দ্বিতীয় অধ্যায়

বৈখিক অসমতা আৰু তাৰ লেখ

ধৰা হ'ল, a আৰু b দুটা বাস্তৱ সংখ্যা। a, b তকৈ ডাঙৰ হ'ব যদি $a - b$ এটা ধনাত্মক সংখ্যা। অৰ্থাৎ $a > b$ হ'ব যদি $a - b > 0$ হয়। উদাহৰণস্বৰূপে, যদি $a = 2, b = -1$ তেন্তে $a - b = 2 - (-1) = 3 > 0$, গতিকে $a > b$ অৰ্থাৎ $2 > -1$.

একেদৰে a, b তকৈ সৰু হ'ব যদি $a - b$ এটা ঋণাত্মক সংখ্যা অৰ্থাৎ $a < b$ হ'ব যদি $a - b < 0$ হয়। উদাহৰণস্বৰূপে, যদি $a = -5, b = -3$ তেন্তে $a - b = -5 - (-3) = -2 < 0$

$\therefore a < b$ অৰ্থাৎ $-5 < -3$

আকৌ $a \geq b$ ৰ অৰ্থ হ'ল $a = b$ নাইবা $a > b$ আৰু $a \leq b$ ৰ অৰ্থ হ'ল $a = b$ নাইবা $a < b$

দুটা বাস্তৱ সংখ্যা a আৰু b ৰ বাবে $a > b$ হ'লে সংখ্যা ৰেখাৰ ওপৰত a বুজোৱা বিন্দুটো b বুজোৱা বিন্দুটোৰ সোঁপিনে থাকিব আৰু $a < b$ হ'লে a, b ৰ বাওঁপিনে থাকিব।

অসমতা দুই ধৰণৰ হ'ব পাৰে—

(i) পৰম অসমতা (Absolute inequality) আৰু

(ii) চৰ্ত সাপেক্ষ অসমতা (Conditional inequality)

যদি এটা অসমতা চলক ৰাশিৰ সকলো মানৰ বাবে সত্য, তেনেহ'লে সেই অসমতাক 'পৰম অসমতা' বুলি কোৱা হয়। উদাহৰণস্বৰূপে $x \in R$ ৰ বাবে $x^2 \geq 0$ এটা পৰম অসমতা, কাৰণ x ৰ সকলো বাস্তৱ মানৰ বাবে $x^2 \geq 0$ হয়। কিন্তু $5x > 7$ ৰ লেখীয়া এটা অসমতা চৰ্ত সাপেক্ষ অসমতা কিয়নো $5x > 7$ হ'ব যদিহে $x > \frac{7}{5}$ হয়। গতিকে এই অসমতাটো $\frac{7}{5}$ তকৈ ডাঙৰ বাস্তৱ মানৰ বাবেহে সত্য।

অসমতাৰ কেইটামান ধৰ্ম ঃ

যদি a, b, c তিনিটা বাস্তৱ সংখ্যা, তেন্তে

(i) $a > b$ আৰু $b > c \Rightarrow a > c$

(ii) $a > b \Rightarrow a + c > b + c$

(iii) $a > b$ আৰু $c > 0 \Rightarrow ac > bc$

(iv) $a > b$ আৰু $c < 0 \Rightarrow ac < bc$

প্ৰমাণ ঃ

(i) $a - c = (a - b) + (b - c)$

যিহেতু $a > b, b > c$ গতিকে $a - b > 0, b - c > 0$

আৰু সেয়েহে $(a - b) + (b - c) > 0$

গতিকে $a - c > 0$

$\therefore a > c$

(ii) $(a + c) - (b + c) = a - b$

$> 0 \quad [\because a > b]$

$\therefore a + c > b + c$

(iii) $ac - bc = (a - b)c$

$> 0 \quad [\because a > b \Rightarrow a - b > 0$

আকৌ $c > 0$ (দিয়া আছে)]

$\therefore ac > bc$

(iv) $ac - bc = (a - b)c$

$< 0 \quad [a > b \Rightarrow a - b > 0$

কিন্তু $c < 0$ (দিয়া আছে)]

$\therefore ac < bc$

ৰৈখিক ৰাশি, ৰৈখিক সমীকৰণ আৰু ৰৈখিক অসমীকৰণ ঃ

$ax + b$ $(a \neq 0)$ আকাৰৰ এটা ৰাশিক এটা চলকযুক্ত **ৰৈখিক ৰাশি** (linear expression) বুলি কোৱা হয়। তেনেদৰে দুটা চলকযুক্ত 'ৰৈখিক ৰাশি' এটা হ'ল $ax + by + c$ $(a \neq 0, \text{b} \neq 0)$ আকাৰৰ আৰু তিনিটা চলকযুক্ত **ৰৈখিক ৰাশি** এটা হ'ল $ax + by + cz + d$ $(a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0)$ আকাৰৰ।

যেতিয়া এটা ৰৈখিক ৰাশিক এটা ধ্ৰুৱক (সাধাৰণতে শূন্য) ৰ লগত সমীকৃত কৰা হয়, তেতিয়া তাক এটা **ৰৈখিক সমীকৰণ** (linear equation) বুলি কোৱা হয়।

x আৰু y দুটা চলকযুক্ত এটা ৰৈখিক সমীকৰণে সদায় এডাল সৰলৰেখা সূচায়। গতিকে $ax + by + c = 0$ (য'ত a আৰু b উভয়ে একেলগে শূন্য নহয়) সমীকৰণটোৰ লেখ হ'ব এডাল সৰলৰেখা।

$ax + b > 0$ বা $0ax + b < 0$ বা $ax + b \geq 0$ বা $ax + b \leq 0$ $(a \neq 0)$ আকাৰৰ অসমতা এটাক এটা চলকযুক্ত **ৰৈখিক অসমতা** (বা **ৰৈখিক অসমীকৰণ**) বুলি কোৱা হয়।

$ax + by + c > 0$ বা $ax + by + c < 0$ বা $ax + by + c \geq 0$ বা $ax + by + c \leq 0$ আকাৰৰ অসমতা (য'ত a আৰু b উভয়ে একেলগে শূন্য নহয়) এটাই হ'ল **দ্বি-চলকযুক্ত ৰৈখিক অসমতা** (বা 'ৰৈখিক অসমীকৰণ')।

বৈখিক অসমতাৰ লৈখিক উপস্থাপন (Graphical representation of linear ineqalities) ঃ

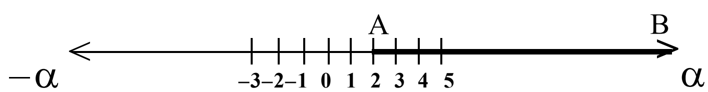
যেতিয়া এটা চলকযুক্ত বৈখিক অসমতাৰ লেখ অংকন কৰিব লাগে, আমি সংখ্যা ৰেখা ব্যৱহাৰ কৰোঁ। তলৰ উদাহৰণটোৰে ইয়াক ব্যাখ্যা কৰা হ'ল—

উদাহৰণ 1 ঃ

তলৰ এটা চলকযুক্ত অসমীকৰণবোৰৰ লেখ অংকন কৰা ঃ

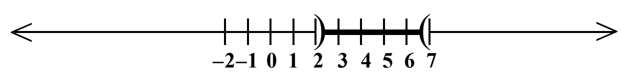
(i) $x \geq 2$ (ii) $2 < x < 7$ (iii) $2x + 1 > 0$

সমাধান ঃ (i) যিহেতু $x \geq 2$, গতিকে x ৰ মান 2 বা 2 তকৈ ডাঙৰ যিকোনো বাস্তৱ সংখ্যাই হ'ব পাৰে। গতিকে সংখ্যা ৰেখাত 2-ৰ সোঁফালে থকা (2 কে ধৰি) প্ৰতিটো বিন্দুৰে $x \geq 2$ অসমীকৰণটো সিদ্ধ কৰে।



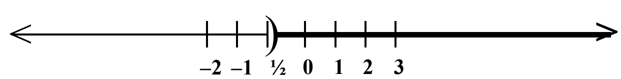
গতিকে নিৰ্ণেয় লেখ হ'ব $\overrightarrow{AB}$ ৰশ্মি (সংখ্যা ৰেখাত দাগ চিহ্নিত অংশ)

(ii) ইয়াত $x > 2$ আৰু $x < 7$; গতিকে সংখ্যা ৰেখাৰ 2 তকৈ ডাঙৰ আৰু 7 তকৈ সৰু প্ৰতিটো বিন্দুৰেই অসমীকৰণটো সিদ্ধ কৰে। গতিকে প্ৰদত্ত অসমীকৰণৰ লেখ হ'ল সংখ্যা ৰেখাত 2 আৰু 7 বিন্দু দুটা বাদ দি ইয়াৰ মাজৰ দাগ দিয়া অংশ।



(iii)
$$2x + 1 > 0$$
$$\Rightarrow \quad 2x > -1$$
$$\Rightarrow \quad x > -\frac{1}{2}$$

গতিকে $-\frac{1}{2}$ তকৈ ডাঙৰ প্ৰতিটো মানেই অসমীকৰণটো সিদ্ধ কৰে। সেয়েহে প্ৰদত্ত অসমীকৰণটোৰ লেখ হ'ল সংখ্যা ৰেখাত $-\frac{1}{2}$ বিন্দুটো বাদ দি দাগ দিয়া অংশ।

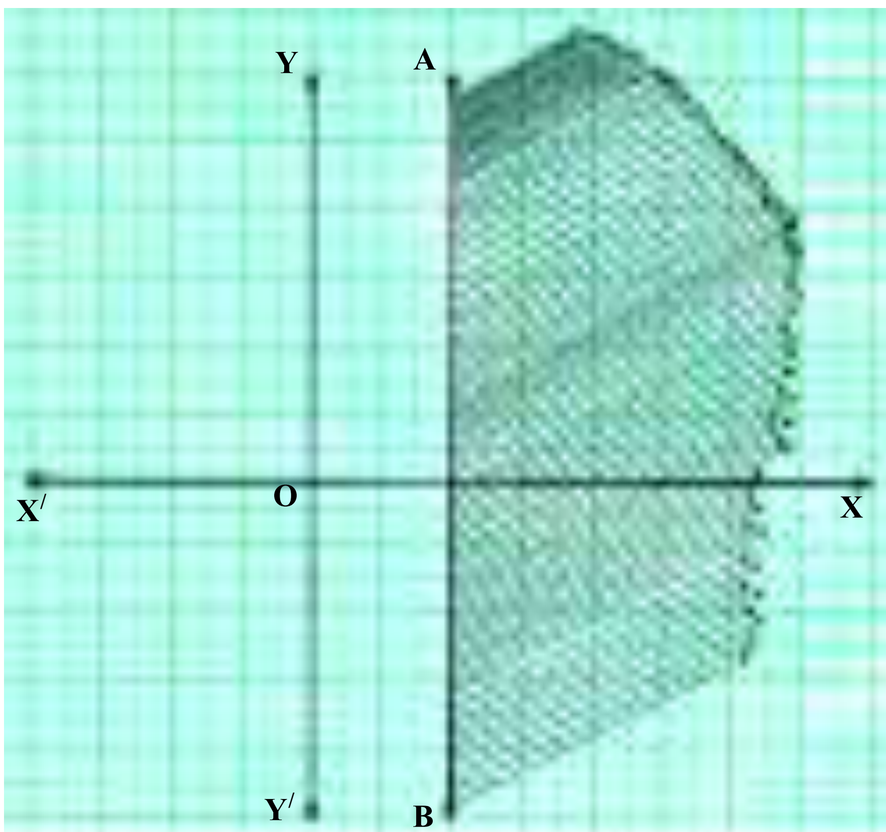


তদুপৰি এটা চলকযুক্ত অসমীকৰণ এটাক আমি দ্বিচলকযুক্ত অসমীকৰণ হিচাপেও বিবেচনা কৰিব পাৰোঁ। উদাহৰণস্বৰূপে যদি আমি $x \geq 2$ অসমীকৰণটোক x আৰু y দ্বিচলকযুক্ত অসমীকৰণ বুলি বিবেচনা কৰোঁ, তেন্তে ই ইয়াকে বুজাব যে $x \geq 2$, আৰু y এ যিকোনো (ধনাত্মক, ঋণাত্মক বা শূন্য) মান ল'ব পাৰোঁ।

উদাহৰণ 2 ঃ স্থানাংক সমতলত (অৰ্থাৎ xy সমতলত) $x \geq 2$ অসমীকৰণৰ লেখ অংকন কৰা।

সমাধান ঃ প্ৰথমে আমি $x = 2$ সমীকৰণটোৰ লেখ অংকন কৰিম। y-অক্ষৰ পৰা 2 একক দূৰত্বত y অক্ষৰ সমান্তৰাল AB ৰেখাই হ'ল $x = 2$ ৰ লেখ। এতিয়া AB ৰেখাই স্থানাংক সমতলক দুটা অংশত বিভক্ত কৰিছে। AB ৰেখাৰ বাওঁপিনে থকা প্ৰতিটো বিন্দুৰ বাবে $x < 2$ আৰু AB-ৰ সোঁপিনে থকা প্ৰতিটো বিন্দুৰ বাবে $x > 2$ কিন্তু AB ৰেখাৰ ওপৰত থকা প্ৰতিটো বিন্দুৰ বাবে $x = 2$

গতিকে $x \geq 2$ অসমীকৰণৰ লেখ হ'ব xy সমতলত AB ৰেখাৰ লগতে AB ৰেখাৰ সোঁপিনে দাগ দিয়া অংশ।

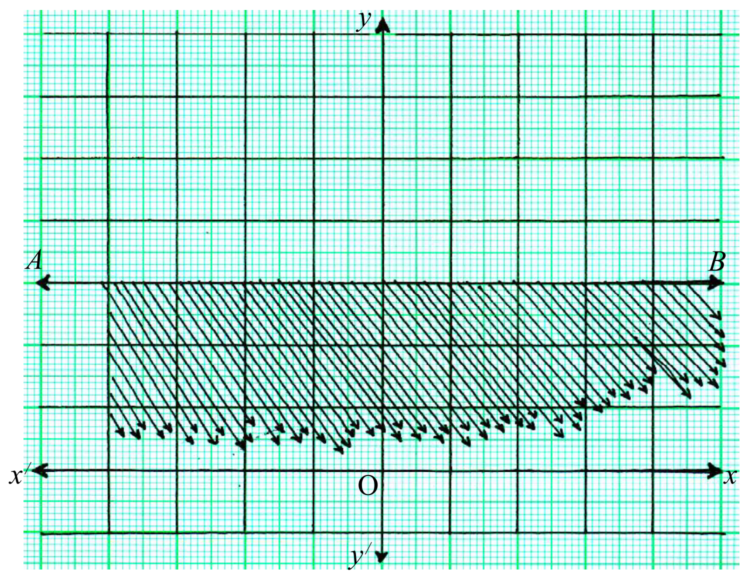


স্কেল ঃ ডাঙৰ বৰ্গৰ এটা বাহু =1 একক

টোকা ঃ $x > 2$-ৰ লেখ হ'ব AB ৰেখাক বাদ দি AB ৰেখাৰ সোঁপিনৰ দাগ দিয়া অংশ।

উদাহৰণ 3 ঃ xy-সমতলত $y < 3$ ৰ লেখ অংকন কৰা।

সমাধান ঃ প্ৰথমতে আমি xy-সমতলত $y = 3$ সমীকৰণৰ লেখ অংকন কৰিম। x-অক্ষৰ পৰা 3 একক দূৰত্বত x-অক্ষৰ সমান্তৰাল AB সৰলৰেখাই হ'ল $y = 3$ সমীকৰণৰ লেখ।



এতিয়া AB ৰেখাৰ ওপৰৰ পিনে, প্ৰতিটো বিন্দুৰ বাবে $y > 3$ আৰু AB-ৰ তলৰ পিনে প্ৰতিটো বিন্দুৰ বাবে $y < 3$ কিন্তু AB ৰেখাৰ ওপৰত প্ৰতিটো বিন্দুৰ বাবে $y = 3$.

গতিকে $y < 3$-ৰ লেখ হ'ব— AB ৰেখাক বাদ দি AB ৰেখাৰ তলৰ ফালে দাগ চিহ্নিত অংশ।

উদাহৰণ 4 ঃ $x > y$ ৰ লেখ অংকন কৰা।

সমাধান ঃ প্ৰথমে আমি $x = y$-ৰ লেখ অংকন কৰিম।

$x = y$ সমীকৰণটো সিদ্ধ কৰা x আৰু y-ৰ কেইযোৰ মান তলত দিয়া হ'ল—

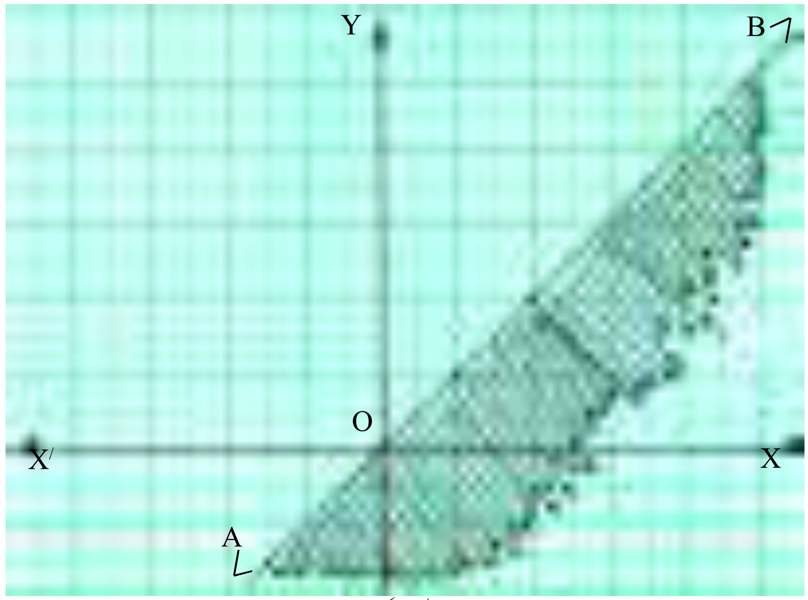
x	0	1	2
y	0	1	2

লেখ কাগজত এই বিন্দুবোৰ বহুৱাই আৰু সেইবোৰ সংযোগ কৰি AB ৰেখাডাল পোৱা হ'ল। AB ৰেখাই হ'ল $x = y$-ৰ লেখ।

এতিয়া AB ৰেখাই xy-সমতলক দুটা অংশত বিভক্ত কৰিছে। চিত্ৰত দাগচিহ্নিত অংশৰ প্ৰতিটো বিন্দুৰ বাবে $x > y$ কিন্তু আনটো অংশৰ প্ৰতিটো বিন্দুৰ বাবে $x < y$

গতিকে প্ৰদত্ত অসমীকৰণৰ লেখ হ'ব— AB ৰেখাক বাদ দি চিত্ৰত দেখুওৱা দাগ চিহ্নিত অংশ।

x	0	1	2
y	0	1	2



স্কেল ঃ ডাঙৰ বৰ্গৰ এটা বাহু =1 একক

উদাহৰণ 5 ঃ $x + 3y - 2 < 0$ অসমীকৰণটোৰ লেখ অংকন কৰা।

সমাধান ঃ প্ৰথমে আমি

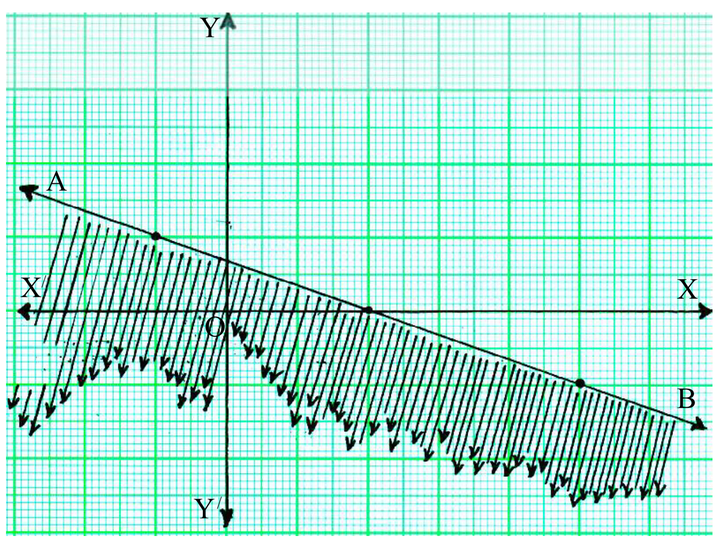
$x + 3y - 2 = 0$ .... (i)

সমীকৰণৰ লেখ অংকন কৰিম।

(i) ৰ পৰা $y = \frac{2-x}{3}$

এতিয়া (i) সমীকৰণক সিদ্ধ কৰা x আৰু y-ৰ কেইযোৰমান মান হ'ল—

x	2	– 1	5
y	0	1	–1



স্কেল ঃ ডাঙৰ বৰ্গৰ এটা বাহু = 1 একক

লেখ কাগজত এই বিন্দুবোৰ বহুৱাই আৰু সেইবোৰ সংযোগ কৰি AB ৰেখা পোৰা গ'ল। এই AB ৰেখাই হ'ল (i) সমীকৰণ লেখ।

এতিয়া $x + 3y - 2 < 0 \Rightarrow y < \dfrac{2-x}{3}$

AB ৰেখাৰ ওপৰৰ অংশত প্ৰতিটো বিন্দুৰ বাবে $y > \dfrac{2-x}{3}$ আৰু AB ৰেখাৰ তলৰ অংশত প্ৰতিটো বিন্দুৰ বাবে $y < \dfrac{2-x}{3}$ কিন্তু AB ৰেখাৰ ওপৰত প্ৰতিটো বিন্দুৰ বাবে $y = \dfrac{2-x}{3}$.

গতিকে প্ৰদত্ত অসমীকৰণৰ লেখ হ'ব AB ৰেখাক বাদ দি AB ৰেখাৰ তলৰ ফালে দাগ দিয়া অংশ।

উদাহৰণ 6 ঃ লেখৰ সহায়ত সমাধান কৰা —

$3x + y > 6$

$2x + 3y - 12 > 0$

সমাধান ঃ প্ৰথমে আমি $3x + y = 6$ .... (i)

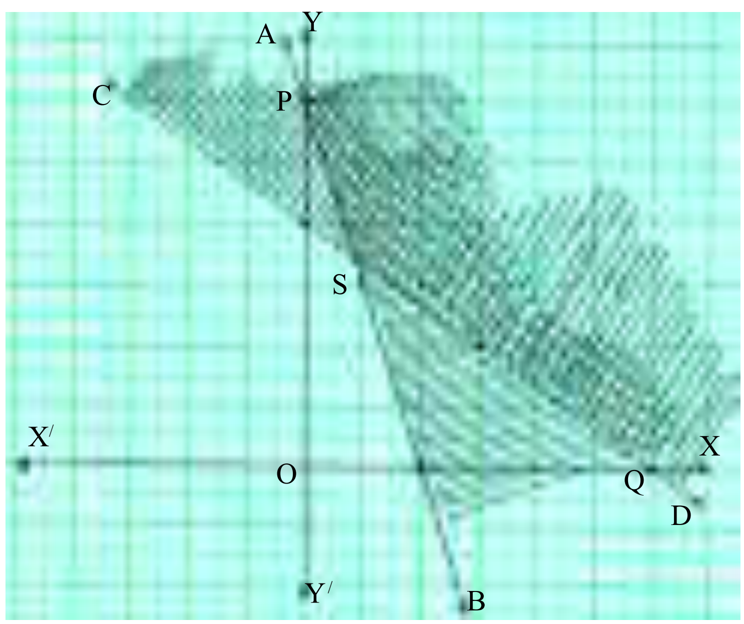
$2x + 3y - 12 = 0$ .... (ii)

সমীকৰণ দুটাৰ লেখ অংকন কৰিম।

(i) ৰ পৰা $y = 6 - 3x$

(i) সমীকৰণ সিদ্ধ কৰা x আৰু y ৰ কেইযোৰমান মান হ'ল—

x	0	2	1	
y	6	0	3	



স্কেল ঃ ডাঙৰ বৰ্গৰ এটা বাহু = 1 একক

এই বিন্দুবোৰ লেখ কাগজত বহুৱাই AB ৰেখাডাল পোৱা গ'ল। এই AB ৰেখাই (i) নং সমীকৰণৰ লেখ।

এতিয়া, $3x + y > 6 \Rightarrow y > 6 - 3x$

AB ৰেখাৰ সোঁফালে প্ৰতিটো বিন্দুৰ বাবে $y > 6 - 3x$ গতিকে AB ৰেখাক বাদ দি AB ৰেখাৰ সোঁফালে থকা আটাইবোৰ বিন্দুৰ সমষ্টি হ'ল প্ৰথম অসমীকৰণৰ লেখ।

আকৌ (ii) ৰ পৰা $y = \frac{12 - 2x}{3}$

(ii) সমীকৰণটো সিদ্ধ কৰা x, y ৰ কেইযোৰমান মান হ'ল

x	0	6	3
y	4	0	2

এই বিন্দুবোৰ একেখন লেখ কাগজতে (একে স্কেল ব্যৱহাৰ কৰি) বহুৱাই আমি CD ৰেখাডাল পাম আৰু এই CD ৰেখাডালেই (ii) সমীকৰণৰ লেখ।

এতিয়া $2x + 3y - 12 > 0 \Rightarrow y > \frac{12 - 2x}{3}$ গতিকে দ্বিতীয় অসমীকৰণটোৰ লেখ হ'ল CD ৰেখাক বাদ দি ইয়াৰ ওপৰৰ ফালে থকা অংশৰ আটাইবোৰ বিন্দুৰ সমষ্টি।

দুয়োটা অসমীকৰণৰ লেখৰ সাধাৰণ অংশটো (Common portion) হ'ল মুক্ত ক্ষেত্ৰ APSQD (ৰশ্মি $\overrightarrow{SA}$ আৰু $\overrightarrow{SD}$ বাদ দি)

[চিত্ৰত অথালি-পথালিকৈ দাগ দিয়া অংশটো]

এই সাধাৰণ অংশটোৱে হ'ল প্ৰদত্ত অসমীকৰণ দুটাৰ লৈখিক সমাধান ক্ষেত্ৰ।

অনুশীলনী

1. এটা চলকযুক্ত বৈখিক অসমীকৰণৰ সংজ্ঞা লিখা।
2. দ্বি-চলকযুক্ত বৈখিক অসমীকৰণৰ সংজ্ঞা লিখা।
3. (i) পৰম অসমতা আৰু (ii) চৰ্ত সাপেক্ষ অসমতা বুলিলে কি বুজা?
4. তলৰ অসমীকৰণবোৰক এটা চলকযুক্ত অসমীকৰণ হিচাপে বিবেচনা কৰি লেখ অংকন কৰা ঃ

   (i) $x > -2$ (ii) $x \leq 0$ (iii) $x > 0$ (iv) $|x - 1| < 3$ (v) $3 < x < 8$
5. তলত দিয়া অসমীকৰণবোৰৰ xy-সমতলত লেখ অংকন কৰা ঃ

   (i) $x \geq 5$ (ii) $y < 3$ (iii) $x \geq 0$

(iv) $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}>1$ (v) $2x - 4y > 5$ (vi) $x + 2y < 6$

(vii) $2x + 3y > 12$ (viii) $x < y$ (ix) $x + y < 2$

6. তলৰ অসমীকৰণ প্ৰণালীৰ লৈখিক সমাধান কৰা ঃ

(i) $2x + y \geq 12,$ $x + y \geq 7$

(ii) $2x + 5y < 10,$ $x < 2$

(iii) $2x + 3y \geq 18,$ $x + y \geq 8$

(iv) $y \geq 5x,$ $y \leq 0$

(v) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}>6,$ $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\leq 1$

বিন্যাস আৰু দল

উপায় (Choices) ঃ ধৰা হ'ল, এটা কোঠাত দুখন দুৱাৰ (A আৰু B) আছে। যদি তুমি কোঠাটোত সোমাব খোজা তেনেহ'লে তুমি A দুৱাৰেৰে নতুবা B দুৱাৰেৰে সোমাব পাৰা। গতিকে কোঠাটোৰ ভিতৰত সোমোৱা কাৰ্যটোৰ বাবে দুটা উপায় আছে।

কোঠাটোৰ ভিতৰত সোমোৱাৰ পিছত, যদি তুমি কোঠাৰ বাহিৰ হৈ ওলাই আহিব লাগে, তেনেহ'লে এই কাৰ্যটোৰ বাবেও দুটা উপায় আছে; তুমি A দুৱাৰখন বা B দুৱাৰখন বাছি ল'ব পাৰা। কোঠাৰ ভিতৰত সোমোৱা আৰু বাহিৰ ওলোৱা কাৰ্য দুটা সম্পন্ন কৰাৰ বাবে উপায় (বা ধৰণ) তলত দিয়া ধৰণে আমি দেখুৱাব পাৰোঁ ঃ

	সোমোৱা	**ওলোৱা**
দুৱাৰৰ নাম ঃ	A	A
	A	B
	B	A
	B	B

গতিকে কোঠাৰ ভিতৰ সোমোৱা আৰু বাহিৰ ওলোৱা কাৰ্য দুটা সম্পন্ন কৰাৰ বাবে মুঠ 4টা উপায় আছে।

কিন্তু যদি এনেকুৱা এটা বাধা থাকে, যে তুমি যিখন দুৱাৰেৰে সোমাবা সেইখন দুৱাৰেৰে ওলাই আহিব নোৱাৰা; তেনেহ'লে তুমি ওলাই অহাৰ উপায় মাত্ৰ এটা হ'ব। গতিকে এই ক্ষেত্ৰত কোঠাৰ ভিতৰ সোমোৱা আৰু বাহিৰ ওলোৱা কাৰ্য দুটা সম্পন্ন কৰাৰ উপায় আমি তলত দিয়াৰ দৰে দেখুৱাব পাৰোঁ—

সোমোৰা	**ওলোৰা**
A	B
B	A

গতিকে মুঠ উপায় হ'ল 2টা।

তেনেদৰে ধৰা এটা কোঠাত তিনিখন দুৱাৰ আছে— A, B আৰু C। তুমি কোঠাৰ ভিতৰ সোমাবৰ বাবে তিনিটা ভিন্ন উপায় আছে। কোঠাৰ ভিতৰ সোমোৱাৰ পিছত যদি তুমি অন্য এখন দুৱাৰেৰে (ভিতৰ সোমোৰা দুৱাৰখনৰ বাহিৰে) ওলাব বিচৰা তেনে তুমি ওলাই আহিব পাৰা দুই ধৰণে। কোঠাৰ ভিতৰ সোমোৰা আৰু অন্য এখন দুৱাৰেৰে বাহিৰ ওলোৰা কাৰ্য দুটা সম্পন্ন কৰাৰ উপায়বোৰ তলত দেখুওৱা ধৰণে তালিকা কৰিব পাৰোঁ—

সোমোৰা	**ওলোৰা**
A	B
A	C
B	A
B	C
C	A
C	B

গতিকে দেখা গ'ল এই ক্ষেত্ৰত কোঠাৰ ভিতৰ সোমোৰা আৰু বাহিৰ ওলোৰা কাৰ্য দুটাৰ বাবে মুঠ 6 টা উপায় আছে।

আমি দেখিবলৈ পাইছোঁ যে কোঠাৰ ভিতৰ সোমোৰা কাৰ্যটো সম্পন্ন কৰিব পাৰি 3 টা ভিন্ন উপায়ে আৰু প্ৰতিবাৰ ভিতৰ সোমোৰা কাৰ্যটোৰ বাবে বাহিৰ ওলোৰা কাৰ্যটো সম্পন্ন কৰিব পাৰি দুই ধৰণে। এইদৰে দুয়োটা কাৰ্যই একেলগে সম্পন্ন কৰাৰ উপায় হ'ল — $3 \times 2 = 6$

যদি যিখন দুৱাৰেৰে ভিতৰ সোমোৰা সেই দুৱাৰেৰে বাহিৰ ওলাব নোৱাৰা এই বাধাটো নাথাকে, তেন্তে ভিতৰ সোমোৰা কাৰ্যটো সম্পন্ন কৰিব পাৰি তিনি ধৰণে আৰু প্ৰতিবাৰ ভিতৰ সোমোৰা কাৰ্যটোৰ বাবে বাহিৰ ওলোৰা কাৰ্যটো সম্পন্ন কৰিব পাৰি তিনি ধৰণে, গতিকে দুয়োটা কাৰ্যই একেলগে সম্পন্ন কৰিব পাৰি $3 \times 3 = 9$ ধৰণে।

ওপৰৰ আলোচনাৰ পৰা এইটো স্পষ্ট হ'ল যে ইয়াৰ অন্তৰালত এটা মৌলিক বিধি আছে, যিটো তলত বৰ্ণনা কৰা হ'ল—

বিধি (Principle) ঃ যদি কোনো এটা কাৰ্য 'm' ভিন্ন উপায়ে সম্পন্ন কৰিব পাৰি আৰু যদি এই কাৰ্যটো সম্পন্ন কৰাৰ প্ৰতিবাৰতে অন্য এটা কাৰ্য 'n' ভিন্ন উপায়ে সম্পন্ন কৰিব পাৰি তেনেহ'লে দুয়োটা কাৰ্য একেলগে সম্পন্ন কৰিব পাৰি $m \times n$ ভিন্ন উপায়ে।

এই বিধিটো যিকোনো সংখ্যক কাৰ্যৰ বাবে প্ৰয়োগ কৰিব পাৰি। সাধাৰণতঃ যদি এটা কাৰ্য m উপায়ে সম্পন্ন কৰিব পাৰি, ইয়াৰ লগতে দ্বিতীয় এটা কাৰ্য n ভিন্ন উপায়ে সম্পন্ন কৰিব পাৰি আৰু ইয়াৰ লগতে

তৃতীয় কাৰ্যটো যদি p ভিন্ন উপায়ে সম্পন্ন কৰিব পাৰি; এনেদৰে সম্পন্ন কৰি গৈ থাকিলে আটাইকেইটা কাৰ্য একেলগে সম্পন্ন কৰিব পাৰি $m \times n \times p \times$ .... ভিন্ন উপায়ে।

বিন্যাস (Permutation) ঃ এটা সসীম সংহতিৰ মৌলবোৰৰ পৰা কেইটামান বা আটাইকেইটা মৌলকে লৈ এটা শাৰীত যিমান ভিন্ন প্ৰকাৰে সজাব পাৰি, এই প্ৰতিটো সজোৱাৰ প্ৰকাৰকেই 'বিন্যাস' বুলি কোৱা হয়।

উদাহৰণস্বৰূপে, তিনিটা আখৰ A, B, C-ৰ পৰা এটা, দুটা বা তিনিটাকৈ লৈ পোৱা বিন্যাসবোৰ তলত দেখুওৱা হ'ল —

এটাকৈ লৈ	**দুটাকৈ লৈ**	**তিনিটাকৈ লৈ**
A	AB	ABC
B	BA	ACB
C	AC	BAC
	CA	BCA
	BC	CAB
	CB	CBA

সাংকেতিক চিন (Notation) ঃ ধৰা হ'ল, এটা সংহতিত n টা বস্তু আছে আৰু প্ৰতিটো বিন্যাসত ধৰা r টাকৈ বস্তু ($r \leq n$) আছে; তেনেহ'লে মুঠ বিন্যাসৰ সংখ্যাক ${}^{n}P_{r}$ বা ${}_{n}P_{r}$ বা $P(n, r)$ সংকেতেৰে বুজোৱা হয়। গতিকে ${}^{n}P_{r}$ বা ${}_{n}P_{r}$ বা $P(n, r)$ সংকেতে বুজাব যে— n টা ভিন্ন বস্তুৰ পৰা প্ৰতিবাৰতে r টাকৈ লৈ পোৱা মুঠ বিন্যাস। গতিকে ওপৰৰ উদাহৰণটোও আমি দেখিবলৈ পাইছোঁ যে ${}^{3}P_{1} = 3$, ${}^{3}P_{2} = 6$, ${}^{3}P_{3} = 6$.

ক্ৰমগুণন চিহ্ন (Factorial notation) ঃ প্ৰথম n টা স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ ক্ৰমিক পূৰণফল (গুণফল)ক $\lfloor n$ বা $n\,!$ প্ৰতীকটোৰে সূচোৱা হয়। ইয়াক ক্ৰমগুণন n (factorial n) বুলি পঢ়া হয়।

গতিকে $\lfloor n$ বা $n\,! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots\ldots\ldots \times (n-1) \times n$

$$= n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots\ldots \times 3 \times 2 \times 1$$

উদাহৰণস্বৰূপে,

$$\lfloor 5 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$$
$$= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$
$$\lfloor 7 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7$$
$$= 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

সংজ্ঞাৰ পৰা আমি পাওঁ

$$\lfloor n = n(n-1)(n-2) \ldots\ldots 3.2.1$$
$$= n[(n-1)(n-2)\ldots\ldots 3.2.1]$$
$$= n\lfloor n-1$$

একেদৰে, $\lfloor n = n(n-1)\lfloor n-2$

$= n(n-1)(n-2)\underline{|n-3}$ ইত্যাদি।

গতিকে $\underline{|10} = 10 \times \underline{|9} = 10 \times 9 \times \underline{|8} = 10 \times 9 \times 8 \times \underline{|7}$ ইত্যাদি।

উপপাদ্য ঃ n টা ভিন্ন বস্তুৰ পৰা r $(r \le n)$ টাকৈ লৈ পোৱা মুঠ বিন্যাসৰ সংখ্যা হ'ল

$$\frac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}}$$

প্ৰমাণ ঃ n টা ভিন্ন বস্তুৰ পৰা r টাকৈ লৈ পোৱা মুঠ বিন্যাসৰ সংখ্যা আৰু n টা প্ৰদত্ত বস্তুৰ পৰা r টাকৈ লৈ এটা শাৰীৰ n টা ভিন্ন ঠাইত সজোৱাৰ প্ৰকাৰৰ সংখ্যা একেই।

এতিয়া প্ৰথম ঠাই n টা প্ৰদত্ত বস্তুৰ যিকোনো এটাৰে পূৰ্ণ কৰিব পাৰি। গতিকে প্ৰথম ঠাই n ভিন্ন প্ৰকাৰে পূৰ্ণ কৰিব পাৰি। প্ৰথম ঠাই পূৰ্ণ কৰাৰ পিছত দ্বিতীয় ঠাই বৈ যোৱা $(n-1)$ টা ভিন্ন বস্তুৰ যিকোনো এটাৰে পূৰ্ণ কৰিব পাৰি। গতিকে দ্বিতীয় ঠাই $(n-1)$ প্ৰকাৰে পূৰ্ণ কৰিব পাৰি। তেনেদৰে তৃতীয় ঠাই $(n-2)$ ভিন্ন প্ৰকাৰে পূৰ্ণ কৰিব পাৰি, ইত্যাদি। এইদৰে ক্ৰমাগত আগবাঢ়িলে, শেষৰ ঠাই (r তম ঠাই)ৰ বাবে আমাৰ হাতত $[n-(r-1)]$ সংখ্যক ভিন্ন বস্তু থাকিব। গতিকে শেষৰ ঠাই $n-(r-1) = n-r+1$ ভিন্ন ধৰণে পূৰ্ণ কৰিব পাৰি

এইদৰে r সংখ্যক ঠাই পূৰ্ণ কৰিব পাৰি $n(n-1)(n-2)$ .... $(n-r+1)$ ভিন্ন প্ৰকাৰে।

গতিকে $^{n}P_{r} = n(n-1)(n-2).....(n-r+1)$

$$= \frac{n(n-1)(n-2).....(n-r+1)(n-r)....3.2.1}{(n-r)(n-r-1).....3.2.1}$$

$$= \frac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}}$$

অনুসিদ্ধান্ত ঃ

(i) $^{n}P_{r} = n(n-1)(n-2)....... (n-r+1)$-ত $r = n$ বহুৱাই আমি পাওঁ

$^{n}P_{n} = n(n-1)(n-2)....... 1 = \underline{|n}$

আকৌ (ii) $^{n}P_{r} = \frac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}}$ -ত $r = n$ বহুৱাই আমি পাওঁ

$^{n}P_{n} = \frac{\underline{|n}}{\underline{|0}}$

$\therefore \underline{|n} = \frac{\underline{|n}}{\underline{|0}}$

$\therefore \underline{|0} = 1$

উদাহৰণ 1 ঃ ${}^5P_3$, ${}^7P_4$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ $${}^5P_3 = \frac{\lfloor\underline{5}}{\lfloor\underline{5-3}} = \frac{\lfloor\underline{5}}{\lfloor\underline{2}} = \frac{5\times4\times3\times2\times1}{2\times1} = 60$$

$${}^7P_4 = \frac{\lfloor\underline{7}}{\lfloor\underline{7-4}} = \frac{\lfloor\underline{7}}{\lfloor\underline{3}} = \frac{7\times6\times5\times4\times\lfloor\underline{3}}{\lfloor\underline{3}} = 840$$

উদাহৰণ 2 ঃ 'EQUATION' শব্দটোৰ আখৰবোৰ কিমান ধৰণে সজাব পাৰি?

সমাধান ঃ 'EQUATION' শব্দটোত 8 টা ভিন্ন আখৰ আছে। গতিকে এই আখৰকেইটাক সজোৰাৰ প্ৰকাৰ হ'ব 8 টা ভিন্ন বস্তুৰ পৰা আটাইকেইটাকে লৈ পোৱা মুঠ বিন্যাসৰ সমান—

$${}^8P_8 = \lfloor\underline{8}$$
$$= 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$
$$= 40320$$

পুনৰাবৃত্তি ঘটাই বিন্যাস (Permutations with repetition) n টা ভিন্ন বস্তুৰ পৰা r টাকৈ $(r \le n)$ লৈ পোৱা বিন্যাসৰ সংখ্যা নিৰ্ণয় কৰিব লাগে যদিহে প্ৰতিটো বস্তুৰেই সৰ্বাধিক r বাৰ পুনৰাবৃত্তি হ'ব পাৰে।

স্পষ্টতঃ নিৰ্ণেয় বিন্যাসৰ সংখ্যা হ'ব n সংখ্যক ভিন্ন বস্তুৰে n সংখ্যক ঠাই পূৰ্ণ কৰাৰ মুঠ প্ৰকাৰ য'ত প্ৰতিটো বস্তুৰেই এটা বিন্যাসত সৰ্বাধিক r বাৰ পুনৰাবৃত্তি হ'ব পাৰে।

প্ৰথম ঠাই n টা বস্তুৰ যিকোনো এটাৰে পূৰ্ণ কৰিব পাৰি অৰ্থাৎ প্ৰথম ঠাই n ভিন্ন প্ৰকাৰে পূৰ্ণ কৰিব পাৰি। যিহেতু বস্তুবোৰ পুনৰাবৃত্তি হ'ব পাৰে, গতিকে প্ৰথম ঠাই পূৰ্ণ কৰাৰ পিছত দ্বিতীয় ঠাই n টা বস্তুৰ যিকোনো এটাৰে পূৰ্ণ কৰিব পাৰি। অৰ্থাৎ দ্বিতীয় ঠাই n ভিন্ন প্ৰকাৰে পূৰ্ণ কৰিব পাৰি। এনেদৰে r টা ঠাইৰ প্ৰতিটো n ভিন্ন প্ৰকাৰে পূৰ্ণ কৰিব পাৰি। গতিকে r টা ঠাইৰ আটাইকেইটা পূৰ্ণ কৰাৰ মুঠ প্ৰকাৰ হ'ল—

$n.n.n.$ .... (r বাৰ) $= n^r$

গতিকে নিৰ্ণেয় বিন্যাসৰ সংখ্যা $= n^r$

উদাহৰণ 3 ঃ 6 খন চিঠি 5 টা চিঠি বাকচত কিমান ধৰণে পেলাব পাৰি?

সমাধান ঃ প্ৰথম চিঠিখন 5টা বাকচৰ যিকোনো এটাত সুমুৱাব পাৰি। গতিকে প্ৰথম চিঠিখন 5 ধৰণে সুমুৱাব পাৰিব। প্ৰথম চিঠিখন সোমোৱাৰ পিছত দ্বিতীয় চিঠিখনো 5টা বাকচৰ যিকোনো এটাত সুমুৱাব পাৰি (প্ৰথমে চিঠিখন সোমাৱা বাকচটোতো দ্বিতীয় চিঠিখন সুমুৱাব পাৰি)। এইদৰে 6 খন চিঠিৰ প্ৰতিখনে 5 ধৰণে বাকচত সুমুৱাব পাৰি।

গতিকে 6 খন চিঠি বাকচত সোমোৱাৰ মুঠ ধৰণ

$$= 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$$
$$= 5^6$$
$$= 15625$$

উদাহৰণ 4 ঃ 5 টা পুৰস্কাৰ 4 জন ল'ৰাক কিমান ধৰণে দিব পাৰি, যদিহে প্ৰতিজন ছাত্ৰৰে যিকোনো সংখ্যক পুৰস্কাৰ লাভ কৰাৰ যোগ্যতা থাকে?

সমাধান ঃ প্ৰথম পুৰস্কাৰটো 4 জন ল'ৰাৰ যিকোনো এজনকে দিব পাৰি। গতিকে প্ৰথম পুৰস্কাৰটো 4 টা ভিন্ন ধৰণে দিব পাৰি। প্ৰথম পুৰস্কাৰটো দিয়াৰ পিছত দ্বিতীয় পুৰস্কাৰটোও 4 জন ল'ৰাৰ যিকোনো এজনক দিব পাৰি। অৰ্থাৎ দ্বিতীয় পুৰস্কাৰটোও 4 টা ভিন্ন ধৰণে দিব পাৰি। এইদৰে 5টা পুৰস্কাৰৰ প্ৰতিটোৰে 4টা ভিন্ন ধৰণে দিব পাৰি।

গতিকে পুৰস্কাৰ দিয়াৰ মুঠ ধৰণ $= 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$

$= 4^5$

$= 1024$

বস্তুবোৰৰ আটায়ে ভিন্ন নহয়, এনেকুৱা বস্তুৰ বিন্যাস ঃ

বস্তুবোৰৰ আটায়ে ভিন্ন নহয়, এনেকুৱা n টা বস্তুৰ আটাইকেইটাকে লৈ পোৱা মুঠ বিন্যাসৰ সংখ্যা নিৰ্ণয় কৰিব লাগে।

ধৰা হ'ল, $a, b, c, ...$ ইত্যাদি n টা বস্তু আছে।

ধৰা, ইয়াৰে p টা বস্তুৰেই a, q টা বস্তুৰেই b আৰু r টা বস্তুৰেই c আৰু বাকী বস্তুবোৰ ভিন্ন। এই n টা বস্তুৰ আটাইকেইটাকে লৈ পোৱা মুঠ বিন্যাসৰ সংখ্যা নিৰ্ণয় কৰিব লাগে।

ধৰা হ'ল, মুঠ বিন্যাসৰ সংখ্যা $= x$. যদি আটাইকেইটা a ৰ ঠাইত p টা ভিন্ন বস্তু লোৱা হয়, তেনেহ'লে x সংখ্যক বিন্যাসৰ প্ৰতিটো বিন্যাসতেই এই p সংখ্যক বস্তুক সিহঁতৰ মাজত $\underline{|p}$ ধৰণে সজাব পৰা যাব। গতিকে আদিতে পোৱা x টা বিন্যাসৰ ঠাইত $x.\underline{|p}$ টা বিন্যাস পোৱা যাব।

এই $x.\underline{|p}$ টা বিন্যাসৰ প্ৰতিটোতে q সংখ্যক একে বস্তু b আৰু r সংখ্যক একে বস্তু c থাকিব। যদি q টা একে বস্তু b-ক আমি q টা ভিন্ন বস্তুৰে সলনি কৰোঁ তেন্তে এই q টা বস্তুক সিহঁতৰ মাজত $\underline{|q}$ ধৰণে সজাব পাৰি। গতিকে $x.\underline{|p}$ টা বিন্যাসৰ পৰা আমি $x.\underline{|p}.\underline{|q}$ টা বিন্যাস পাম য'ত প্ৰতিটো বিন্যাসতে r টা একে বস্তু c থাকিব।

আগৰ দৰে এই r টা একে বস্তু c ৰ ঠাইত r টা ভিন্ন বস্তু ল'লে আমি মুঠ বিন্যাস পাম $x.\underline{|p}.\underline{|q}.\underline{|r}$ য'ত প্ৰতিটো বিন্যাসতে nটা ভিন্ন বস্তু থাকিব। কিন্তু nটা ভিন্ন বস্তুৰ পৰা পোৱা মুঠ বিন্যাসৰ সংখ্যা হ'ল $\underline{|n}$

$\therefore\ x.\underline{|p}.\underline{|q}.\underline{|r} = \underline{|n}$

$$\Rightarrow\ x = \frac{\underline{|n}}{\underline{|p}\,\underline{|q}\,\underline{|r}}$$

উদাহৰণ 5 ঃ 'COLLEGE' শব্দটোৰ আখৰবোৰক কিমান প্ৰকাৰে সজাব পাৰি নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ ইয়াত মুঠ আখৰৰ সংখ্যা = 7

এই 7 টা আখৰৰ ভিতৰত 2 টা L আৰু 2 টা E আছে।

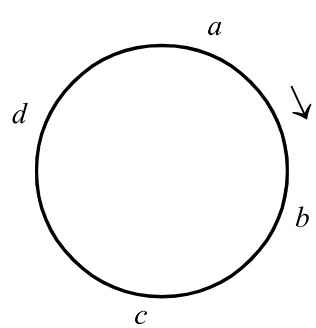
$\therefore$ মুঠ সজোৰাৰ প্ৰকাৰ $= \frac{\lfloor 7}{\lfloor 2 \lfloor 2}$

$= \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{2}$

$= 1260$

বৃত্তীয় বিন্যাস (Circular permutations) ঃ

ৰৈখিক বিন্যাসত (অৰ্থাৎ এটা শাৰীত সজোৰা) দুটা প্ৰান্ত বিন্দু (আদি আৰু অন্ত) থাকে কিন্তু বৃত্তীয় বিন্যাসত (অৰ্থাৎ এটা বৃত্তত সজোৰাৰ ক্ষেত্ৰত) আদি আৰু অন্ত নাথাকে। উদাহৰণস্বৰূপে ধৰা হ'ল, 4টা আখৰ a, b, c, d ক এটা বৃত্তত চিত্ৰত দেখুৱাৰ দৰে সজোৰা হ'ল। এই বিন্যাসটোক প্ৰতিটো আখৰৰ পৰা আৰম্ভ কৰি ঘড়ীৰ কাঁটাৰ দিশত আমি তলত উল্লেখ কৰা যিকোনো এক ধৰণে পঢ়িব পাৰোঁ— *abcd, bcda, cdab*



যদি আমি এটা শাৰীত সজাওঁ তেন্তে এই 4 টা ভিন্ন 4 টা বিন্যাস হ'ব, কিন্তু বৃত্তত সজালে এই 4 টা একেটাই বিন্যাস। গতিকে 4 টা ৰৈখিক বিন্যাসৰ ঠাইত আমি এটা বৃত্তীয় বিন্যাস পালোঁ। কিন্তু 4 টা আখৰক মুঠ $\lfloor 4$ ধৰণে সজাব পাৰি (এটা শাৰীত)

গতিকে 4 টা আখৰক এটা বৃত্তত সজোৰাৰ প্ৰকাৰ $= \frac{\lfloor 4}{4} = \lfloor 3 = \lfloor 4-1$

n টা ভিন্ন বস্তুৰ আটাইকেইটা লৈ পোৱা বৃত্তীয় বিন্যাসৰ সংখ্যা নিৰ্ণয় কৰিব লাগে।

ধৰা হ'ল, n টা ভিন্ন বস্তুক $a_1, a_2 \ldots\ldots, a_n$ আখৰ কেইটাৰে বুজোৱা হ'ল। এটা শাৰীত $a_1 a_2 a_3 \ldots\ldots a_n$, $a_2 a_3 a_4 \ldots\ldots a_n a_1$, $a_3 a_4 a_5 \ldots\ldots a_n a_1 a_2$, ..., $a_n a_1 a_2 \ldots\ldots a_{n-1}$ হ'ল n টা ভিন্ন বিন্যাস; কিন্তু এটা বৃত্তত এই আটাইকেইটাই একেটা বিন্যাস। এইদৰে এটা শাৰীৰ প্ৰতি n টা বিন্যাসৰ ঠাইত এটা বৃত্তীয় বিন্যাস পোৱা যাব।

গতিকে এটা বৃত্তত সজোৰাৰ মুঠ প্ৰকাৰ $= \frac{\lfloor n}{n} = \lfloor n-1$

উদাহৰণ 6 ঃ এখন ঘূৰণীয়া মেজৰ চাৰিওফালে 7 জন মানুহক কিমান ধৰণে বহুৱাব পাৰি?

সমাধান ঃ যিহেতু এইটো বৃত্তীয় বিন্যাস, গতিকে মুঠ বহিব পৰা উপায় $= \lfloor 7-1$

$= \lfloor 6$

$= 720$

উদাহৰণ 7 ঃ 5 জন ল'ৰা আৰু 4 জনী ছোৱালীক এটা বৃত্তত বহুৱাব লাগে। সিহঁতে কিমান ধৰণে বহিব পাৰে?

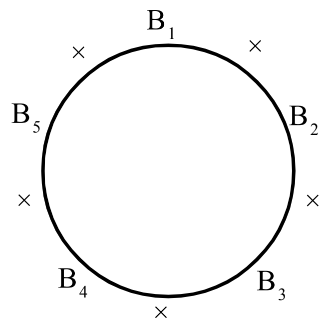
সমাধান ঃ ল'ৰা আৰু ছোৱালীৰ মুঠ সংখ্যা = 5 + 4 = 9

গতিকে 9 জন ল'ৰা-ছোৱালীক এটা বৃত্তত বহুৱাব লাগে।

$\therefore$ সিহঁতে বহিব পৰা মুঠ প্ৰকাৰ = $\underline{\lfloor 9-1} = \underline{\lfloor 8}$

উদাহৰণ 8 ঃ 5 জন ল'ৰা আৰু 4 জনী ছোৱালীক এটা বৃত্তত কিমান ধৰণে বহুৱাব পাৰি যাতে কোনো দুজনী ছোৱালীয়ে ওচৰা-উচৰিকৈ নবহে?

সমাধান ঃ প্ৰথমে ল'ৰা 5 জনক বহুওৱা হওক। 5 জন ল'ৰাক এটা বৃত্তত $\underline{\lfloor 5-1} = \underline{\lfloor 4}$ ধৰণে বহুৱাব পাৰি। যিহেতু কোনো দুজনী ছোৱালীয়ে ওচৰা-উচৰিকৈ নবহে, গতিকে ল'ৰাবোৰে সিহঁতৰ স্থান দখল কৰাৰ পিছত ($\underline{\lfloor 4}$ প্ৰকাৰৰ যিকোনো এটা প্ৰকাৰত) ছোৱালী 4 জনীয়ে দুজনকৈ ল'ৰাৰ মাজত থকা মুঠ 5 টা স্থানৰ (চিত্ৰ চোৱা) যিকোনো 4 টা স্থান ল'ব পাৰে। গতিকে ছোৱালী 4 জনীয়ে সিহঁতৰ স্থান ল'ব পাৰে ${}^5p_4$ ধৰণে।



$\therefore$ ল'ৰা-ছোৱালীবোৰ বহিব পৰা মুঠ প্ৰকাৰ

$$= \underline{\lfloor 4} \times {}^5p_4$$

$$= \underline{\lfloor 4} \times \frac{\underline{\lfloor 5}}{\underline{\lfloor 5-4}}$$

$$= \underline{\lfloor 4} \times \underline{\lfloor 5}$$

$$= 2880$$

উদাহৰণ 9 ঃ 6 টা বিভিন্ন ধৰণৰ মণি এডাল গলপতা (Neeklace)ত কিমান ধৰণে সজাব পাৰি?

সমাধান ঃ ইয়াত আমি 6 টা ভিন্ন বস্তুৰ আটাইকেইটাকে এটা বৃত্তত সজাব লাগে কিন্তু গলপতাৰ ক্ষেত্ৰত ঘড়ীৰ কাঁটাৰ দিশত সজোৱা আৰু ঘড়ীৰ কাঁটাৰ বিপৰীত দিশত সজোৱাৰ মাজত কোনো প্ৰভেদ নাথাকে।

গতিকে সজোৱাৰ মুঠ ধৰণ $= \frac{1}{2}\underline{\lfloor 6-1}$

$$= \frac{1}{2} \times \underline{\lfloor 5}$$

$$= \frac{1}{2} \times 120$$

$$= 60$$

বাধা আৰোপিত বিন্যাস (Restricted Permutations) **ঃ**

এতিয়া আমি কেইটামান ব্যাখ্যাকাৰী উদাহৰণ দিব বিচাৰিছোঁ, য'ত বস্তুবোৰ সজোৱাত কিছুমান বাধা আৰোপ কৰা থাকে।

উদাহৰণ 10 ঃ 'DAUGHTER' শব্দটোৰ আখৰবোৰ কিমান ধৰণে সজাব পাৰি যাতে *G, T* আৰু *R* এই আখৰকেইটা কেতিয়াও নাহে?

সমাধান ঃ যিহেতু *G, T* আৰু *R* এই আখৰ তিনিটা কোনো বিন্যাসতে নাথাকে গতিকে আমি বাকী 5 টা আখৰক সিহঁতৰ মাজত সজাব লাগে।

গতিকে মুঠ সজোৱাৰ প্ৰকাৰ = $\underline{|5}$ = 120

উদাহৰণ 11 ঃ 'DAUGHTER' শব্দটোৰ আখৰ কেইটাৰ পৰা 5 টাকৈ আখৰ লৈ কিমান প্ৰকাৰে সজাব পাৰি যাতে *G, T* আৰু *R* এই আখৰকেইটাই সদায় ক্ৰমানুসৰি প্ৰথম, তৃতীয় আৰু পঞ্চম স্থান অধিকাৰ কৰে?

সমাধান ঃ প্ৰথমে *G, T* আৰু *R* এই আখৰ তিনিটা নিৰ্দিষ্ট স্থানত (ক্ৰমানুসৰি প্ৰথম, তৃতীয় আৰু পঞ্চম স্থানত) বহুৱাই লোৱা হ'ল। এতিয়া বাকী দুটা ঠাই (দ্বিতীয় আৰু চতুৰ্থ) বাকী থকা 5 টা আখৰেৰে পূৰ্ণ কৰিব পাৰি $^5P_2$ ধৰণে।

$\therefore$ নিৰ্ণেয় মুঠ সজোৱাৰ প্ৰকাৰ = $^5P_2 = 20$

উদাহৰণ 12 ঃ এটা শাৰীত থকা 6 খন চকীত 8 জন ল'ৰাক কিমান ধৰণে বহুৱাব পাৰি যাতে তিনিজন বিশেষ ল'ৰা সদায় অন্তৰ্ভুক্ত হয়?

সমাধান ঃ তিনিজন বিশেষ ল'ৰাই 6 খন চকীৰ 3 খন $^6P_3$ ধৰণে দখল কৰিব পাৰে। এই তিনিখন চকী পূৰ্ণ হোৱাৰ পিছত বাকী থকা (6 – 3) = 3 খন চকী বাকী (8 – 3) = 5 জন ল'ৰাই $^5P_3$ ধৰণে পূৰ্ণ কৰিব পাৰে।

$\therefore$ ল'ৰা 8 জনক বহুৱাওৱাৰ প্ৰকাৰ

$$= {}^6P_3 \times {}^5P_3$$

$$= \frac{\underline{|6}}{\underline{|3}} \times \frac{\underline{|5}}{\underline{|2}}$$

$$= 7200$$

উদাহৰণ 13 ঃ 'TABLE' শব্দটোৰ আখৰ কেইটাৰ পৰা 4 টাকৈ লৈ কিমান প্ৰকাৰে সজাব পাৰি যাতে *BL* এই দুটা আখৰ একেলগে আৰু প্ৰদত্ত ক্ৰমত সদায়ে থাকে?

সমাধান ঃ *BL* আখৰ দুটাক এই ক্ৰমত একেলগে এটা আখৰ বুলি ধৰা হ'ল। এই আখৰ দুটাই 4টা ঠাইৰ দুটা ঠাই অধিকাৰ কৰিব। এতিয়া বাকী 3টা আখৰ (T, A, E) ৰ পৰা 2টা লৈ আমি $^3p_2$ ধৰণে সজাব পাৰোঁ। এই প্ৰতিটো বিন্যাসতে 2টাকৈ আখৰ থাকিব। এই দুটা আখৰৰ

মাজত এটা ঠাই আৰু সিহঁতৰ দুয়োফালে দুটা ঠাই মুঠতে 3টা ঠাই *BL* আখৰৰ জোঁটটোৰে 3 ধৰণে পূৰ্ণ কৰিব পাৰি।

গতিকে সজোৱাৰ মুঠ প্ৰকাৰ $= 3 \times {}^{3}p_2$

$= 18$

টোকা ঃ

যদি *BL* আখৰ দুটা সেই ক্ৰমত নাথাকে, তেন্তে সজোৱাৰ প্ৰকাৰ হ'ব$= 3 \times \lfloor\underline{2} \times {}^{3}p_2 = 36$ (এই ক্ষেত্ৰত *B* আৰু *L* আখৰ দুটাক সিহঁতৰ মাজত ${}^{2}p_2 = \lfloor\underline{2}$ ধৰণে সজাব পাৰি)।

ব্যাখ্যাসূচক উদাহৰণ ঃ

1. প্ৰমাণ কৰা যে ${}^{n}P_{n-1} = {}^{n}P_n$

সমাধান ঃ আমি জানো, ${}^{n}P_r = \dfrac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{n-r}}$

$$\therefore\ {}^{n}P_{n-1} = \frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{n-(n-1)}}$$

$$= \frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{1}}$$

$$= \lfloor\underline{n}$$

$$= {}^{n}P_n$$

2. প্ৰমাণ কৰা যে ${}^{n}P_r = n.{}^{n-1}P_{r-1}$

সমাধান ঃ ${}^{n}P_r = \dfrac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{n-r}}$

$$= \frac{n.\lfloor\underline{n-1}}{\lfloor\underline{(n-1)-(r-1)}}$$

$$= n.\frac{n-1}{(n-1)-(r-1)}$$

$$= n.\frac{n-1}{(n-1)-(r-1)}$$

3. n-ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা যদি

${}^{n}P_5 : {}^{n}P_3 = 2 : 1$

সমাধান ঃ $\dfrac{{}^{n}P_5}{{}^{n}P_3} = \dfrac{2}{1}$

$$\Rightarrow {}^{n}P_5 = 2 \times {}^{n}P_3$$

$$\Rightarrow \frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{n-5}} = 2 \times \frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{n-3}}$$

$$\Rightarrow \frac{\lfloor n-3}{\lfloor n-5} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{(n-3)(n-4)\lfloor (n-5)}{\lfloor n-5} = 2$$

$$\Rightarrow (n-3)(n-4) = 2\times 1$$ [$n - 3$ আৰু $n - 4$ দুটা ক্ৰমিক ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা]

$$\Rightarrow n - 3 = 2$$

$$\Rightarrow n = 5$$

4. যদি ${}^{n}P_4 : {}^{n+1}P_4 = 5 : 9$, n ৰ মান উলিওৱা

সমাধান ঃ $\frac{{}^{n}P_4}{{}^{n+1}P_4} = \frac{5}{9}$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\lfloor n}{\lfloor n-4}}{\frac{\lfloor n+1}{\lfloor n+1-4}} = \frac{5}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{\lfloor n \lfloor n-3}{\lfloor n-4 \lfloor n+1} = \frac{5}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{\lfloor n \;\; (n-3) \lfloor n-4}{\lfloor n-4 \;\; (n+1) \;\; \lfloor n} = \frac{5}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{n-3}{n+1} = \frac{5}{9}$$

$$\Rightarrow 9n - 27 = 5n + 5$$

$$\Rightarrow 4n = 32$$

$$\Rightarrow n = 8$$

5. যদি ${}^{n+1}P_3 = 10 \times {}^{n-1}P_2$; n ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ ${}^{n+1}P_3 = 10 \times {}^{n-1}P_2$

$$\Rightarrow \frac{\lfloor n+1}{\lfloor (n+1)-3} = 10 \times \frac{\lfloor n-1}{\lfloor (n-1)-2}$$

$$\Rightarrow \frac{(n+1)n \lfloor n-1}{\lfloor n-2} = 10 \times \frac{\lfloor n-1}{\lfloor n-3}$$

$$\Rightarrow \frac{n(n+1)}{(n-2)\lfloor n-3} = \frac{10}{\lfloor n-3}$$

$$\Rightarrow n(n + 1) = 10(n - 2)$$

$\Rightarrow n^2 + n = 10n - 20$

$\Rightarrow n^2 - 9n + 20 = 0$

$\Rightarrow (n - 4)(n - 5) = 0$

$\Rightarrow n = 4 \;\text{ or }\; n = 5$

6. যদি $22 \times {}^{n}P_5 = 7 \times {}^{n+2}P_5$, তেন্তে n ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা ঃ

সমাধান ঃ $22 \times {}^{n}P_5 = 7 \times {}^{n+2}P_5$

$$\Rightarrow 22 \times \frac{\lfloor n}{\lfloor n-5} = 7 \times \frac{\lfloor n+2}{\lfloor (n+2)-5}$$

$$\Rightarrow 22 \times \frac{\lfloor n}{\lfloor n-5} = 7 \times \frac{(n+2)(n+1)\lfloor n}{\lfloor n-3}$$

$$\Rightarrow \frac{22}{\lfloor n-5} = \frac{7(n+2)(n+1)}{(n-3)(n-4)\lfloor n-5}$$

$\Rightarrow 22(n - 3)(n - 4) = 7(n + 2)(n + 1)$

$\Rightarrow 22n^2 - 154n + 264 = 7n^2 + 21^n + 14$

$\Rightarrow 15n^2 - 175n + 250 = 0$

$\Rightarrow 3n^2 - 35n + 50 = 0$

$\Rightarrow (n - 10)(3n - 5) = 0$

$$\Rightarrow n = 10 \text{ or } n = \frac{3}{5}$$

কিন্তু n এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা, গতিকে $n = \frac{3}{5}$ হ'ব নোৱাৰে।

$\therefore\; n = 10$

7. প্ৰমাণ কৰা যে ${}^{2n}P_n = 2^n\{1.3.5. ......(2n - 1)\}$

সমাধান ঃ ${}^{2n}P_n = \dfrac{\lfloor 2n}{\lfloor 2n-n}$

$$= \frac{\lfloor 2n}{\lfloor n}$$

$$= \frac{2n(2n-1)(2n-2).....4.3.2.1}{\lfloor n}$$

$$= \frac{\{2n(2n-2)(2n-4).....4.2\}\{(2n-1)(2n-3)....3.1\}}{\lfloor n}$$

$$= \frac{2^n\{n(n-1)(n-2).....2.1\}\{(2n-1)(2n-3).....3.1\}}{\lfloor n}$$

$$= \frac{2^n \lfloor n \{1.3.5......(2n-3)(2n-1)\}}{\lfloor n}$$

$$= 2^n\{1.\ 3.\ 5.\ .....(2n-1)\}$$

8. পুনৰাবৃত্তি নোহোৱাকৈ 0, 1, 2, 3, 4, 5 এই অংককেইটাৰে 100 আৰু 1000 ৰ মাজত থকা কিমান সংখ্যা পাব পাৰি? ইয়াৰে কিমানটা সংখ্যা 5 ৰে বিভাজ্য?

সমাধান ঃ

যিহেতু সংখ্যাবোৰ 100 আৰু 1000 ৰ মাজত থাকে, গতিকে সংখ্যাবোৰ তিনিটা অংক বিশিষ্ট। সংখ্যাটোৰ একক স্থান আৰু দহক স্থানত প্ৰদত্ত 6 টা অংকৰ যিকোনো এটাই বহিব পাৰে (পুনৰাবৃত্তি নোহোৱাকৈ) কিন্তু শতক স্থানত 0 অংকটো বহিব নোৱাৰে।

এতিয়া আমি শতক স্থানৰ পৰা আৰম্ভ কৰিম। শতক স্থানটো 5 ভিন্ন ধৰণে পূৰ্ণ কৰিব পাৰি (আমি 1, 2, 3, 4, 5 ৰ যিকোনো এটা অংক বহুৱাব পাৰোঁ) শতক স্থানটো পূৰ্ণ কৰাৰ পিছত বাকী 5 টা অংকৰ যিকোনো এটাৰে দহক স্থানটো 5 ধৰণে পূৰ্ণ কৰিব পাৰি। এতিয়া একক স্থানৰ বাবে 4 টা অংক থাকিব, গতিকে একক স্থানটো 4 ধৰণে পূৰ্ণ কৰিব পাৰি।

$\therefore$ নিৰ্ণেয় সংখ্যাৰ সংখ্যা $= 5 \times 5 \times 4 = 100$

দ্বিতীয় অংশৰ বাবে 5 ৰে বিভাজ্য সংখ্যাবোৰ 0 নাইবা 5 ৰে শেষ হ'ব লাগিব। এতিয়া 0 ৰে শেষ হোৱা তিনি অংকযুক্ত সংখ্যা ${}^5P_2$ ধৰণে পাব পাৰি ($\because$ একক স্থানত 0 থাকিব, গতিকে বাকী দুটা স্থান বাকী 5 টা অংকেৰে ${}^5P_2$ ধৰণে পূৰ্ণ কৰিব পাৰি)। আকৌ 5 ৰে শেষ হোৱা আৰু 0 ৰে আৰম্ভ নোহোৱা তিনি অংকযুক্ত সংখ্যা $4 \times 4 = 16$ ধৰণে পাব পাৰি (যিহেতু একক স্থানত 5 অংকটো বহুওৱা হৈছে আৰু যিহেতু 0 অংকটো শতক স্থানত বহুৱাব নোৱাৰি, গতিকে শতক স্থানটো 1, 2, 3, 4 অংককেইটাৰ যিকোনো এটাৰে 4 ধৰণে পূৰ্ণ কৰিব পাৰি আৰু শতক স্থানত এটা অংক লোৱাৰ পিছত বাকী থকা 4 টা অংকৰ যিকোনো এটাৰে দহক স্থানটো 4 ধৰণে পূৰ্ণ কৰিব পাৰি)।

$\therefore$ 5 ৰে বিভাজ্য সংখ্যাৰ সংখ্যা

$= {}^5P_2 + 16$

$= 20 + 16$

$= 36$

বিকল্প নিয়ম ঃ

যিহেতু সংখ্যাবোৰ 100 আৰু 1000 ৰ মাজত থাকে, গতিকে সংখ্যাবোৰ তিনিটা অংকযুক্ত হ'ব। প্ৰদত্ত 6 টা অংকেৰে তিনিটা ঠাই পূৰ্ণ কৰিব পাৰি ${}^6P_3$ ধৰণে। কিন্তু এইবোৰৰ ভিতৰত শূন্য অংকটোৰে আৰম্ভ হোৱা সংখ্যাও থাকিব, যিবোৰ তিনি অংকবিশিষ্ট সংখ্যাত নপৰে। এতিয়া 0 অংকটোৰে আৰম্ভ হোৱা সংখ্যা হ'ব

${}^5P_2$ (যিহেতু প্ৰথম ঠাই 0 ৰে পূৰ্ণ কৰা হৈছে, গতিকে বাকী দুটা ঠাই বাকী থকা 5 টা অংকেৰে পূৰ্ণ কৰিব পাৰি ${}^5P_2$ ধৰণে)

$\therefore$ নিৰ্ণেয় সংখ্যাৰ সংখ্যা $= {}^6P_3 - {}^5P_2 = 120 - 20 = 100$

আকৌ 5 ৰে বিভাজ্য সংখ্যা 0 নাইবা 5 ৰে শেষ হ'ব লাগিব। এতিয়া 0 ৰে শেষ হোৱা তিনিটা অংকৰ সংখ্যা পোৱা যাব ${}^5P_2$ ধৰণে।

আকৌ 5 ৰে শেষ হোৱা তিনিটা অংক থকা সংখ্যা ${}^5P_2$ ধৰণে পাব পাৰি য'ত 0 অংকটোৰে আৰম্ভ হোৱা সংখ্যাও থাকিব।

এতিয়া 5 ৰে শেষ হোৱা আৰু 0 ৰে আৰম্ভ হোৱা তিনিটা অংক বিশিষ্ট সংখ্যা পোৱা যাব 4 ধৰণে (প্ৰথম ঠাইত 0 আৰু শেষৰ ঠাইত 5 বহুওৱাৰ পিছত মাজৰ ঠাইটো বাকী থকা 4 টা অংকেৰে 4 ধৰণে পূৰ্ণ কৰিব পাৰি)।

$\therefore$ 5 ৰে শেষ হোৱা তিনি অংকবিশিষ্ট সংখ্যাৰ

সংখ্যা $= {}^5P_2 - 4 = 20 - 4 = 16$

$\therefore$ মুঠ 5 ৰে বিভাজ্য তিনিটা অংকবিশিষ্ট সংখ্যা

$= {}^5P_2 + 16 = 20 + 16 = 36$

9. ধৰা হ'ল, এখন অনুজ্ঞা ফলকত প্ৰথমে ইংৰাজী বৰ্ণমালাৰ দুটা ভিন্ন আখৰ থাকে আৰু পিছৰ অংশত 4 টা অংক থাকে (প্ৰথম অংকটো অশূন্য)। এনেকুৱা ভিন্ন ধৰণৰ কিমানখন অনুজ্ঞা ফলক বনাব পাৰি?

সমাধান ঃ

ইংৰাজী বৰ্ণমালাৰ 26 টা আখৰেৰে 2 টা ঠাইৰ দুটা ভিন্ন আখৰেৰে পূৰ্ণ কৰিব পাৰি ${}^{26}P_2$ ধৰণে। এতিয়া 4 টা অংকৰ প্ৰথম অংকটো 0 হ'ব নোৱাৰে। গতিকে প্ৰথম অংকটো 1, 2, 3, ..., 9-ৰ যিকোনো এটা হ'ব পাৰে। অৰ্থাৎ প্ৰথম অংকটো 9 ধৰণে ল'ব পাৰি। এতিয়া যিহেতু অংকৰ পুনৰাবৃত্তি হ'ব পাৰে, গতিকে দ্বিতীয়, তৃতীয় আৰু চতুৰ্থ অংকৰ প্ৰতিটোৰে 0, 1, 2, 3, ..., 9 এই 10 টা অংকৰ যিকোনো এটা হ'ব পাৰে। গতিকে দ্বিতীয়, তৃতীয় আৰু চতুৰ্থ অংক তিনিটাৰ প্ৰতিটোৰে 10 ধৰণে ল'ব পাৰি।

$\therefore$ নিৰ্ণেয় ফলকৰ সংখ্যা

$$= {}^{26}P_2 \times 9 \times 10 \times 10 \times 10$$

$$= \frac{\underline{|26}}{\underline{|24}} \times 9000$$

$$= 26 \times 25 \times 9000$$

$$= 5850000$$

10. 'COMMERCE' শব্দটোৰ আখৰবোৰ কিমান ধৰণে সজাব পাৰি নিৰ্ণয় কৰা যাতে স্বৰবৰ্ণকেইটা কেতিয়াও পৃথক নহয়।

সমাধান ঃ স্বৰবৰ্ণ তিনিটা O, E, E ক একেলগে এটা আখৰ হিচাপে ধৰা হওক। তেতিয়া আমি মুঠ আখৰ পাম 6 টা, ইয়াৰে C দুটা আৰু M দুটা।

$\therefore$ এই 6 টা আখৰক সজোৱাৰ প্ৰকাৰ $= \dfrac{\lfloor 6}{\lfloor 2 \lfloor 2}$

কিন্তু স্বৰবৰ্ণ তিনিটা O, E, E (যাৰ দুটা একে)ক সিহঁতৰ মাজত সজাব পাৰি $\dfrac{\lfloor 3}{\lfloor 2}$ ধৰণে।

$\therefore$ মুঠ সজোৱাৰ প্ৰকাৰ $= \dfrac{\lfloor 6}{\lfloor 2 \lfloor 2} \times \dfrac{\lfloor 3}{\lfloor 2} = 540$

11. এখনৰ ওপৰত এখনকৈ 10 খন উত্তৰ বহী কিমান ধৰণে সজাব পাৰি যাতে আটাইতকৈ বেছি নম্বৰ পোৱা বহীখন আৰু আটাইতকৈ কম নম্বৰ পোৱা বহীখন কেতিয়াও একেলগে নাথাকে?

সমাধান ঃ

প্ৰথমে আমি আটাইতকৈ বেছি নম্বৰ পোৱা বহীখন (ধৰা H) আৰু আটাইতকৈ কম নম্বৰ পোৱা বহীখন (ধৰা L) একেলগে থকা বিন্যাসৰ সংখ্যা নিৰূপণ কৰিম।

এই বহী দুখনক (H আৰু L) এখন বুলি ধৰিলে মুঠ বহী হ'ব 9 খন আৰু এইবোৰক ${}^9P_9$ ধৰণে সজাব পাৰি। আকৌ H আৰু L বহী দুখনক ${}^2P_2$ ধৰণে সজাব পাৰি।

$\therefore$ H আৰু L বহী দুখন একেলগে থকাকৈ মুঠ সজোৱাৰ প্ৰকাৰ

$= {}^9P_2 \times {}^2P_2$

$= \lfloor 9 \times \lfloor 2$

$= 2 \times \lfloor 9$

আকৌ কোনো বাধা আৰোপ নকৰাকৈ 10 খন বহীৰ আটাইকেইখনকে সজাব পাৰি ${}^{10}P_{10}$ ধৰণে।

গতিকে নিৰ্দিষ্ট বহী দুখন (H আৰু L) একেলগে নথকাকৈ মুঠ সজোৱাৰ প্ৰকাৰ

$= {}^{10}P_{10} - 2 \times \lfloor 9$

$= \lfloor 10 - 2 \times \lfloor 9$

$= 10 \times \lfloor 9 - 2 \times \lfloor 9$

$= 8 \times \lfloor 9$

$= 2903040$

12. 2, 3, 5 এই অংককেইটাৰে কিমানটা সংখ্যা পাব পাৰি যদিহে সংখ্যাবোৰ 5 টাতকৈ বেছি অংকবিশিষ্ট নহয়?

সমাধান ঃ

সংখ্যাবোৰ 1 টা বা 2 টা বা 3 টা বা 4 টা বা 5 টা অংকবিশিষ্ট সংখ্যা হ'ব পাৰে।

এতিয়া এটা অংকবিশিষ্ট সংখ্যা হ'ব পাৰে 3টা (আমি 2, 3 আৰু 5 ৰ যিকোনো এটা ল'ব পাৰোঁ)।

দুটা অংকবিশিষ্ট সংখ্যাৰ ক্ষেত্ৰত আমি তিনিটা অংকৰে 2 টা ঠাই পূৰাব লাগে য'ত পুনৰাবৃত্তি হ'ব পাৰে। গতিকে 2 টা ঠাইৰ প্ৰতিটো ঠাই 3 ধৰণে পূৰ্ণ কৰিব পাৰি।

$\therefore$ 2 টা অংকবিশিষ্ট সংখ্যাৰ সংখ্যা $= 3 \times 3 = 3^2$

একেদৰে তিনিটা অংকবিশিষ্ট সংখ্যাৰ সংখ্যা $= 3 \times 3 \times 3 = 3^3$

4 টা অংকবিশিষ্ট সংখ্যাৰ সংখ্যা $= 3^4$

5 টা অংকবিশিষ্ট সংখ্যাৰ সংখ্যা $= 3^5$

গতিকে মুঠ সংখ্যাৰ সংখ্যা $= 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 = 363$

অনুশীলনী

1. বিন্যাস বুলিলে তুমি কি বুজা?
2. মান নিৰ্ণয় কৰা ঃ

   (i) ${}^5P_3$ (ii) ${}^6P_4$ (iii) ${}^4P_2$ (iv) ${}^5P_0$ (v) ${}^6P_6$

   উত্তৰ ঃ (i) 60 (ii) 360 (iii) 12 (iv) 1 (v) 720
3. প্ৰমাণ কৰা যে—

   (i) ${}^nP_{r-1} = {}^{n-1}P_{r-1} + (r-1)\ {}^{n-1}P_{r-2}$

   (ii) ${}^{n-1}P_r = (n-r).\ {}^{n-1}P_{r-1}$

   (iii) ${}^nP_r = (n-r+1).\ {}^nP_{r-1}$

   (iv) ${}^{n+1}P_{r+1} = (n+1).\ {}^nP_r$
4. n ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা, যদি

   (i) ${}^nP_3 = 120$

   (ii) ${}^{n+1}P_4 = 4\times{}^nP_3$

   (iii) ${}^nP_5 = 20 \times {}^nP_3$

   (iv) ${}^nP_5 = 10 \times {}^{n-1}P_4$

   উত্তৰ ঃ (i) 6 (ii) 3 (iii) 8 (iv) 10

5. r ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা যদি

(i) ${}^{11}P_r = 110$

(ii) ${}^{7}P_r = 840$

(iii) ${}^{50}P_{r+2} : {}^{50}P_{r-1} = 720 : 1$

উত্তৰ ঃ (i) 2 (ii) 4 (iii) 41

6. n ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা যদি

(i) ${}^{n}P_3 : {}^{n+2}P_3 = 5 : 12$

উত্তৰ ঃ 7

(ii) ${}^{n+2}P_3 : {}^{n+1}P_2 = 5 : 1$

উত্তৰ ঃ 3

(iii) ${}^{2n+1}P_{n-1} : {}^{2n-1}P_n = 3 : 5$

উত্তৰ ঃ 4

7. যদি ${}^{m+n}P_2 = 56$, ${}^{m-n}P_2 = 12$, তেন্তে m আৰু n ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

উত্তৰ ঃ $m = 6$, $n = 2$

8. 3 জন বন্ধুৱে 5 খন বছা বছা কলেজত নাম ভৰ্তি কৰিব বিচাৰে। যদি কোনো দুজন বন্ধুৱে একেখন কলেজত পঢ়িব নিবিচাৰে, তেন্তে তেওঁলোকে কিমান ধৰণে নামভৰ্তি কৰিব পাৰে?

উত্তৰ ঃ 60

9. দুজন যাত্ৰী এখন বাছৰ ভিতৰত সোমাই দেখিলে যে তাত 5 খন আসন খালী হৈ আছে। তেওঁলোকে কিমান ধৰণে আসন গ্ৰহণ কৰিব পাৰে?

উত্তৰ ঃ 20

10. এজন মানুহে তেওঁৰ 4 টা ভোট 5 জন প্ৰাৰ্থীক কিমান ধৰণে দিব পাৰে যদিহে 4 টা ভোটৰ আটাইকেইটা একেজন প্ৰাৰ্থীয়েও পাব পাৰে?

উত্তৰ ঃ 625

11. যদি কোনো অংকই পুনৰাবৃত্তি নহয়, তেনেহ'লে 0, 2, 3, 5, 6, 8 অংককেইটাৰে কিমানটা তিনিটা অংকবিশিষ্ট সংখ্যা পাব পাৰি?

উত্তৰ ঃ 100

12. 2 আৰু 3 এই অংক দুটাৰে 1000 তকৈ সৰু কিমানটা সংখ্যা পাব পাৰি?

উত্তৰ ঃ 14

13. 0, 2, 3 অংককেইটাৰে 1000 তকৈ সৰু কিমান সংখ্যা গঠন কৰিব পাৰি?

উত্তৰ ঃ 81

14. সংখ্যাবোৰত 4 টাতকৈ বেছি অংক নাথাকে, এনেকুৰা সংখ্যা 3 আৰু 4 অংক দুটাৰে কিমানটা পাব পাৰি?

উত্তৰ ঃ 30

15. যদি অংকবোৰ পুনৰাবৃত্তি নহয়, তেনেহ'লে 0 ৰ পৰা 9 লৈকে অংককেইটাৰে 4000 আৰু 5000 ৰ মাজত থকা কিমানটা সংখ্যা পাব পাৰি?

উত্তৰ ঃ 504

16. যদি অংকবোৰ পুনৰাবৃত্তি নহয়, তেনেহ'লে 0 ৰ পৰা 9 লৈকে অংককেইটাৰে 3000 আৰু 4000 ৰ ভিতৰত থকা কিমানটা যুগ্ম সংখ্যা পাব পাৰি?

উত্তৰ ঃ 280

17. 1, 2, 3, 0, 2 অংককেইটাৰ প্ৰতিটোকে এবাৰকৈ ব্যৱহাৰ কৰি 20000 তকৈ ডাঙৰ কিমানটা সংখ্যা লিখিব পাৰি?

উত্তৰ ঃ 36

18. যদি প্ৰতিটো অংক মাত্ৰ এবাৰহে থাকিব পাৰে, তেন্তে 0 ৰ পৰা 5 লৈ অংককেইটাৰে 6 টা অংকযুক্ত কিমানটা অযুক্ত সংখ্যা পাব পাৰি?

উত্তৰ ঃ 288

19. যদি অংকবোৰ পুনৰাবৃত্তি হ'ব পাৰে, তেন্তে 0, 1, 2, 3, 4 এই অংককেইটাৰে 1000 আৰু 4000 ৰ মাজত থকা কিমানটা সংখ্যা পাব পাৰি?

উত্তৰ ঃ 375

20. 4 খন বিভিন্ন কিতাপ 5 জন ল'ৰাক কিমান প্ৰকাৰে দিব পাৰি যদি

(i) কোনো এজন ল'ৰাই এখনতকৈ বেছি কিতাপ পাব নোৱাৰে?

(ii) এজন ল'ৰাই এখনতকৈ বেছি কিতাপো পাব পাৰে?

উত্তৰ ঃ (i) 120, (ii) 625

21. 8 খন পৰীক্ষাৰ বহী কিমান ধৰণে সজাব পাৰি— যাতে আটাইতকৈ ভাল আৰু আটাইতকৈ বেয়া বহী দুখন সদায় একেলগে থাকে?

উত্তৰ ঃ 10080

22. 5 জন ল'ৰা আৰু 3 জনী ছোৱালীক কিমান প্ৰকাৰে সজাব পাৰি যাতে কোনো দুজনী ছোৱালীয়ে একেলগে নবহে?

উত্তৰ ঃ 14400

23. এখন ঘূৰণীয়া মেজৰ চাৰিওফালে 9 জন ভদ্ৰলোক আৰু 9 জনী ভদ্ৰমহিলা কিমান প্ৰকাৰে বহিব পাৰে যাতে কোনো দুজন ভদ্ৰলোকে ওচৰা-উচৰিকৈ নবহে?

উত্তৰ ঃ $\lfloor\underline{8} \times \lfloor\underline{9}$

24. 15 জন ডাক্তৰ আৰু 12 জন ইঞ্জিনীয়াৰে এটা শাৰীত কিমান প্ৰকাৰে বহিব পাৰে যাতে কোনো দুজন ইঞ্জিনীয়াৰে ক্ৰমিক আসন দখল নকৰে?

উত্তৰ ঃ $\frac{\lfloor 15 \times \lfloor 16}{\lfloor 4}$

25. আলমাৰিৰ এটা খাপত 16 খন বিভিন্ন কিতাপ কিমান প্ৰকাৰে সজাব পাৰি নিৰ্ণয় কৰা যাতে দুখন নিৰ্দিষ্ট কিতাপ একেলগে নাথাকে?

উত্তৰ ঃ $14 \times \lfloor 15$

26. VOLUME শব্দটোৰ আখৰবোৰ কিমান প্ৰকাৰে সজাব পাৰি যাতে L আৰু M আখৰ দুটা সদায় যুগ্ম স্থানত থাকে।

উত্তৰ ঃ 144

27. ENGLISH শব্দটোৰ আখৰবোৰ কিমান প্ৰকাৰে সজাব পাৰি যাতে স্বৰবৰ্ণকেইটা মাত্ৰ অযুগ্ম স্থানতহে থাকে?

উত্তৰ ঃ 1440

28. 'EXAMINATION' শব্দটোৰ আখৰবোৰ কিমান ধৰণে সজাব পাৰি?

উত্তৰ ঃ 4989600

29 'EXAMINATION' শব্দটোৰ আখৰবোৰ আটাইকেইটাকে লৈ কিমান ধৰণে সজাব পাৰি যাতে EXM এই আখৰকেইটা প্ৰদত্ত ক্ৰমত সদায় একেলগে থাকে?

উত্তৰ ঃ 45360

30 'MATHEMATICS' শব্দটোৰ আখৰবোৰ কিমান প্ৰকাৰে সজাব পাৰি যাতে স্বৰবৰ্ণকেইটা কেতিয়াও পৃথক নহয়?

উত্তৰ ঃ 120960

31. BANANA শব্দটোৰ আখৰবোৰ কিমান প্ৰকাৰে সজাব পাৰি যাতে দুটা কেতিয়াও ওচৰা-উচৰিকৈ নাথাকে?

উত্তৰ ঃ 40

32. Accountancy ৰ 3 খন ভিন্ন কিতাপ, Management ৰ 3 খন, Mathematicsৰ 2 খন, আৰু Statisticsৰ 2 খন ভিন্ন কিতাপ আছে। এই কিতাপবোৰ এটা থাকত কিমান প্ৰকাৰে সজাব পাৰি যাতে একে বিষয়ৰ কিতাপসমূহ পৃথক নহয়?

উত্তৰ ঃ 3456

দল বা জোঁট (Combinations)

এটা সসীম সংহতিৰ মৌলবোৰৰ পৰা কেইটামান বা আটাইকেইটা মৌলকে লৈ পোৱা ভিন্ন গোট বা বাছনি বা থূপবোৰৰ প্ৰতিটোকে একোট T 'দল বা জোঁট' (Combination) বুলি কোৱা হয়।

ধৰা হ'ল, আমাৰ হাতত তিনিটা বস্তু আছে— *A, B, C*। তেনেহ'লে এই তিনিটা বস্তুৰ পৰা এবাৰত এটাকৈ, দুটাকৈ বা তিনিটাকৈ লৈ পোৱা দল বা জোঁটবোৰ তলত দেখুওৱা হ'ল—

এবাৰত এটাকৈ	**এবাৰত দুটাকৈ**	**এবাৰত তিনিটাকৈ**
A	AB	ABC
B	AC	
C	BC	

এইটো মন কৰিবলগীয়া যে দল বা জোঁটৰ ক্ষেত্ৰত বস্তুবোৰ ক্ৰমৰ গুৰুত্ব নাথাকে। উদাহৰণস্বৰূপে *AB* আৰু *BA* দুটা বেলেগ বিন্যাস কিন্তু দলৰ ক্ষেত্ৰত এই দুয়োটা একে।

সাংকেতিক চিন (Notation) ঃ

n টা ভিন্ন বস্তুৰ পৰা এবাৰত r $(r \leq n)$ টাকৈ লৈ পোৱা মুঠ দল বা জোঁটৰ সংখ্যাক ^nC_r বা $_nC_r$ বা $C.(n, r)$ সংকেতেৰে বুজোৱা হয়।

গতিকে ওপৰৰ উদাহৰণৰ পৰা পাইছোঁ যে $^3C_1 = 3$, $^3C_2 = 3$ আৰু $^3C_3 = 1$

এতিয়া আমি আন এটা উদাহৰণ ল'ম য'ত *A, B, C, D* এই 4 টা বস্তু আছে। এই চাৰিটা বস্তুৰ পৰা এবাৰত এটাকৈ, দুটাকৈ, তিনিটাকৈ আৰু চাৰিটাকৈ লৈ পোৱা দলবোৰ তলত দেখুওৱাৰ দৰে পাম—

এবাৰত এটাকৈ	**এবাৰত দুটাকৈ**	**এবাৰত তিনিটাকৈ**	**এবাৰত চাৰিটাকৈ**
A	AB	ABC	ABCD
B	AC	ABD	
C	AD	ACD	
D	BC	BCD	
	BD		
	CD		

এইদৰে আমি পালোঁ

$^4C_1 = 4$, $^4C_2 = 6$, $^4C_3 = 4$, $^4C_4 = 1$

উপপাদ্য ঃ n টা ভিন্ন বস্তুৰ পৰা এবাৰত r $(r \leq n)$ টাকৈ লৈ পোৱা মুঠ দলৰ সংখ্যা হ'ল

$$\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}} \text{ অৰ্থাৎ } {}^nC_r = \frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}$$

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল, n টা ভিন্ন বস্তুৰ পৰা এবাৰত r টাকৈ লৈ পোৱা মুঠ জোঁটৰ সংখ্যা x অৰ্থাৎ ${}^nC_r = x$

এতিয়া এই x টা জোঁটৰ প্ৰতিটোতে r টা বস্তু আছে। এই r টা বস্তু সিহঁতৰ মাজত ${}^rP_r = \underline{|r}$ ধৰণে সজাব পাৰি। এইদৰে x টা জোঁটৰ প্ৰতিটোৰ পৰা $\underline{|r}$ টা বিন্যাস পোৱা যাব। গতিকে n টা ভিন্ন বস্তুৰ পৰা এবাৰত r টাকৈ লৈ পোৱা মুঠ বিন্যাস হ'ব $x\underline{|r}$

$$\therefore {}^nP_r = x\underline{|r}$$

$$\Rightarrow \frac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}} = x\underline{|r}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}$$

এইদৰে $${}^nC_r = \frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}$$

অনুসিদ্ধান্ত 1 ঃ

$${}^nC_r = \frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}$$ ত $r = 0$ বহুৱাই পাওঁ

$${}^nC_0 = \frac{\underline{|n}}{\underline{|0}\,\underline{|n-0}} = \frac{\underline{|n}}{1.\underline{|n}} = 1 \quad (\underline{|0} = 1)$$

অনুসিদ্ধান্ত 2 ঃ

$${}^nC_r = \frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}$$ ত $r = n$ বহুৱাই পাওঁ

$${}^nC_n = \frac{\underline{|n}}{\underline{|n}\,\underline{|n-n}} = \frac{1}{\underline{|0}} = 1$$

গতিকে $$\boxed{{}^nC_n = {}^nC_0 = 1}$$

অনুসিদ্ধান্ত 3 ঃ

$${}^nC_r = \frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}$$ ত r ৰ ঠাইত $n - r$

বহুৰাই পাওঁ

$${}^nC_{n-r} = \frac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}\ \underline{|n-(n-r)}}$$

$$= \frac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}\ \underline{|r}}$$

$$= {}^nC_r$$

গতিকে $\boxed{{}^nC_{n-r} = {}^nC_r}$

উদাহৰণস্বৰূপে, ${}^7C_4 = {}^7C_3,\ {}^7C_5 = {}^7C_2$ ইত্যাদি।

আমি পাম

$\boxed{{}^nC_r = {}^nC_s \Rightarrow r = s \text{ নতুবা } r + s = n}$

এটা প্ৰয়োজনীয় ফল ঃ

$${}^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$$

প্ৰমাণ ঃ

$${}^nC_r = {}^nC_{r-1} = \frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\ \underline{|n-r}} + \frac{\underline{|n}}{\underline{|r-1}\ \underline{|n-(r-1)}}$$

$$= \frac{\underline{|n}}{r\ \underline{|r-1}\ \underline{|n-r}} + \frac{\underline{|n}}{\underline{|r-1}\ \underline{|n-r+1}}$$

$$= \frac{\underline{|n}}{r\underline{|r-1}\ \underline{|n-r}} + \frac{\underline{|n}}{\underline{|r-1}\ (n-r+1)\ \underline{|n-r}}$$

$$= \frac{\underline{|n}}{\underline{|r-1}\ \underline{|n-r}}\left[\frac{1}{r} + \frac{1}{n-r+1}\right]$$

$$= \frac{\underline{|n}}{\underline{|r-1}\ \underline{|n-r}} \cdot \frac{n-r+1+r}{r(n-r+1)}$$

$$= \frac{\underline{|n}}{\underline{|r-1}\ \underline{|n-r}} \cdot \frac{n+1}{r(n-r+1)}$$

$$= \frac{\underline{|n+1}}{\underline{|r}\ \underline{|n+1-r}}$$

$$= {}^{n+1}C_r$$

উদাহৰণস্বৰূপে,

$$^{8}C_{5} + {}^{8}C_{4} = {}^{9}C_{5}$$

$$^{9}C_{6} + {}^{9}C_{5} = {}^{10}C_{6}$$

ব্যাখ্যাসূচক উদাহৰণ—

1. মান নিৰ্ণয় কৰা ঃ

(i) $^{n}C_{1}$ (ii) $^{n}C_{2}$ (iii) $^{n}C_{3}$

সমাধান ঃ

(i) $^{n}C_{1} = \dfrac{\lfloor n}{\lfloor 1 \lfloor n-1} = \dfrac{n\lfloor n-1}{\lfloor n-1} = n$ $\qquad (\because \lfloor 1 = 1)$

(ii) $^{n}C_{2} = \dfrac{\lfloor n}{\lfloor 2 \lfloor n-2} = \dfrac{n(n-1)\lfloor n-2}{\lfloor 2 \lfloor n-2} = \dfrac{n(n-1)}{\lfloor 2}$

(iii) $^{n}C_{3} = \dfrac{\lfloor \mathrm{n}}{\lfloor 3 \lfloor \mathrm{n}-3} = \dfrac{\mathrm{n(n-1)\ (n-2)}\lfloor \mathrm{n}-3}{\lfloor 3 \lfloor \mathrm{n}-3} = \dfrac{\mathrm{n(n-1)(n-2)}}{\lfloor 3}$

এইদৰে আমি পাওঁ

$$^{n}C_{1} = n,\ {}^{n}C_{2} = \frac{n(n-1)}{\lfloor 2},\ {}^{n}C_{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}$$

একেদৰে আমি পাম

$$^{n}C_{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{\lfloor 4},\ {}^{n}C_{5} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{\lfloor 5}$$

ইত্যাদি।

2. মান নিৰ্ণয় কৰা ঃ

(i) $^{9}C_{4}$ (ii) $^{8}C_{5}$ (iii) $^{7}C_{0}$ (iv) $^{25}C_{20}$

সমাধান ঃ

(i) $^{9}C_{4} = \dfrac{\lfloor 9}{\lfloor 4 \lfloor 5} = \dfrac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 126$

(ii) $^{8}C_{5} = \dfrac{\lfloor 8}{\lfloor 5 \lfloor 3} = \dfrac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$

(iii) $^{7}C_{0} = 1 \qquad (\because {}^{n}C_{0} = 1)$

(iv) $^{25}C_{20} = \frac{\lfloor 25}{\lfloor 20 \lfloor 5} = \frac{25 \times 24 \times 23 \times 22 \times 21}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 53130$

3. n ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা যদি

(i) $^{n}C_{n-2} = 6$ (ii) $^{n}C_{7} = {}^{n}C_{5}$

সমাধান ঃ

(i) $^{n}C_{n-2} = 6$

$$\Rightarrow \frac{\lfloor n}{\lfloor n-2 \ \lfloor n-(n-2)} = 6$$

$$\Rightarrow \frac{n(n-1)}{\lfloor 2} = 6$$

$$\Rightarrow n(n-1) = 12 = 4 \times 3$$

$\Rightarrow n = 4$ ($\because n$ এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা)

(ii) $^{n}C_{7} = {}^{n}C_{5}$

$\Rightarrow n = 7 + 5 = 12$ ($^{n}C_{r} = {}^{n}C_{s} \Rightarrow r = s$ বা $r + s = n$)

4. যদি $^{24}C_{r+3} = {}^{24}C_{2r}$, r ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ

$^{24}C_{r+3} = {}^{24}C_{2r}$

$\Rightarrow r + 3 = 2r$ বা $r + 3 + 2r = 24$

$\Rightarrow r = 3$ বা $r = 7$

$\therefore r$ ৰ মান 3 নাইবা 7

5. যদি $^{n}P_{r} = 72$ আৰু $^{n}C_{r} = 36$, n আৰু r উলিওৱা

সমাধান ঃ

আমি পাওঁ, $^{n}P_{r} = \lfloor r \times {}^{n}C_{r}$

$\Rightarrow 72 = \lfloor r \times 36$

$\Rightarrow \lfloor r = 2 = \lfloor 2$

$\Rightarrow r = 2$

আকৌ $^{n}P_{r} = 72$

$\Rightarrow {}^{n}P_{2} = 72$

$$\Rightarrow \frac{\lfloor n}{\lfloor n-2} = 72$$

$\Rightarrow n(n-1) = 72 = 9 \times 8$ [$\because n, n-1$ দুটা ক্ৰমিক ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা]

$\Rightarrow n = 9$

গতিকে $n = 9$ আৰু $r = 2$

6. যদি ${}^nC_4 : {}^nC_7 = 7 : 2$; nৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ $\dfrac{{}^nC_4}{{}^nC_7} = \dfrac{7}{2}$

$$\Rightarrow \frac{\dfrac{\lfloor n}{\lfloor 4 \lfloor n-4}}{\dfrac{\lfloor n}{\lfloor 7 \lfloor n-7}} = \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\lfloor 7 \lfloor n-7}{\lfloor 4 \lfloor n-4} = \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{7 \times 6 \times 5}{(n-4)(n-5)(n-6)} = \frac{7}{2}$$

$\Rightarrow (n-4)(n-5)(n-6) = 60 = 5 \times 4 \times 3$

$\Rightarrow n - 4 = 5$ [$x - 4$, $n - 5$, $n - 6$ তিনিটা ক্ৰমিক ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা]

$\Rightarrow n = 9$

7. যদি ${}^{n-1}C_3 : {}^nC_5 = 5 : 8$, তেন্তে n নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ $\dfrac{{}^{n-1}C_3}{{}^nC_5} = \dfrac{5}{8}$

$$\Rightarrow \frac{\dfrac{\lfloor n-1}{\lfloor 3 \lfloor n-1-3}}{\dfrac{\lfloor n}{\lfloor 5 \lfloor n-5}} = \frac{5}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{\lfloor 5 \lfloor n-5 \lfloor n-1}{\lfloor 3 \lfloor n-4 \lfloor n} = \frac{5}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{5 \times 4}{(n-4)n} = \frac{5}{8}$$

$\Rightarrow n(n-4) = 32$

$\Rightarrow n^2 - 4n - 32 = 0$

$\Rightarrow (n-8)(n+4) = 0$

$\Rightarrow n = 8$ বা $n = -4$

কিন্তু n এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা

$\therefore n = 8$

8. প্ৰমাণ কৰা যে

$^{n}C_{r} + {}^{n-1}C_{r-1} + {}^{n-1}C_{r-2} = {}^{n+1}C_{r}$

সমাধান ঃ

$$\begin{aligned} \text{L.H.S.} &= {}^{n}C_{r} + ({}^{n-1}C_{r-1} + {}^{n-1}C_{r-2}) \\ &= {}^{n}C_{r} + {}^{n}C_{r-1} \quad [\because {}^{n}C_{r} + {}^{n}C_{r-1} = {}^{n+1}C_{r}] \\ &= {}^{n+1}C_{r} \\ &= \text{R.H.S.} \end{aligned}$$

9. এজন ল'ৰাই $^{n}P_{r}$ ৰ ঠাইত $^{n}C_{r}$ লিখিলে। শুদ্ধ উত্তৰ পাবলৈ তেওঁ পোৱা ফলটোক কি সংখ্যাৰে পূৰণ কৰিব লাগিব?

সমাধান ঃ যিহেতু $^{n}P_{r} = {}^{n}C_{r} \times \underline{|r}$, গতিকে শুদ্ধ উত্তৰ পাবলৈ তেওঁ পোৱা ফলটোক $\underline{|r}$ ৰে পূৰণ কৰিব লাগিব।

10. পৰীক্ষাৰ প্ৰশ্নপত্ৰ এখনত 10 টা প্ৰশ্ন আছে আৰু এজন পৰীক্ষাৰ্থীয়ে যিকোনো 6 টা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰিব লাগে। এজন পৰীক্ষাৰ্থীয়ে 6 টা প্ৰশ্ন কিমান ধৰণে বাছনি কৰিব পাৰে?

সমাধান ঃ প্ৰশ্ন বাছনিৰ মুঠ প্ৰকাৰ 10 টা ভিন্ন বস্তুৰ পৰা প্ৰতিবাৰত 6 টাকৈ লৈ পোৱা মুঠ জোঁটৰ সমান

$\therefore$ নিৰ্ণেয় বাছনিৰ সংখ্যা = $^{10}C_{6} = \dfrac{\underline{|10}}{\underline{|6}\,\underline{|4}} = \dfrac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1} = 210$

11. এখন প্ৰশ্নপত্ৰত 10 টা প্ৰশ্ন আছে আৰু এজন পৰীক্ষাৰ্থীয়ে 6 টা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰিব লাগে। যদি 1 নং প্ৰশ্নটো বাধ্যতামূলক হয়, তেন্তে পৰীক্ষাৰ্থী এজনে কিমান ধৰণে প্ৰশ্ন বাছনি কৰিব পাৰে?

সমাধান ঃ যিহেতু 1 নং প্ৰশ্নটো বাধ্যতামূলক, গতিকে তেওঁ বাকী 9 টা প্ৰশ্নৰ পৰা 5 টা বাছনি কৰিব লাগে।

$\therefore$ নিৰ্ণেয় বাছনিৰ সংখ্যা = 9 টা ভিন্ন বস্তুৰ পৰা 5 টাকৈ লৈ পোৱা মুঠ জোঁটৰ সংখ্যা

$= {}^{9}C_{5}$

$= \dfrac{\underline{|9}}{\underline{|5}\,\underline{|4}}$

$$= \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$= 126$$

12. এখন স্কুলত 5 জন শিক্ষক আৰু 20 জন ছাত্ৰৰ মাজৰ পৰা 3 জন শিক্ষক আৰু 7 জন ছাত্ৰ সন্নিৱিষ্ট এখন কমিটী গঠন কৰিব লাগে। কমিটীখন কিমান প্ৰকাৰে গঠন কৰিব পাৰি যদি

(i) যিকোনো শিক্ষক আৰু যিকোনো ছাত্ৰকে সন্নিৱিষ্ট কৰিব পাৰি?

(ii) এজন বিশেষ ছাত্ৰক কমিটীত ৰাখিব নোৱাৰি?

(iii) এজন বিশেষ শিক্ষকক কমিটীত ৰাখিবই লাগিব?

সমাধান ঃ (i) যিহেতু শিক্ষক আৰু ছাত্ৰ বাছনিত কোনো ধৰণৰ বাধা নাই, গতিকে 5 জন শিক্ষকৰ পৰা 3 জন আমি $^5C_3$ ধৰণে আৰু 20 জন ছাত্ৰৰ পৰা 7 জন আমি $^{20}C_7$ ধৰণে বাছনি কৰিব পাৰোঁ।

$\therefore$ নিৰ্ণেয় বাছনিৰ সংখ্যা $= {}^5C_3 \times {}^{20}C_7$

$$= \frac{\lfloor 5}{\lfloor 3 \, \lfloor 2} \times \frac{\lfloor 20}{\lfloor 7 \, \lfloor 13}$$

$$= \frac{5 \times 4}{2} \times \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16 \times 15 \times 14}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}$$

$$= 775200$$

(ii) যিহেতু এজন নিৰ্দিষ্ট ছাত্ৰ কমিটীত থাকিব নোৱাৰে, গতিকে আমি বাকী 19 জন ছাত্ৰৰ পৰা 7 জন বাছনি কৰিব লাগিব আৰু এইটো $^{19}C_7$ ধৰণে কৰিব পাৰি।

$\therefore$ নিৰ্ণেয় বাছনিৰ সংখ্যা $= {}^5C_3 \times {}^{19}C_7$

$$= \frac{\lfloor 5}{\lfloor 3 \, \lfloor 2} \times \frac{\lfloor 19}{\lfloor 7 \, \lfloor 12}$$

$$= \frac{5 \times 4}{2} \times \frac{19 \times 18 \times 17 \times 16 \times 15 \times 14 \times 13}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}$$

$$= 503880$$

(iii) যিহেতু এজন বিশেষ শিক্ষক কমিটীত থাকিবই লাগিব, গতিকে বাকী 4 জন শিক্ষকৰ পৰা আমি 2 জন বাছনি কৰিব লাগিব আৰু এইটো $^4C_2$ ধৰণে কৰিব পাৰি।

$\therefore$ নিৰ্ণেয় বাছনিৰ সংখ্যা $= {}^4C_2 \times {}^{20}C_7$

$$= \frac{\lfloor 4}{\lfloor 2 \, \lfloor 2} \times \frac{\lfloor 20}{\lfloor 7 \, \lfloor 13}$$

$$= 465120$$

13. এখন সমতলত 16 টা বিন্দু আছে, যাৰ কোনো তিনিটাই একে সৰলৰেখাত নাই। এই বিন্দুবোৰ সংযোগ কৰি কিমান সৰলৰেখা পাব পাৰি নিৰ্ণয় কৰা। এই বিন্দুবোৰ সংযোগ কৰি কিমানটা ত্ৰিভুজ পাব পাৰি?

সমাধান ঃ যিহেতু কোনো তিনিটা বিন্দুৱে একে সৰলৰেখাত নাই, গতিকে 16 টা বিন্দুৰ যিকোনো দুটা সংযোগ কৰি এডাল সৰলৰেখা পাব পাৰি।

$\therefore$ নিৰ্ণেয় সৰলৰেখাৰ সংখ্যা $= {}^{16}C_2 = \dfrac{16\times 15}{2} = 120$

আকৌ যিকোনো তিনিটা বিন্দু সংযোগ কৰি আমি এটা ত্ৰিভুজ পাব পাৰোঁ।

$\therefore$ নিৰ্ণেয় ত্ৰিভুজৰ সংখ্যা $= {}^{16}C_3$

$$= \frac{16\times 15\times 14}{3\times 2\times 1}$$

$$= 560$$

14. এখন সমতলত 20 টা বিন্দু আছে যাৰ 5 টা একৰেখীয়। এই বিন্দুবোৰ সংযোগ কৰি কিমান

(i) ভিন্ন সৰলৰেখা (ii) ভিন্ন ত্ৰিভুজ পাব পাৰি?

সমাধান ঃ যদি 20 টা বিন্দুৰ কোনো তিনিটাই একৰেখীয় নহয়, তেন্তে ইয়াৰ যিকোনো দুটা সংযোগ কৰি এডাল সৰলৰেখা পাব পাৰি অৰ্থাৎ ${}^{20}C_2$ ডাল সৰলৰেখা পাব পাৰি। কিন্তু 20 টা বিন্দুৰ 5 টা একৰেখীয়। সেয়েহে এই 5 টা বিন্দুৰ পৰা পাবলগীয়া ${}^{5}C_2$ ডাল সৰলৰেখাৰ সলনি মাত্ৰ এডাল সৰলৰেখাহে পোৱা যাব।

$\therefore$ নিৰ্ণেয় সৰলৰেখাৰ সংখ্যা $= {}^{20}C_2 - {}^{5}C_2 + 1$

$$= \frac{20\times 19}{2} - \frac{5\times 4}{2} + 1$$

$$= 190 - 10 + 1$$

$$= 181$$

(ii) একে ৰেখাত নথকা যিকোনো তিনিটা বিন্দু সংযোগ কৰি এটা ত্ৰিভুজ পাব পাৰি। সেয়েহে যদি 20 টা বিন্দুৰ কোনো তিনিটাই একৰেখীয় নহ'লহেঁতেন, তেনেহ'লে আমি ${}^{20}C_3$ টা ত্ৰিভুজ পালোহেঁতেন। কিন্তু 20 টা বিন্দুৰ 5 টা একৰেখীয়। এই 5 টা বিন্দুৰ পৰা আমি এটাও ত্ৰিভুজ নাপাওঁ। গতিকে আমি ত্ৰিভুজ হেৰুৱালোঁ ${}^{5}C_3$ টা (যদি এই 5 টা বিন্দুৰ কোনো তিনিটাই একৰেখীয় নহ'লহেঁতেন তেন্তে আমি এই 5 টা বিন্দুৰ পৰা ${}^{5}C_3$ টা ত্ৰিভুজ পালোহেঁতেন)।

$\therefore$ নিৰ্ণেয় ত্ৰিভুজৰ সংখ্যা $= {}^{20}C_3 - {}^{5}C_3$

$$= \frac{20\times 19\times 18}{3\times 2\times 1} - \frac{5\times 4\times 3}{3\times 2\times 1}$$

$$= 1140 - 10$$

$$= 1130$$

15. এখন সমতলত থকা 20 টা বিন্দুৰ এটা হ'ল A. যদি এই বিন্দুবোৰৰ কোনো তিনিটাই একৰেখীয় নহয়, তেন্তে A-ক এটা শীৰ্ষবিন্দু হিচাপে লৈ পোৱা মুঠ ত্ৰিভুজৰ সংখ্যা নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ যিকোনো তিনিটা একৰেখীয় নোহোৱা বিন্দু সংযোগ কৰি এটা ত্ৰিভুজ পাব পাৰি। ইয়াত A বিন্দুটো প্ৰতিটো ত্ৰিভুজৰে এটা শীৰ্ষ হ'ব লাগিব। গতিকে আমি বাকী 19 টা বিন্দুৰ পৰা যিকোনো দুটা বিন্দু বাছনি কৰিব লাগে।

∴ নিৰ্ণেয় ত্ৰিভুজৰ সংখ্যা $= {}^{19}C_2$

$$= \frac{19 \times 18}{2}$$

$$= 171$$

16. 9 জন ইঞ্জিনীয়াৰ আৰু 6 জন ডাক্তৰৰ পৰা 6 জন ইঞ্জিনীয়াৰ আৰু 3 জন ডাক্তৰ সন্নিৱিষ্ট এখন কমিটী কিমান প্ৰকাৰে গঠন কৰিব পাৰি?

সমাধান ঃ 9 জন ইঞ্জিনীয়াৰৰ পৰা 6 জন বাছনি কৰিব পাৰি ${}^{9}C_6$ প্ৰকাৰে। আকৌ 6 জন ডাক্তৰৰ পৰা 3 জন বাছনি কৰিব পাৰি ${}^{6}C_3$ প্ৰকাৰে।

∴ নিৰ্ণেয় কমিটীৰ সংখ্যা $= {}^{9}C_6 \times {}^{6}C_3$

$$= \frac{\lfloor 9}{\lfloor 6 \lfloor 3} \times \frac{\lfloor 6}{\lfloor 3 \lfloor 3}$$

$$= \frac{\lfloor 9}{\lfloor 3 \lfloor 3 \lfloor 3}$$

$$= \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{6 \times 6}$$

$$= 1680$$

17. 8 জন ইঞ্জিনীয়াৰ আৰু 5 জন ডাক্তৰৰ পৰা 7 জনীয়া এখন কমিটী গঠন কৰিব লাগে। এই কমিটীখন কিমান প্ৰকাৰে গঠন কৰিব পাৰি যদি

(i) এখন কমিটীত কমেও তিনিজন ইঞ্জিনীয়াৰ থাকে?

(ii) এখন কমিটীত কমেও 2 জন ইঞ্জিনীয়াৰ আৰু এজন ডাক্তৰ থাকে?

সমাধান ঃ (i) কমিটীখন গঠন কৰাৰ সম্ভাব্য প্ৰকাৰ এনে ধৰণৰ ঃ

ইঞ্জিনীয়াৰ	**ডাক্তৰ**	**মুঠ বাছনিৰ সংখ্যা**
3	4	${}^{8}C_3 \times {}^{5}C_4 = 280$
4	3	${}^{8}C_4 \times {}^{5}C_3 = 700$

5	2	${}^8C_5 \times {}^5C_2 = 560$
6	1	${}^8C_6 \times {}^5C_1 = 140$
7	0	${}^8C_7 \times {}^5C_0 = 8$

$\therefore$ মুঠ বাছনিৰ প্ৰকাৰ = 280 + 700 + 560 + 140 + 8 = 1688

(ii) কমিটীখন গঠন কৰাৰ সম্ভাব্য প্ৰকাৰ এনে ধৰণৰ ঃ

ইঞ্জিনীয়াৰ	**ডাক্তৰ**	**বাছনিৰ সংখ্যা**
2	5	${}^8C_2 \times {}^5C_5 = 28$
3	4	${}^8C_3 \times {}^5C_4 = 280$
4	3	${}^8C_4 \times {}^5C_3 = 700$
5	2	${}^8C_5 \times {}^5C_2 = 560$
6	1	${}^8C_6 \times {}^5C_1 = 140$

নিৰ্ণেয় মুঠ বাছনিৰ সংখ্যা = 28 + 280 + 700 + 560 + 140 = 1708

18. শ্ৰীযুত X ৰ 7 জন বন্ধু আছে, তাৰে 3 জন ভদ্ৰলোক আৰু 4 জনী ভদ্ৰমহিলা। আকৌ শ্ৰীমতী X ৰ 7 জন বন্ধু আছে, তাৰে 4 জন ভদ্ৰলোক আৰু 3 জনী ভদ্ৰমহিলা। তেওঁলোকে 3 জনী ভদ্ৰমহিলা আৰু 3 জন ভদ্ৰলোকক ৰাতিৰ আহাৰৰ বাবে এনেদৰে নিমন্ত্ৰণ কৰিব বিচাৰে যাতে শ্ৰীযুত X ৰ 3 জন বন্ধু আৰু শ্ৰীমতী X ৰ 3 জন বন্ধু সন্নিৱিষ্ট হয়। তেওঁলোকে কিমান ধৰণে নিমন্ত্ৰণ কৰিব পাৰে?

সমাধান ঃ

নিমন্ত্ৰণ কৰাৰ সম্ভাব্য প্ৰকাৰ

শ্ৰীযুত X ৰ বন্ধু		শ্ৰীমতী X ৰ বন্ধু		বাছনিৰ সংখ্যা
ভদ্ৰমহিলা	ভদ্ৰলোক	ভদ্ৰমহিলা	ভদ্ৰলোক	
3	–	–	3	${}^4C_3 \times {}^3C_0 \times {}^3C_0 \times {}^4C_3 = 16$
2	1	1	2	${}^4C_2 \times {}^3C_1 \times {}^3C_1 \times {}^4C_2 = 324$
1	2	2	1	${}^4C_1 \times {}^3C_2 \times {}^3C_2 \times {}^4C_1 = 144$
–	3	3	–	${}^4C_0 \times {}^3C_3 \times {}^3C_3 \times {}^4C_0 = 1$

$\therefore$ নিমন্ত্ৰণ কৰিব পৰা মুঠ প্ৰকাৰ = 16 + 324 + 144 + 1 = 485

অনুশীলনী

1. জোঁট বুলিলে তুমি কি বুজা?
2. মান নিৰ্ণয় কৰা ঃ

   (i) $^{10}C_6$ (ii) $^{9}C_0$ (iii) $^{24}C_{21}$

   (iv) $^{10}C_6 + {}^{9}C_5 + {}^{9}C_4$

   উত্তৰ ঃ (i) 210 (ii) 1 (iii) 2024 (iv) 462
3. r ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা যদি

   (i) $^{2n}C_r = {}^{2n}C_{r+2}$ (ii) $^{8}C_r = {}^{7}C_r$

   (iii) $^{25}C_{r+4} = {}^{25}C_{2r-3}$

   উত্তৰ ঃ (i) $n - 1$ (ii) 0 (iii) 7 বা 8
4. n ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা যদি

   (i) $^{n}C_3 = {}^{n}C_5$ (ii) $^{n}C_{10} = {}^{n}C_{12}$

   (iii) $^{n}C_3 : {}^{n-1}C_3 = 4 : 3$ (iv) $^{n}C_3 : {}^{n-1}C_4 = 8 : 5$

   (v) $^{2n}C_3 : {}^{n}C_2 = 44 : 3$ (vi) $^{n}C_3 = 6 \times {}^{n}C_2$

   (vii) $^{2n}C_3 : {}^{n}C_2 = 44 : 1$

   উত্তৰ ঃ (i) 8 (ii) 22 (iii) 12 (iv) 8 (v) 6 (vi) 20 (vii) 17
5. যদি $^{n}P_r = 336$ আৰু $^{n}C_r = 56$, তেন্তে n আৰু r ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

   উত্তৰ ঃ 8, 3
6. যদি $^{n}P_r = {}^{n}P_{r+1}$ আৰু $^{n}C_r = {}^{n}C_{r-1}$, তেন্তে n আৰু r ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

   উত্তৰ ঃ 3, 2
7. প্ৰমাণ কৰা যে—

   (i) $^{n}C_r + 2.{}^{n}C_{r-1} + {}^{n}C_{r-2} = {}^{n+2}C_r$

   (ii) $^{n-2}C_r + 2.{}^{n-2}C_{r-1} + {}^{n-2}C_{r-2} = {}^{n}C_r$
8. 40 জন ছাত্ৰ থকা এটা শ্ৰেণীৰ পৰা 11 জনীয়া এটা ফুটবল দল বাছনি কৰিব লাগে। এই দলটো কিমান প্ৰকাৰে বাছনি কৰিব পাৰি?

   উত্তৰ ঃ $^{40}C_{11}$

9. এজন মানুহে তেওঁৰ 10 জন বন্ধুৰ পৰা যিকোনো সংখ্যক সদস্যক এটা নৈশভোজলৈ কিমান প্ৰকাৰে নিমন্ত্ৰণ কৰিব পাৰে?

উত্তৰ ঃ 1023

10. এখন প্ৰশ্নকাকতত 12 টা প্ৰশ্ন আছে। এজন পৰীক্ষাৰ্থীয়ে 8 টা প্ৰশ্ন কিমান প্ৰকাৰে বাছনি কৰিব পাৰে?

উত্তৰ ঃ 495

11. এখন প্ৰশ্নপত্ৰত 10 টা প্ৰশ্ন আছে। এজন প্ৰাৰ্থীয়ে 6 টা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰিব লাগে, কিন্তু 1 নং প্ৰশ্ন আৰু 10 নং প্ৰশ্ন দুটা বাধ্যতামূলক। প্ৰাৰ্থীজনে মুঠতে 6 টা প্ৰশ্ন কিমান প্ৰকাৰে বাছনি কৰিব পাৰে?

উত্তৰ ঃ 70

12. এখন প্ৰশ্নপত্ৰত দুটা শাখাৰ প্ৰতিটোতে 5 টাকৈ মুঠ 10 টা প্ৰশ্ন আছে। প্ৰতিটো শাখাৰ পৰা কমেও দুটাকৈ প্ৰশ্ন লৈ মুঠতে 6 টা প্ৰশ্ন এজন পৰীক্ষাৰ্থীয়ে কিমান প্ৰকাৰে বাছনি কৰিব পাৰে?

উত্তৰ ঃ 200

13. এখন প্ৰশ্নপত্ৰত দুটা শাখাৰ প্ৰতিটো শাখাত 4 টাকৈ প্ৰশ্ন আছে। এজন পৰীক্ষাৰ্থীয়ে মুঠতে 5 টা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰিব লাগে কিন্তু তেওঁ কোনো শাখাৰ পৰা 3 টাতকৈ বেছি প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰিব নোৱাৰে। এজন পৰীক্ষাৰ্থীয়ে মুঠতে 5 টা প্ৰশ্ন কিমান প্ৰকাৰে বাছনি কৰিব পাৰে নিৰ্ণয় কৰা।

উত্তৰ ঃ 48

14. এখন প্ৰশ্নপত্ৰত দুটা শাখাৰ প্ৰতিটো শাখাত 6 টাকৈ মুঠ 12 টা প্ৰশ্নৰ ভিতৰত এজন প্ৰাৰ্থীয়ে মুঠ 6 টা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰিব লাগে। যদি কোনো শাখাৰ পৰা 4 টাতকৈ বেছি প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰিব দিয়া নহয় তেন্তে এজন প্ৰাৰ্থীয়ে কিমান প্ৰকাৰে প্ৰশ্ন বাছনি কৰিব পাৰে?

উত্তৰ ঃ 850

15. দুটা দল A আৰু B-ৰ পৰা এটা ক্ৰিকেট দল গঠন কৰিব লাগে। A দলত 6 জন আৰু B দলত 8 জন খেলুৱৈ আছে। যদি A দলৰ পৰা কমেও 4 জন খেলুৱৈ অন্তৰ্ভুক্ত হ'ব লাগে তেন্তে কিমান প্ৰকাৰে দলটো বাছনি কৰিব পাৰি?

উত্তৰ ঃ 344

16. এটা ক্ৰিকেট ক্লাবত 30 জন খেলুৱৈ আছে; তাৰে 15 জন বেটছমেন, 12 জন ব'লাৰ আৰু 3 জন উইকেটকীপাৰ। ইয়াৰ পৰা 11 জনীয়া এটা ক্ৰিকেট দল কিমান প্ৰকাৰে গঠন কৰিব পাৰি যাতে দলটোত 6 জন বেটছমেন, 4 জন ব'লাৰ আৰু 1 জন উইকেটকীপাৰ অন্তৰ্ভুক্ত হয়।

উত্তৰ ঃ 7432425

17. 6 জন ভদ্ৰলোক আৰু 4 জনী ভদ্ৰমহিলাৰ পৰা 6 জনীয়া এখন কমিটী গঠন কৰিব লাগে। কমিটীখন কিমান ধৰণে গঠন কৰিব পাৰি যাতে কমেও এজনী ভদ্ৰমহিলা অন্তৰ্ভুক্ত হয়?

উত্তৰ ঃ 209

18. 12 টা বাহুবিশিষ্ট এটা বহুভুজৰ শীৰ্ষবিন্দুবোৰ সংযোগ কৰি কেইটা ত্ৰিভুজ পাব পাৰি?

উত্তৰ ঃ 220

19. এটা বহুভুজৰ 27 ডাল কৰ্ণ আছে। বহুভুজটোৰ বাহুৰ সংখ্যা নিৰ্ণয় কৰা।

উত্তৰ ঃ 9

20. প্ৰমাণ কৰা যে n টা বাহুবিশিষ্ট বহুভুজ এটাৰ শীৰ্ষবিন্দুবোৰ সংযোগ কৰি পাব পৰা ত্ৰিভুজৰ সংখ্যা $\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$ আৰৌ প্ৰমাণ কৰা যে বহুভুজটোৰ $\frac{1}{2}n(n-3)$ ডাল কৰ্ণ আছে।

21. ইটোৱে সিটো দলৰ লগত খেলিবলৈ প্ৰতিটো দলত 11 জনকৈ 22 জন খেলুৱৈক দুটা দলত কিমান প্ৰকাৰে বিভক্ত কৰিব পাৰি?

উত্তৰ ঃ $\frac{\lfloor 22}{2\,(\lfloor 11)^2}$

22. এখন সমতলত 15 টা বিন্দু আছে যাৰ কোনো তিনিটাই একৰেখীয় নহয়।

(i) এই বিন্দুবোৰ সংযোগ কৰি কেইটা ৰেখাখণ্ড পাব পাৰি?

(ii) এই ৰেখাখণ্ডবোৰে কেইটা ত্ৰিভুজ গঠন কৰিব?

উত্তৰ ঃ (i) 105 (ii) 455

23. এখন সমতলত 18 টা বিন্দু আছে যাৰ মাত্ৰ 5 টা একে ৰেখাত আছে। এই বিন্দুবোৰ সংযোগ কৰি (i) কেইডাল ভিন্ন সৰলৰেখা, (ii) কেইটা ভিন্ন ত্ৰিভুজ পাব পাৰি?

উত্তৰ ঃ (i) 144 (ii) 806

24. 3 জন ছাত্ৰৰ মাজত 6 খন কিতাপ কিমান প্ৰকাৰে সমানে ভগাব পাৰি?

উত্তৰ ঃ 90

25. 2 জন ছাত্ৰৰ মাজত 10 খন কিতাপ কিমান প্ৰকাৰে সমানে ভগাই দিব পাৰি?

উত্তৰ ঃ 252

26. বন্ধুৰ দল এটাত থকা প্ৰতিজন সদস্যই প্ৰতিজনলৈ নৱবৰ্ষৰ শুভেচ্ছা পত্ৰ প্ৰদান কৰে। যদি তেওঁলোকে ব্যৱহাৰ কৰা পত্ৰৰ সংখ্যা 132 হয়, তেন্তে সেই দলটোত কেইজন বন্ধু আছে?

উত্তৰ ঃ 12

27. এটা ভোজমেলত উপস্থিত থকা প্ৰতিজন সদস্যই আনজনৰ লগত কৰমৰ্দন কৰিলে। যদি মুঠ কৰমৰ্দনৰ সংখ্যা 120 হয়, তেন্তে সেই ভোজমেলত উপস্থিত থকা সদস্যৰ সংখ্যা নিৰূপণ কৰা।

উত্তৰ ঃ 16

28. 7 জন ভদ্ৰলোক আৰু 5 জনী ভদ্ৰমহিলাৰ এটা দলৰ পৰা 4 জন ভদ্ৰলোক আৰু 3 জনী ভদ্ৰমহিলা সন্নিৱিষ্ট এখন কমিটী গঠন কৰিব লাগে। যদি এজনী বিশেষ ভদ্ৰমহিলা L_1-এ আন এজনী বিশেষ ভদ্ৰমহিলা L_2 -ৰ লগত একেলগে অন্তৰ্ভুক্ত হোৱাটো নিবিচাৰে, তেন্তে কমিটীখন কিমান প্ৰকাৰে গঠন কৰিব পাৰি?

উত্তৰ ঃ 245

গণিতীয় আৰেশ তত্ত্ব ঃ

স্বাভাৱিক সংখ্যা জড়িত বহুতো উক্তি বা সূত্ৰ সকলো স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ বাবে সত্য বুলি সাব্যস্ত কৰিবলগীয়া হয়। স্বাভাৱিক সংখ্যা জড়িত এটা উক্তি S(n) ৰ ক্ষেত্ৰত যদি আমি n = 1, 2 আৰু 3 ৰ বাবে উক্তিটো সত্য প্ৰতিপন্ন কৰি সিদ্ধান্ত লওঁ যে S(n) উক্তিটো $n \in N$ ৰ সকলো মানৰ বাবে সত্য, তেনেহ'লে এই সিদ্ধান্তটো সত্য নহ'বও পাৰে। উদাহৰণ স্বৰূপে তলৰ উক্তিটো বিবেচনা কৰা হওক—

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ...+ n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n-1)(n-2)(n-3)$$

n ৰ মান ক্ৰমে 1, 2 আৰু 3 বহুৱাই আমি পাম যে প্ৰতিবাৰতে বাওঁপক্ষ = সোঁপক্ষ; অৰ্থাৎ n = 1, n = 2 আৰু n = 3 ৰ বাবে উক্তিটো সত্য। যদি আমি এনেদৰে সিদ্ধান্ত গ্ৰহণ কৰোঁ যে যিহেতু n = 1, 2, 3 ৰ বাবে উক্তিটো সত্য গতিকে $n \in$ N ৰ সকলো মানৰ বাবে উক্তিটো সত্য, তেনেহ'লে আমাৰ সিদ্ধান্তটো সত্য নহয় কাৰণ যদি n = 4 বহুওৱা হয় তেন্তে

বাওঁপক্ষ = $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$

সোঁপক্ষ = $\frac{4 \times 5 \times 9}{6} + 3 \times 2 \times 1 = 36$

সেয়েহে এনেকুৱা এটা প্ৰণালীবদ্ধ নিয়মৰ আৱশ্যক, যাৰ দ্বাৰা আমি স্বাভাৱিক সংখ্যা n জড়িত এটা উক্তি $n \in$ N ৰ সকলো মানৰ বাবে সত্য বুলি প্ৰতিপন্ন কৰিব পাৰোঁ। এনেকুৱা নিয়মৰ আঁৰত থকা তত্ত্বটোৱে হ'ল **গণিতীয় আৰেশ তত্ত্ব** (Principle of Mathematical induction)।

গণিতীয় আৰেশ তত্ত্বটো তলত দিয়াৰ দৰে উল্লেখ কৰিব পাৰি—

স্বাভাৱিক সংখ্যা n জড়িত এটা উক্তি $P(n)$ ৰ বাবে যদি

(i) $P(1)$ সত্য অৰ্থাৎ n = 1 ৰ বাবে $P(n)$ সত্য,

(ii) n ৰ যিকোনো মান k ৰ বাবে,

আমি পাওঁ $P(k)$ সত্য $\Rightarrow P(k+1)$ সত্য অৰ্থাৎ nৰ যিকোনো এটা মান k ৰ বাবে $P(n)$ সত্য হ'লে n ৰ মান $k+1$ ৰ বাবেও $P(n)$ সত্য হ'ব, তেন্তে $n \in N$ ৰ সকলো মানৰ বাবে $P(n)$ সত্য হ'ব।

ব্যাখ্যা ঃ

ধৰা হওক, আমি প্ৰমাণ কৰি দেখুৱালোঁ যে

(i) এটা উক্তি $P(n)$, $n = 1$ ৰ বাবে সত্য আৰু

(ii) যদি $n = k$ ৰ বাবে $P(n)$ সত্য তেনেহ'লে $n = k + 1$ ৰ বাবেও $P(n)$ সত্য।

তেনেহ'লে (i) ৰ পৰা $n = 1$ ৰ বাবে $P(n)$ সত্য আৰু (ii) ৰ পৰা যিহেতু $n = 1$ ৰ বাবে $P(n)$ সত্য গতিকে $n = 1+1=2$ ৰ বাবেও $P(n)$ সত্য। আকৌ যিহেতু $n = 2$ ৰ বাবে $P(n)$ সত্য গতিকে $n = 2 + 1 = 3$ ৰ বাবেও সত্য। এনেদৰে গৈ থাকিলে আমি সিদ্ধান্ত ল'ব পাৰোঁ যে $n \in N$ ৰ সকলো মানৰ বাবে $P(n)$ সত্য।

টোকা ঃ ধৰা হওক, $P(n)$ এটা উক্তি। যদি আমি প্ৰমাণ কৰিব পাৰোঁ যে—

(i) n ৰ এটা নিৰ্দিষ্ট মান m ৰ বাবে $P(n)$ সত্য আৰু

(ii) যিকোনো এটা মান $k \in N$ $(k > m)$ ৰ বাবে $P(k)$ সত্য $\Rightarrow P(k + 1)$ সত্য

তেনেহ'লে সকলো $n \geq m \in N$ ৰ বাবে $P(n)$ সত্য হ'ব।

ব্যাখ্যাসূচক উদাহৰণ ঃ

1. গণিতীয় আৱেশ তত্ত্বৰ সহায়ত প্ৰমাণ কৰা যে

$$1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + n = \frac{n(n+1)}{2},\ n \in N$$

সমাধান ঃ

যেতিয়া $n = 1$, তেতিয়া বাওঁপক্ষ = 1

আৰু সোঁপক্ষ = $\frac{1.2}{2} = 1$

$\therefore$ বাওঁপক্ষ = সোঁপক্ষ

$\therefore$ $n = 1$ ৰ বাবে উক্তিটো সত্য।

ধৰা হ'ল, $n = k$ $(k > 1)$ ৰ বাবে উক্তিটো সত্য।

$$\therefore\ 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

$$\Rightarrow 1 + 2 + 3 + ... + k + (k + 1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

$$= (k+1)\left[\frac{k}{2} + 1\right]$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

গতিকে দেখা গ'ল যে $n = k + 1$ ৰ বাবে উক্তিটো সত্য যদি ই $n = k$ ৰ বাবে সত্য।

$\therefore$ গণিতীয় আৰেশ তত্ত্ব মতে $n \in N$ ৰ সকলো মানৰ বাবে উক্তিটো সত্য

$$\therefore\ 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}, n \in N$$

2. যদি $n \in N$, গণিতীয় আৰেশৰ সহায়ত দেখুওৱা যে $a^n - b^n$ ৰাশিটো $a - b$ ৰে বিভাজ্য।

সমাধান ঃ $n = 1$ হ'লে $a^n - b^n = a - b$ যিটো $a - b$ ৰে বিভাজ্য

গতিকে উক্তিটো $n = 1$ ৰ বাবে সত্য।

এতিয়া ধৰা হ'ল, $n = k$ ৰ বাবে উক্তিটো সত্য, অৰ্থাৎ $a^k - b^k$ ৰাশিটো $a - b$ ৰে বিভাজ্য।

গতিকে $a^k - b^k = c\ (a - b)$ য'ত c হ'ল $a^k - b^k$

ক $a - b$ ৰে হৰণ কৰি পোৱা ভাগফল।

এতিয়া,

$$a^{k+1} - b^{k+1} = a(a^k - b^k) + ab^k - b^{k+1}$$
$$= ac(a - b) + b^k (a - b)$$
$$= (a - b)(ac + b^k)$$

গতিকে দেখা গ'ল যে $a^{k+1} - b^{k+1}$ ৰাশিটো $a - b$ ৰে বিভাজ্য। সেয়েহে প্ৰদত্ত উক্তিটো $n=k+1$ৰ বাবে সত্য যদি ই $n = k$ ৰ বাবে সত্য।

গতিকে গণিতীয় আৰেশ তত্ত্ব মতে $n \in N$ ৰ সকলো মানৰ বাবে উক্তিটো সত্য অৰ্থাৎ $n \in N$ ৰ সকলো মানৰ বাবে $a^n - b^n$ ৰাশিটো $a - b$ ৰে বিভাজ্য।

3. গণিতীয় আৰেশৰ সহায়ত প্ৰমাণ কৰা যে

$n \geq 7$ ৰ বাবে $\lfloor\underline{n} > 3^n$

সমাধান ঃ

$n = 7$ হ'লে $\lfloor\underline{n} = \lfloor\underline{7} = 5040$

আৰু $3^n = 3^7 = 2187$

$\therefore$ $n = 7$ ৰ বাবে উক্তিটো সত্য।

ধৰা হ'ল, $n = k$ ($k > 7$) ৰ বাবে উক্তিটো সত্য।

$\therefore \underline{|k} > 3^k$

য'ত $k > 7$

$\Rightarrow (k+1)\underline{|k} > (k+1)3^k$

$\Rightarrow \underline{|k+1} > 3.3^k$ [$\because k > 7 \therefore k+1 > 3$]

$\Rightarrow \underline{|k+1} > 3^{k+1}$

গতিকে দেখা গ'ল যে $n = k + 1$ ৰ বাবে উক্তিটো সত্য

যদিহে ই $n = k$ ৰ বাবে সত্য।

$\therefore$ আৰেশ তত্ত্বৰ মতে সকলো $n \geq 7$ ৰ বাবে উক্তিটো সত্য, অৰ্থাৎ

$n \geq 7$ ৰ বাবে $\underline{|n} > 3^n$

অনুশীলনী

গণিতীয় আৰেশ তত্ত্বৰ সহায়ত প্ৰমাণ কৰা যে —

1. সকলো $n \in N$ ৰ বাবে প্ৰথম n টা স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ বৰ্গৰ সমষ্টি

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2. সকলো $n \in N$ ৰ বাবে $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

3. প্ৰথম n টা অযুগ্ম স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ সমষ্টি n^2

4. প্ৰথম n টা যুগ্ম স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ যোগফল $n(n + 1)$

5. $1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots.. + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2), n \in N$

6. $1 + 4 + 7 + ... + (3n - 2) = \frac{1}{2}n(3n-1), \forall n \in N$

7. $1 + 2 + 4 + 8 + ... + 2^{n-1} = 2^n - 1, \forall n \in N$

8. $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+....+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}, n \in N$

9. সকলো $n \in N$ ৰ $x^n - 1$ বাবে ৰাশিটো $x - 1$ ৰে বিভাজ্য।

10. সকলো $n \in N$ ৰ বাবে $9^n + 7$ ৰাশিটো 8 ৰে বিভাজ্য।

11. সকলো $n \in N$ ৰ বাবে $5^{2n} + 3n - 1$ ৰাশিটো 9 ৰে বিভাজ্য।

12. সকলো $n \in N$ ৰ বাবে $2^n > n$

13. সকলো $n \geq 4$ ৰ বাবে $\underline{|n} > 2^n$

14. সকলো $n \in N$ ৰ বাবে $a^{2n} - b^{2n}$ ৰাশিটো $a + b$ ৰে বিভাজ্য।

15. সকলো $n \in N$ ৰ বাবে $5^{2n} - 1$ ৰাশিটো 24 ৰে বিভাজ্য।

দ্বিপদ উপপাদ্য

দুটা পদযুক্ত এটা ৰাশিক **দ্বিপদ ৰাশি** বা দ্বিপদ বুলি কোৱা হয়। উদাহৰণস্বৰূপে $a + x$, $a + b$, $a+\frac{b}{x}$, $2x + 3$, $x^2 + 7x$ ইত্যাদি হ'ল একো একোটা দ্বিপদ ৰাশি।

এটা দ্বিপদ ৰাশিৰ যিকোনো সূচক বা ঘাতৰ বাবে বিস্তৃতিৰ সাধাৰণ নিয়ম দিব পৰা সূত্ৰটোকে **দ্বিপদ উপপাদ্য** (Binomial theorem) বুলি জনা যায়। আমি ইয়াত কেৱল ধনাত্মক অখণ্ড সূচকৰ বাবে দ্বিপদ উপপাদ্যটোৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিম।

ধনাত্মক অখণ্ড সূচকৰ বাবে দ্বিপদ উপপাদ্য (Binomial theorem for positive integral index) **ঃ**

যদি n এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা, তেন্তে যিকোনো বাস্তৱ সংখ্যা a আৰু x ৰ বাবে

$$(a + x)^n = {}^nC_0a^n + {}^nC_1a^{n-1}x + {}^nC_2a^{n-2}x^2 + {}^nC_3a^{x-3}x^3$$

$$+....+{}^nC_ra^{n-r}x^r+.....+{}^nC_nx^n \quad .... \ (1)$$

প্ৰমাণ ঃ এই উপপাদ্যটো আমি গণিতীয় আৱেশ তত্ত্বৰ সহায়ত প্ৰমাণ কৰিম।

$n = 1$ ৰ বাবে (1) ৰ বাওঁপক্ষ $= (a + x)^1 = a + x$ আৰু সোঁপক্ষ $= {}^1C_0a^1 + {}^1C_1x^1 = a + x$

$\therefore$ $n = 1$ ৰ বাবে (1) উক্তিটো সত্য।

ধৰা হ'ল এই উক্তিটো n ৰ যিকোনো এটা মান m ৰ বাবে সত্য। তেতিয়া

$(a + x)^m = {}^mC_0a^m + {}^mC_1a^{m-1}x + {}^mC_2a^{m-2}x^2 + {}^mC_3a^{m-3}x^3 + ... + {}^mC_ra^{m-r}x^r + ... + {}^mC_mx^m$

দুয়োপক্ষক $(a + x)$ ৰে পূৰণ কৰি পাওঁ

$(a + x)^{m+1} =$

$$(a + x).\left[{}^mC_0a^m + {}^mC_1a^{m-1}x + {}^mC_2a^{m-2}x^2 + {}^mC_3a^{m-3}x^3 + ... + {}^mC_ra^{m-r}x^r + ... + {}^mC_mx^m\right]$$

$$= {}^mC_0a^{m+1} + ({}^mC_0 + {}^mC_1)a^mx + ({}^mC_1 + {}^mC_2)a^{m-1}x^2$$

$$+({}^mC_2 + {}^mC_3)a^{m-2}x^3 + ... + ({}^mC_{r-1} + {}^mC_r)a^{m+1-r}x^r + ... + {}^mC_mx^{m+1}$$

কিন্তু $\quad {}^mC_0 = 1 = {}^{m+1}C_0, {}^mC_m = 1 = {}^{m+1}C_{m+1}$

আকৌ $\quad {}^mC_{r-1} + {}^mC_r = {}^{m+1}C_r$

$\therefore\ {}^mC_0 + {}^mC_1 = {}^{m+1}C_1$

${}^mC_1 + {}^mC_2 = {}^{m+1}C_2$ ইত্যাদি

$$\therefore (a + x)^{m+1} = {}^{m+1}C_0a^{m+1} + {}^{m+1}C_1a^mx + {}^{m+1}C_2a^{m-1}x^2$$

$$+{}^{m+1}C_3a^{m-2}x^3 + ... + {}^{m+1}C_ra^{m+1-r}x^r + ... + {}^{m+1}C_{m+1}x^{m+1}$$

এইদৰে আমি পালোঁ যে যদি $n = m$ ৰ বাবে উক্তিটো সত্য তেন্তে $n = m + 1$ ৰ বাবেও উক্তিটো সত্য। গতিকে গণিতীয় আৰেশ তত্ত্ব মতে $n \in N$ ৰ সকলো মানৰ বাবে উক্তিটো সত্য।

$\therefore$ যদি $n \in N$, তেন্তে

$(a + x)^n = {}^nC_0a^n + {}^nC_1a^{n-1}x + {}^nC_2a^{n-2}x^2 + {}^nC_3a^{x-3}x^3 + ... + {}^nC_ra^{n-r}x^r + ... + {}^nC_nx^n$

কেইটামান প্ৰয়োজনীয় ফলাফল ঃ

1. $(a + x)^n$ ৰ বিস্তৃতিত মুঠ পদৰ সংখ্যা $(n + 1)$ অৰ্থাৎ সূচক n তকৈ এটা বেছি।

2. $(a + x)^n$ ৰ বিস্তৃতিত প্ৰতিটো পদৰেই a আৰু x ৰ ঘাতৰ সমষ্টি n ৰ সমান।

3. প্ৰথম পদত a ৰ ঘাত n আৰু ইয়াৰ পিছৰ পদবোৰত ক্ৰমানুসৰি এক একৈকে কমি গৈ অৱশেষত শেষ পদটোত শূন্য হয়গৈ। আনহাতে x ৰ ঘাত প্ৰথম পদটোত শূন্য আৰু ই পিছৰ পদবোৰত ক্ৰমানুসৰি এক একৈকে বাঢ়ি গৈ শেষ পদটোত n হয়গৈ।

দুইমূৰৰ পৰা সমদূৰৱৰ্তী পদৰ সহগ ঃ

$(a + x)^n$ ৰ বিস্তৃতিত প্ৰথমৰ পৰা আৰু শেষৰ পৰা সমান দূৰত্বত থকা পদবোৰৰ দ্বিপদ সহগ সমান।

$(a + x)^n$ৰ বিস্তৃতিত প্ৰথমৰ পৰা $(r + 1)$ তম পদটো হ'ল ${}^nC_r a^{n-r} x^r$ যাৰ সহগ হ'ল ${}^nC_r$ আকৌ শেষৰ পৰা $(r + 1)$ তম পদটো হ'ল আৰম্ভণিৰ পৰা $[(n + 1) - r]$ তম পদটো অৰ্থাৎ $(n - r + 1)$ তম পদটো (আৰম্ভৰ পৰা)।

গতিকে শেষৰ পৰা $(r + 1)$ তম পদ

= আৰম্ভৰ পৰা $(n - r + 1)$ তম পদ

$= {}^nC_{n-r} a^{n-(n-r)} x^{n-r}$

$= {}^nC_{n-r} a^r x^{n-r}$

যাৰ সহগ হ'ল ${}^nC_{n-r}$

কিন্তু আমি জানো যে ${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$

গতিকে আৰম্ভণিৰ পৰা আৰু শেষৰ পৰা সমদূৰৱৰ্তী পদবোৰৰ সহগ সমান।

$(a + x)^n$ৰ বিস্তৃতিত দ্বিপদ সহগ ${}^nC_0, {}^nC_1, {}^nC_2, ..., {}^nC_n$ এ n ৰ ভিন্ন মানৰ ক্ষেত্ৰত এটা আৰ্হি অনুকৰণ কৰে ঃ

$n = 0$ হ'লে, ${}^0C_0 = 1$

$n = 1$ হ'লে ${}^1C_0 = 1, {}^1C_1 = 1$

$n = 2$ হ'লে ${}^2C_0 = 1, {}^2C_1 = 2, {}^2C_2 = 1$

$n = 3$ হ'লে ${}^3C_0 = 1, {}^3C_1 = 3, {}^3C_2 = 3, {}^3C_3 = 1$

$n = 4$ হ'লে ${}^4C_0 = 1, {}^4C_1 = 4, {}^4C_2 = 6, {}^4C_3 = 4, {}^4C_4 = 1$

$n = 5$ হ'ল ${}^5C_0 = 1, {}^5C_1 = 5, {}^5C_2 = 10, {}^5C_3 = 10, {}^5C_4 = 5, {}^5C_5 = 1$ ইত্যাদি

আমি এই সহগবোৰ তলত দেখুওৱাৰ দৰে এটা ত্ৰিভুজ আকৃতিত সজাব পাৰোঁ, যিটো ত্ৰিভুজক **পাস্কেলৰ** ত্ৰিভুজ (Pascal's triangle) বুলি কোৱা হয়।

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

----

n ৰ বিভিন্ন মানৰ বাবে পোৱা সহগবোৰক ক্ৰমানুসৰি একোটা শাৰীত সজোৱা হৈছে। এইটো দেখা যায় যে প্ৰতিটো শাৰীত দুইমূৰৰ সংখ্যা দুটাৰ প্ৰতিটোৱে 1 আৰু মাজৰ প্ৰতিটো সংখ্যাই ঠিক ওপৰৰ শাৰীৰৰ দুই কাষৰ সংখ্যা দুটাৰ যোগফল।

এই ত্ৰিভুজটোৱে দ্বিপদ বিস্তৃতিত সহগবোৰ নিৰ্ণয় কৰাৰ ক্ষেত্ৰত আমাক এটা সৰল নিয়ম দিয়ে; বিশেষতঃ যেতিয়া n ৰ মান বেছি ডাঙৰ সংখ্যা নহয়।

প্ৰথম, দ্বিতীয়, তৃতীয়, ... শাৰীত থকা সংখ্যাবোৰ হ'ল ক্ৰমে $n = 0, 1, 2, ...$ ৰ বাবে $(a + x)^n$ ৰ বিস্তৃতিত ক্ৰমিক দ্বিপদ সহগবোৰৰ মান।

মধ্যম পদ (পদবোৰ) ঃ

যদি n যুগ্ম, ধৰা $n = 2m$, তেন্তে $(a + x)^n$ ৰ বিস্তৃতিত পদৰ সংখ্যা হ'ব $2m + 1$ যিটো অযুগ্ম। সেয়েহে মধ্যম পদটো হ'ব $(m + 1)$ তম পদ যাৰ মান হ'ব

$$^nC_m a^{n-m} x^m = {}^nC_{\frac{n}{2}} a^{n-\frac{n}{2}} x^{\frac{n}{2}}$$

$$= {}^nC_{\frac{n}{2}} a^{\frac{n}{2}} x^{\frac{n}{2}}$$

আকৌ যদি n অযুগ্ম, ধৰা $n = 2m + 1$, তেন্তে $(a + x)^n$ ৰ বিস্তৃতিত পদৰ সংখ্যা হ'ব $2m + 2$ যিটো যুগ্ম। সেয়েহে $(m + 1)$ তম আৰু $(m + 2)$ তম পদ দুটাই মধ্যম পদ হ'ব, যাৰ মান হ'ব

$^nC_m a^{n-m} x^m$ আৰু $^nC_{m+1} a^{n-(m+1)} x^{m+1}$

অৰ্থাৎ $^nC_{\frac{n-1}{2}} a^{n-\frac{n-1}{2}} x^{\frac{n-1}{2}}$ আৰু $^nC_{\frac{n+1}{2}} a^{n-\frac{n+1}{2}} x^{\frac{n+1}{2}}$

অৰ্থাৎ $^nC_{\frac{n-1}{2}} a^{\frac{n+1}{2}} x^{\frac{n-1}{2}}$ আৰু $^nC_{\frac{n+1}{2}} a^{\frac{n-1}{2}} x^{\frac{n+1}{2}}$

$(a + x)^n$ ৰ বিস্তৃতিত সাধাৰণ পদ ঃ

$(a + x)^n$ ৰ বিস্তৃতিত যদি প্ৰথম পদ t_1 ৰে, দ্বিতীয় পদ t_2 ৰে, তৃতীয় পদ t_3 ৰে বুজোৱা হয়, তেন্তে

$t_1 = {}^nC_0 a^n = {}^nC_0 a^{n-0} x^0$

$t_2 = {}^nC_1 a^{n-1} x = {}^nC_1 a^{n-1} x^1$

$t_3 = {}^nC_2 a^{n-2} x^2$

....

....

গতিকে $t_{r+1} = {}^nC_r a^{n-r} x^r$

দেখা যায় $(r + 1)$তম পদ t_{r+1}ত $r = 0, 1, 2,..., n$ বহুৱাই আমি বিস্তৃতিৰ আটাইবোৰ পদ পাব পাৰোঁ।

$(r + 1)$ তম পদ অৰ্থাৎ $t_{r+1} = {}^nC_r a^{n-r} x^r$ ক $(a + x)^n$ ৰ বিস্তৃতিত **সাধাৰণ পদ** (General term) বুলি কোৱা হয়।

অনুসিদ্ধান্ত ঃ দ্বিপদ উপপাদ্য

$(a + x)^n = {}^nC_0 a^n + {}^nC_1 a^{n-1} x + {}^nC_2 a^{n-2} x^2 + {}^nC_3 a^{x-3} x^3 + ... + {}^nC_r a^{n-r} x^r + ... + {}^nC_n x^n$ অ-ত

(i) যদি আমি x ৰ ঠাইত $(-x)$ লিখোঁ, তেন্তে আমি পাম

$(a - x)^n = {}^nC_0 a^n - {}^nC_1 a^{n-1} x + {}^nC_2 a^{n-2} x^2 - {}^nC_3 a^{x-3} x^3 + ... + (-1)^r\ {}^nC_r a^{n-r} x^r + ... + (-1)^n\ {}^nC_n x^n$

(ii) যদি $a = 1$ বহুৱাওঁ, তেন্তে আমি পাওঁ

$(1 + x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 x + {}^nC_2 x^2 + {}^nC_3 x^3 + ... + {}^nC_r x^r + ... + {}^nC_n x^n$

(iii) যদি $a = 1$ আৰু x ৰ সলনি $(-x)$ বহুৱাওঁ, তেন্তে আমি পাওঁ

$(1 - x)^n = {}^nC_0 - {}^nC_1 x + {}^nC_2 x^2 - {}^nC_3 x^3 + ... + (-1)^r\ {}^nC_r x^r + ... + (-1)^n\ {}^nC_n x^n$

ব্যাখ্যাসূচক উদাহৰণ ঃ

1. দ্বিপদ উপপাদ্য প্ৰয়োগ কৰি $(2 + x)^7$ ৰ বিস্তৃতি লিখা।

সমাধান ঃ

$$(2 + x)^7 = {}^7C_0.2^7 + {}^7C_1 2^6 x + {}^7C_2 2^5 x^2 + {}^7C_4 2^4 x^3 + {}^7C_3 2^3 x^4 + {}^7C_5 2^2 x^5 + {}^7C_6 2x^6 + {}^7C_7 x^7$$

$$= 2^7 + 7 \times 2^6 x + 21 \times 2^5 x^2 + 35 \times 2^4 x^3 + 35 \times 2^3 x^4 + 21 \times 2^2 x^5 + 7\times2x^6+x^7$$

$$= 128 + 448x + 672x^2 + 560x^3 + 280x^4 + 84x^5 + 14x^6 + x^7$$

2. দ্বিপদ উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰি 103^5 ৰ মান নিৰ্দ্ধপণ কৰা।

সমাধান ঃ

$$103^5 = (100 + 3)^5$$

$$= 100^5 + {}^5C_1\, 100^4 \times 3 + {}^5C_2\, 100^3 \times 3^2 + {}^5C_3\, 100^2 \times 3^3 + {}^5C_4.100 \times 3^4 + {}^5C_5.3^5$$

$$= 10^{10} + 5 \times 10^8 \times 3 + 10 \times 10^6 \times 9 + 10 \times 10^4 \times 27 + 5 \times 10^2 \times 81 + 243$$

$$= 10^{10} + 15 \times 10^8 + 90 \times 10^6 + 270 \times 10^4 + 405 \times 10^2 + 243$$

$$= 11, 59, 27, 40, 743$$

3. $\left(2a - \frac{x}{2}\right)^7$ ৰ বিস্তাৰ কৰা।

সমাধান ঃ

$$\left(2a-\frac{x}{2}\right)^7 = (2a)^7 - {}^7C_1(2a)^6\left(\frac{x}{2}\right) + {}^7C_2\ (2a)^5\left(\frac{x}{2}\right)^2 - {}^7C_3\ (2a)^4\left(\frac{x}{2}\right)^3 + {}^7C_4\ (2a)^3$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^4 - {}^7C_5(2a)^2\left(\frac{x}{2}\right)^5 + {}^7C_6(2a)\left(\frac{x}{2}\right)^6 - {}^7C_7\left(\frac{x}{2}\right)^7$$

$$= 128a^7 - 7 \times 2^5a^6x + 21 \times 2^3a^5x^2 - 35 \times 2a^4x^3$$

$$+ 35a^3\ \frac{x^4}{2} - 21a^2\frac{x^5}{2^3} + 7a\frac{x^6}{2^5} - \frac{x^7}{2^7}$$

$$= 128a^7 - 224a^6x + 168a^5x^2 - 70a^4x^3 + \frac{35}{2}a^3x^4 - \frac{21}{8}a^2x^5 + \frac{7}{32}x^6 - \frac{x^7}{128}$$

4. $\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^{10}$ ৰ বিস্তৃতিত ৪ম পদটো নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ

8 ম পদ $= t_{7+1}$

$$= {}^{10}C_7(x^2)^{10-7}\left(-\frac{2}{x}\right)^7$$

$$= 120x^6\left(-\frac{128}{x^7}\right)$$

$$= -\frac{15360}{x}$$

5. $\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{11}$ ৰ বিস্তৃতিত x^5 ৰ সহগ নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ

ইয়াত $t_{r+1} = {}^{11}C_r x^{11-r}\left(-\frac{1}{x^2}\right)^r$

$$= (-1)^r\,{}^{11}C_r x^{11-r}\frac{1}{x^{2r}}$$

$$= (-1)^r\,{}^{11}C_r x^{11-3r}$$

যদি এই পদটোত x^5 থাকে, তেন্তে

$11 - 3r = 5$

$\Rightarrow r = 2$

$\therefore x^5$ যুক্ত পদ $= t_{2+1}$

$\therefore x^5$ ৰ সহগ $= (-1)^2\ {}^{11}C_2$

$= \dfrac{11 \times 10}{2}$

$= 55$

6. $(x - x^2)^{10}$ ৰ বিস্তৃতিত x^{16} ৰ সহগ নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ ইয়াত $t_{r+1} = {}^{10}C_r x^{10-r}(-x^2)^r$

$= (-1)^{r\,10}C_r x^{10-r+2r}$

$= (-1)^{r\,10}C_r x^{10+r}$

এই পদটোত x^{16} থাকিব যদি $10 + r = 16$ অৰ্থাৎ $x = 6$ হয়।

$\therefore x^{16}$ ৰ সহগ $= (-1)^6\ {}^{10}C_6$

$= \dfrac{\lfloor 10}{\lfloor 6\ \lfloor 4}$

$= \dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2}$

$= 210$

7. $(3+\sqrt{5})^5 + (3-\sqrt{5})^5$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ

$(3+\sqrt{5})^5 = 3^5 + {}^5C_1 3^4(\sqrt{5}) + {}^5C_2 + 3^3(\sqrt{5})^2 + {}^5C_3 3^2(\sqrt{5})^3 + {}^5C_4 3(\sqrt{5})^4 + (\sqrt{5})^5$

আৰু

$(3-\sqrt{5})^5 = 3^5 - {}^5C_1 3^4(\sqrt{5}) + {}^5C_2 3^3(\sqrt{5})^2 - {}^5C_3 3^2(\sqrt{5})^3 + {}^5C_4 3(\sqrt{5})^4 - (\sqrt{5})^5$

$\therefore (3+\sqrt{5})^5 + (3-\sqrt{5})^5 = 2\left[3^5 + {}^5C_2 3^3(\sqrt{5})^2 + {}^5C_4 3(\sqrt{5})^4\right]$

$= 2[243 + 10 \times 27 \times 5 + 5 \times 3 \times 25]$

$= 2[243 + 1350 + 375]$

$= 3936$

8. $\left(2x^2 + \frac{1}{3x}\right)^8$ ৰ বিস্তৃতিত x^4 মুক্ত পদটো নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ

ইয়াত $t_{r+1} = {}^8C_r(2x^2)^{8-r}\left(\frac{1}{3x}\right)^r$

$= {}^8C_r 2^{8-r} x^{16-2r} \frac{1}{3^r x^r}$

$= {}^8C_r \frac{2^{8-r}}{3^r} x^{16-3r}$

এই পদটো x^4 যুক্ত হ'ব যদি $16 - 3r = 4$ বা $x = 4$ হয়।

$\therefore$ x^4 যুক্ত পদটো $= t_{4+1}$

$= {}^8C_4 \frac{2^{8-4}}{3^4} x^4$

$= 70 \times \frac{16}{81} x^4$

$= \frac{1120}{81} x^4$

9. $\left(\frac{x^3}{2} - \frac{2}{x^2}\right)^{10}$ ৰ বিস্তৃতিত x মুক্ত পদটো নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ ইয়াত $t_{r+1} = {}^{10}C_r\left(\frac{x^3}{2}\right)^{10-r}\left(-\frac{2}{x^2}\right)^r$

$= {}^{10}C_r \frac{x^{30-3r}}{2^{10-r}}(-1)^r \frac{2^r}{x^{2r}}$

$$= (-1)^{r}\,{}^{10}C_r\, 2^{r-10-r}\, x^{30-5r}$$

$$= (-1)^{r}\,{}^{10}C_r\, 2^{2r-10}\, x^{30-5r}$$

এই পদটো x মুক্ত হ'ব যদি $30 - 5r = 0$ অৰ্থাৎ $r = 6$ হয়।

$\therefore$ x মুক্ত পদটো $= (-1)^{6}\,{}^{10}C_6\, 2^{2\times 6-10}$

$= {}^{10}C_6 2^2$

$= 210 \times 4$

$= 840$

10. $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^{10}$ ৰ বিস্তৃতিত মধ্যম পদ নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ বিস্তৃতিটোত $10 + 1 = 11$ টা পদ থাকিব।

$\therefore$ মধ্যম পদ $=$ 6ষ্ঠ পদ

$= t_6$

$= t_{5+1}$

$= {}^{10}C_5 x^{10-5}\left(-\dfrac{1}{x}\right)^5$

$= -\ {}^{10}C_5$

11. $\left(\dfrac{x^3}{2}+\dfrac{2}{x^2}\right)^9$ ৰ বিস্তৃতিত শেষৰ পৰা চতুৰ্থ পদটো নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ বিস্তৃতিটোত $9 + 1 = 10$ টা পদ থাকিব। গতিকে শেষৰ পৰা চতুৰ্থ পদটোৱে হ'ল আৰম্ভণিৰ পৰা 7 তম পদ।

$\therefore$ নিৰ্ণেয় পদ $= t_7$

$= t_{6+1}$

$= {}^{9}C_6\left(\dfrac{x^3}{2}\right)^{9-6}\left(\dfrac{2}{x^2}\right)^6$

$$= {}^9C_6 \frac{x^9}{2^3}.\frac{2^6}{x^{12}}$$

$$= 84 \times 2^3 \frac{1}{x^3}$$

$$= \frac{672}{x^3}$$

12. $(a + b)^{10}$ ৰ দ্বিপদ বিস্তৃতিত $(4r + 5)$ তম পদৰ সহগ $(2r + 1)$ তম পদৰ সহগৰ সমান হ'লে r ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ

$$t_{4r+5} = {}^{10}C_{4r+4}a^{10-4r-4}b^{4r+4}$$

আৰু $t_{2r+1} = {}^{10}C_{2r}a^{10-2r}b^{2r}$

প্ৰশ্নমতে, ${}^{10}C_{4r+4} = {}^{10}C_{2r}$

$\Rightarrow 4r + 4 = 2r$ বা $4r + 4 + 2r = 10$

$\Rightarrow r = -2$ বা $r = 1$

কিন্তু $r = -2$ হ'ব নোৱাৰে ($r = -2$ হ'লে $4r + 5 = -3$ হ'ব)

গতিকে $r = 1$

অনুশীলনী

1. তলৰ বিস্তৃতিবোৰত পদৰ সংখ্যা লিখা ঃ

(i) $(3x + 5y)^{11}$ (ii) $\left(2x - \frac{2}{x}\right)^7$

(iii) $(1 + 2x + x^2)^8$ (iv) $\left(\frac{x}{a} + \frac{a}{x}\right)^{25}$

উত্তৰ ঃ (i) 12 (ii) 8 (iii) 17 (iv) 26

2. দ্বিপদ উপপাদ্য প্রয়োগ কৰি তলত দিয়াবোৰৰ বিস্তাৰ কৰা ঃ

(i) $(1 + x)^6$ (ii) $\left(2x - \frac{1}{x^5}\right)^7$ (iii) $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^8$

(iv) $\left(\frac{2x}{3} - \frac{3}{2x}\right)^6$ (v) $(x + y)^{10} + (x - y)^{10}$ (vi) $(2x + 3y)^5$

উত্তৰ ঃ (i) $1 + 6x + 15x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 6x^5 + x^6$

(ii) $128x^7 - 448x + \frac{672}{x^5} - \frac{560}{x^{11}} + \frac{280}{x^{17}} - \frac{84}{x^{23}} + \frac{14}{x^{29}} - \frac{1}{x^{35}}$

(iii) $x^{16} + 8x^{12} + 28x^8 + 56x^4 + 70 + \frac{56}{x^4} + \frac{28}{x^8} + \frac{8}{x^{12}} + \frac{1}{x^{16}}$

(iv) $\frac{64x^6}{729} - \frac{32x^4}{27} + \frac{20x^2}{3} - 20 + \frac{135}{4x^2} - \frac{243}{8x^4} + \frac{729}{64x^6}$

(v) $2x^{10} + 90x^8y^2 + 420x^6y^4 + 420x^4y^6 + 90x^2y^8 + 2y^{10}$

(vi) $32x^5 + 240x^4y + 720x^3y^2 + 1080x^2y^3 + 810xy^4 + 243y^5$

3. দ্বিপদ উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰি মান নিৰ্ণয় কৰা ঃ

(i) 9^6 (ii) 11^5 (iii) 101^7 (iv) 103^4 (v) 98^6 (vi) 99^5

উত্তৰ ঃ (i) 531441 (ii) 161051 (iii) 107213535210701

(iv) 112550881 (v) 885842380864 (vi) 9509900499

4. $\left(2x+\frac{3}{x}\right)^{12}$ ৰ বিস্তৃতিত 6ষ্ঠ পদটো নিৰ্ণয় কৰা।

উত্তৰ ঃ $24634368x^2$

5. $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{17}$ ৰ বিস্তৃতিত ৪তম পদটো নিৰ্ণয় কৰা।

উত্তৰ ঃ ${}^{17}C_7 \frac{1}{x^7}$

6. $\left(1-\frac{3}{x^2}\right)^{10}$ ৰ বিস্তৃতিত 6ষ্ঠ পদটো নিৰ্ণয় কৰা।

উত্তৰ ঃ $-\ {}^{10}C_5 \times \frac{243}{x^{10}}$

7. $\left(x-\frac{1}{x}\right)^n$ ৰ বিস্তৃতিত r তম পদটো নিৰ্ণয় কৰা।

উত্তৰ ঃ $(-1)^{r-1}\ {}^{n}C_{r-1}x^{n-2r+2}$

8. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2n}$ ৰ বিস্তৃতিত n তম পদটো নিৰ্ণয় কৰা।

উত্তৰ ঃ $\frac{\lfloor 2n}{\lfloor n-1 \cdot \lfloor n+1} x^2$

9. $(2x - x^2)^{10}$ ৰ বিস্তৃতিত x^{15} ৰ সহগ নিৰ্ণয় কৰা।

উত্তৰ ঃ – 8064

10. $\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^8$ ৰ বিস্তৃতিত $\frac{1}{x}$ ৰ সহগ নিৰ্ণয় কৰা।

উত্তৰ ঃ – 56

11. $\left(2x+\frac{1}{x^2}\right)^8$ ৰ বিস্তৃতিত x^2ৰ সহগ নিৰ্ণয় কৰা।

উত্তৰ ঃ 1792

12. $\left(x+\frac{a}{x}\right)^{10}$ ৰ বিস্তৃতিত x^4 থকা পদটো নিৰ্ণয় কৰা।

উত্তৰ ঃ $120a^3x^4$

13. $(x^2 - 3x)^{12}$ ৰ বিস্তৃতিত x^{18} থকা পদটো নিৰ্ণয় কৰা।

উত্তৰ ঃ $673596x^{18}$

14. $\left(a^2-\frac{1}{a^2}\right)^{13}$ ৰ বিস্তৃতিত a^{-10} থকা পদটো নিৰ্ণয় কৰা।

উত্তৰ ঃ $-715a^{-10}$

15. $(x - 2y)^{15}$ ত y^7 থকা পদটো নিৰ্ণয় কৰা।

উত্তৰ ঃ $\frac{\lfloor 15}{\lfloor 7 \cdot \lfloor 8} 2^7 x^8 y^7$

16. তলৰ বিস্তৃতিবোৰত মধ্যম পদ (বোৰ) নিৰ্ণয় কৰা ঃ

(i) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{12}$ (ii) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{9}$ (iii) $\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)^{10}$

(iv) $(a + x)^{21}$ (v) $\left(x^3+\frac{1}{x^2}\right)^{7}$ (vi) $(2y + 3x)^8$

উত্তৰ ঃ (i) 924 (ii) $126x$, $\frac{-126}{x}$ (iii) 252

(iv) $352716a^{11}x^{10}$, $352716a^{10}x^{11}$ (v) $35x^6$, $35x$

(vi) $90720x^4y^4$

17. তলৰ বিস্তৃতিবোৰত x মুক্ত পদ নিৰ্ণয় কৰা ঃ

(i) $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^{12}$ (ii) $\left(3x^2\times\frac{1}{3x}\right)^{9}$

(iii) $\left(\sqrt{\frac{x}{3}}+\frac{\sqrt{3}}{2x^2}\right)^{10}$ (iv) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2m}$ (v) $\left(\frac{4x^2}{3}-\frac{3}{2x}\right)^9$

উত্তৰ ঃ (i) 495 (ii) $\frac{28}{9}$ (iii) $\frac{5}{12}$

(iv) $(-1)^m \frac{\lfloor 2m}{(\lfloor m)^2}$ (v) 2268

18. $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{12}$ ৰ বিস্তৃতিত শেষৰ পৰা পঞ্চম পদটো নিৰ্ণয় কৰা।

উত্তৰ ঃ $\frac{495}{x^4}$

19. দ্বিপদ বিস্তৃতি $(a + x)^n$ অত 4ৰ্থ আৰু 13 তম পদ দুটাৰ সহগবোৰ সমান হ'লে n ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

উত্তৰ ঃ 15

20. $\left(\sqrt{x}-\frac{k}{x^2}\right)^{10}$ ৰ বিস্তৃতিত ধ্ৰুৱক পদটো 405 হ'লে k ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

উত্তৰ ঃ ± 3

21. $(x + 1)^{41}$ ৰ বিস্তৃতিত $(2r + 2)$ তম পদৰ সহগৰ লগত $(4r - 1)$ তম পদৰ সহগ সমান হ'লে, r ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

উত্তৰ ঃ 7

22. যদি $(1 - x)^{44}$ ৰ বিস্তৃতিত 21তম আৰু 22তম পদ দুটা সমান হয়, তেন্তে x ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

উত্তৰ ঃ $-\frac{7}{8}$

23. $\left(a+\frac{x}{3}\right)^9$ ৰ বিস্তৃতিত x^2 আৰু x^3 ৰ সহগ সমান হ'লে a ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

উত্তৰ ঃ $\frac{7}{9}$

24. $(x + y)^{11}$ ৰ বিস্তৃতিত x^6y^5 ৰ সহগ নিৰ্ণয় কৰা।

উত্তৰ ঃ 462

25. প্ৰমাণ কৰা যে $(1 + x)^{m+n}$ ৰ বিস্তৃতিত x^m আৰু x^n ৰ সহগ সমান য'ত $m, n \in N$.

26. $(x + x^2)^8$ ৰ বিস্তৃতিত শেষৰ তিনিটা পদ নিৰ্ণয় কৰা।

উত্তৰ ঃ $28x^{14}$, $8x^{15}$, x^{16}

* * *

3.3 মৌলকক্ষ (Matrix)

3.3.1 পাতনি (Introduction) ঃ

প্ৰয়োজন সাপেক্ষে কেতিয়াবা কিছুমান সংখ্যা বা অইন উপাদানক শৃংখলাবদ্ধভাৱে আয়তাকাৰ পদ্ধতিত প্ৰদৰ্শন কৰা হয়। এই ধৰণৰ শৃংখলাবদ্ধ প্ৰদৰ্শনৰ উলম্ব প্ৰদৰ্শনবোৰক স্তম্ভ (column) আৰু অনুভূমিক প্ৰদৰ্শনবোৰক শাৰী (raw) বোলা হয়।

ধৰা হ'ল, আমি তলৰ তথ্যখিনিক এই ধৰণৰ আয়তাকাৰ প্ৰদৰ্শনৰ দ্বাৰা সজাব লাগে— পাপৰিয়ে 10kg চাউল, 5 kg আটা, 3kg চেনি আৰু ৰূপালীয়ে 7kg চাউল, 4kg আটা, 5kg চেনি কিনিলে।

$$\begin{array}{cccccl} & \text{চাউল} & \text{আটা} & \text{চেনি} & & \\ \text{পাপৰি} & \left(10\right. & 5 & \left.3\right) & \rightarrow & \text{প্ৰথম শাৰী} \\ \text{ৰূপালী} & \left(7\right. & 4 & \left.5\right) & \rightarrow & \text{দ্বিতীয় শাৰী} \\ & \downarrow & \uparrow & \uparrow & & \\ & \text{প্ৰথম স্তম্ভ} & \text{দ্বিতীয় স্তম্ভ} & \text{তৃতীয় স্তম্ভ} & & \end{array}$$

নাইবা

$$\begin{array}{cccll} & \text{পাপৰি} & \text{ৰূপালী} & & \\ \text{চাউল} & \left(10\right. & \left.7\right) & \rightarrow & \text{প্ৰথম শাৰী} \\ \text{আটা} & \left(5\right. & \left.4\right) & \rightarrow & \text{দ্বিতীয় শাৰী} \\ \text{চেনি} & \left(3\right. & \left.5\right) & \rightarrow & \text{তৃতীয় শাৰী} \\ & \uparrow & \uparrow & & \\ & \text{প্ৰথম স্তম্ভ} & \text{দ্বিতীয় স্তম্ভ} & & \end{array}$$

এই ধৰণৰ আয়তাকাৰ প্ৰদৰ্শন কিছুমান নিয়ম বা বিধিৰ দ্বাৰা পৰিচালিত কৰিলে তাক মৌলকক্ষ (Matrix) বোলা হয়।

গণিতৰ বিভিন্ন শাখাৰ বাবে মৌলকক্ষৰ জ্ঞান অতিকৈ প্ৰয়োজনীয়। মৌলকক্ষৰ সহায়ত অনেক জটিল গণনা সহজেই সমাধান কৰিব পাৰি। সহ-ৰৈখিক সমীকৰণ সমাধান, গোপন বাৰ্তা প্ৰেৰণ, ব্যৱসায়ত বিক্ৰী সম্পৰ্কীয় বৃহৎ তথ্য অতি সংহতভাৱে প্ৰদৰ্শনৰ ক্ষেত্ৰত মৌলকক্ষৰ বহুলভাৱে ব্যৱহৃত হৈ আহিছে।

এই অধ্যায়ত আমি বিভিন্ন প্ৰকাৰৰ মৌলকক্ষ আৰু মৌলকক্ষৰ বীজগণিতীয় প্ৰয়োগৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিম।

3.3.2 সূত্ৰ ঃ $m\ n$ সংখ্যক উপাদান বা সংখ্যাক m টা শাৰী আৰু n টা স্তম্ভৰ আকৃতিত ( ) বা [ ] বন্ধনীৰ ভিতৰত সজালে তাক এটা $m \times n$ মাত্ৰাৰ (order) (পঢ়োঁতে m by n বুলি পঢ়া হয়।) মৌলকক্ষ (matrix) বোলে। ইংৰাজী বৰফলাৰ A, B, C... আদি আখৰেৰে সাধাৰণতে মৌলকক্ষ সূচোৱা হয়।

যিবিলাক উপাদানেৰে মৌলকক্ষটো গঠিত হয়, সেইবোৰক মৌলকক্ষটোৰ মৌল (elements) বোলা হয়।

যদি মৌলকক্ষটোৰ মৌলবোৰ বাস্তৱ সংখ্যা হয় তেনেহ'লে তাক বাস্তৱ সংখ্যাৰ মৌলকক্ষ (matrix over real numbers) বুলি কোৱা হয়।

টোকা ঃ

ইয়াত আমি কেৱল বাস্তৱ সংখ্যাৰ মৌলকক্ষৰ কথাহে আলোচনা কৰিম।

উদাহৰণস্বৰূপে,

$$A = \begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -8 \end{vmatrix}$$ এটা 3 × 2 মৌলকক্ষ

$$B = \begin{vmatrix} 8 & -7 & 1 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix}$$ এটা 2 × 3 মৌলকক্ষ

$$C = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 9 & -10 \\ \sqrt{3} & 5 & \sqrt{2} \end{vmatrix}$$ এটা 3 × 3 মৌলকক্ষ

3.3.3 $m \times n$ মাত্ৰাৰ মৌলকক্ষ ঃ

তলৰ মৌলকক্ষটো এটা $m \times n$ মাত্ৰাৰ মৌলকক্ষ। ইয়াত m সংখ্যক শাৰী আৰু n সংখ্যক স্তম্ভ আছে।

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots\ldots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \ldots\ldots a_{3n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \quad a_{mn} \end{vmatrix}$$

$m \times n$ মাত্ৰা বিশিষ্ট মৌলকক্ষক অতি সংক্ষেপে $A = (a_{ij})_{m\times n}$ বুলি লিখা হয়। ইয়াত $1 \le i \le m$ আৰু $1 \le j \le n$

টোকা ঃ

(i) a_{ij} হ'ল মৌলকক্ষৰ i-তম শাৰী আৰু j-তম স্তম্ভৰ মৌল।

(ii) মন কৰিবলগীয়া কথা যে, ইয়াত শাৰী বুজোৱা সংখ্যাটো প্ৰথমে আৰু স্তম্ভ বুজোৱা সংখ্যাটো তাৰ পিছত লিখা হয়।

উদাহৰণস্বৰূপে যদি

$$A = \begin{vmatrix} 5 & 6 & -3 \\ 4 & 0 & 8 \\ -9 & 7 & -1 \\ -6 & 2 & -5 \end{vmatrix}$$

এটা মৌলকক্ষ হয়, তেনেহ'লে ইয়াৰ মাত্ৰা হ'ব 4 × 3 আৰু মুঠ মৌলৰ সংখ্যা 4 × 3= 12

ইয়াত
$a_{11} = 5 \quad a_{12} = 6 \quad a_{13} = -3$

$a_{31} = 4 \quad a_{22} = 0 \quad a_{23} = 8$

$a_{31} = -9 \quad a_{32} = 7 \quad a_{33} = -1$

$a_{41} = -6 \quad a_{42} = 2 \quad a_{43} = -5$

ব্যাখ্যামূলক উদাহৰণ (Worked out Example) ঃ

উদাহৰণ 1 ঃ তলৰ তথ্যখিনিয়ে এটা শ্ৰেণীৰ A, B, C তিনিটা শাখাৰ ল'ৰা আৰু ছোৱালীৰ সংখ্যা বুজাইছে।

	ছোৱালী	**ল'ৰা**
A	30	24
B	26	34
C	28	25

এই তথ্যখিনি এটা 3 × 2 মৌলকক্ষৰ দ্বাৰা প্ৰদৰ্শন কৰা। ইয়াৰ তৃতীয় শাৰী আৰু দ্বিতীয় স্তম্ভৰ মৌল কি?

সমাধান ঃ তথ্যখিনি এটা 3 × 2 মৌলকক্ষৰ দ্বাৰা প্ৰদৰ্শন কৰিলে আমি পাওঁ

$$P = \begin{bmatrix} 30 & 24 \\ 26 & 34 \\ 28 & 25 \end{bmatrix}$$

ইয়াৰ তৃতীয় শাৰী আৰু দ্বিতীয় স্তম্ভৰ মৌল হ'ল 25.

উদাহৰণ 2 ঃ এটা মৌলকক্ষৰ মুঠ উপাদানৰ সংখ্যা হ'লে 12, ই কি কি মাত্ৰাবিশিষ্ট হ'ব পাৰে?

সমাধান ঃ আমি জানো যে, এটা মৌলকক্ষ $m \times n$ মাত্ৰাবিশিষ্ট হ'লে ইয়াৰ মৌল সংখ্যা হয় mn. গতিকে 12 টা উপাদান বিশিষ্ট মৌলকক্ষৰ মাত্ৰা নিৰ্ণয় কৰিবলৈ পোন প্ৰথমে সেইবোৰ স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ ক্ৰমিক যোৰ উলিয়াব লাগিব যাৰ সংখ্যা দুটাৰ পূৰণফল 12 হ'ব।

গতিকে সম্ভাব্য ক্ৰমিক যোৰ কেইটা হ'ল— (1, 12), (12, 1), (2, 6), (6, 2), (3, 4), (4, 3)

গতিকে মৌলকক্ষৰ সম্ভাব্য মাত্ৰাসমূহ হ'ল—

$1 \times 12,\ 12 \times 1,\ 2 \times 6,\ 6 \times 2,\ 3 \times 4$ আৰু 4×3

উদাহৰণ 3 ঃ A এটা 2×3 মৌলকক্ষ আৰু ইয়াৰ $a_{ij} = \frac{1}{2}(i^2 - 2_j)$ হ'লে মৌলকক্ষটো সম্পূৰ্ণকৈ লিখা।

সমাধান ঃ A যদি এটা 2×3 মৌলকক্ষ হয় তেনেহ'লে

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

এতিয়া $a_{ij} = \frac{1}{2}(i^2 - 2j)$ $i = 1, 2$

$j = 1, 2, 3$

$$\therefore\ a_{11} = \frac{1}{2}(1^2 - 2) = -\frac{1}{2}, \quad a_{12} = \frac{1}{2}(1^2 - 4) = -\frac{3}{2},$$

$$a_{13} = \frac{1}{2}(1^2 - 6) = -\frac{5}{2},$$

$$a_{21} = \frac{1}{2}(2^2 - 2) = 1, \quad a_{22} = \frac{1}{2}(2^2 - 4) = 0,$$

$$a_{23} = \frac{1}{2}(2^2 - 6) = -1$$

$\therefore$ A মৌলকক্ষটো হ'ব—

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

বিভিন্ন প্ৰকাৰৰ মৌলকক্ষ (Different types of Matrices) ঃ

এতিয়া আমি বিভিন্ন প্ৰকাৰৰ মৌলকক্ষৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিম।

(i) শাৰী মৌলকক্ষ (Raw Matrix) ঃ যিবিলাক মৌলকক্ষৰ মাত্ৰ এটা শাৰী থাকে তেনেধৰণৰ মৌলকক্ষক শাৰী মৌলকক্ষ বোলা হয়।

উদাহৰণস্বৰূপে, $A = [5 \; -6 \; 2 \; 7]$ এটা 1×4 মাত্ৰাৰ শাৰী মৌলকক্ষ

গতিকে $A = \left[a_{ij}\right]_{1\times n}$ এটা $1 \times n$ মাত্ৰাৰ শাৰী মৌলকক্ষ

(ii) **স্তম্ভ মৌলকক্ষ (Column Matrix)** ঃ যিবিলাক মৌলকক্ষৰ মাত্ৰ এটা স্তম্ভ থাকে, তেনেধৰণৰ মৌলকক্ষক স্তম্ভ মৌলকক্ষ বোলা হয়।

উদাহৰণস্বৰূপে, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \\ 8 \end{bmatrix}_{4\times 1}$

এটা 4×1 মাত্ৰাৰ স্তম্ভ মৌলকক্ষ

গতিকে $B = \left[b_{ij}\right]_{m\times 1}$ এটা $m \times 1$ মাত্ৰাৰ স্তম্ভ মৌলকক্ষ।

বৰ্গ মৌলকক্ষ (Square Matrix) ঃ যিবিলাক মৌলকক্ষৰ শাৰী আৰু স্তম্ভৰ সংখ্যা সমান, তেনেধৰণৰ মৌলকক্ষক বৰ্গ মৌলকক্ষ বোলে। গতিকে এটা $m \times n$ মাত্ৰাৰ মৌলকক্ষ বৰ্গ মৌলকক্ষ হ'ব যদিহে $m = n$ আৰু ইয়াক n মাত্ৰাৰ বৰ্গ মৌলকক্ষ বোলা হয়।

উদাহৰণস্বৰূপে,

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ আৰু } \begin{bmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 0 & 5 & -2 \\ -4 & 3 & -7 \end{bmatrix} \text{ ক্ৰমে}$$

2 আৰু 3 মাত্ৰাৰ বৰ্গ মৌলকক্ষ।

টোকা ঃ

যদি $[a_{ij}]$ এটা n মাত্ৰাৰ বৰ্গ মৌলকক্ষ হয়, তেনেহ'লে ইয়াৰ $a_{11}, a_{22}, \ldots\ldots a_{nn}$ এই মৌলকেইটাক বিকৰ্ণ মৌল (diagonal elements) বোলা হয়।

উদাহৰণস্বৰূপে,

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 7 & 1 & 2 \\ 8 & 4 & -9 \end{bmatrix}$$

মৌলকক্ষৰ $-3, 1, -9$ হ'ল বিকৰ্ণ মৌল।

(iv) **শূন্য মৌলকক্ষ (Null or Zero Matrix)** ঃ যিবিলাক মৌলকক্ষৰ প্ৰত্যেক মৌলই শূন্য হ'য়, তেনেধৰণৰ মৌলকক্ষক শূন্য মৌলকক্ষ বোলে।

উদাহৰণস্বৰূপে,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ হ'ল শূন্য মৌলকক্ষ।

টোকা ঃ

(i) শূন্য মৌলকক্ষ সাধাৰণতে ৰে 0 বুজোৰা হয়। অৱশ্যে 0 টো কি মাত্ৰাৰ শূন্য মৌলকক্ষ সেইটো পৰিস্থিতি চাই বুজিব লাগিব।

(ii) শূন্য মৌলকক্ষ আয়তাকাৰ অথবা বৰ্গাকাৰ হ'ব পাৰে।

(v) **বিকৰ্ণ মৌলকক্ষ (Diagonal Matrix)** ঃ

এটা বৰ্গ মৌলকক্ষ $A = (a_{ij})_{n \times n}$-ক বিকৰ্ণ মৌলকক্ষ বুলি কোৱা হয় যদিহে

$$a_{ij} = 0, \; i \neq j$$
$$\neq 0, \; i = j$$

অৰ্থাৎ ইয়াৰ বিকৰ্ণ মৌলসমূহৰ বাহিৰে অইন মৌলবোৰ শূন্য হয়।

উদাহৰণস্বৰূপে $A = [7]$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

1, 2 আৰু 3 মাত্ৰাৰ বিকৰ্ণ মৌলকক্ষ

(vi) **অদিশ মৌলকক্ষ (Scalar Matrix)** ঃ এটা বৰ্গ মৌলকক্ষ $A = (a_{ij})_{n \times n}$ ক অদিশ মৌলকক্ষ বোলা হয় যদিহে,

$$a_{ij} = 0, \text{ যদি } i \neq j$$
$$= k, \text{ যদি } i = j \; (k \text{ এটা অশূন্য ধ্ৰুৱক})$$

অৰ্থাৎ ইয়াৰ বিকৰ্ণ মৌলসমূহৰ মান এটা অশূন্য ধ্ৰুৱক k ৰ সমান আৰু অইন মৌলবোৰ শূন্য হয়।

উদাহৰণস্বৰূপে,

$$A = [4]$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

ক্রমে 1, 2 আৰু 3 মাত্ৰাৰ অদিশ মৌলকক্ষ।

(vii) **একক মৌলকক্ষ (Unit or Identity Matrix) ঃ**

এটা বৰ্গ মৌলকক্ষ $A = (a_{ij})_{n\times n}$ ক একক মৌলকক্ষ কোৱা হয় যদিহে,

$a_{ij} = 1$, যদি $i = j$

$= 0$ যদি $i \neq j$

অৰ্থাৎ ইয়াৰ বিকৰ্ণ মৌলকবোৰৰ মান 1 আৰু অইন মৌলবোৰ শূন্য হয়।

একক মৌলকক্ষক সাধাৰণতে I ৰে বুজোৱা হয়। কিছুমানে n মাত্ৰাৰ একক মৌলকক্ষক I_n ৰেও বুজায়।

উদাহৰণস্বৰূপে $I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ক্রমে 2 আৰু 3 মাত্ৰাৰ একক মৌলকক্ষ।

টোকা ঃ

(i) যদি I_n ব্যৱহাৰ নকৰি I ৰে একক মৌলকক্ষক সূচোৱা হয়, তেনেহ'লে পৰিস্থিতি সাপেক্ষে Iৰ মাত্ৰা কি বুজিব লাগিব।

(ii) প্ৰতিটো একক মৌলকক্ষই এটা অদিশ মৌলকক্ষ। কিন্তু এটা অদিশ মৌলকক্ষ একক মৌলকক্ষ নহয়।

(iii) প্ৰতিটো অদিশ মৌলকক্ষই এটা বিকৰ্ণ মৌলকক্ষ। কিন্তু এটা বিকৰ্ণ মৌলকক্ষ অদিশ মৌলকক্ষ নহয়।

(viii) **ত্ৰিভুজাকৃতিৰ মৌলকক্ষ (Triangular Matrix) ঃ**

এটা বৰ্গাকাৰ মৌলকক্ষৰ বিকৰ্ণ মৌলৰ ওপৰৰ বা তলৰ সমূহ মৌল শূন্য হ'লে মৌলকক্ষটোক ত্ৰিভুজাকৃতিৰ মৌলকক্ষ বোলা হয়।

এটা উচ্চ ত্ৰিভুজাকৃতিৰ মৌলকক্ষৰ বিকৰ্ণ মৌলৰ তলৰ মৌলসমূহ শূন্য আৰু নিম্ন ত্ৰিভুজাকৃতিৰ মৌলকক্ষৰ বিকৰ্ণ মৌলৰ ওপৰৰ মৌলসমূহ শূন্য হয়।

উদাহৰণস্বৰূপে,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

এটা উচ্চ ত্ৰিভুজাকৃতিৰ মৌলকক্ষ

আৰু $$B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

এটা নিম্ন ত্ৰিভুজাকৃতিৰ মৌলকক্ষ

অপ্ৰতিম আৰু অনপ্ৰতিম মৌলকক্ষ (Singular and Non-singular Matrix) ঃ এটা বৰ্গ মৌলকক্ষ A ক অপ্ৰতিম মৌলকক্ষ বোলা হয় যদিহে ইয়াৰ নিৰ্ণায়কৰ মান শূন্য হয়, অৰ্থাৎ $|A| = 0$

আনহাতে, $|A| \neq 0$ হ'লে A-ক অনপ্ৰতিম মৌলকক্ষ বোলা হয়।

উদাহৰণস্বৰূপে, $A = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ এটা অপ্ৰতিম মৌলকক্ষ যিহেতু

$$|A| = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} = -12 + 12 = 0$$

আকৌ $|B| = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$ এটা অনপ্ৰতিম

মৌলকক্ষ যিহেতু

$$|B| = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} = -30 - 3 = -33 \neq 0$$

3.3.6 মৌলকক্ষৰ সমতা (Equality of matrices) ঃ দুটা মৌলকক্ষ A আৰু B সমান বুলি কোৱা হয় যদি

(i) দুয়োটাৰে মাত্ৰা একে হয় আৰু

(ii) অনুৰূপ মৌলবোৰ সমান হয়। মৌলকক্ষ দুটা সমান হ'লে আমি A = B লিখো।

উদাহৰণস্বৰূপে,

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 2 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}$$ আৰু

$$C = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$ হ'লে

ইয়াত $A \neq B$ কাৰণ দুয়োটাৰে মাত্ৰা একে হ'লেও অনুৰূপ মৌলবোৰ সমান নহয়।

আকৌ $A \neq C$ কাৰণ দুয়োৰে মাত্ৰ একে নহয়।

আনহাতে $\begin{pmatrix} a & b \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ c & d \end{pmatrix}$

হ'লে $a = -2,\ b = 6,\ c = 5,\ d = 4$

উদাহৰণ 4 ঃ যদি $\begin{bmatrix} x+3 & 2z-7 & 3y+1 \\ -8 & a-2 & 0 \\ b+4 & -17 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0 & 3 & -11 \\ -8 & 5 & 2c-4 \\ 2b+5 & -17 & 0 \end{bmatrix}$ হয়

তেনেহ'লে a, b, c, x, y আৰু z ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ যিহেতু মৌলকক্ষ দুটা সমান, দুয়োৰে অনুৰূপ মৌলবোৰ সমান হ'ব লাগিব। অনুৰূপ মৌলবোৰৰ মানৰ তুলনা কৰি আমি পাওঁ—

$$x + z = 0,\quad 2z - 7 = 3,\quad 3y + 1 = -11$$
$$a - 2 = 5,\quad 2c - 4 = 0 \quad b + 4 = 2b + 5$$

সমাধান কৰি আমি পাওঁ

$$x = -3,\quad z = 5,\quad y = -4$$
$$a = 7,\quad c = 2,\quad b = -1$$

মৌলকক্ষৰ প্ৰাথমিক প্ৰক্ৰিয়া

এতিয়া আমি মৌলকক্ষৰ যোগ, বিয়োগ, মৌলকক্ষক স্কেলাৰেৰে পূৰণ আৰু দুটা মৌলকক্ষৰ পূৰণ— এই চাৰিবিধ প্ৰাথমিক প্ৰক্ৰিয়াৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিম।

3.3.7 মৌলকক্ষৰ যোগ (Addition of Matrices) ঃ

ধৰা হ'ল, দুজন ব্যৱসায়ী A আৰু B য়ে ইটা, বালি আৰু শিল যোগান ধৰে। A য়ে চৌধুৰী ডাঙৰীয়াক 5 গাড়ী ইটা, 3 গাড়ী বালি, 2 গাড়ী শিল আৰু আহমেদ ডাঙৰীয়াক 3 গাড়ী ইটা, 4 গাড়ী বালি আৰু 3 গাড়ী শিল যোগান ধৰে। আনহাতে ব্যৱসায়ী B য়ে চৌধুৰী ডাঙৰীয়াক 3 গাড়ী ইটা, 4 গাড়ী বালি, 3 গাড়ী শিল আৰু আহমেদ ডাঙৰীয়াক 2 গাড়ী ইটা, 2 গাড়ী বালি, 1 গাড়ী শিল যোগান ধৰে।

ওপৰৰ তথ্যখিনি মৌলকক্ষৰ সহায়ত এনেদৰে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি—

	চৌধুৰী ডাঙৰীয়া			আহমেদ ডাঙৰীয়া	
	ব্যৱসায়ী A	ব্যৱসায়ী B		ব্যৱসায়ী A	ব্যৱসায়ী B
ইটা	5	3	ইটা	3	2
বালি	3	4	বালি	4	2
শিল	2	3	শিল	3	1

যদি A আৰু B দুয়োজন ব্যৱসায়ীয়ে যোগান ধৰা মুঠ বস্তুৰ পৰিমাণ জানিবলৈ বিচাৰোঁ, তেনেহ'লে—

ইটা ঃ ব্যৱসায়ী A (5 + 3); ব্যৱসায়ী B(3 + 2)

বালি ঃ ব্যৱসায়ী A(3 + 4); ব্যৱসায়ী B(4 + 2)

শিল ঃ ব্যৱসায়ী A(2 + 3); ব্যৱসায়ী B(3 + 1)

ওপৰোক্ত তথ্যখিনি মৌলকক্ষৰ সহায়ত প্ৰকাশ কৰি পাওঁ

	ব্যৱসায়ী A	ব্যৱসায়ী B
ইটা	5 + 3	3 + 2
বালি	3 + 4	4 + 2
শিল	2 + 3	3 + 1

এই নতুন মৌলকক্ষটো হ'ল ওপৰৰ মৌলকক্ষ দুটাৰ যোগফল। গতিকে দেখা গ'ল যে দুটা মৌলকক্ষৰ অনুৰূপ মৌলবোৰ যোগ কৰিলে মৌলকক্ষ দুটাৰ যোগফল পোৱা যায়। কিন্তু দেখা যায় যে মৌলকক্ষ দুটা একে মাত্ৰাৰ হ'ব লাগিব।

গতিকে দেখা গ'ল যে যদি $A = [a_{ij}]$ আৰু $B = [b_{ij}]$ দুটা একে মাত্ৰাৰ (ধৰা হ'ল $m \times n$) মৌলকক্ষ হয় তেনেহ'লে মৌলকক্ষ দুটাৰ যোগফলক A + B ৰে সূচোৱা হয়।

$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$মৌলকক্ষৰ মাত্ৰাও হ'ল $m \times n$

উদাহৰণ 5 ঃ দিয়া আছে যে

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 7 \\ 4 & 2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$ হয়,

তেনেহ'লে A + B নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ যিহেতু A আৰু B দুয়োটা 3×2 মাত্ৰাৰ মৌলকক্ষ, গতিকে A + B নিৰ্ণয় কৰিব পাৰি আৰু

$$A + B = \begin{bmatrix} -5+6 & 7+(-1) \\ 4+2 & 2+5 \\ 6+3 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 7 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$$

টোকা ঃ

যদি A আৰু B মৌলকক্ষৰ মাত্ৰা একে নহয়, তেনেক্ষেত্ৰত A + B নিৰ্ণয় কৰিব নোৱাৰি। উদাহৰণস্বৰূপে যদি

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ আৰু } B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

2 × 2 আৰু 2 × 3 মাত্ৰাৰ মৌলকক্ষ হয়, আমি A + B নিৰ্ণয় কৰিব নোৱাৰোঁ।

3.3.8 মৌলকক্ষক স্কেলাৰেৰে পূৰণ ঃ

ধৰা হ'ল, আহমেদ ডাঙৰীয়াই ব্যৱসায়ী A আৰু B ক প্ৰতিবিধৰ সামগ্ৰী আগতকৈ দুগুণ হিচাবত যোগান ধৰিবলৈ নিৰ্দেশ দিলে। তেনেহ'লে আমি পাওঁ —

	ব্যৱসায়ী A	ব্যৱসায়ী B
ইটা	2 × 3	2 × 2
বালি	2 × 4	2 × 2
শিল	2 × 3	2 × 1

ওপৰৰ তথ্যখিনি মৌলকক্ষৰ সহায়ত প্ৰকাশ কৰিলে পাওঁ—

$$\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 8 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \text{ এই মৌলকক্ষটো}$$

আগৰ মৌলকক্ষৰ প্ৰতিটো মৌলক 2 ৰে পূৰণ কৰি পোৱা গৈছে।

গতিকে যদি $A = [a_{ij}]$ এটা $m \times n$ মাত্ৰাবিশিষ্ট মৌলকক্ষ আৰু k এটা বাস্তৱ সংখ্যা হয়, তেনেহ'লে A মৌলকক্ষৰ প্ৰতিটো মৌলক k ৰে দ্বাৰা পূৰণ কৰি পোৱা মৌলকক্ষক kA-ৰ দ্বাৰা সূচোৱা হয় আৰু ইয়াক A মৌলকক্ষৰ k ৰ দ্বাৰা স্কেলাৰ পূৰণফল বোলা হয়।

টোকা ঃ

মন কৰিবলগীয়া যে kA ৰ মাত্ৰাও
A মৌলকক্ষৰ সৈতে একেই হ'ব।

উদাহৰণ 6 ঃ যদি $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 9 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ হয়,

তেনেহ'লে 3A নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ দিয়া আছে যে,

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 9 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ 3A = \begin{bmatrix} 12 & 9 & 27 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

3.3.9 মৌলকক্ষৰ যোগাত্মক বিপৰীত ঃ এটা মৌলকক্ষ A ৰ যোগাত্মক বিপৰীতক – A ৰ দ্বাৰা সূচোৱা হয়। সংজ্ঞামতে—

$-A = (-1)A$

অৰ্থাৎ A মৌলকক্ষৰ প্ৰতিটো মৌলৰে চিন (+, –) সলনি কৰি যিটো মৌলকক্ষ পোৱা যায় সেইটোৱেই হ'ল – A.

উদাহৰণস্বৰূপে যদি $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ হয়,

তেনেহ'লে $-A = (-1)A$

$$= (-1)\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

3.3.10 মৌলকক্ষৰ বিয়োগফল (Subtraction of Matrices) ঃ যদি $A = [a_{ij}]$ আৰু $B = [b_{ij}]$ দুটা একে মাত্ৰা $m \times n$ বিশিষ্ট মৌলকক্ষ হয়, তেনেহ'লে মৌলকক্ষ দুটাৰ বিয়োগফল A – B ৰ দ্বাৰা সূচোৱা হয়।

সংজ্ঞামতে, $A - B = [a_{ij} - b_{ij}]$ ও এটা $m \times n$ মাত্ৰাৰ মৌলকক্ষ

অইন ধৰণে ক'বলৈ গ'লে,

$A - B = A + (-1)B$ অৰ্থাৎ A – B হ'ল A আৰু –B মৌলকক্ষৰ যোগফল।

উদাহৰণ 6 ঃযদি $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

আৰু $B = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -4 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

হয়, তেনেহ'লে 3A – 2B মৌলকক্ষ নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ দিয়া আছে

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -4 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$\therefore\ 3A - 2B$

$$= 3\begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} -3 & 6 & -4 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 15 & 12 & 6 \\ 3 & 18 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 & 12 & -8 \\ 10 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 15-(-6) & 12-12 & 6-(-8) \\ 3-10 & 18-4 & 0-6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 21 & 0 & 14 \\ -7 & 14 & -16 \end{bmatrix}$$

উদাহৰণ 7 ঃ যদি $A = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 4 & -2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ আৰু $B = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 5 & 1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$

দুটা মৌলকক্ষ হয়, তেনেহ'লে মৌলকক্ষ X নিৰ্ণয় কৰা যাতে $2A + 3X - 4B = 0$ হয়

সমাধান ঃ দিয়া আছে যে—

$$2A + 3X - 4B = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2X = 4B - 2A$$

$$\Rightarrow \quad X = \frac{1}{3}(4B - 2A) \text{ .... } (1)$$

এতিয়া, $4B - 2A$

$$= \begin{bmatrix} 12 & -12 \\ 20 & 4 \\ -24 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 8 & -4 \\ 10 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -12 \\ 12 & 8 \\ -34 & 2 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ (1) ৰ পৰা

$$X = \frac{1}{3}(4B - 2A)$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -4 & -12 \\ 12 & 8 \\ -34 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4/3 & -4 \\ 4 & 8/3 \\ -34/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

উদাহৰণ 8 ঃ এজন উৎপাদনকাৰীয়ে তিনিবিধ সামগ্ৰী A, B, C দুখন চহৰ ক্ৰমে গুৱাহাটী আৰু দিল্লীৰ বজাৰত বিক্ৰী কৰে। তেওঁৰ 2008 আৰু 2009 চনৰ বাবে বাৰ্ষিক বিক্ৰী এনে ধৰণৰ—

2008

	A	**B**	**C**
গুৱাহাটী	2,000	8,000	10,000
দিল্লী	20,000	4,000	6,000

2009

	A	**B**	**C**
গুৱাহাটী	1,500	6,500	8,000
দিল্লী	14,000	1,500	6,000

(i) প্ৰতিবিধ সামগ্ৰীৰ বিক্ৰীৰ পৰিমাণ 2008 আৰু 2009 চনৰ বাবে একেলগে নিৰ্ণয় কৰা।

(ii) 2008 চনৰ তুলনাত 2009 চনত বিক্ৰীৰ পৰিমাণ প্ৰতিবিধ সামগ্ৰীৰ বাবে কিমান কমিছে নিৰ্ণয় কৰা।

(iii) যদি 2008 চনত লাভৰ পৰিমাণ মুঠ বিক্ৰীৰ 30% হয়, তেনেহ'লে দুয়োখন চহৰত লাভৰ পৰিমাণ কিমান হ'ব?

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, P আৰু Q মৌলকক্ষই ক্ৰমে 2008 আৰু 2009 চনৰ বাবে বিক্ৰীৰ পৰিমাণ সূচাইছে।

$$\therefore\ P = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{matrix} A & B & C \\ \end{matrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 2,000 & 8,000 & 10,000 \\ 20,000 & 4,000 & 6,000 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{গুৱাহাটী} \\ \text{দিল্লী} \end{matrix}$$

(columns: A, B, C)

$$Q = \begin{bmatrix} 1,500 & 6,500 & 8,000 \\ 14,000 & 1,500 & 6,000 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{গুৱাহাটী} \\ \text{দিল্লী} \end{matrix}$$

(i) 2008 আৰু 2009 চনৰ মুঠ বিক্ৰীৰ পৰিমাণ P + Q

$$= \begin{bmatrix} 3,500 & 14,500 & 18,000 \\ 34,000 & 5,500 & 12,000 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{গুৱাহাটী} \\ \text{দিল্লী} \end{matrix}$$

(ii) 2008 চনৰ তুলনাত 2009 চনত হ্ৰাস হোৱা বিক্ৰীৰ পৰিমাণ = P – Q

$$= \begin{bmatrix} 500 & 1,500 & 2,000 \\ 6,000 & 2,500 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{গুৱাহাটী} \\ \text{দিল্লী} \end{matrix}$$

(ii) 2008 চনত দুয়োখন চহৰত প্ৰতিবিধ সামগ্ৰীৰ ক্ষেত্ৰত হোৱা লাভৰ পৰিমাণ

= 30% of P

$$= 0.3 \begin{bmatrix} 2,000 & 8,000 & 10,000 \\ 20,000 & 4,000 & 6,000 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{গুৱাহাটী} \\ \text{দিল্লী} \end{matrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 600 & 2,400 & 3,000 \\ 6,000 & 1,200 & 1,800 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{গুৱাহাটী} \\ \text{দিল্লী} \end{matrix}$$

(স্তম্ভ: A, B, C)

∴ 2008 চনত A, B, C সামগ্ৰীৰ ক্ষেত্ৰত গুৱাহাটী আৰু দিল্লীত হোৱা লাভৰ পৰিমাণ ক্ৰমে— Rs. 600, Rs. 2,400, Rs. 3,000 আৰু Rs. 6,000, Rs. 1,200, Rs. 1,800

3.1.12 মৌলকক্ষৰ পূৰণ (Multiplication of matrices) ঃ

ৰেবা আৰু পম্পিয়ে কলম আৰু বহী কিনিবলৈ একেলগে বজাৰলৈ গ'ল। প্ৰথম দোকানত প্ৰতিটো কলমৰ দাম 16 টকা আৰু প্ৰতিখন বহীৰ দাম 55 টকা। ৰেবাই 3 টা কলম আৰু 8 খন বহী আৰু পম্পিয়ে 6 টা কলম, 12 খন বহী কিনিব খুজিলে প্ৰত্যেকে কিমানকৈ খৰচ কৰিব লাগিব?

দেখা যায় যে ৰেবাই $(6 \times 3 + 55 \times 8) = 458$ টকা আৰু পম্পিয়ে $(6 \times 6 + 55 \times 12) = 696$ টকা খৰচ কৰিব লাগিব

এই তথ্যখিনি মৌলকক্ষৰ দ্বাৰা প্ৰকাশ কৰি পাওঁ—

আৰশ্যকতা (কলম, বহী) — প্ৰতিটোৰ মূল্য (টকা) — মুঠ টকাৰ আৰশ্যকতা

$$\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{ৰেবা} \\ \text{পম্পি} \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 6 \text{ কলম} \\ 55 \text{ বহী} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3\times6+8\times55 \\ 6\times6+12\times55 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 458 \\ 696 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{ৰেবা} \\ \text{পম্পি} \end{matrix}$$

আনহাতে অইন এখন দোকানত যদি প্ৰতিটো কলম আৰু প্ৰতিখন বহীৰ মূল্য ক্ৰমে 5 টকা আৰু 50 টকা হয়, তেনেহ'লে—

আৰশ্যকতা (কলম, বহী) — প্ৰতিটোৰ মূল্য (টকা) — মুঠ টকাৰ আৰশ্যকতা

$$\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{ৰেবা} \\ \text{পম্পি} \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 5 \text{ কলম} \\ 50 \text{ বহী} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3\times6+8\times50 \\ 6\times5+12\times50 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 415 \\ 630 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{ৰেবা} \\ \text{পম্পি} \end{matrix}$$

ওপৰৰ সমূহ তথ্য মৌলকক্ষৰ সহায়ত প্ৰকাশ কৰি পোৱা যায়—

আৰশ্যকতা (কলম, বহী) — প্ৰতিটোৰ মূল্য (টকা) (প্ৰথম দোকান, দ্বিতীয় দোকান) — মুঠ টকাৰ আৰশ্যকতা

$$\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{ৰেবা} \\ \text{পম্পি} \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 55 & 50 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{কলম} \\ \text{বহী} \end{matrix} = \begin{bmatrix} 3\times6+8\times55 & 3\times5+8\times50 \\ 6\times6+12\times55 & 6\times5+12\times50 \end{bmatrix}$$

প্ৰথম দোকান — দ্বিতীয় দোকান

$$= \begin{bmatrix} 458 & 415 \\ 696 & 630 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{ৰেবা} \\ \text{পম্পি} \end{matrix}$$

উপৰোক্ত প্ৰক্ৰিয়াই মৌলকক্ষৰ পূৰণৰ উদাহৰণ সূচায়।

গতিকে দেখা গ'ল যে দুটা মৌলকক্ষ A আৰু B পূৰণ কৰিবলৈ A মৌলকক্ষৰ স্তম্ভৰ সংখ্যা B ৰ শাৰীৰ সংখ্যা সমান হ'ব লাগিব। তদুপৰি AB মৌলকক্ষৰ মৌলসমূহ নিৰ্ণয় কৰিবলৈ A মৌলকক্ষৰ প্ৰতিটো শাৰী আৰু B মৌলকক্ষৰ প্ৰতিটো স্তম্ভৰ অনুৰূপ মৌলসমূহ পূৰণ কৰি তাৰ যোগফল উলিয়াব লাগিব।

গতিকে দুটা মৌলকক্ষ A আৰু B ৰ পূৰণৰ বাবে উপযোগী হ'ব যদিহে প্ৰথম মৌলকক্ষ A ৰ স্তম্ভৰ সংখ্যা = দ্বিতীয় মৌলকক্ষৰ B শাৰীৰ সংখ্যা।

ধৰা হ'ল, $A = [a_{ij}]$ আৰু $B = [b_{jk}]$ ক্ৰমে $m \times n$ আৰু $n \times p$ মাত্ৰাৰ মৌলকক্ষ। তেনেহ'লে সিহঁতৰ পূৰণফল $AB = c$ এটা $m \times p$ মাত্ৰাৰ মৌলকক্ষ হ'ব অৰ্থাৎ $C = [c_{ik}]$

ধৰা হ'ল, আমি AB মৌলকক্ষৰ i-তম শাৰী আৰু k-তম স্তম্ভৰ মৌলটো নিৰ্ণয় কৰিবলৈ বিচাৰিছোঁ।

তেনেহ'লে A মৌলকক্ষৰ i-তম শাৰী = $[a_{i1} \;\; a_{i2} \text{.........} \; a_{in}]$

আৰু B মৌলকক্ষৰ k-তম স্তম্ভ

$$= \begin{bmatrix} b_1k \\ b_2k \\ .... \\ b_nk \end{bmatrix}$$

লৈ তাৰ অনুৰূপ মৌলবোৰ পূৰণ কৰিম। সমূহ পূৰণফল যোগ কৰি আমি AB = C মৌলকক্ষৰ i-তম শাৰী আৰু k-তম স্তম্ভৰ মৌল C_{ik} নিৰ্ণয় কৰিব পাৰিম।

$$C_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2} + a_{i3}b_{3k} + \dots + a_{in}b_{nk}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$$

গতিকে দেখা গ'ল যে

$A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$

$B = \left[b_{jk}\right]_{n \times p}$ দুটা মৌলকক্ষ হ'লে

$AB = \left[c_{jk}\right]_{m \times p}$

য'ত $\quad C_{ik} = \sum_{j=1}^{k} a_{ij} b_{jk}$

উদাহৰণস্বৰূপে $\quad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ আৰু $B = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 4 & 7 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 3}$

দুটা মৌলকক্ষ হ'লে সিহঁতৰ পূৰণফল

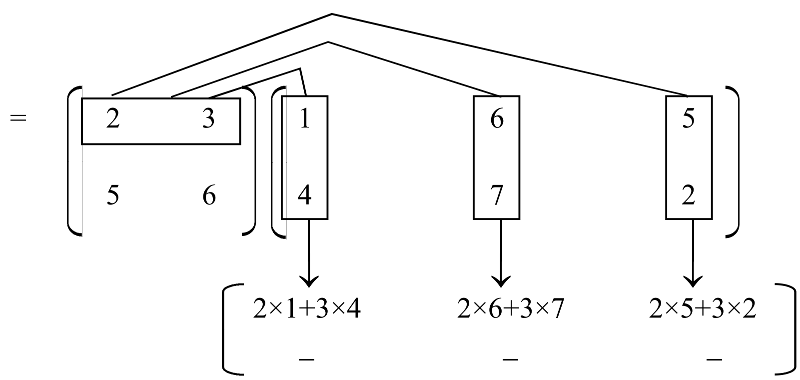
AB হ'ব এটা 2×3 মাত্ৰাৰ মৌলকক্ষ

কিন্তু BA সম্ভৱপৰ নহয়, কিয়নো B ৰ স্তম্ভৰ সংখ্যা $\neq$ A ৰ শাৰীৰ সংখ্য

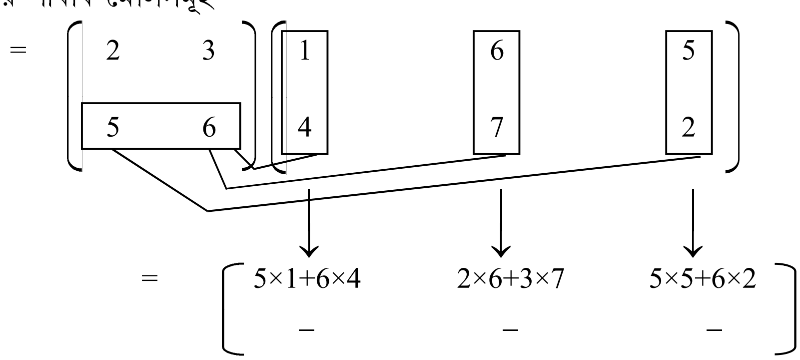
এতিয়া $\quad AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 4 & 7 & 2 \end{bmatrix}$ এটা 2×3

মাত্ৰাৰ মৌলকক্ষ

AB ৰ প্ৰথম শাৰীৰ মৌলসমূহ



AB-ৰ দ্বিতীয় শাৰীৰ মৌলসমূহ



$$= \begin{bmatrix} 18 & 33 & 16 \\ 29 & 72 & 37 \end{bmatrix}$$

টোকা ঃ

(i) দুটা মৌলকক্ষ A আৰু B ৰ পূৰণৰ ক্ষেত্ৰত AB বা BA দুয়োটা নিৰ্ণয় কৰা সম্ভৱপৰ নহ'বও পাৰে।

যদি A আৰু B ক্ৰমে $m \times n$ আৰু $k \times l$ মাত্ৰাৰ মৌলকক্ষ হয়, তেনেহ'লে AB আৰু BA দুয়োটা পূৰণফল নিৰ্ণয় কৰা সম্ভৱ হ'ব যদিহে $n = k$ আৰু $m = l$ হয়।

যদি A আৰু B দুয়োটা একে মাত্ৰাৰ বৰ্গ মৌলকক্ষ হয়, তেনেহ'লে AB আৰু BA দুয়োটা পূৰণফল নিৰ্ণয় কৰাটো সম্ভৱপৰ হ'ব।

(ii) দেখা যায় যে কোনো ক্ষেত্ৰত AB আৰু BA দুয়োটা মৌলকক্ষ নিৰ্ণয় কৰা সম্ভৱপৰ হ'লে AB আৰু BA সমান নহ'বও পাৰে।

উদাহৰণ 9 ঃ যদি $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ আৰু $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$ হ'লে AB আৰু BA নিৰ্ণয় কৰা। AB মৌলকক্ষ BA ৰ সমান হ'বনে?

সমাধান ঃ দিয়া আছে যে

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ আৰু } A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$$

ইয়াত AB আৰু BA দুয়োটা পূৰণফল নিৰ্ণয় কৰা সম্ভৱ আৰু AB আৰু BA দুয়োটা 2×2 মাত্ৰাৰ মৌলকক্ষ

এতিয়া $AB = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 15+6 & 20-36 \\ -3+2 & -4-12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & -16 \\ -1 & -16 \end{bmatrix}$$

আৰু $BA = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 15 & -4 & 18+8 \\ 5 & +6 & 6-12 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & 26 \\ 11 & -6 \end{bmatrix}$$

ইয়াত $AB \neq BA$

টোকা ঃ

(i) ওপৰৰ উদাহৰণৰ পৰা দেখা গ'ল যে AB আৰু BA একে মাত্ৰাৰ হ'লেও $AB \neq BA$

(ii) কিন্তু কোনো ক্ষেত্ৰত AB = BA হ'বও পাৰে। উদাহৰণস্বৰূপে

যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

তেনেহ'লে AB $= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 3+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

আৰু BA $= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 3+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

ইয়াত AB = BA

(iii) কেতিয়াবা দুটা অশূন্য মৌলকক্ষৰ পূৰণফল শূন্য মৌলকক্ষ হ'ব পাৰে।

ধৰা হ'ল, A $= \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

এতিয়া AB $= \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

গতিকে দেখা গ'ল যে দুটা বাস্তৱ সংখ্যাৰ ক্ষেত্ৰত $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ বা $b = 0$

কিন্তু দুটা মৌলকক্ষ A আৰু B ৰ ক্ষেত্ৰত AB = 0 য়ে এইটো নুসূচায় যে A = 0 বা B = 0 হ'ব লাগিব।

3.1.13 মৌলকক্ষৰ পূৰণফলৰ ধৰ্মসমূহ (Properties of Matrix Multiplication) ঃ

1. **সংযোগ বিধি** (Associaive Law) ঃ যিকোনো তিনিটা মৌলকক্ষ A, B আৰু C ৰ ক্ষেত্ৰত (AB) C = A(BC) যদিহে সমান চিনৰ দুয়োপিনে পূৰণফল নিৰ্ণয় সম্ভৱপৰ হয়।
2. **বিতৰণ বিধি** (Distributive Law) ঃ যিকোনো তিনিটা A, B মৌলকক্ষ C আৰু ৰ ক্ষেত্ৰত

   (i) (A + B)C = AC + BC

   (ii) A(B + C) = AB + AC

   যদিহে সমান চিনৰ দুয়োপিনে পূৰণফল নিৰ্ণয় সম্ভৱপৰ হয়।

3. **পূৰণ সাপেক্ষ একক মৌলকক্ষ** (The existence of a multiplicative Identity)

প্ৰতিটো বৰ্গ মৌলকক্ষ A ৰ ক্ষেত্ৰত, একে মাত্ৰাৰ এটা একক মৌলকক্ষ থাকিব যাৰ বাবে

$$AI = IA = A$$

3.1.14 মৌলকক্ষৰ পৰিৱৰ্ত (Transpose of a Matrix) ঃ

ধৰা হ'ল, A এটা $m \times n$ মাত্ৰাৰ মৌলকক্ষ। A মৌলকক্ষৰ শাৰীবোৰ স্তম্ভলৈ আৰু স্তম্ভবোৰ শাৰীলৈ পৰিৱৰ্তন কৰি পোৱা মৌলকক্ষক A ৰ পৰিৱৰ্ত বোলা হয়। ইয়াক A' বা A^T ৰ দ্বাৰা সূচোৱা হয়। মন কৰিবলগীয়া যে A' ৰ মাত্ৰা হ'ব $n \times m$

যদি $A = (a_{ij})_{m \times n}$

তেনেহ'লে $A' = (b_{ij})_{n \times n}$

য'ত $b_{ij} = a_{ji}$

উদাহৰণস্বৰূপে যদি— $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$

তেনেহ'লে $A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -6 & 1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$

মৌলকক্ষৰ পৰিৱৰ্তৰ ধৰ্মসমূহ (Properties of Transpose of a Matrix) ঃ

(i) $(A')' = A$

(ii) $(A + B)' = A' + B'$

(iii) $(AB)' = B'A'$

(iv) যদি k এটা বাস্তৱ সংখ্যা হয়, $(kA)' = kA'$

সমকোণীয় মৌলকক্ষ (Orthogonal Matrix) ঃ

এটা বৰ্গ মৌলকক্ষ A ক সমকোণীয় মৌলকক্ষ বোলা হয় যদিহে $AA' = A'A = I$ হয়, I হ'ল A ৰ সৈতে একে মাত্ৰাৰ একক মৌলকক্ষ।

3.1.15 প্ৰতিসম মৌলকক্ষ (Symmetric Matrix) ঃ

এটা বৰ্গ মৌলকক্ষ A ক প্ৰতিসম বোলা হয় যদিহে $A = A'$ হয়।

áĵ ÆÛSÁ$A = (a_{ij})_{n \times n}$ মৌলকক্ষ প্ৰতিসম হ'ব যদিহে সকলো i, j ৰ বাবে

$$a_{ij} = a_{ji}$$

উদাহৰণস্বৰূপে, $A = \begin{bmatrix} a & h^{a_{12}} & g^{a_{13}} \\ h & b & fa_{23} \\ {}^{a_{21}}g & f_{a_{32}} & c \end{bmatrix}$

এটা প্ৰতিসম মৌলকক্ষ

উদাহৰণ 10 ঃ যদি $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 6 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

আৰু $C = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ হয়, তেনেহ'লে

প্ৰমাণ কৰা যে A(BC) = (AB)C

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 6 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

এতিয়া, BC $= \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 6 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 15-12 & -3+0 \\ 5+18 & -1+0 \\ -10+6 & 2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 23 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ বাওঁপক্ষ = A(BC)

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 23 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3+46-12 & -3-2+6 \\ 12+0-20 & -12+0+10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 37 & 1 \\ -8 & -2 \end{pmatrix}$$

আকৌ $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 6 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 3 & +2 & -6 & -4+12+6 \\ 12 & 0 & -10 & -16+0+10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 14 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$$

সোঁপক্ষ $= (AB)C = \begin{pmatrix} -1 & 14 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -5+42 & 1+0 \\ 10-18 & -2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 & 1 \\ -8 & -2 \end{pmatrix}$$

$\therefore A(BC) = (AB)C$ প্ৰমাণিত হ'ল

উদাহৰণ 11 ঃ যদি $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ হয়

প্ৰমাণ কৰা যে $A^2 = 0$

সমাধান ঃ

[মন কৰিবলগীয়া যে মৌলকক্ষ A ৰ ক্ষেত্ৰত A^2 মানে ইয়াৰ মৌলসমূহৰ বৰ্গ নুবুজায়। A^2 ৰ অৰ্থ হ'ল A.A]

ইয়াত $A^2 = A.A$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+2-3 & 2+4-6 & 3+6-9 \\ 1+2-3 & 2+4-6 & 3+6-9 \\ -1-2+3 & -2-4+6 & -3-6+9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$\therefore A^2 = 0$ প্ৰমাণিত হ'ল।

উদাহৰণ 12 ঃ যদি $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ এটা মৌলকক্ষ হয়, প্ৰমাণ কৰা যে

$$A^3 - 2A^2 + 4A - 18I = 0$$

সমাধান ঃ দিয়া আছে $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\therefore A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-2+2 & 2+0-1 & 1+6+1 \\ -1+0+6 & -2+0-3 & -1+0+3 \\ 2+1+2 & 4+0-1 & 2-3+1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 5 & -5 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

আকৌ $A^3 = A^2.A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 5 & -5 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1-1+16 & 2+0-8 & 1+3+8 \\ 5+5+4 & 10+0-2 & 5-15+2 \\ 5-3+0 & 10+0+0 & 5+9+0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 16 & -6 & 12 \\ 14 & 8 & -8 \\ 2 & 10 & 14 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ বাওঁপক্ষ $= A^3 - 2A^2 + 4A - 18I$

$$= \begin{pmatrix} 16 & -6 & 12 \\ 14 & 8 & -8 \\ 2 & 10 & 14 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 5 & -5 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} - 18\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 16-2+4+18 & -6-2+8-0 & 12-16+4-0 \\ 14-10-4-0 & 8+10+0-18 & -8-4+12-0 \\ 2-10+8-0 & 10-6-4-0 & 14-0+4-18 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$= 0$ সোঁপক্ষ

প্ৰমাণিত হ'ল।

উদাহৰণ 13 ঃ দুটা পৰিয়াল X আৰু Y ত ক্ৰমে 3 জন পুৰুষ, 5 গৰাকী মহিলা, 6 টা শিশু আৰু 2 জন পুৰুষ, 2 গৰাকী মহিলা আৰু 3 টা শিশু আছে। প্ৰতিজন পুৰুষ, মহিলা আৰু শিশুৰ বাবে দৈনিক প্ৰ'টিন শ্বেতসাৰৰ পৰিমাণ এনে ধৰণৰ—

প্ৰ'টিন ঃ পুৰুষ ঃ 50gm মহিলা ঃ 40gm; শিশু ঃ 35gm

শ্বেতসাৰ ঃ পুৰুষ 60gm, মহিলা 45gm, শিশু 25gm

দুয়োটা পৰিয়ালত দৈনিক মুঠ কিমান পৰিমাণৰ প্ৰ'টিন আৰু শ্বেতসাৰৰ প্ৰয়োজন নিৰ্ণয় কৰা (মৌলকক্ষৰ সহায় ল'বা)

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, F = পৰিয়ালৰ মৌলকক্ষ

$$= \begin{pmatrix} x & y \\ 3 & 2 \\ 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \text{পুৰুষ} \\ \text{মহিলা} \\ \text{শিশু} \end{matrix}$$

আৰু R = প্ৰয়োজনীয়তা মৌলকক্ষ

$$\begin{matrix} & \textbf{পুৰুষ} & \textbf{মহিলা} & \textbf{শিশু} & \\ = & \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \end{pmatrix. & \end{matrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 50 & 40 & 35 \\ 60 & 45 & 25 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{প্ৰ'টিন} \\ \text{শ্বেতসাৰ} \end{matrix}$$

$\therefore$ মুঠ প্ৰয়োজনীয়তাৰ মৌলকক্ষ = RF

$$= \begin{bmatrix} 50 & 40 & 35 \\ 60 & 45 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 150+200+210 & 100+80+105 \\ 180+225+150 & 120+90+75 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x & y \\ 560 & 285 \\ 555 & 285 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{প্ৰ'টিন} \\ \text{শ্বেতসাৰ} \end{matrix}$$

$\therefore$ x পৰিয়ালৰ মুঠ প্ৰয়োজন

প্ৰ'টিন = 560gm, শ্বেতসাৰ = 555gm

y পৰিয়ালৰ মুঠ প্ৰয়োজন

প্ৰ'টিন = 285gm, শ্বেতসাৰ = 285gm

টোকা ঃ

ইয়াত FR আৰু RF দুয়োটা পূৰণফলেই নিৰ্ণয় কৰিব পাৰি। FR এটা 3 × 3 মাত্ৰাৰ আৰু RF এটা মাত্ৰাৰ 2×2 মৌলকক্ষ।

কিন্তু আমাক x আৰু y দুটা পৰিয়ালৰ প্ৰ'টিন আৰু শ্বেতসাৰৰ মুঠ পৰিমাণৰ প্ৰয়োজন। সেয়ে RF আমি নিৰ্ণয় কৰিছোঁ কিয়নো RF মৌলকক্ষত মুঠ মৌলৰ পৰিমাণ 2 × 2 = 4

সাৰাংশ (Summary)

* কিছুমান সংখ্যাক শাৰী আৰু স্তম্ভৰ শৃংখলত আয়তকাৰভাৱে সজালে তাকেই মৌলকক্ষ বোলে।
* m শাৰী বিশিষ্ট আৰু n স্তম্ভ বিশিষ্ট মৌলকক্ষক $m \times n$ মাত্ৰাৰ মৌলকক্ষ বোলে।
* $[a_{ij}]_{m\times 1}$ এটা স্তম্ভ মৌলকক্ষ।
* $[a_{ij}]_{1\times n}$ এটা শাৰী মৌলকক্ষ।
* $m \times n$ মাত্ৰাৰ মৌলকক্ষ এটাক বৰ্গ মৌলকক্ষ বোলা হয় যদিহে $m = n$ হয়
* $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ এটা বিকৰ্ণ মৌলকক্ষ হ'ব যদিহে $i \neq j$ হ'লে $a_{ij} = 0$ হয়
* $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ এটা অদিশ মৌলকক্ষ হ'ব যদিহে $i \neq j$ হ'লে $a_{ij} = 0$ হয় আৰু $i = j$ হ'লে $a_{ij} = k$ হয় (ইয়াত k এটা ধ্ৰুৱক ৰাশি)
* $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ এটা একক মৌলকক্ষ হ'ব যদিহে $i \neq j$ হ'লে $a_{ij} = 0$ আৰু $i = j$ হ'লে $a_{ij} = 1$ হয়।
* $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ এটা শূন্য মৌলকক্ষ হ'ব যদিহে সকলো i, j ৰ বাবে $a_{ij} = 0$ হয়।
* দুটা মৌলকক্ষ $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ আৰু $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ সমান হ'ব যদিহে i, j সকলো ৰ বাবে $a_{ij} = b_{ij}$ হয়।
* $kA = k[a_{ij}]_{m\times n} = [k(a_{ij})]_{m\times n}$
* $A + B = B + A$
* $A - B = A + (-1)B$
* যদি $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ আৰু $B = [a_{ij}]_{n\times p}$ দুটা মৌলকক্ষ হয়, তেনেহ'লে

  $AB = C = [c_{iR}]_{m\times n}$

ইয়াত $C_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$

* সাধাৰণতে $AB \neq BA$
* $A(BC) = (AB)C$
* $A(B + C) = AB + AC$
* $(A + B)\,C = AC + BC$
* যদি $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ এটা মৌলকক্ষ হয়, তেনেহ'লে A' বা A^T

  $= [b_{ij}]_{n\times m}$ য'ত $b_{ij} = a_{ji}$
* A এটা প্ৰতিসম মৌলকক্ষ হ'ব যদিহে $(A')' = A$ হয়
* $(A + B)' = A' + B'$
* $(AB)' = B'A'$
* $(kA)' = kA'$, k এটা বাস্তৱ সংখ্যা

প্ৰশ্নমালা 3.3

1. যদি এটা মৌলকক্ষত 12 টা মৌল থাকে, তেনেহ'লে ইয়াৰ সম্ভাব্য মাত্ৰা কি কি হ'ব পাৰে? আকৌ 5 টা মৌল বিশিষ্ট মৌলকক্ষৰ মাত্ৰা কি কি হ'ব লিখা।

2. তলৰ প্ৰতিটো মৌলকক্ষৰ উল্লেখিত মৌলসমূহ লিখা।

(i) $A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & 0 \\ 4 & 3 & 7 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

ৰ $a_{13,}\ a_{22}$ আৰু a_{32}

(ii) $\begin{bmatrix} 2 & -5 & 6 & 8 \\ 0 & 4 & -2 & 1 \\ -4 & 9 & 10 & 7 \end{bmatrix}$

ৰ $b_{14,}\ b_{23}$ আৰু b_{34}

3. (i) 2×3 মাত্ৰাৰ এটা মৌলকক্ষ গঠন কৰা যাৰ বাবে

$$a_{ij} = \frac{2i - j}{i^2}$$

(ii) 4×2 মাত্ৰাৰ এটা মৌলকক্ষ গঠন কৰা

যাৰবাবে $a_{ij} = \frac{j^2}{2}$

যদি $\begin{bmatrix} x - y & 2x + z \\ 2x - y & 3z + w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ হয়,

x, y, z আৰু w ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা

5. যদি $A = \begin{bmatrix} 7 & -4 & 3 \\ -6 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

আৰু $B = \begin{bmatrix} 3 & 8 & -2 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ হয়, তেনেহ'লে

(i) 3A + 4B

আৰু (ii) 2A – 3B মৌলকক্ষ নিৰ্ণয় কৰা।

6. যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

আৰু $C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ হয়

তেনেহ'লে (i) $A + B$

(ii) $3C - A$

(iii) AB

(iv) $C(A + B)$ মৌলকক্ষ উলিওৱা

7. দিয়া আছে $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

হয়, তেনেহ'লে X মৌলকক্ষ নিৰ্ণয় কৰা যাৰ বাবে $3A - 2B + X = 0$ হয়

8. $x\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$ হ'লে, x আৰু y ৰ মান কি হ'ব?

9. (i) x আৰু y দুটা মৌলকক্ষ উলিওৱা যাৰ বাবে

$x + y = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

আৰু $x - y = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ হয়

(ii) যদি $y = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

আৰু $2x + y = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$ হয়,

মৌলকক্ষ X কি হ'ব উলিওৱা।

10. যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} x & 1 \\ y & -1 \end{bmatrix}$ আৰু

$(A + B)^2 = A^2 + B^2$ হয়, x আৰু y ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

11. $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ আৰু $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ হ'লে

›¶± ßÁ±Îû $(aI + bA)^3 = a^3I + 3a^2bA$

12. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ আৰু $C = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

হ'লে দেখুওৱা যে

(i) $A.(B.C) = (A.B).C$

(ii) $(A + B).C = A.C + B.C$

13. দেখুওৱা যে $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ মৌলকক্ষই

$A^2 - (a + d)A + (ad - bc)\, I = 0$

সমীকৰণ সিদ্ধ কৰে।

14. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ মৌলকক্ষৰ বাবে

$A^2 - 5A + 6I$ মৌলকক্ষ উলিওৱা

15. যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ হয়, দেখুওৱা যে

$A^3 - 6A^2 + 7A + 2I = 0$ হ'ব

16. যদি $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ আৰু $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

হয়, তেনেহ'লে বাস্তৱ সংখ্যা k ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা যাতে $A^2 = kA - 2I$ হয়

17. $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ আৰু $B = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$ হ'লে দেখুওৱা যে $(AB)' = B'A'$

18. তিনিটা প্ৰতিষ্ঠান X, Y, Z এ শ্ৰীহাজৰিকাক 30, 25 আৰু 15 ট্ৰাক ইটা আৰু 12, 3 আৰু 7 ট্ৰাক বালি যোগান ধৰে। প্ৰতি ট্ৰাক ইটা আৰু বালিৰ মূল্য ক্ৰমে 5400 টকা আৰু 3000 টকা হ'লে শ্ৰীহাজৰিকাই প্ৰতিটো প্ৰতিষ্ঠানক মুঠ কিমানকৈ আদায় দিয়ে।

19. এখন জিলাত এটা ম'বাইল কোম্পানীৰ 15 টা শাখা কাৰ্যালয় আৰু 45 টা গ্ৰাহক সেৱা কেন্দ্ৰ আছে। প্ৰতিটো শাখা কাৰ্যালয়ত 1 জন বিষয়া, 4 জন সহায়ক, 2 জন কম্পিউটাৰ অপাৰেটৰ আৰু 2 জন পিয়ন থাকে। আনহাতে, প্ৰতিটো গ্ৰাহক সেৱা কেন্দ্ৰত 1 জন সহায়ক, 3 জন কম্পিউটাৰ অপাৰেটৰ আৰু 1 জন পিয়ন থাকে তেওঁলোকৰ মাহিলী দৰমহা এনেধৰণৰ—

পিয়ন ঃ . 2500 টকা; কম্পিউটাৰ অপাৰটেৰ 7200 টকা

সহায়ক ঃ 9500 টকা; বিষয়া ঃ 16,500 টকা

মৌলকক্ষৰ বিভিন্ন প্ৰক্ৰিয়াৰ সহায়ত

(i) প্ৰতিটো শাখা কাৰ্যালয় আৰু গ্ৰাহক সেৱা কেন্দ্ৰৰ মুঠ মাহিলী দৰমহা আৰু

(ii) গোটেই জিলাখনৰ মুঠ মাহিলী দৰমহাৰ পৰিমাণ নিৰ্ণয় কৰা।

উত্তৰমালা 3.3

1. $1 \times 12,\ 12 \times 1,\ 2 \times 6,\ 6 \times 2,\ 3 \times 4,\ 4 \times 3,\ 5 \times 1,\ 1 \times 5$

2. (i) $a_{13} = 0,\ a_{22} = 3,\ a_{32} = 2$

   (ii) $b_{14} = 8,\ b_{23} = -2,\ b_{34} = 7$

3. (i) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

   (ii) $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}$

4. $x = 2,\ y = -1,\ z = 1,\ w = 4$

5. (i) $\begin{bmatrix} 9 & 20 & 1 \\ -18 & -6 & 13 \end{bmatrix}$

   (ii) $\begin{bmatrix} 23 & -32 & 12 \\ -12 & 13 & -14 \end{bmatrix}$

6. (i) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 9 & 2 & 7 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} 11 & 1 & 9 \\ -5 & 9 & 4 \\ 2 & -5 & 8 \end{vmatrix}$

   (iii) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 19 & -5 & 16 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}$ (iv) $\begin{vmatrix} 31 & 4 & 11 \\ 33 & 4 & 29 \\ -5 & -6 & -3 \end{vmatrix}$

7. $X = \begin{vmatrix} -16 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$

8. $x = 3,\ y = -4$

9. (i) $X = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$ $Y = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

(ii) $X = \begin{vmatrix} -1 & -5/2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$

10. $x = 1, y = 4$

14. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & -10 \\ -5 & 4 & 4 \end{vmatrix}$ 16. $k = 1$

18. x = Rs. 1, 98, 000
y = Rs. 1, 44, 000
z = Rs. 1, 02, 000

19. (i) শাখা কাৰ্যালয় = Rs. 73,900
গ্ৰাহক সেৱা কেন্দ্ৰ = Rs. 33,600
(ii) Rs. 26,20,500

* * *