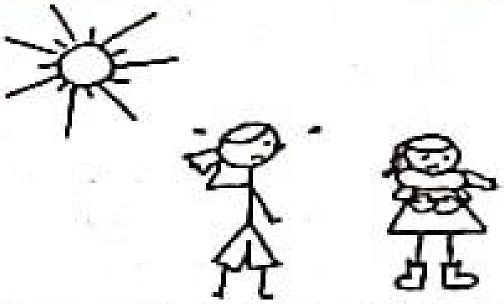
(iv) উক্তিটো দ্ব্যৰ্থবোধক, যিহেতু ই ধাৰণাভিত্তিক— কাৰোবাৰ বাবে গৌৰী দয়ালু হ'লেও আনৰ বাবে নহ'বও পাৰে।

(v) উক্তিটো সদায় মিছা। দুটা অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যাৰ গুণফল সদায় অযুগ্ম।

(vi) উক্তিটো সদায় সঁচা। যি হওক, ইয়াক সঁচা বুলি প্ৰতিপন্ন কৰিবলৈ আমি কিছু কাম কৰিব লাগিব। A1.4 অনুচ্ছেদত ইয়াৰ প্ৰমাণ আগবঢ়োৱা হ'ব।

ইতিপূৰ্বে উল্লেখ কৰি অহাৰ দৰে, আমাৰ দৈনন্দিন জীৱনত আমি উক্তিবোৰৰ বৈধতাৰ (validity) প্ৰতি খুব বেছি সতৰ্ক নাথাকো। উদাহৰণ স্বৰূপে ধৰি লোৱা, তোমাৰ বন্ধুৱে তোমাক কলে যে কেৰালাৰ মনন্তাৱডীত জুলাই মাহৰ প্ৰত্যেক দিনতে বৰষুণ দিয়ে। সমস্ত প্ৰকাৰৰ সম্ভাৱিতা সত্বেও তুমি হয়তো তোমাৰ বন্ধু গৰাকীৰ কথা বিশ্বাস কৰিবা, যদিও জুলাই মাহত এদিন বা দুদিন হয়তো বৰষুণ দিয়া নাছিল। উকীল নহলে তুমি তেওঁৰ সৈতে যুক্তিৰ অৱতাৰণা নিশ্চয় নকৰিবা।

আন এক উদাহৰণ স্বৰূপে, আমি সততে নিজৰ মাজত 'আজি বৰ গৰম' জাতীয় উক্তিবোৰ বিবেচনা কৰো। এনে জাতীয় উক্তিবোৰ আমি সহজেই গ্ৰহণ কৰোঁহক কাৰণ, এই উক্তিবোৰ দ্ব্যৰ্থক হ'লেও প্ৰসংগটো আমাৰ জনা আছে। 'আজি বৰ গৰম' উক্তিটোৱে বেলেগ বেলেগ মানুহৰ মনত বেলেগ বেলেগ ধাৰণা বা অনুভূতিৰ সঞ্চাৰ কৰিব পাৰে



কিয়নো কুমাওন অঞ্চলৰ এগৰাকী ব্যক্তিৰ বাবে যিটো বৰ গৰম, চেন্নাই অঞ্চলৰ এগৰাকী ব্যক্তিৰ বাবে সেয়া গৰম নহবও পাৰে।

কিন্তু গাণিতিক উক্তি এটা দ্ব্যৰ্থবোধক হ'ব নোৱাৰে। গণিতত উক্তি এটা গ্ৰহণীয় (Acceptable) বা বৈধ (valid) হয়, যদিহে ই সঁচা নাইবা মিছা হয়। উক্তি এটাক আমি সঁচা বুলি কওঁ যদি ই সদায় সঁচা হয় অন্যথা ইয়াক এটা মিছা উক্তি আখ্যা দিয়া হয়।

উদাহৰণ স্বৰূপে, $5 + 2 = 7$ সদায় সঁচা, গতিকে $5 + 2 = 7$ এটা সঁচা উক্তি আৰু $5 + 3 = 7$ এটা মিছা উক্তি।

উদাহৰণ 2 : নিম্নোক্ত উক্তিসমূহ সঁচা নে মিছা কোৱা :

(i) ত্ৰিভুজ এটাৰ অন্তঃ কোণবোৰৰ সমষ্টি $180°$

(ii) 1 তকৈ ডাঙৰ প্ৰতিটো অযুগ্ম সংখ্যাই মৌলিক।

(iii) যিকোনো বাস্তৱ সংখ্যা xৰ বাবে, $4x + x = 5x$।

(iv) প্ৰত্যেক বাস্তৱ সংখ্যা xৰ বাবে, $2x > x$।

(v) প্ৰত্যেক বাস্তৱ সংখ্যা xৰ বাবে, $x^2 \geq x$।

(vi) এটা চতুৰ্ভুজৰ আটাইবোৰ বাহু সমান হ'লে, ই এটা বৰ্গ হয়।

সমাধান :

(i) এই উক্তিটো সত্য; ষষ্ঠ অধ্যায়ত তোমালোকে প্ৰমাণ কৰিছা।

(ii) এই উক্তিটো অসত্য; উদাহৰণস্বৰূপে 9 এটা মৌলিক সংখ্যা নহয়।

(iii) এই উক্তিটো সত্য।

(iv) এই উক্তিটো অসত্য। উদাহৰণস্বৰূপে, $2 \times (-1) = -2$ আৰু $-2, -1$ তকৈ ডাঙৰ নহয়।

(v) এই উক্তিটো অসত্য। উদাহৰণস্বৰূপে, $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ আৰু $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ তকৈ ডাঙৰ নহয়।

(vi) এই উক্তিটো অসত্য। কিয়নো ৰম্বাচৰ প্ৰত্যেকটো বাহু সমান যদিও ই বৰ্গ হোৱাটো আৱশ্যক নহয়।

তোমালোকে লক্ষ্য কৰিছা যে গণিতৰ মতে এটা উক্তি সঁচা নহয় বুলি সাব্যস্ত কৰিবলৈ হ'লে আমি এটা ক্ষেত্ৰ বা উদাহৰণ বিচাৰি উলিয়াব লাগিব য'ত উক্তিটো প্ৰযোজ্য নহয়। গতিকে

(ii)ত, যিহেতু 9 সংখ্যাটো মৌলিক নহয়, এই উদাহৰণটোৱে দেখুৱায় যে '1 তকৈ ডাঙৰ প্ৰত্যেক অযুগ্ম সংখ্যাই মৌলিক' উক্তিটো সত্য নহয়। যি উদাহৰণে কোনো এটা উক্তিৰ বিৰোধিতা কৰে তেনে উদাহৰণক বিপৰীত বা বিৰোধী উদাহৰণ (Counter Example) আখ্যা দিয়া হয়। A1.5 অনুচ্ছেদত কিছু বহলভাৱে আমি বিৰোধী উদাহৰণ সম্পৰ্কে আলোচনা কৰিম।

তোমালোকে হয়তো মন কৰিছাহঁক যে যদিও (iv), (v) আৰু (vi) উক্তিকেইটা মিছা, তথাপি সত্যতা প্ৰতিপন্ন কৰিবলৈ কিছুমান চৰ্ত আৰোপ কৰি ইইতক পুনৰ লিখিব পাৰি।

উদাহৰণ 3 : উপযুক্ত চৰ্ত আৰোপ কৰি নিম্নোক্ত উক্তিসমূহ পুনৰ লিখা যাতে সেইবোৰ সঁচা হয়—

(i) প্ৰত্যেক বাস্তৱ সংখ্যা xৰ বাবে, $2x > x$।

(ii) প্ৰত্যেক বাস্তৱ সংখ্যা xৰ বাবে, $x^2 \geq x$।

(iii) কোনো এটা সংখ্যাক সেই সংখ্যাটোৰে ভাগ কৰিলে সদায় 1 পোৱা যায়।

(iv) বৃত্তৰ কোনো এটা বিন্দুত এডাল জ্যাই উৎপন্ন কৰা কোণটো 90°।

(v) যদি চতুৰ্ভুজ এটাৰ সকলো বাহু সমান হয়, তেন্তে ই এটা বৰ্গ।

সমাধান :

(i) যদি $x > 0$, তেন্তে $2x > x$।

(ii) যদি $x \leq 0$ বা $x \geq 1$, তেন্তে $x^2 \geq x$।

(iii) যদি তুমি অশূণ্য কোনো সংখ্যাক সেই সংখ্যাটোৰে হৰণ কৰা তেন্তে সদায় 1 পাবা।

(iv) বৃত্তৰ ব্যাসে বৃত্তটোৰ কোনো বিন্দুত উৎপন্ন কৰা কোণটো 90°ৰ সমান।

(v) যদি কোনো চতুৰ্ভুজৰ সকলো বাহু আৰু সকলো অন্তঃ কোণ সমান তেন্তে ই এটা বৰ্গ।

অনুশীলনী A1.1

1. নিম্নোক্ত উক্তিবোৰ কোন প্ৰকাৰৰ কোৱা— চিৰসত্য, চিৰ অসত্য নে দ্ব্যৰ্থবোধক? তোমাৰ উত্তৰৰ যুক্তিযুক্ততা প্ৰতিপন্ন কৰা—
   (i) এবছৰত তেৰটা মাহ থাকে।
   (ii) দেৱালী এটা শুক্ৰবাৰে অনুষ্ঠিত হয়।
   (iii) মাগাদীৰ তাপমান 26°।
   (iv) পৃথিৱীৰ 1টা চন্দ্ৰ আছে।
   (v) কুকুৰবোৰে উৰিব পাৰে।
   (vi) ফেব্ৰুৱাৰী মাহত দিনৰ সংখ্যা মাত্ৰ 28।
2. নিম্নোক্ত উক্তিসমূহ সঁচা নে মিছা কোৱা। তোমাৰ উত্তৰৰ সপক্ষে যুক্তি আগবঢ়োৱা।
   (i) চতুৰ্ভুজৰ অন্তঃ কোণবোৰৰ সমষ্টি 350°।

(ii) যিকেনো বাস্তৱ সংখ্যা xৰ বাবে, $x^2 \geq 0$।

(iii) এটা ৰম্বাচ এটা সামন্তৰিকো হয়।

(iv) দুটা যুগ্ম সংখ্যাৰ সমষ্টি এটা যুগ্ম সংখ্যা।

(v) দুটা অযুগ্ম সংখ্যাৰ সমষ্টি এটা অযুগ্ম সংখ্যা।

3. যথাযথ চৰ্ত আৰোপ কৰি নিম্নোক্ত উক্তিবোৰ নতুনকৈ লিখি উলিওৱা যাতে সেইবোৰ সত্য হয়—

(i) সকলো মৌলিক সংখ্যাই অযুগ্ম।

(ii) এটা বাস্তৱ সংখ্যাৰ দুগুণ সদায় যুগ্ম।

(iii) যিকোনো সংখ্যা xৰ বাবে, $3x + 1 > 4$।

(iv) যিকেনো সংখ্যা xৰ বাবে, $x^2 \geq 0$।

(v) প্ৰত্যেক ত্ৰিভুজতে মধ্যমা বা মাধ্যিকা একোডাল কোণ একোটাৰ সমদ্বিখণ্ডকো।

A1.3 নিগমনাত্মক বিচাৰ পদ্ধতি (Deductive Reasoning) :

দ্ব্যৰ্থহীন উক্তিৰ সত্যতা প্ৰতিপন্ন কৰিবলৈ ব্যৱহাৰ কৰা প্ৰধান যুক্তিসন্মত ব্যৱস্থাটোৱেই (Main Logical Tool) হ'ল নিগমনাত্মক বিচাৰ পদ্ধতি। নিগমনাত্মক বিচাৰ পদ্ধতিটো ভালদৰে বুজিবলৈ এটা সাঁথৰ লোৱা আৰু ইয়াক সমাধান কৰিবলৈ চেষ্টা কৰা।

তোমাক চাৰিখন কাৰ্ড দিয়া হ'ল। প্ৰতিখন কাৰ্ডৰ এপিঠিত এটা সংখ্যা আৰু আনপিঠিত একোটা আখৰ লিখা আছে।

A	V	6	5

ধৰি লোৱা, তোমাক কোৱা হ'ল যে কাৰ্ডকেইখনে তলৰ নিয়মটো মানি চলে :

'যদি কাৰ্ড এখনৰ এপিঠিত এটা যুগ্ম সংখ্যা থাকে তেন্তে আন পিঠিত এটা স্বৰবৰ্ণ থাকিব।'

নিয়মটোৰ সত্যতা নিৰূপন কৰিবলৈ আটাইতকৈ কম কিমানখন কাৰ্ড ওলোটাই চাব লাগিব?

অৱশ্যে আটাইকেইখন কাৰ্ডকে ওলোটাই চাই সত্যতা নিৰূপন কৰাৰ ব্যৱস্থা তোমাৰ বাবে খোলা আছে। কিন্তু থকাতকৈ কম সংখ্যক কাৰ্ড ওলোটাই চালেও তোমাৰ কামটো হ'বনে?

মন কৰা যে, উক্তিটোৰ মতে এপিঠিত এটা যুগ্ম সংখ্যা থকা কাৰ্ড এখনৰ আনপিঠিত এটা স্বৰবৰ্ণ থাকে। উক্তিটোৱে এইটো কোৱা নাই যে এপিঠিত স্বৰবৰ্ণ থকা কাৰ্ড এখনৰ আন পিঠিত যুগ্ম সংখ্যা থাকিবই লাগিব। তেনেকুৱা হবও পাৰে বা নহবও পাৰে। নিয়মটোত এইটোও কোৱা হোৱা নাই যে এপিঠিত এটা অযুগ্ম সংখ্যা থকা কাৰ্ড এখনৰ আনটো পিঠিত এটা ব্যঞ্জনবৰ্ণ থাকিবই লাগিব। তেনেকুৱা হ'বও পাৰে বা নহ'বও পাৰে।

তেনেহ'লে আমি 'A' কাৰ্ডখন ওলোটাই চাব লাগিব নেকি? নালাগে! কাৰ্ডখনৰ আনটো পিঠিত যুগ্ম বা অযুগ্ম সংখ্যা যিয়েই নাথাকক, নিয়মটো প্ৰযোজ্য হৈয়েই থাকিব।

'5' কাৰ্ডখনৰ ক্ষেত্ৰত কি হ'ব? এই কাৰ্ডখনো ওলোটাই চোৱাৰ কোনো আৱশ্যকতা নাই, কাৰণ, আনটো পিঠিত স্বৰবৰ্ণ অথবা ব্যঞ্জনবৰ্ণ যিয়েই নাথাকক, নিয়মটো প্ৰযোজ্য হৈয়ে থাকিব।

কিন্তু 'V' আৰু '6' কাৰ্ড দুখন ওলোটাই চোৱাৰ প্ৰয়োজন আছে। যদি 'V' কাৰ্ডখনৰ আনটো পিঠিত এটা যুগ্ম সংখ্যা থাকে তেন্তে নিয়মটো ভংগ হৈছে বুলি স্পষ্টভাৱে ওলাই পৰিব। সদৃশ ধৰণে, যদি '6' কাৰ্ডখনৰ আনটো পিঠিত এটা ব্যঞ্জনবৰ্ণ থাকে তেন্তে নিয়মটো ভংগ হ'ব।

সাঁথৰটো সমাধানৰ অৰ্থে আমি যি বিচাৰধাৰা বা যুক্তিৰ অৱতাৰণা কৰিলোঁহক তাকেই কোৱা হয় নিগমনাত্মক বিচাৰ পদ্ধতি। ইয়াক নিগমনাত্মক কোৱা হয় কাৰণ যুক্তি প্ৰয়োগেৰে পূৰ্বস্বীকৃত কোনো উক্তিৰ পৰা আমি এক সিদ্ধান্ত বা উক্তিত উপনীত হওঁ। উদাহৰণ স্বৰূপে, ওপৰোক্ত সাঁথৰটোত, এলানি যুক্তি তৰ্কৰ প্ৰয়োগৰ দ্বাৰা আমি এই সিদ্ধান্তত উপনীত হৈছিলো যে আমি কেৱল 'V' আৰু '6' কাড দুখনহে ওলোটাই চাব লাগিব।

নিগমনাত্মক পদ্ধতিয়ে কোনো নিৰ্দিষ্ট উক্তিৰ সত্যতা প্ৰতিপন্নৰ সিদ্ধান্ত গ্ৰহণতো আমাক সহায় কৰে কাৰণ ই ইতিমধ্যে সঁচা বুলি জানিব পৰা এটা বহল ভিত্তিক সাধাৰণ উক্তিৰ এক বিশেষ ৰূপহে মাথোন। উদাহৰণ স্বৰূপে, দুটা অযুগ্ম সংখ্যাৰ গুণফল সদায় অযুগ্ম হয় বুলি প্ৰমাণিত হোৱাৰ লগে লগে আমি 70001×134563 গুণফলটো অযুগ্ম বুলি থিতাতে মন্তব্য বা সিদ্ধান্ত আগবঢ়াব পাৰো কিয়নো 70001 আৰু 134563 সংখ্যা দুটা অযুগ্ম।

শ শ বছৰ ধৰি নিগমনাত্মক বিচাৰ পদ্ধতি মানুহৰ চিন্তা জগতৰ অংশ হৈ আহিছে আৰু আমাৰ দৈনন্দিন জীৱনৰ সকলোতে ই ব্যৱহৃত হৈছে। উদাহৰণ স্বৰূপে, ধৰি লোৱা, পৰৱৰ্তী উক্তি দুটা সত্য—

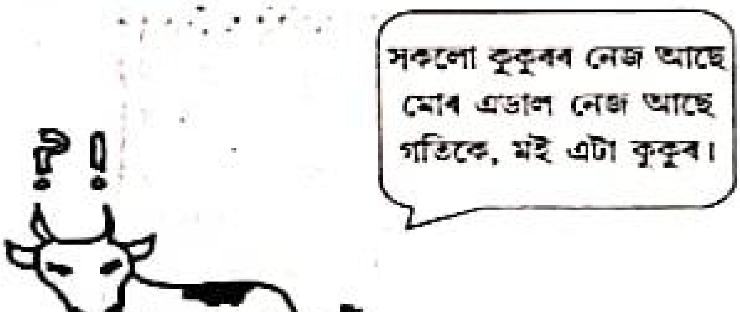
'ছোলাৰিছ ফুল (Flower Solaris) ফুলে, কেৱল যদি আগদিনাৰ সৰ্বোচ্চ উত্তাপ 28°C তকৈ বেছি হয়।' আৰু '2005 চনৰ 15 ছেপ্তেম্বৰ তাৰিখে ইমেজিনাৰী ভেলীত (Imaginary Valley) ছোলাৰিছ ফুল ফুলিছিল।' তেতিয়া নিগমনাত্মক বিচাৰ পদ্ধতি খটুৱাই আমি এই সিদ্ধান্তত উপনীত হওঁ যে 2005 চনৰ 14 ছেপ্তেম্বৰ তাৰিখে ইমেজিনাৰী ভেলীত সৰ্বোচ্চ তাপমান 28°C তকৈ অধিক আছিল।

দুৰ্ভাগ্যজনক কথা যে আমি আমাৰ দৈনন্দিন জীৱনত সদায় শুদ্ধ বিচাৰ পদ্ধতিৰ ব্যৱহাৰ নকৰো। ভুল বিচাৰ পদ্ধতিৰ ওপৰত নিৰ্ভৰ কৰি আমি প্ৰায়েই অনেক সিদ্ধান্তত উপনীত হওঁ। উদাহৰণ স্বৰূপে, যদি কোনোবা এদিন তোমাৰ বান্ধৱীজনীয়ে তোমাক দেখি নাহাঁহিলে তেন্তে তুমি হয়তো ভাবিবা যে তেওঁ তোমাক খং কৰি আছে। যদিও এই কথাটো সঁচা হ'ব পাৰে যে, 'যদি তেওঁ মোৰ ওপৰত নাৰাজ (ক্ৰুদ্ধ) হয় তেন্তে মোলৈ চাই নাহাঁহিব', তথাপি এইটোও সঁচা হ'ব পাৰে যে 'যদি তেওঁৰ সাংঘাতিক মুৰ বিষাইছে, তেন্তে তেওঁ মোক দেখিলেও নাহাঁহিব।'

তোমাৰ দৈনন্দিন জীৱনত উপনীত হোৱা কিছুমান সিদ্ধান্ত বৈধ (valid) নে ভ্ৰান্ত বিচাৰৰ ওপৰত প্ৰতিস্থিত হৈছে পৰীক্ষা কৰি নোচোৱা কিয়?

অনুশীলনী-A1.2

1. নিগমনাত্মক বিচাৰ পদ্ধতিৰে নিম্নোক্ত প্ৰশ্নসমূহৰ উত্তৰ দিয়া—
   (i) মানুহবোৰ স্তন্যপায়ী প্ৰাণী (Mammal)। সকলো স্তন্যপায়ী প্ৰাণী মেৰুদণ্ডী (Vertebrates)। এই দুটা উক্তিৰ ওপৰত নিৰ্ভৰ কৰি মানুহৰ বিষয়ে তুমি কি সিদ্ধান্ত ল'বা?
   (ii) এণ্টনি এজন নাপিত। দীনেশে তেওঁৰ চুলি কটালে। তুমি এই সিদ্ধান্তত উপনীত হ'বা নেকি যে এণ্টনিয়েই দীনেশৰ চুলি কাটিছে?
   (iii) মংগল গ্ৰহৰ অধিবাসী সকলৰ ৰঙা জিভা থাকে। গুলাগ (Gulag) এজন মংগল গ্ৰহৰ অধিবাসী। এই দুটা উক্তিৰ ওপৰত নিৰ্ভৰ কৰি তুমি গুলাগৰ বিষয়ে কি মন্তব্য দিবা?
   (iv) কোনো এটা নিৰ্দিষ্ট দিনত চাৰি ঘণ্টাতকৈ অধিক সময় বৰষুণ পৰিলে তাৰ ঠিক পিছৰ দিনা নাওবাবোৰ পৰিস্কাৰ কৰিবলগীয়া হয়। আজি ছয় ঘণ্টা ধৰি বৰষুণ পৰিছে। কাইলৈ নাওবাবোৰৰ অৱস্থা কি হ'ব সেই সম্পৰ্কে তুমি কি মন্তব্য আগবঢ়াবা?
   (v) নিম্নোক্ত ব্যঙ্গ চিত্ৰটোত গৰুজনীৰ বিচাৰ পদ্ধতিত কি বিভ্ৰান্তি আছে?



2. থাক এবাৰ তোমাক চাৰিখন কাৰ্ড দিয়া হ'ল। প্ৰত্যেক কাৰ্ডৰে এপিঠিত এটা সংখ্যা আৰু আনটো পিঠিত একেটা অক্ষৰ ছপোৱা আছে। নিম্নোক্ত নিয়মটো প্ৰযোজ্য হয়নে প্ৰত্যায়ন কৰিবলৈ মাত্ৰ কেনে দুখন কাৰ্ড ওলোটাই চাব লাগিব?

'যদি কাৰ্ড এখনৰ এপিঠিত ব্যঞ্জনবৰ্ণ থাকে তেন্তে আনটো পিঠিত এটা অযুগ্ম সংখ্যা থাকে।'

B	3	U	8

A1.4 উপপাদ্য, অনুমান আৰু স্বীকাৰ্য (Theorems,Conjectures and Axioms) :

এই পৰ্যন্ত আমি উক্তি সম্পৰ্কে আৰু সেইবোৰৰ বৈধতা কিদৰে পৰীক্ষা কৰা হয় সেই বিষয়ে আলোচনা কৰিলোঁহঁক। এই অনুচ্ছেদত তোমালোকে গণিতক ধীৰে ধীৰে গঢ়ি তোলা তিনিবিধ ভিন্ন প্ৰকাৰৰ উক্তিৰ বৈশিষ্ট্য সম্পৰ্কে অধ্যয়ন কৰিব পাৰিবা যি কেইটা হ'ল উপপাদ্য, অনুমান আৰু স্বীকাৰ্য।

ইতিমধ্যে তোমালোকে বহুতো উপপাদ্য পাই আহিছা। তেন্তে উপপাদ্য কি? এটা গাণিতিক উক্তি যাৰ সত্যতা প্ৰতিষ্ঠিত (প্ৰমাণিত) হৈছে তাকেই উপপাদ্য বোলা হয়। উদাহৰণ স্বৰূপে, A1.5 অনুচ্ছেদত গম পাবা যে নিম্নোক্ত উক্তিসমূহ একোটা উপপাদ্য।

উপপাদ্য A1.1 : এটা ত্ৰিভুজৰ অন্তঃ কোণ কেইটাৰ সমষ্টি $180°$।

উপপাদ্য A1.2 : দুটা যুগ্ম স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ গুণফল এটা যুগ্ম সংখ্যা।

উপপাদ্য A1.3 : যিকোনো তিনিটা ক্ৰমিক যুগ্ম স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ গুণফলটো 16 ৰে বিভাজ্য হয়।

অনুমান (Conjecture) হ'ল এটা উক্তি যাক আমাৰ গাণিতিক বোধশক্তি (Understanding) আৰু অভিজ্ঞতা অৰ্থাৎ আমাৰ গাণিতিক সহজাত উপলব্ধিৰ (Mathematical Intuition) জৰিয়তে সঁচা বুলি বিশ্বাস কৰো। অনুমান এটা সঁচাও হ'ব পাৰে নাইবা মিছাও হ'ব পাৰে। যদি আমি ইয়াৰ প্ৰমাণ আগবঢ়াব পাৰো তেন্তে ই এটা উপপাদ্য হ'ব। গণিতজ্ঞসকলে বিশেষ ধৰণৰ চানেকী বা আৰ্হি চাই আৰু মেধাপ্ৰসুত গাণিতিক চিন্তাৰে একোটা অনুমান কৰি লয়। কেইটামান বিশেষ ধৰণৰ চানেকী বা আৰ্হিৰ প্ৰতি আমি নজৰ দিওঁহক আৰু চাওঁহক কি ধৰণৰ বুদ্ধিদীপ্ত অনুমানত উপনীত হ'ব পৰা যায়।

উদাহৰণ 4 : যিকোনো তিনিটা ক্ৰমিক যুগ্ম সংখ্যা বিবেচনা কৰা আৰু সেইবোৰ যোগ কৰা যেনে—

$2 + 4 + 6 = 12$, $4 + 6 + 8 = 18$, $6 + 8 + 10 = 24$, $8 + 10 + 12 = 30$,
$20 + 22 + 24 = 66$

এই যোগফলসমূহত কোনো বিশেষ ধৰণৰ চানেকী লক্ষ্য কৰিছানে? সেইবোৰৰ সম্পৰ্কত তুমি কি অনুমান কৰিব পাৰিছা?

সমাধান : এটা অনুমান হ'ব পাৰে এনে ধৰণৰ—

(i) ক্ৰমিক যুগ্ম সংখ্যা তিনিটাৰ সমষ্টিটো এটা যুগ্ম সংখ্যা।

আন এটা হ'ব পাৰে এনেধৰণৰ—

(ii) তিনিটা ক্ৰমিক যুগ্ম সংখ্যাৰ সমষ্টিটো 6 ৰে বিভাজ্য হয়।

উদাহৰণ 5 : পাস্কেলৰ ত্ৰিভুজ (Pascal's Triangle) নামৰ নিম্নোক্ত সংখ্যাৰ চানেকীটো বিবেচনা কৰা।

শাৰী		সংখ্যাবোৰৰ সমষ্টি
1	1	1
2	1 1	2
3	1 2 1	4
4	1 3 3 1	8
5	1 4 6 4 1	16
6	1 5 10 10 5 1	32
7 -	--	- -
8 -	--	- -

শাৰী 7 আৰু 8ত সংখ্যাসমূহৰ সমষ্টিটো সম্পৰ্কে কি অনুমান কৰিবা? 21তম শাৰীত সংখ্যাকেইটাৰ সমষ্টি কি হ'ব? তুমি এটা চানেকী দেখিছানে? nতম শাৰীত সংখ্যাবোৰৰ সমষ্টিৰ বাবে এটা সূত্ৰ অনুমান কৰা।

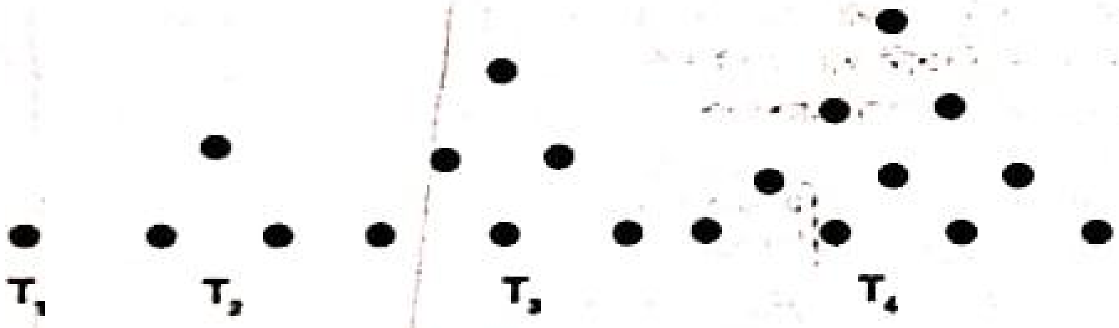
সমাধান : 7তম শাৰীত সংখ্যাকেইটাৰ সমষ্টি $= 2 \times 32 = 64 = 2^6$

8তম শাৰীত সংখ্যাকেইটাৰ সমষ্টি $= 2 \times 64 = 128 = 2^7$

21তম শাৰীত সংখ্যাকেইটাৰ সমষ্টি $= 2^{20}$

nতম শাৰীত সংখ্যাকেইটাৰ সমষ্টি $= 2^{n-1}$

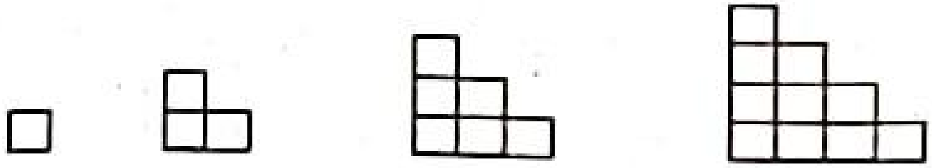
উদাহৰণ 6 : তথাকথিত ত্ৰিভুজীয় সংখ্যাবোৰ (T_n) বিবেচনা কৰা—



চিত্ৰ A1.1

ইয়াত বিন্দুবোৰ এনেভাবে সজোৱা আছে যে সেইবোৰে একোটা ত্ৰিভুজ গঠন কৰে। ইয়াত $T_1 = 1$, $T_2 = 3$, $T_3 = 6$, $T_4 = 10$, ইত্যাদি। T_5 কিমান হ'ব অনুমান কৰিব পাৰানে? T_6 কি হ'ব? T_n ৰ মান কি হ'ব? T_n সম্পৰ্কে এটা অনুমান আগবঢ়োৱা।

নিম্নোক্ত ধৰণে পুনৰ সজোৱা চিত্ৰকেইটা তোমাৰ বাবে সহায়ক হ'ব পাৰে।



T_1 T_2 T_3 T_4

চিত্ৰ A1.2

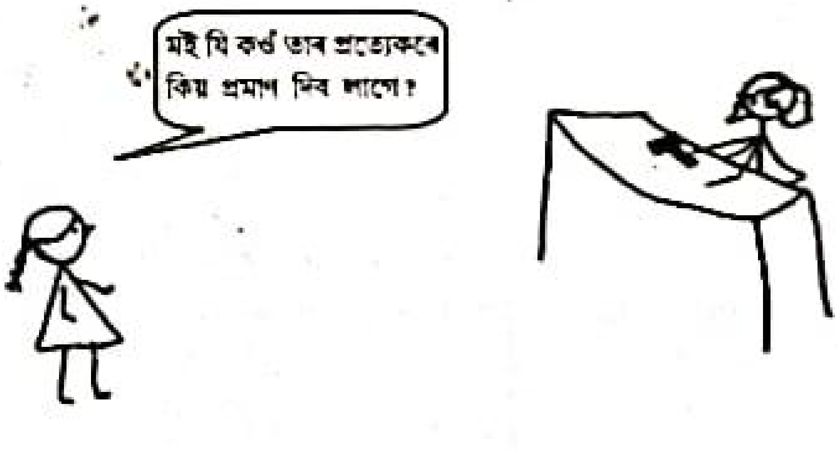
সমাধান : $T_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 = \frac{5\times 6}{2}$

$T_6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 = \frac{6\times 7}{2}$

$T_n = \frac{n\times(n+1)}{2}$

মুকলি হৈ থকা (অৰ্থাৎ সঁচা বা মিছা বুলি প্ৰমাণিত নোহোৱাকৈ থকা) অনুমানৰ এটা উপযুক্ত দৃষ্টান্ত হ'ল গোল্ডবাখৰ অনুমান (Goldbach Conjecture), যিটো গণিতজ্ঞ খ্ৰীষ্টিয়ান গোল্ডবাখৰ (1690-1764) নামেৰে নামাংকিত কৰা হৈছে। এই অনুমানটোৰ মতে, '4তকৈ ডাঙৰ যিকোনো অখণ্ড যুগ্ম সংখ্যাকে দুটা অযুগ্ম মৌলিক সংখ্যাৰ যোগফল হিচাপে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি।' হয়তো তোমালোকৰ মাজৰে কোনোবাই এদিন এই অনুমানটো সঁচা নাইবা মিছা বুলি প্ৰমাণ কৰিবা আৰু আৰু বৰ বিখ্যাত হৈ উঠিবা!

তোমালোকৰ কিজানি আচৰিতেই লাগিছে এই বুলি যে গণিতত আমি যি যি পাওঁ সেই আটাইবোৰকে প্ৰমাণ কৰাৰ আৱশ্যকতা আছে নে? যদি নাই, কিয় নাই?



প্ৰকৃত ঘটনাটো হ'ল গণিতৰ প্ৰতিটো ক্ষেত্ৰই কিছুমান উক্তিৰ ওপৰত নিৰ্ভৰশীল যিবোৰ সঁচা বুলি মানি লোৱা হয় আৰু যাৰ কোনো প্ৰমাণ আগবঢ়োৱা নহয়। এইবোৰ হ'ল 'স্বতঃ প্ৰমাণিত সত্য', যাক আমি প্ৰমাণ অবিহনে সঁচা বুলি স্বীকাৰ কৰি লওঁ। এনেধৰণৰ উক্তিবোৰক স্বতঃ সিদ্ধ (Axioms) আখ্যা দিয়া হয়। অধ্যায়-5ত তোমালোকে ইউক্লিডৰ স্বতঃ সিদ্ধ (Axioms) আৰু স্বীকাৰ্য (Postulates) সম্পৰ্কে অধ্যয়ন কৰিছিলা (আজিকালি আমি স্বতঃ সিদ্ধ আৰু স্বীকাৰ্যৰ মাজত প্ৰভেদ থকা বুলি নধৰোঁ)।

উদাহৰণ স্বৰূপে ইউক্লিডৰ প্ৰথম স্বীকাৰ্যটো হ'ল :

যি কোনো এটা বিন্দুৰ পৰা আন যি কোনো এটা বিন্দুলৈ এডাল সৰল ৰেখা টানিব পাৰি।

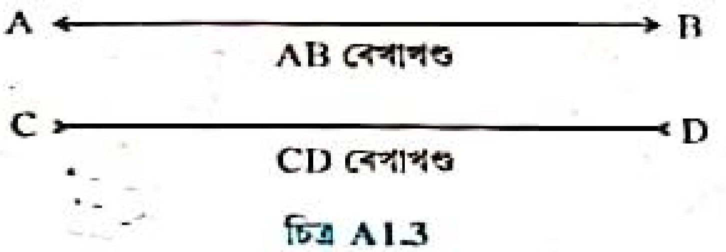
আৰু তৃতীয় স্বীকাৰ্যটো হ'ল :

যি কোনো কেন্দ্ৰ ধৰি যি কোনো ব্যাসাৰ্ধৰ বৃত্ত আঁকিব পাৰি।

এই উক্তিসমূহ সম্পূৰ্ণৰূপে সঁচা যেন লাগে আৰু ইউক্লিডে এইবোৰক সঁচা বুলিয়েই ধৰিছিল। কিয়? ইয়াৰ কাৰণ হ'ল, আমি প্ৰতিটো কথাকে প্ৰমাণ কৰি দেখুৱাব নোৱাৰো আৰু ক'ৰবাৰ পৰা আমি আৰম্ভ কৰিবই লাগিব। সঁচা বুলি গ্ৰহণ কৰিব পৰা আমাক কিছুমান উক্তি লাগে। যিবোৰ আমি সঁচা বুলি মানি লওঁ আৰু তাৰ পাছত এই স্বতঃ সিদ্ধ উক্তিবোৰৰ পটভূমিত যুক্তি তৰ্কৰ বিধি খটুৱাই আমি আমাৰ জ্ঞান বঢ়াই যাব পাৰো

তেতিয়া তোমালোকে হয়তো প্ৰশ্ন কৰিবা যে স্বতঃ প্ৰমাণিত যেন লগা আটাইবোৰ উক্তিকে আমি কিয় সহজে সঁচা বুলি গ্ৰহণ নকৰো। ইয়াৰ বহু কাৰণ আছে। প্ৰায়ভাগ ক্ষেত্ৰতে আমাৰ স্বতঃস্ফূৰ্ত অনুভৱবোৰ (Intuition) ভুল হ'ব পাৰে, চিত্ৰ বা চানেকীবোৰে আমাক ঠগিব পাৰে, আৰু সেয়েহে কিবা এটা কথা সঁচা বুলি নিশ্চিত হোৱাৰ বাবে প্ৰমাণেই হ'ল একমাত্ৰ উপায়। উদাহৰণ স্বৰূপে, আমাৰ বহুতে বিশ্বাস কৰে যে এটা সংখ্যাক আন এটা সংখ্যাৰে পুৰণ কৰিলে পূৰণফলটো উভয় সংখ্যাতকৈ ডাঙৰ হয়। কিন্তু আমি জানো যে ই সদায় সঁচা নহয়। উদাহৰণ স্বৰূপে, $5 \times 0.2 = 1$ যিটো 5তকৈ সৰু।

আকৌ, A1.3 চিত্ৰটোলৈ মন কৰা। কোনডাল ৰেখাখণ্ড বেছি দীঘল, AB নে CD?



চিত্ৰ A1.3

দেখা যায়, দুয়োডাল ৰেখাখণ্ড ঠিক একে দৈৰ্ঘ্যৰ, যদিও ABক চুটি যেন লাগে।

তেনে ক্ষেত্ৰত তোমালোকৰ মনত স্বতঃ সিদ্ধবোৰৰ বৈধতাৰ (Validity) ওপৰতো সন্দেহ

উপলব্ধি। স্বতঃ সিদ্ধবোৰ নিৰ্বাচন কৰা হয় আমাৰ স্বতঃস্ফূৰ্ত অনুভৱ আৰু যিবোৰ ধাৰণা স্বতঃ প্ৰমাণিত সত্য যেন লাগে সেইবোৰৰ পটভূমিত। গতিকে সেইবোৰ সত্য হোৱাটোৱেই আমি বিচাৰো। যি হওঁক, এনে ধৰণৰ কথাও সম্ভৱ যে পৰৱৰ্তী সময়ত আমি আৱিষ্কাৰ কৰিছো যে কোনো এটা বিশেষ স্বতঃ সিদ্ধ সঁচা নহয়। এনে ধৰণৰ সম্ভাৱনাৰ বিৰুদ্ধে ৰক্ষাকবচ কি হ'ব? আমি পৰৱৰ্তী পদক্ষেপবোৰ ল'ব পাৰোঁহক :

(i) স্বতঃ সিদ্ধৰ সংখ্যা নূন্যতম হ'ব লাগে। উদাহৰণ স্বৰূপে, ইউক্লিডৰ স্বতঃ সিদ্ধ আৰু পাঁচটা মাত্ৰ স্বীকাৰ্যৰ সহায়ত আমি শ শ উপপাদ্য উলিয়াব পাৰো।

(ii) স্বতঃ সিদ্ধসমূহ যাতে সংগত (consistent) হয় সেই কথাৰ নিশ্চয়তাৰ প্ৰতি মন দিব লাগে।

স্বতঃ সিদ্ধৰ সংগ্ৰহ এটাক অসংগত (Inconsistent) বুলি কোৱা হয় যদি ইয়াৰ এটা কোনো এটা স্বতঃ সিদ্ধ ব্যৱহাৰ কৰি আন এটা স্বতঃ সিদ্ধ সঁচা নহয় বুলি দেখুৱাব পৰা যায়। উদাহৰণ স্বৰূপে, নিম্নোক্ত উক্তি দুটা বিবেচনা কৰা। আমি দেখুৱাম যে সিহঁত অসংগত (Inconsistent)।

উক্তি-1 : কোনো পূৰ্ণ সংখ্যাই (Whole number) তাৰ ঠিক পৰৱৰ্তী সংখ্যাটোৰ (Successor) সমান নহয়।

উক্তি-2 : পূৰ্ণ সংখ্যা এটাক শূণ্যৰে হৰণ কৰিলে এটা পূৰ্ণ সংখ্যা পোৱা যায়।

(মনত পেলোৱা যে শূণ্যৰে হৰণ কৰা কাৰ্য সংজ্ঞাবদ্ধ নহয়। কেৱল এই মুহূৰ্তৰ বাবে আমি ধৰি লওঁ যে ই সম্ভৱ আৰু কি ঘটে চাওঁহক)

উক্তি-2 ৰ পৰা আমি পাওঁ $\frac{1}{0} = a$, য'ত a কোনোবা এটা পূৰ্ণ সংখ্যা। ইয়াৰ পৰা আমি পাওঁ $1 = 0$। কিন্তু ই উক্তি-1 ক অনুমোদন নকৰে; যি উক্তি অনুসৰি কোনো পূৰ্ণ সংখ্যাই তাৰ ঠিক পৰৱৰ্তী সংখ্যাটোৰ সমান নহয়।

(iii) অসত্য স্বতঃ সিদ্ধ এটাই সোনকালে হওক বা পলমকৈ হওক বিৰোধৰ (Contradiction) সূচনা কৰিব। বিৰোধৰ সূচনা তেতিয়াই হয় যেতিয়া এনে এটা উক্তি পোৱা যায় যাতে উক্তিটো আৰু তাৰ বিপৰীত উক্তিটো (Negation) একেলগে সঁচা হয়। উদাহৰণ স্বৰূপে, ওপৰৰ উক্তি দুটা (উক্তি-1 আৰু উক্তি-2) আকৌ এবাৰ বিবেচনা কৰা।

উক্তি-1ৰ পৰা আমি পাওঁ $2 \neq 1$। এতিয়া $x^2 - x^2$ ৰাশিটোলৈ চোৱা। আমি দুই ধৰণে ইয়াৰ উৎপাদক বিশ্লেষণ কৰিব পাৰোঁহক, যেনে—

(i) $x^2 - x^2 = x(x - x)$ আৰু

(ii) $x^2 - x^2 = (x + x)(x - x)$

গতিকে, $x(x - x) = (x + x)(x - x)$

উক্তি-2 ৰ সহায়ত উভয় পক্ষৰ পৰা $(x - x)$ক আমি কাটিব পাৰো।তেতিয়া আমি পাওঁ, $x = 2x$ যিটোৱে আকৌ সূচায় যে $2 = 1$।

গতিকে আমি দেখিলো যে উক্তি $2 \neq 1$ আৰু ইয়াৰ বিপৰীত উক্তি $2 = 1$ উভয়ে সত্য। ই এক বিৰোধ। 'পূৰ্ণ সংখ্যাক শূণ্যৰে ভাগ কৰিলে পূৰ্ণ সংখ্যা পোৱা যায়' এই অসত্য স্বতঃ সিদ্ধৰ বাবেই বিৰোধৰ সৃষ্টি হ'ল।

গতিকে, উক্তি এটাক স্বতঃ সিদ্ধ ৰূপে কৰিবলৈ ভালেখিনি চিন্তা-ভাৱনা আৰু অন্তৰ্দৃষ্টিৰ প্ৰয়োজন হয়। আমি নিশ্চিত হ'ব লাগিব যাতে সেইবোৰ কোনো বিসংগতি নাইবা যুক্তিগত বিৰোধৰ সৃষ্টি নকৰে। তালোপৰি, স্বতঃ সিদ্ধসমূহৰ বাছনিয়েই কেতিয়াবা নতুন আৱিষ্কাৰৰ বাবে সহায়ক হ'ব পাৰে! অধ্যায়-5 ত তোমালোকে ইউক্লিডৰ পঞ্চম স্বীকাৰ্য আৰু এই স্বীকাৰ্যৰ ভিত্তিত অইউক্লিডীয় জ্যামিতিৰ আৱিষ্কাৰৰ সৈতে পৰিচিত হৈছা। তোমালোকে পাই আহিছা যে গণিতজ্ঞসকলৰ বিশ্বাস অনুসৰি পঞ্চম স্বীকাৰ্যটো স্বীকাৰ্য হ'ব নালাগিছিল বৰং ই আছিল এটা উপপাদ্য যাক কেৱল প্ৰথম চাৰিটা স্বীকাৰ্যৰ সহায়ত প্ৰমাণ কৰিব পাৰি। বিস্ময়জনকভাৱে, এই প্ৰচেষ্টাসমূহৰ ফলতে আৱিষ্কাৰ হৈছিল অইউক্লিডীয় বিভিন্ন জ্যামিতিৰ।

স্বীকাৰ্য বা স্বতঃ সিদ্ধ, উপপাদ্য আৰু অনুমান (Conjecture) সমূহৰ পাৰস্পৰিক প্ৰভেদ স্মৰণ কৰি আমি এই অনুচ্ছেদৰ মোৰণি মাৰিম। স্বীকাৰ্য হৈছে এটা গাণিতিক উক্তি যাক প্ৰমাণ অবিহনে সত্য বুলি গ্ৰহণ কৰা হয়; অনুমান হৈছে এটা গাণিতিক উক্তি যাৰ সত্যতা বা অসত্যতা এতিয়াও সাব্যস্ত কৰিবলৈ বাকী আৰু উপপাদ্য হৈছে এটা গাণিতিক উক্তি যাৰ সত্যতা যুক্তিগতভাৱে সাব্যস্ত বা প্ৰতিষ্ঠিত হৈছে।

অনুশীলনী-A1.3

1. যিকোনো তিনিটা ক্ৰমিক যুগ্ম সংখ্যা বিবেচনা কৰা আৰু সিহঁতৰ গুণফল উলিওৱা; উদাহৰণ স্বৰূপে, $2 \times 4 \times 6 = 48$, $4 \times 6 \times 8 = 192$ ইত্যাদি। এই গুণফলবোৰৰ সম্পৰ্কত তিনিটা অনুমান আগবঢ়োৱা।
2. পাস্কেলৰ ত্ৰিভুজলৈ উভতি যোৱা
   শাৰী-1 : $1 = 11^0$
   শাৰী-2 : $11 = 11^1$
   শাৰী-3 : $121 = 11^2$
   শাৰী-4 আৰু শাৰী-5 সম্পৰ্কে অনুমান আগবঢ়োৱা। তোমাৰ অনুমানটো সঠিক হৈছেনে? তোমাৰ অনুমানটো শাৰী-6 ৰ বাবেও সঠিক হৈছেনে?
3. ত্ৰিভুজীয় সংখ্যাবোৰলৈ (চিত্ৰ A1.2 দ্ৰষ্টব্য) পুনৰ লক্ষ্য কৰা। দুটা ক্ৰমিক ত্ৰিভুজীয় সংখ্যা যোগ কৰা। উদাহৰণ স্বৰূপে, $T_1 + T_2 = 4$, $T_2 + T_3 = 9$, $T_3 + T_4 = 16$

$T_4 + T_5$ৰ মান কি হ'ব? $T_{n-1} + T_n$ সম্পৰ্কে এটা অনুমান আগবঢ়োৱা।

4. নিম্নোক্ত চানেকীটোলৈ লক্ষ্য কৰা :

$1^2 = 1$

$11^2 = 121$

$111^2 = 12321$

$1111^2 = 1234321$

$11111^2 = 123454321$

তলৰ প্ৰতিটোৰ ক্ষেত্ৰত একোটা অনুমান আগবঢ়োৱা।

$111111^2 =$

$1111111^2 =$

তোমাৰ অনুমানৰ সত্যতাপৰীক্ষা কৰা।

5. এই পুথিখনত ব্যৱহৃত হোৱা পাঁচোটা স্বতঃ সিদ্ধ (স্বীকাৰ্য) উল্লেখ কৰা।

A1.5 গাণিতিক প্ৰমাণ মানে কি (What is a Mathematical Proof)?

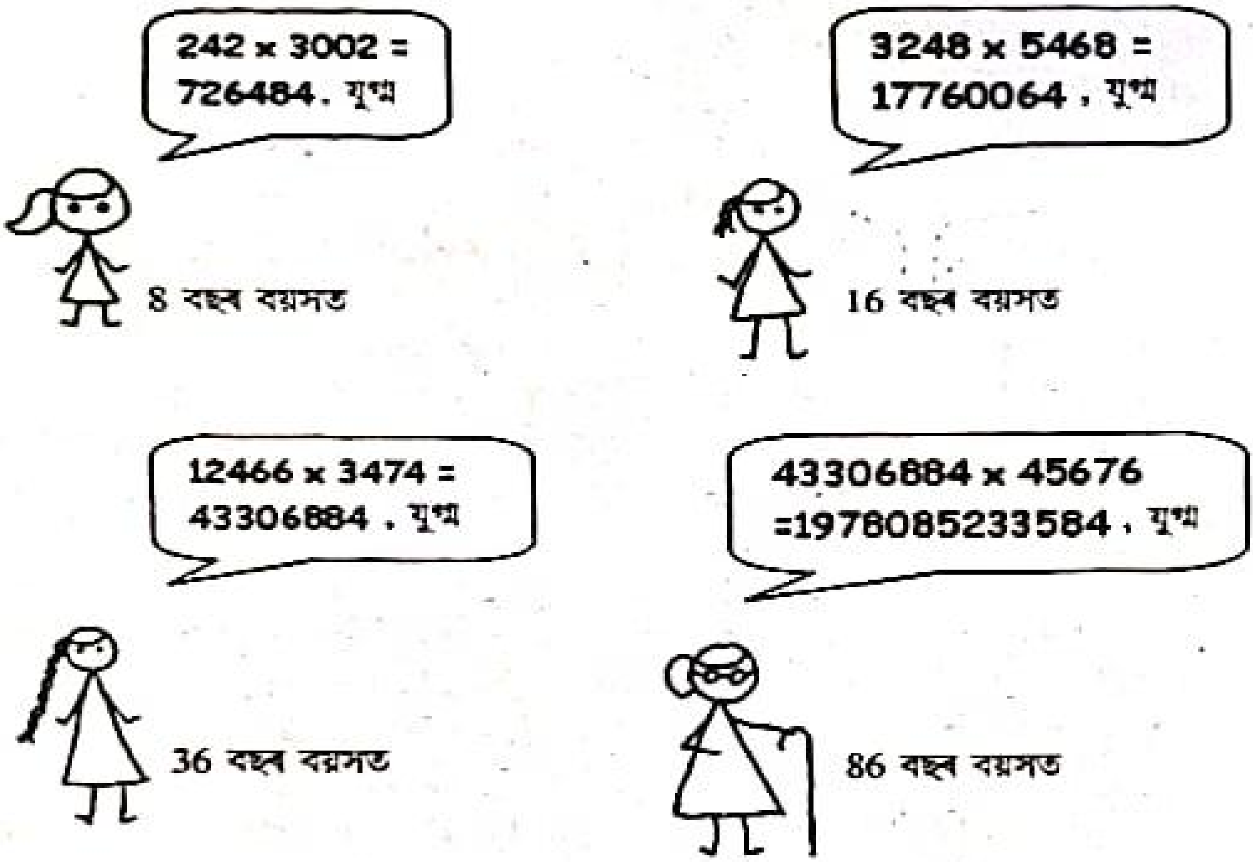
এতিয়া আমি প্ৰমাণৰ বিভিন্ন দিশৰ ওপৰত দৃষ্টিপাত কৰোঁহক। প্ৰথমে আমি সত্যাপন (Verification) আৰু প্ৰমাণ (Proof)ৰ মাজৰ পাৰ্থক্যটো বুজিবলৈ চেষ্টা কৰোঁহক। গণিতত প্ৰমাণৰ বিষয়ে অধ্যয়ণ কৰিবলৈ লোৱাৰ পূৰ্বে তোমালোকক ঘাইকৈ উক্তিসমূহক সত্যাপন কৰি চাবলৈ কোৱা হৈছিল।

উদাহৰণ স্বৰূপে, তোমালোকক হয়তো উদাহৰণৰ সৈতে সত্যাপন কৰি চাবলৈ কোৱা হৈছিল যে, 'দুটা যুগ্ম সংখ্যাৰ গুণফল যুগ্ম সংখ্যা গতিকে, তোমালোকে হয়তো যাদৃচ্ছিকভাৱে দুটা যুগ্ম সংখ্যা লৈছিলা যেনে 24 আৰু 2006 আৰু পৰীক্ষা কৰি চাইছিলা যে $24 \times 2006 = 48144$ এটা সংখ্যা। আৰু বহুতো উদাহৰণৰ ক্ষেত্ৰতো তোমালোকে হয়তো একেকুৱাই কৰিছিলা।

আকৌ তোমালোকক হয়তো শ্ৰেণীকোঠাত কাৰ্য হিচাপে ভালেকেইটা ত্ৰিভুজ আঁকিবলৈ কোৱা হৈছিল আৰু সেইবোৰৰ অন্তঃ কোণবোৰৰ সমষ্টি গণনা কৰি উলিয়াবলৈ দিয়া হৈছিল। জোখ-মাখৰ বাবে হোৱা ভুলৰ বাহিৰে তোমালোকে নিশ্চয় ত্ৰিভুজৰ অন্তঃ কোণসমূহৰ সমষ্টি $180°$যেই পাইছিলা!

এই পদ্ধতিটোত কি ধৰণৰ খুঁত আছে? সত্যাপনৰ প্ৰক্ৰিয়াত কেইবাটাও সমস্যা থাকে। যদিও ই সঁচা বুলি বিশ্বাস হোৱা এটা উক্তি ব্যক্ত কৰাত তোমাক সহায় কৰিব পাৰে তথাপি উক্তিটো সকলো ক্ষেত্ৰতে সঁচা হ'বই বুলি তুমি নিশ্চিত হ'ব নোৱাৰা। উদাহৰণ স্বৰূপে কেইবাযোৰ যুগ্ম সংখ্যাৰ গুণফলে আমাক হয়তো এনে এক অনুমান গ্ৰহণ কৰিবলৈ বাধ্য কৰিব যে দুটা যুগ্ম সংখ্যাৰ গুণফল সদায় যুগ্ম। যি হওক এই কাৰ্যই যুগ্ম সংখ্যাৰ সকলোবোৰ যোৰৰ গুণফল যুগ্ম হোৱা বিষয়টোৰ প্ৰতি নিশ্চয়তা প্ৰদান নকৰে। তুমি শাৰীৰিকভাৱে যুগ্ম সংখ্যাৰ সম্ভৱপৰ আটাইবোৰ

যোৰৰ গুণফল পৰীক্ষা কৰি চাব নোৱাৰা। যদি তুমি তেনেকুৱাই কৰিব খোজা তেন্তে ব্যংগ চিত্ৰত দেখুওৱা ছোৱালীজনীৰ দৰে জীৱনৰ বাকী থকা কালছোৱা যুগ্ম সংখ্যাৰ গুণফল সমূহ গণনা কৰিয়েই কটাব লাগিব। সদৃশধৰণে, তুমি এতিয়ালৈ আজি নোচোৱা কিছুমান ত্ৰিভুজ থাকিব পাৰে যিবোৰৰ অন্তঃ কোণবোৰৰ সমষ্টি 180°ৰ সমান নহয়। সম্ভৱপৰ আটাইবোৰ ত্ৰিভুজৰ অন্তঃ কোণবোৰ আমি জুখি চাব নোৱাৰো।



তাৰোপৰি সত্যাপন প্ৰায়ে বিভ্ৰান্তিমূলক হ'ব পাৰে। উদাহৰণ হিচাপে পূৰ্বৰ সত্যাপন বিলাকৰ ওপৰত নিৰ্ভৰ কৰে আৰু পাস্কেলৰ ত্ৰিভুজ (প্ৰশ্ন-2, অনুশীলনী A1.3)ৰ পৰা আমাক $11^5 = 15101051$ বুলি গ্ৰহণ কৰিবলৈ প্ৰৰোচিত কৰিব পাৰে। কিন্তু $11^5 = 161051$

গতিকে কেৱল কিছুমান সত্যাপনৰ ওপৰত নিৰ্ভৰশীল নোহোৱাকৈ তোমালোক অন্য ধৰণে আগবাঢ়িব লাগিব। অগ্ৰসৰ হোৱাৰ অন্য এক পথ আছে যাক আমি 'উক্তিৰ প্ৰমাণ' আখ্যা দিওঁ। কেৱল যুক্তি-তৰ্কৰ ওপৰতে নিৰ্ভৰ কৰি এটা গাণিতিক উক্তিৰ সত্যতা সাব্যস্ত কৰা পদ্ধতিকে 'গাণিতিক প্ৰমাণ' বোলা হয়।

অনুচ্ছেদ A1.2ৰ উদাহৰণ-2 ত তোমালোকে দেখিছিলা যে গাণিতিক উক্তি এটা অসত্য বুলি দেখুৱাবলৈ এটা মাত্ৰ প্ৰতি-উদাহৰণেই যথেষ্ট। গতিকে, যি সময়ত এটা গাণিতিক উক্তিৰ বৈধতা সাব্যস্ত কৰিবলৈ হেজাৰটা পৰীক্ষণ বা সত্যাপনো যথেষ্ট নহ'ব পাৰে, সেই সময়তে কিন্তু উক্তি এটাৰ বিসংগতি নিৰ্ণয় কৰিবলৈ (অৰ্থাৎ কোনোবাখিনিত থকা কেৰোণ প্ৰতিপন্ন কৰিবলৈ) মাত্ৰ এটা প্ৰতি-উদাহৰণেই যথেষ্ট। এই কথাটো বিশেষভাৱে প্ৰণিধানযোগ্য।

গাণিতিক উক্তি এটা অসত্য বুলি দেখুৱাবলৈ এটা মাত্ৰ প্ৰতি উদাহৰণেই যথেষ্ট। গতিকে দুটা অযুগ্ম সংখ্যাৰ যোগফল অযুগ্ম এই উক্তিটোৰ ক্ষেত্ৰত এটা প্ৰতি-উদাহৰণ হ'ল— 7 + 5 = 12।

আমি এতিয়া প্ৰমাণ এটাৰ মৌলিক উপাদান সমূহৰ ওপৰত চকু ফুৰাই চাওহক :

(i) উপপাদ্য এটাৰ প্ৰমাণৰ বাবে আমি কি ধৰণে অগ্ৰসৰ হ'ব লাগিব সেই সম্পৰ্কে আমাৰ এটা থূলমূল ধাৰণা থাকিব লাগিব।

(ii) উপপাদ্য এটাত ইতিমধ্যে প্ৰদত্ত তথ্যাৱলী (পূৰ্ব ধাৰণা) স্পষ্টভাৱে বুজি লৈ সেইবোৰ ব্যৱহাৰ কৰিব লাগিব।

উদাহৰণ স্বৰূপে, 'দুটা যুগ্ম সংখ্যাৰ পূৰণফল যুগ্ম' বুলি উল্লেখ কৰা উপপাদ্য A1.2ত আমাক দুটা স্বাভাৱিক যুগ্ম সংখ্যা দিয়া আছে। গতিকে আমি সিহঁতৰ ধৰ্ম ব্যৱহাৰ কৰিব লাগিব।

উৎপাদক উপপাদ্য (Factor Theorem)ত (অধ্যায়-2) তোমালোকক এটা বহুপদ $p(x)$ দিয়া আছে আৰু কোৱা হৈছে যে $p(a) = 0$। ইয়াক ব্যৱহাৰ কৰি তোমালোকে দেখুৱাব লাগিব যে $(x - a)$, $p(x)$ৰ এটা উৎপাদক। সদৃশভাৱে, উৎপাদক উপপাদ্যৰ

বিপৰীত উপপাদ্যৰ বাবে তোমালোকক $(x - a)$, $p(x)$ৰ উৎপাদক বুলি দিয়া আছে আৰু এই পূৰ্বধাৰণা খটুৱাই তোমালোকে $p(a) = 0$ বুলি প্ৰমাণ কৰিব লাগিব।

উপপাদ্য এটাৰ প্ৰমাণত তোমালোকে অংকণ কাৰ্যবো ব্যৱহাৰ কৰিব পাৰা। উদাহৰণ স্বৰূপে ত্ৰিভূজৰ কোণসমূহৰ সমষ্টি 180° বুলি প্ৰমাণ কৰিবলৈ আমি ত্ৰিভূজটোৰ কোনো বাহু এটাৰ বিপৰীত শীৰ্ষবিন্দুৰে বাহুটোৰ সমান্তৰালকৈ এডাল ৰেখা আঁকো আৰু সমান্তৰাল ৰেখাৰ ধৰ্ম ব্যৱহাৰ কৰো।

(iii) এটা প্ৰমাণ গাণিতিক উক্তিৰ অনুক্ৰমেৰে গঠিত হয়। প্ৰমাণ একোটাত থকা প্ৰতিটো উক্তি প্ৰমাণটোত সন্নিবিষ্ট পূৰ্বৰ উক্তি, বা ইতিপূৰ্বে প্ৰমাণিত কোনো উপপাদ্য, বা স্বতঃ সিদ্ধ বা উল্লেখিত পূৰ্ব-ধাৰণাৰ পৰা যুক্তিৰ সহায়ত আগবঢ়োৱা হয়।

(iv) যুক্তিপূৰ্ণভাৱে শুদ্ধ ক্ৰমত সজোৱা গাণিতিক সত্য উক্তিসমূহৰ অনুক্ৰমৰ পৰা পোৱা সিদ্ধান্তই হ'ব লাগে। উপপাদ্যই হৈছে বিষয়-বস্তুৰ আমি বিচৰা প্ৰমাণ।

এই উপাদানসমূহ বুজি পাবলৈ আমি উপপাদ্য A1.1 আৰু ইয়াৰ প্ৰমাণটো বিশ্লেষণ কৰি চাম। অধ্যায় 6ত এই উপপাদ্যটো সম্পৰ্কে তোমালোকে ইতিমধ্যে পঢ়ি আহিছা। কিন্তু জ্যামিতিত প্ৰমাণ সম্পৰ্কে প্ৰথমে কেইটামান মন্তব্য দিয়া হওক। উপপাদ্যৰ প্ৰমাণত সহায়ক হোৱাকৈ আমি প্ৰায়ে চিত্ৰৰ আশ্ৰয় লওঁ আৰু এইটো অতিকৈ দৰকাৰী কথা। যিহওক, প্ৰমাণত থকা প্ৰতিটো উক্তিয়েই কেৱল যুক্তিৰ দ্বাৰা সাব্যস্ত হ'ব লাগিব। প্ৰায় সঘনাই ছাত্ৰ-ছাত্ৰীসকলে এনে ধৰণৰ উক্তিৰ উল্লেখ কৰা আমি শুনিবলৈ পাওঁ যেনে—

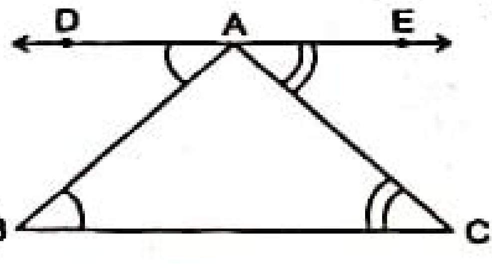
'সেই কোণ দুটা সমান কাৰণ, চিত্ৰত সিহঁতক সমান দেখাইছে' নাইবা 'সেই কোণটো 90°ৰ সমান হ'ব লাগিব কাৰণ, ৰেখাদুডাল দেখিবলৈ পৰস্পৰ লম্ব যেন লাগিছে'। তুমি যি দেখিছা তাৰ পৰা ঠগ খোৱাৰ প্ৰতি সাবধান হ'বা। (চিত্ৰ A1.3 মনত পেলোৱা)।

গতিকে আমি এতিয়া উপপাদ্য A1.1ৰ পিনে অগ্ৰসৰ হওঁ।

উপপাদ্য A1.1 : ত্ৰিভূজৰ অন্তঃ কোণবোৰৰ সমষ্টি 180°ৰ সমান।

প্ৰমাণ : এটা ত্ৰিভূজ ABC বিবেচনা কৰা (চিত্ৰ A1.4 দ্ৰষ্টব্য)। আমি প্ৰমাণ কৰিব লাগে যে—

$$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180^\circ \qquad .....(1)$$



চিত্ৰ A1.4

A বিন্দুৰে BCৰ সমান্তৰালকৈ এডাল ৰেখা DE অংকণ কৰা। .....(2)

DE, BC ৰ সমান্তৰাল আৰু AB এডাল ছেদক। গতিকে, $\angle DAB$ আৰু $\angle ABC$ একান্তৰ কোণ। সেয়েহে অধ্যায়-6ৰ, উপপাদ্য 6.2 অনুসৰি, সিহঁত সমান

অৰ্থাৎ $\angle DAB = \angle ABC$ .....(3)

সদৃশভাৱে $\angle CAE = \angle ACB$ .....(4)

সেইবাবে $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = \angle DAB + \angle BAC + \angle CAE$ .....(5)

কিন্তু $\angle DAB + \angle BAC + CAE = 180^\circ$, যিহেতু সৰল কোণ উৎপন্ন কৰিছে। .....(6)

গতিকে $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = 180^\circ$

এতিয়া প্ৰমাণটোৰ প্ৰতিটো চাপৰ ওপৰত আমি মন্তব্য আগবঢ়াম।

চাপ-1 : আমাৰ উপপাদ্যটো ত্ৰিভুজৰ এটা ধৰ্মৰ সৈতে জড়িত, গতিকে আমি ত্ৰিভুজ এটাৰে আৰম্ভ কৰিছো।

চাপ-2 : এইটোৱেই হ'ল মূল ধাৰণা— অৰ্থাৎ স্বতঃ স্ফুৰ্ত অনুভূতিৰ এটা খোজ বা বোধশক্তি যিয়ে উপপাদ্যটোৰ প্ৰমাণৰ দিশত আগবাঢ়ি যোৱাত সহায় কৰে। প্ৰায়ভাগ ক্ষেত্ৰতে জ্যামিতিয় প্ৰমাণৰ বাবে এটা অংকনৰ আৱশ্যক হয়।

চাপ-3 আৰু 4 : ইয়াত আমি সিদ্ধান্ত আগবঢ়াইছো যে $\angle DAE = \angle ABC$ আৰু $\angle CAE = \angle ABC$ আৰু ইয়াকে কৰোতে আমি (অংকন কাৰ্যৰ পৰা) DE, BCৰ সমান্তৰাল এই তথ্যটোৰ লগতে ইতিপূৰ্বে প্ৰমাণ কৰি থোৱা উপপাদ্য 6.2ৰ ব্যৱহাৰ কৰিছো য'ত কোৱা হয় যে যদি দুডাল সমান্তৰাল ৰেখাক কোনো ছেদকে কাটে, তেন্তে একান্তৰ কোণবোৰ সমান হয়।

চাপ-5 : $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = \angle DAB + \angle BAC + \angle CAE$ পাবলৈ আমি ইউক্লিডৰ স্বীকাৰ্য (অধ্যায়-5 দ্ৰষ্টব্য) ব্যৱহাৰ কৰিছো য'ত কোৱা হয়— 'সমান সমান পৰিমাণৰ সৈতে সমান সমান পৰিমাণ লগ লগালে মুঠ পৰিমাণবোৰ সমান হয়।' অৰ্থাৎ ত্ৰিভুজটোৰ অন্তঃ কোণবোৰৰ সমষ্টি সৰল ৰেখাত থকা কোণকেইটাৰ সমষ্টিৰ সমান।

চাপ-6 : $\angle DAB + \angle BAC + \angle CAE = 180^\circ$ বুলি দেখুৱাবলৈ ইয়াত আমি অধ্যায়-6ত সন্নিবিষ্ট ৰৈখিক যোৰ সম্বন্ধীয় স্বীকাৰ্যৰ ব্যৱহাৰ কৰিছো য'ত কোৱা হয় যে এডাল সৰল ৰেখাত থকা কোণবোৰৰ সমষ্টি 180°ৰ সমান।

চাপ-7 : ইউক্লিডৰ স্বীকাৰ্য— 'একেটা বস্তুৰ সৈতে সমান হোৱা দুটা বস্তু পৰস্পৰ সমান' ব্যৱহাৰ কৰি আমি সিদ্ধান্তত উপনীত হৈছো যে $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = \angle DAB + \angle BAC + \angle CAE = 180^\circ$। মন কৰা যে চাপ-7 য়েই হ'ল উপপাদ্যটোত আমি প্ৰমাণ কৰিব খোজা বক্তব্য।

এতিয়া আমি কোনো বিশ্লেষণ অবিহনে উপপাদ্য A1.2 আৰু A1.3ৰ প্ৰমাণ আগবঢ়াম।

উপপাদ্য A1.2 : দুটা যুগ্ম স্বাভাবিক সংখ্যাৰ গুণফল যুগ্ম।

প্ৰমাণ : ধৰা হওক, x আৰু y দুটা যুগ্ম স্বাভাবিক সংখ্যা আমি প্ৰমাণ কৰিব বিচাৰো যে xy যুগ্ম। যিহেতু x আৰু y যুগ্ম, উভয়েই 2 ৰে বিভাজ্য হ'ব। গতিকে আমি লিখিব পাৰো যে কোনো এক স্বাভাবিক সংখ্যা mৰ বাবে $x = 2m$ আৰু কোনো স্বাভাবিক সংখ্যা nৰ বাবে $y = 2n$। তেতিয়া, $xy = 4mn$। যিহেতু $4mn$, 2ৰে বিভাজ্য, গতিকে xyও 2ৰে বিভাজ্য। সেয়েহে xy যুগ্ম।

উপপাদ্য A1.3 : যিকোনো তিনিটা ক্ৰমিক যুগ্ম স্বাভাবিক সংখ্যাৰ গুণফল 16ৰে বিভাজ্য।

প্ৰমাণ : তিনিটা ক্ৰমিক যুগ্ম সংখ্যাৰ আকাৰ হ'ব $2n$, $2n + 2$ আৰু $2n + 4$ য'ত n এটা স্বাভাবিক সংখ্যা। প্ৰমাণ কৰিব লাগে যে সিইঁতৰ গুণফল $2n(2n + 2)(2n + 4)$, 16ৰে বিভাজ্য।

এতিয়া $2n(2n + 2)(2n + 4) = 2n \times 2(n + 1) \times 2(n + 2)$

$= 2 \times 2 \times 2n(n + 1)(n + 2)$

$= 8n(n + 1)(n + 2)$

এতিয়া আমি দুই ধৰণৰ অৱস্থা পাওঁ—

সেয়া হ'ল n যুগ্ম অথবা অযুগ্ম। প্ৰতিটো অৱস্থা পৰীক্ষা কৰি চোৱা যাওক।

ধৰা হ'ল n যুগ্ম। তেনে ক্ষেত্ৰত আমি $n = 2m$ লিখিব পাৰো, য'ত m কোনো এটা স্বাভাবিক সংখ্যা।

গতিকে $2n(2n + 2)(2n + 4) = 8n(n + 1)(n + 2) = 16m(2m + 1)(2m + 2)$

সেয়েহে, $2n(2n + 2)(2n + 4)$, 16ৰে বিভাজ্য।

আকৌ ধৰা হ'ল n অযুগ্ম। তেতিয়া $n + 1$ যুগ্ম আৰু আমি $n + 1 = 2r$ লিখিব পাৰো, য'ত r কোনো এটা স্বাভাবিক সংখ্যা।

গতিকে আমি পাওঁ—

$2n(2n + 2)(2n + 4) = 8n(n + 1)(n + 2)$

$= 8\ (2r - 1) \times 2r \times (2r + 1)$

$= 16r(2r - 1)(2r + 1)$

সেয়েহে, $2n(2n + 1)(2n + 2)$, 16ৰে বিভাজ্য।

গতিকে, উভয় ক্ষেত্ৰতে, তিনিটা ক্ৰমিক যুগ্ম সংখ্যাৰ গুণফল 16ৰে বিভাজ্য বুলি দেখুওৱা হ'ল।

গণিতজ্ঞসকলে কিদৰে ফলাফল (পৰিণাম) সমূহ আৱিষ্কাৰ কৰে আৰু কেনেকৈ আনুষ্ঠানিক কঠিন প্ৰমাণসমূহ লিখি উলিয়ায় তাৰ মাজৰ প্ৰভেদৰ ওপৰত কেইটামান মন্তব্য আগবঢ়াই এই অধ্যায়ৰ আমি মোখানি মাৰিম।

ইতিমধ্যে উল্লেখ কৰি অহাৰ নিচিনাকৈ, প্ৰতিটো প্ৰমাণৰ ক্ষেত্ৰত একোটা (কেতিয়াবা একাধিক)

মূল স্বতঃস্ফূৰ্ত অনুভূতিৰ ধাৰণা থাকে। গণিতজ্ঞসকলৰ চিন্তা পদ্ধতি আৰু ফলাফল আৱিষ্কাৰৰ ক্ষেত্ৰত তেওঁলোকৰ স্বতঃ স্ফূৰ্ত অনুভূতিয়েই কেন্দ্ৰীয় ভূমিকা পালন কৰে। প্ৰায়ভাগ ক্ষেত্ৰত, উপপাদ্য একোটাৰ প্ৰমাণ গণিতজ্ঞসকলৰ মনলৈ খেলি-মেলি হৈ আহে। শুদ্ধ সমাধান অথবা প্ৰমাণত উপনীত হোৱাৰ আগতে গণিতজ্ঞ এজনে চিন্তাৰ বিভিন্ন দৃষ্টিকোণ, যুক্তি আৰু উদাহৰণ লৈ পৰীক্ষা-নিৰীক্ষা কৰে। সৃষ্টিশীল পৰ্যায়টো তল পৰাৰ পাছতহে আটাইবোৰ যুক্তিক একেলগ কৰা হয় যাতে এটা উপযুক্ত প্ৰমাণ পাব পাৰি।

এইখিনিতে উল্লেখ কৰিব পাৰি যে মহান ভাৰতীয় গণিতজ্ঞ শ্ৰীনিবাস ৰামানুজনে অতি উচ্চ স্তৰৰ স্বতঃস্ফূৰ্ত অনুভূতিৰ সহায়ত বহুতো সিদ্ধান্তত উপনীত হৈছিল যিবোৰক তেওঁ সত্য বুলি দাবী কৰিছিল। সেইবোৰৰ বহুকেইটা সত্য বুলি প্ৰমাণিত হৈছে আৰু সেইবোৰ বিখ্যাত উপপাদ্য হিচাপে স্বীকৃত হৈছে। অৱশ্যে তেওঁৰ কিছুমান দাবী বা অনুমান সত্য বা অসত্য বুলি সাব্যস্ত কৰাৰ বাবে সমগ্ৰ বিশ্বৰ গণিতজ্ঞসকলে এতিয়াও সংগ্ৰাম অব্যাহত ৰাখিছে।

শ্ৰীনিবাস ৰামানুজন
(1887-1920)
চিত্ৰ A1.5

অনুশীলনী-A1.4

1. নিম্নোক্ত উক্তিবোৰ অসত্য প্ৰমাণ কৰিবলৈ এটাকৈ প্ৰতি-উদাহৰণ আগবঢ়োৱা—
   (i) দুটা ত্ৰিভুজৰ অনুৰূপ কোণবোৰ সমান হ'লে ত্ৰিভুজ দুটা সৰ্বসম হয়।
   (ii) আটাইবোৰ বাহু সমান হোৱা চতুৰ্ভুজ এটা বৰ্গ হয়।
   (iii) চতুৰ্ভুজ এটাৰ সকলো কোণ সমান হ'লে, ই এটা বৰ্গ হয়।
   (iv) অখণ্ড সংখ্যা a আৰু bৰ বাবে
   $$\sqrt{a^2+b^2} = a + b$$
   (v) সকলো পূৰ্ণ সংখ্যা (whole number) nৰ বাবে $2n^2 + 11$ এটা মৌলিক সংখ্যা।
   (vi) সকলো ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা nৰ বাবে $n^2 - n + 41$ এটা মৌলিক সংখ্যা।
2. তোমাৰ ভাল লগা যিকোনো প্ৰমাণ এটা লোৱা আৰু খণ্ড A1.5ত আলোচনা কৰাৰ ধৰণে ঢাপে ঢাপে (কি দিয়া আছে, কি প্ৰমাণ কৰা হৈছে, কোনবিলাক উপপাদ্য আৰু কোনবিলাক স্বতঃ সিদ্ধ ব্যৱহাৰ কৰা হৈছে..... ইত্যাদি) ইয়াক বিশ্লেষণ কৰা।
3. প্ৰমাণ কৰা যে দুটা অযুগ্ম সংখ্যাৰ যোগফল যুগ্ম।
4. প্ৰমাণ কৰা যে দুটা অযুগ্ম সংখ্যাৰ পূৰণফল অযুগ্ম।
5. প্ৰমাণ কৰা যে তিনিটা ক্ৰমিক যুগ্ম সংখ্যাৰ সমষ্টিটো 6ৰে বিভাজ্য হয়।

6. প্ৰমাণ কৰা যে $y = 2x$ সমীকৰণৰ ৰেখাডালত অসীমভাবে বহুতো বিন্দু থাকে।
(ইংগিত : যিকোনো অখণ্ড সংখ্যা nৰ বাবে $(n, 2n)$ বিন্দুটো লোৱা।)

7. তোমাৰ হয়তো এগৰাকী বন্ধু আছে আৰু তেওঁ হয়তো তোমাক কোনো এটা সংখ্যা কল্পনা কৰিবলৈ দি ইয়াৰ ওপৰত কিবা কিবি প্ৰক্ৰিয়া সম্পন্ন কৰিবলৈ দি তাৰ পিছত তুমি ভবা মূল সংখ্যাটোৰ কথা নজনা সত্বেও তেওঁ সংখ্যাটো ক'বলৈ সমৰ্থ হ'ল। ইয়াত দুটা উদাহৰণ আগবঢ়োৱা হ'ল। এয়া কেনেকৈ সম্ভৱ হয় পৰীক্ষা কৰা।
(i) সংখ্যা এটা লোৱা। ইয়াক দ্বিগুণ কৰা। তাৰ লগত 9 যোগ কৰা। ইয়াক 3ৰে হৰণ কৰা। ইয়াৰ লগত চাৰি যোগ কৰা। ইয়াৰ পৰা তোমাৰ মূল সংখ্যাটো বিয়োগ কৰা। তুমি পোৱা অন্তিম ফলটো হ'ল 7।
(ii) যিকোনো তিনি অংকীয়া সংখ্যা এটা লিখা। (যেনে 425)। এই অংককেইটা একেটা ক্ৰমতে পুনৰাবৃত্তি কৰি ছয় অংকীয়া সংখ্যা এটা লিখা। (425425)। তোমাৰ নতুন নম্বৰটো 7, 11 আৰু 13ৰে বিভাজ্য হয়।

A1.6 সাৰাংশ (Summary) :

এই পৰিশিষ্টত তোমালোকে নিম্নোক্ত কথাকেইটাৰ বিষয়ে শিকিবলৈ পালা :

1. গণিতত উক্তি একেটা গ্ৰহণীয় হয় যেতিয়া ই সদায় সত্য অথবা সদায় অসত্য হয়।
2. এটা গাণিতিক উক্তি অসত্য দেখুৱাবলৈ এটা মাত্ৰ প্ৰতি-উদাহৰণেই যথেষ্ট
3. স্বতঃ সিদ্ধবোৰ হ'ল এনে ধৰণৰ উক্তি যিবোৰক প্ৰমাণ অবিহনে সত্য বুলি মানি লোৱা হয়।
4. অনুমান হ'ল এনে এটা উক্তি যাক আমি গাণিতিক স্বতঃস্ফূৰ্ত অনুভূতিৰ জৰিয়তে সত্য বুলি বিশ্বাস কৰো, কিন্তু যাক আমি এতিয়াও প্ৰমাণিত কৰি চোৱা নাই।
5. এটা গাণিতিক উক্তি যাৰ সত্যতা ইতিমধ্যে প্ৰতিষ্ঠিত হৈছে (বা প্ৰমাণিত) তাক উপপাদ্য বোলা হয়।
6. গাণিতিক উক্তি প্ৰমাণৰ প্ৰধান যুক্তিপূৰ্ণ আহিলা হ'ল নিগমনাত্মক বিচাৰ পদ্ধতি (Deductive reasoning)।
7. এটা প্ৰমাণ হ'ল, গাণিতিক উক্তিসমূহৰ এক অনুক্ৰমিক ধাৰা। প্ৰমাণ এটাত সন্নিবিষ্ট প্ৰতিটো উক্তিকে ইতিপূৰ্বে জ্ঞাত উক্তি বা আগতে প্ৰমাণিত হোৱা উপপাদ্য বা স্বতঃ সিদ্ধ বা পূৰ্ব ধাৰণাৰ আধাৰত যুক্তিযুক্তভাৱে সাব্যস্ত কৰা হয়।