ਗਣਿਤ

(ਅੱਠਵੀਂ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਲਈ)

ਸਰਵ ਸਿੱਖਿਆ ਅਭਿਆਨ

ਪੜ੍ਹੋ ਸਾਰੇ ਵਧੋ ਸਾਰੇ

ਸਿੱਖਿਆ ਅਤੇ ਭਲਾਈ ਵਿਭਾਗ, ਪੰਜਾਬ ਦਾ ਸਾਂਝਾ ਉਪਰਾਲਾ

ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ

ਸਾਹਿਬਜ਼ਾਦਾ ਅਜੀਤ ਸਿੰਘ ਨਗਰ

© ਪੰਜਾਬ ਸਰਕਾਰ

ਪਹਿਲਾ ਐਡੀਸ਼ਨ 2015 .... 3,56,000 ਕਾਪੀਆਂ

[This book has been adopted with the kind permission of the National Council of Educational Research and Training, New Delhi]

All rights, including those of translation, reproduction and annotation etc., are reserved by the Punjab Government.

ਅਨੁਵਾਦਕ : ਸ. ਹਰਪ੍ਰੀਤ ਸਿੰਘ
ਸਰਕਾਰੀ ਮਿਡਲ ਸਕੂਲ, ਧਨਾਲ ਕਲਾਂ, ਜਲੰਧਰ

ਸੰਯੋਜਕ : ਪ੍ਰਿਤਪਾਲ ਸਿੰਘ (ਵਿਸ਼ਾ ਮਾਹਿਰ)
ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ

ਚਿੱਤਰਕਾਰ : ਮਨਜੀਤ ਸਿੰਘ ਢਿੱਲੋਂ

ਚਿਤਾਵਨੀ

1. ਕੋਈ ਵੀ ਏਜੰਸੀ-ਹੋਲਡਰ ਵਾਧੂ ਪੈਸੇ ਵਸੂਲਣ ਦੇ ਮੰਤਵ ਨਾਲ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕਾਂ 'ਤੇ ਜਿਲਦ-ਸਾਜ਼ੀ ਨਹੀਂ ਕਰ ਸਕਦਾ। (ਏਜੰਸੀ-ਹੋਲਡਰਾਂ ਨਾਲ ਹੋਏ ਸਮਝੌਤੇ ਦੀ ਧਾਰਾ ਨੰ. 7 ਅਨੁਸਾਰ)
2. ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ ਦੁਆਰਾ ਛਪਵਾਈਆਂ ਅਤੇ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕਾਂ ਦੇ ਜਾਅਲੀ/ਨਕਲੀ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਨਾਂ (ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕਾਂ) ਦੀ ਛਪਾਈ, ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਨ, ਸਟਾਕ ਕਰਨਾ, ਜਮ੍ਹਾਂਖੋਰੀ ਜਾਂ ਵਿਕਰੀ ਆਦਿ ਕਰਨਾ ਭਾਰਤੀ ਦੰਡ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਫ਼ੌਜਦਾਰੀ ਜੁਰਮ ਹੈ।
(ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ ਦੀਆਂ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕਾਂ ਬੋਰਡ ਦੇ 'ਵਾਟਰ ਮਾਰਕ' ਵਾਲ਼ੇ ਕਾਗਜ਼ ਉੱਪਰ ਹੀ ਛਪਵਾਈਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ।

ਸਰਵ ਸਿੱਖਿਆ ਅਭਿਆਨ
ਪੜ੍ਹੋ ਸਾਰੇ ਵਧੋ ਸਾਰੇ
ਸਿੱਖਿਆ ਅਤੇ ਭਲਾਈ ਵਿਭਾਗ, ਪੰਜਾਬ ਦਾ ਸਾਂਝਾ ਉਪਰਾਲਾ

ਸਕੱਤਰ, ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ, ਵਿੱਦਿਆ ਭਵਨ, ਫੇਜ਼-8, ਸਾਹਿਬਜ਼ਾਦਾ ਅਜੀਤ ਸਿੰਘ ਨਗਰ-160062 ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਅਤੇ ਮੈਸ. ਨੋਵਾ ਪਬਲੀਕੇਸ਼ਨਜ਼, ਸੀ-51, ਫੋਕਲ ਪੁਆਇੰਟ ਐਕਸਟੈਨਸ਼ਨ, ਜਲੰਧਰ ਦੁਆਰਾ ਛਾਪੀ ਗਈ।

NCERT ਦੀ ਪਾਠ ਪੁਸਤਕ ਤਿਆਰ ਕਰਨ ਵਾਲੀ ਕਮੇਟੀ

ਚੇਅਰਪਰਸਨ, ਵਿਗਿਆਨ ਅਤੇ ਗਣਿਤ ਸਲਾਹਕਾਰ ਸਮਿਤੀ (IUCCA)

ਜੈਅੰਤ ਵਿਸ਼ਨੂੰ ਨਾਰਲੀਕਰ, ਇਮਰਿਟਸ ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਚੇਅਰਪਰਸਨ, (IUCCA) ਗਨੇਸ਼ਖਿੰਡ, ਪੂਨਾ ਯੂਨੀਵਰਸਿਟੀ, ਪੂਨਾ (ਮਹਾਂਰਾਸ਼ਟਰ)

ਮੁੱਖ ਸਲਾਹਕਾਰ

ਐਚ.ਕੇ.ਦੀਵਾਨ. ਵਿੱਦਿਆ ਭਵਨ ਸੋਸਾਇਟੀ, ਉਦੈਪੁਰ (ਰਾਜਸਥਾਨ)

ਮੁੱਖ ਕੋਆਰਡੀਨੇਟਰ

ਹੁਕਮ ਸਿੰਘ, ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ ਅਤੇ ਹੈੱਡ, DESM, NCERT, ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ

ਮੈਂਬਰ

ਅਵੰਤਿਕਾ ਦਾਸ, ਟੀ.ਜੀ.ਟੀ., ਸੀ.ਆਈ.ਈ., ਐਕਸਪੇਰੀਮੈਂਟਲ ਸਕੂਲ, ਸਿੱਖਿਆ ਵਿਭਾਗ, ਦਿੱਲੀ ਅੰਜਲੀ ਗੁਪਤਾ, ਅਧਿਆਪਿਕਾ, ਵਿੱਦਿਆ ਭਵਨ ਪਬਲਿਕ ਸਕੂਲ, ਉਦੈਪੁਰ (ਰਾਜਸਥਾਨ) ਆਰ. ਆਤਮਾਰਮਨ, ਗਣਿਤ ਸਿੱਖਿਆ ਸਲਾਹਕਾਰ, ਟੀ.ਆਈ. ਮੈਟ੍ਰਿਕ ਹਾਇਰ ਸੈਕੰਡਰੀ ਸਕੂਲ ਅਤੇ ਏ.ਐਮ.ਟੀ.ਆਈ. ਚੇਨੱਈ (ਤਾਮਿਲਨਾਡੂ)

ਆਸ਼ੂਤੋਸ਼ ਕੇ ਵਝਲਵਾਰ, ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, DESM, NCERT, ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ

ਐੱਚ.ਸੀ.ਪ੍ਰਧਾਨ ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਹੋਮੀ ਭਾਭਾ ਵਿਗਿਆਨ ਸਿੱਖਿਆ ਕੇਂਦਰ, ਟੀ.ਆਈ.ਐੱਫ.ਆਰ. ਮੁੰਬਈ (ਮਹਾਂਰਾਸ਼ਟਰ) ਕੇ.ਏ.ਐੱਸ.ਐੱਸ. ਵੀ ਕਾਮੇਸ਼ਵਰ ਰਾਓ, ਲੈਕਚਰਾਰ, ਰੀਜ਼ਨਲ ਇੰਸਟੀਚਿਊਟ ਆਫ ਐਜੂਕੇਸ਼ਨ, ਸਿਆਮਲਾ ਹਿਲਸ, ਭੋਪਾਲ (M.P.)

ਮਹਿੰਦਰ ਸ਼ੰਕਰ, ਲੈਕਚਰਾਰ (S.G.) NCERT, ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ

ਮੀਨਾ ਸ਼੍ਰੀਮਾਲੀ, ਅਧਿਆਪਿਕਾ, ਵਿੱਦਿਆ ਭਵਨ ਸੀਨੀ. ਸੈਕੰ. ਸਕੂਲ, ਉਦੈਪੁਰ (ਰਾਜਸਥਾਨ)

ਵੀ.ਪੀ.ਸਿੰਘ ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਡੀ.ਈ.ਐੱਸ.ਐਮ. NCERT, ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ

ਸ਼ੈਲੇਜਾ ਸ਼ਿਰਾਲੀ, ਰਿਸ਼ੀ ਵੈਲੀ ਸਕੂਲ, ਰਿਸ਼ੀ ਵੈਲੀ, ਮਦਨ ਪੱਲੀ (A.P.)

ਸੁਰੇਸ਼ ਕੁਮਾਰ ਗੌਤਮ, ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ DESM, NCERT, ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ

ਸ੍ਰੀਜਾਤਾ ਦਾਸ ਸੀਨੀਅਰ ਲੈਕਚਰਾਰ, NCERT, ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ

ਸ਼ਰਦਾ ਅਗਰਵਾਲ, ਪ੍ਰਿੰਸੀਪਲ, ਫਲੋਰਿਟਸ ਇੰਟਰਨੈਸ਼ਨਲ ਸਕੂਲ, ਪਨਕੀ, ਕਾਨਪੁਰ (U.P.)

ਮੈਂਬਰ ਕੋਆਰਡੀਨੇਟਰ

ਆਸ਼ੂਤੋਸ਼ ਕੇ ਵਝਲਵਾਰ, ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, DESM, NCERT, ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ

ਵਿਸ਼ਾ ਸੂਚੀ

ਅਧਿਆਇ 1	ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ	1
ਅਧਿਆਇ 2	ਇੱਕ ਚਲ ਵਾਲੇ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਨ	25
ਅਧਿਆਇ 3	ਚਤੁਰਭੁਜਾਵਾਂ ਨੂੰ ਸਮਝਣਾ	41
ਅਧਿਆਇ 4	ਪ੍ਰਯੋਗਿਕ ਜਿਆਮਿਤੀ	63
ਅਧਿਆਇ 5	ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਪ੍ਰਬੰਧਨ	73
ਅਧਿਆਇ 6	ਵਰਗ ਅਤੇ ਵਰਗਮੂਲ	95
ਅਧਿਆਇ 7	ਘਣ ਅਤੇ ਘਣਮੂਲ	117
ਅਧਿਆਇ 8	ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ	125
ਅਧਿਆਇ 9	ਬੀਜਗਣਿਤਿਕ ਵਿਅੰਜਕ ਅਤੇ ਤਤਸਮਕ	145
ਅਧਿਆਇ 10	ਠੋਸ ਅਕਾਰਾਂ ਦਾ ਚਿਤਰਨ	163
ਅਧਿਆਇ 11	ਖੇਤਰਮਿਤੀ	177
ਅਧਿਆਇ 12	ਘਾਤ ਅੰਕ ਅਤੇ ਘਾਤ	201
ਅਧਿਆਇ 13	ਸਿੱਧਾ ਅਤੇ ਉਲਟ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ	209
ਅਧਿਆਇ 14	ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ	225
ਅਧਿਆਇ 15	ਗਰਾਫ਼ਾਂ ਬਾਰੇ ਜਾਣਕਾਰੀ	241
ਅਧਿਆਇ 16	ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਨਾਲ ਖੇਡਣਾ	259
	ਉੱਤਰਮਾਲਾ	273
	ਦਿਮਾਗੀ ਕਸਰਤ	287

ਅਧਿਆਇ 1

ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ

1.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਸਾਨੂੰ ਸਾਧਾਰਨ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਦਿਖਾਈ ਦਿੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਸਮੀਕਰਨ

$$x + 2 = 13 \qquad (1)$$

ਨੂੰ $x = 11$ ਲਈ ਹੱਲ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ x ਦਾ ਇਹ ਮੁੱਲ ਇਸ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਹੱਲ 11, ਇੱਕ **ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ** ਹੈ। ਦੂਸਰੇ ਪਾਸੇ ਸਮੀਕਰਨ

$$x + 5 = 5 \qquad (2)$$

ਇਸ ਦਾ ਹੱਲ 0 ਹੈ ਜੋ ਇੱਕ **ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ** ਹੈ। ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਸਿਰਫ਼ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਤੱਕ ਹੀ ਸੀਮਿਤ ਰਹੀਏ ਤਾਂ ਸਮੀਕਰਨ (2) ਨੂੰ ਹੱਲ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ। ਸਮੀਕਰਨ (2) ਵਰਗੀਆਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ ਸਿਫ਼ਰ ਨੂੰ ਸ਼ਾਮਿਲ ਕੀਤਾ ਅਤੇ ਇਸ ਨਵੇਂ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਨਾਮ ਦਿੱਤਾ। ਫਿਰ ਵੀ

$$x + 18 = 5 \qquad (3)$$

ਵਰਗੀਆਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵੀ ਕਾਫ਼ੀ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ 'ਕਿਉਂ'? ਸਾਨੂੰ ਸੰਖਿਆ -13 ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਨੇ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ (ਧਨਾਤਮਕ ਅਤੇ ਰਿਣਾਤਮਕ) ਦੇ ਬਾਰੇ ਸੋਚਣ ਲਈ ਪ੍ਰੇਰਿਤ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ, ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੀ ਹਨ। ਤੁਸੀਂ ਸੋਚ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਸਾਰੀਆਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਉਪਲੱਬਧ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਕਾਫ਼ੀ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ। ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ : $2x = 3$ (4)

$$5x + 7 = 0 \qquad (5)$$

ਇਸ ਦਾ ਹੱਲ ਅਸੀਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ (ਇਸਦੀ ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ)।

ਸਮੀਕਰਨ (4) ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ ਸੰਖਿਆ $\frac{3}{2}$ ਅਤੇ ਸਮੀਕਰਨ (5) ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ ਸੰਖਿਆ $\frac{-7}{5}$ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਨਾਲ ਜਾਣੂੰ ਹੁੰਦੇ ਹਾਂ। ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਹੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 'ਤੇ ਮੂਲ ਕਿਰਿਆਵਾਂ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ। ਹੁਣ ਤੱਕ ਅਸੀਂ ਜਿੰਨੀਆਂ ਵੀ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਕਿਸਮਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ। ਉਹਨਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਕੁਝ ਗੁਣ ਲੱਭਣ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

1.2 ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣ

1.2.1 ਬੰਦ (Closure)

(i) ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ

ਆਉ, ਇੱਕ ਵਾਰ ਫਿਰ ਸੰਖੇਪ ਵਿੱਚ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਸਾਰੀਆਂ ਕਿਰਿਆਵਾਂ 'ਤੇ ਬੰਦ ਗੁਣ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਕਿਰਿਆ	ਸੰਖਿਆਵਾਂ	ਟਿੱਪਣੀ
ਜੋੜ	$0 + 5 = 5$, ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। $4 + 7 = ...$ਕੀ ਇਹ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ? ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਕੋਈ ਦੋ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦੇ ਲਈ $a + b$ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।	ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਜੋੜ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਬੰਦ ਹਨ।
ਘਟਾਉ	$5 - 7 = -2$ ਜੋ ਕਿ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ।	ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਘਟਾਉ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਬੰਦ ਨਹੀਂ ਹਨ।
ਗੁਣਾ	$0 \times 3 = 0$, ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। $3 \times 7 = ...$ ਕੀ ਇਹ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ? ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਕੋਈ ਵੀ ਦੋ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਲਈ ਉਸਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ab ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।	ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਗੁਣਨ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਬੰਦ ਹਨ।
ਭਾਗ	$5 \div 8 = \frac{5}{8}$, ਇਹ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ।	ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਭਾਗ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਬੰਦ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਚਾਰੋਂ ਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਬੰਦ ਗੁਣ ਦੀ ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ।

(ii) ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ

ਆਉ, ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 'ਤੇ ਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦੇ ਬੰਦ ਗੁਣ ਦਾ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

ਕਿਰਿਆ	ਸੰਖਿਆਵਾਂ	ਟਿੱਪਣੀ
ਜੋੜ	$-6 + 5 = -1$, ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਕੀ $-7 + (-5)$ ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ? ਕੀ $8 + 5$ ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ? ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਕੋਈ ਦੋ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦੇ ਲਈ $a + b$ ਵੀ ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।	ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਜੋੜ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਬੰਦ ਹਨ।

ਘਟਾਉ	$7 - 5 = 2$, ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਕੀ $5 - 7$ ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ? $-6 - 8 = -14$, ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। $-6 - (-8) = 2$, ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਕੀ $8 - (-6)$ ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ? ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਕੋਈ ਦੋ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦੇ ਲਈ $a - b$ ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ ਕਿ $b - a$ ਵੀ ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।	ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਘਟਾਉ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਬੰਦ ਹਨ।
ਗੁਣਾ	$5 \times 8 = 40$, ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਕੀ -5×8 ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ? $-5 \times (-8) = 40$, ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਕੋਈ ਦੋ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦੇ ਲਈ $a \times b$ ਵੀ ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।	ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਗੁਣਨ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਬੰਦ ਹਨ।
ਭਾਗ	$5 \div 8 = \frac{5}{8}$, ਇਹ ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ।	ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਭਾਗ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਬੰਦ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਤੁਸੀਂ ਦੇਖਿਆ ਹੈ ਕਿ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਜੋੜ ਅਤੇ ਗੁਣਾ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਬੰਦ ਹਨ ਪਰ ਭਾਗ ਅਤੇ ਘਟਾਉ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਬੰਦ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਦੂਜੇ ਪਾਸੇ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਜੋੜ, ਘਟਾਉ ਅਤੇ ਗੁਣਾ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਬੰਦ ਹਨ। ਪਰ ਭਾਗ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਬੰਦ ਨਹੀਂ ਹਨ।

(iii) ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ

ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਉਹ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜਿਸ ਨੂੰ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕੇ। ਜਦ ਕਿ p ਅਤੇ q **ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ** ਹਨ ਅਤੇ $q \neq 0$ ਹੈ। ਜਿਵੇਂ ਕਿ $-\frac{2}{3}, \frac{6}{7}$ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ। ਕਿਉਂਕਿ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $0, -2, 4$, $\frac{p}{q}$, ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੀਆਂ ਜਾ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਵੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ। (ਇਸਦੀ ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ।)

(a) ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜੋੜਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਆਉ ਕੁਝ ਜੋੜਿਆਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

$$\frac{3}{8} + \frac{(-5)}{7} = \frac{21 + (-40)}{56} = \frac{-19}{56}$$ (ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ)

$$\frac{-3}{8} + \frac{(-4)}{5} = \frac{-15 + (-32)}{40} = \ldots$$ (ਕੀ ਇਹ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ?)

$$\frac{4}{7} + \frac{6}{11} = \ldots$$ (ਕੀ ਇਹ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ?)

ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦੋ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਵੀ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਕੁਝ ਹੋਰ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜਿਆਂ ਦੇ ਲਈ ਇਸਦੀ ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਅਸੀਂ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ *ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਜੋੜ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਬੰਦ ਹਨ। ਜਾਂ ਕੋਈ ਦੋ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦੇ ਲਈ $a + b$ ਵੀ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।*

(b) ਕੀ ਦੋ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਅੰਤਰ ਵੀ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੋਵੇਗਾ ?

ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, $\frac{-5}{7} - \frac{2}{3} = \frac{-5 \times 3 - 2 \times 7}{21} = \frac{-29}{21}$ (ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ?)

$\frac{5}{8} - \frac{4}{5} = \frac{25 - 32}{40} = \ldots$ (ਕੀ ਇਹ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ?)

$\frac{3}{7} - \left(\frac{-8}{5}\right) = \ldots$ (ਕੀ ਇਹ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ?)

ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਕੁਝ ਹੋਰ ਜੋੜਿਆਂ ਦੇ ਲਈ ਇਸਦੀ ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਲੱਗਦਾ ਹੈ ਕਿ *ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਘਟਾਉ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਬੰਦ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੋਈ ਦੋ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦੇ ਲਈ $a - b$ ਵੀ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।*

(c) ਆਉ, ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਦੋ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

$\frac{-2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{-8}{15}$; $\frac{3}{7} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{35}$ (ਦੋਨੋਂ ਗੁਣਨਫਲ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ।)

$-\frac{4}{5} \times \frac{-6}{11} = \ldots$ (ਕੀ ਇਹ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ?)

ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਕੁਝ ਹੋਰ ਜੋੜੇ ਲਓ ਅਤੇ ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ ਕਿ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਵੀ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇਹ ਦੱਸ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ *ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਗੁਣਨ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਬੰਦ ਹਨ। ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਦੋ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦੇ ਲਈ $a \times b$ ਵੀ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।*

(d) ਅਸੀਂ ਨੋਟ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\frac{-5}{3} \div \frac{2}{5} = \frac{-25}{6}$ (ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।)

$\frac{2}{7} \div \frac{5}{3} = \ldots$ (ਕੀ ਇਹ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ?)

$\frac{-3}{8} \div \frac{-2}{9} = \ldots$ (ਕੀ ਇਹ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ?)

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਦੱਸ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਭਾਗ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਬੰਦ ਹਨ ? ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕਿਸੇ ਵੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ a ਦੇ ਲਈ $a \div 0$ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਭਾਗ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਬੰਦ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਪਰ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਸਿਫ਼ਰ ਨੂੰ ਸ਼ਾਮਿਲ ਨਹੀਂ ਕਰਦੇ, ਤਾਂ ਦੂਸਰੀ ਸਾਰੀਆਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ, ਭਾਗ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਬੰਦ ਹਨ।

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਖ਼ਾਲੀ ਥਾਵਾਂ ਭਰੋ :

ਸੰਖਿਆਵਾਂ	ਅੰਤਰਗਤ ਬੰਦ ਹਨ			
	ਜੋੜ ਦੇ	ਘਟਾਉ ਦੇ	ਗੁਣਾ ਦੇ	ਭਾਗ ਦੇ
ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ	ਹਾਂ	ਹਾਂ	...	ਨਹੀਂ
ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ	...	ਹਾਂ	...	ਨਹੀਂ
ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ	...	...	ਹਾਂ	...
ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ	...	ਨਹੀਂ	...	...

1.2.2 ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਯੋਗਤਾ

(i) ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਖ਼ਾਲੀ ਸਥਾਨਾਂ ਨੂੰ ਭਰਦੇ ਹੋਏ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਯੋਗਤਾ ਨੂੰ ਯਾਦ ਕਰੋ :

ਕਿਰਿਆ	ਸੰਖਿਆਵਾਂ	ਟਿੱਪਣੀ
ਜੋੜ	$0 + 7 = 7 + 0 = 7$ $2 + 3 = ... + ... = ...$ ਕੋਈ ਦੋ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦੇ ਲਈ $a + b = b + a$	ਜੋੜ ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਯੋਗ ਹੈ।
ਘਟਾਉ	....	ਘਟਾਉ ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਯੋਗ ਨਹੀਂ ਹੈ।
ਗੁਣਾ	....	ਗੁਣਾ ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਯੋਗ ਹੈ।
ਭਾਗ	....	ਭਾਗ ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਯੋਗ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ ਕਿ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਵੀ ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਯੋਗ ਹੈ।

(ii) ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਖ਼ਾਲੀ ਸਥਾਨਾਂ ਨੂੰ (ਭਰੋ ਅਤੇ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦੀ ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਯੋਗਤਾ ਦੀ ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ।)

ਕਿਰਿਆ	ਸੰਖਿਆਵਾਂ	ਟਿੱਪਣੀ
ਜੋੜ	....	ਜੋੜ ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਯੋਗ ਹੈ।
ਘਟਾਉ	ਕੀ $5 - (-3) = -3 - 5$?	ਘਟਾਉ ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਯੋਗ ਨਹੀਂ ਹੈ।
ਗੁਣਾ	....	ਗੁਣਾ ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਯੋਗ ਹੈ।
ਭਾਗ	....	ਭਾਗ ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਯੋਗ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(iii) ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ

(a) ਜੋੜ

ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜੋੜਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਆਉ, ਅਸੀਂ ਇੱਥੇ ਕੁਝ ਜੋੜਿਆਂ ਨੂੰ ਜੋੜਦੇ ਹਾਂ।

$$\frac{-2}{3}+\frac{5}{7}=\frac{1}{21} \text{ ਅਤੇ } \frac{5}{7}+\left(\frac{-2}{3}\right)=\frac{1}{21}$$

ਇਸ ਲਈ, $\frac{-2}{3}+\frac{5}{7}=\frac{5}{7}+\left(\frac{-2}{3}\right)$

ਇਸਦੇ ਇਲਾਵਾ $\frac{-6}{5}+\left(\frac{-8}{3}\right)=\ldots$ ਅਤੇ $\frac{-8}{3}+\left(\frac{-6}{5}\right)=\ldots$

ਕੀ $\frac{-6}{5}+\left(\frac{-8}{3}\right)=\left(\frac{-8}{3}\right)+\left(\frac{-6}{5}\right)$?

ਕੀ $\frac{-3}{8}+\frac{1}{7}=\frac{1}{7}+\left(\frac{-3}{8}\right)$?

ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ ਦੋ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਕਿਸੀ ਵੀ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਜੋੜਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਜੋੜ ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਯੋਗ ਹੈ। ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦੇ ਲਈ $a+b=b+a$

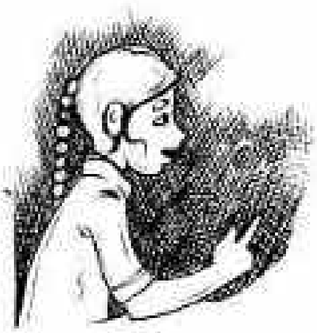
(b) ਘਟਾਉ

ਕੀ $\frac{2}{3}-\frac{5}{4}=\frac{5}{4}-\frac{2}{3}$ ਹੈ?

ਕੀ $\frac{1}{2}-\frac{3}{5}=\frac{3}{5}-\frac{1}{2}$ ਹੈ?

ਤੁਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰੋਗੇ ਕਿ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਘਟਾਉ ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਯੋਗ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(c) ਗੁਣਾ



ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ, $\frac{-7}{3}\times\frac{6}{5}=\frac{-42}{15}=\frac{6}{5}\times\left(\frac{-7}{3}\right)$

ਕੀ $\frac{-8}{9}\times\left(\frac{-4}{7}\right)=\frac{-4}{7}\times\left(\frac{-8}{9}\right)$ ਹੈ?

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੁਝ ਹੋਰ ਗੁਣਨਫਲਾਂ ਦੀ ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ।

ਤੁਸੀਂ ਵੇਖੋਗੇ ਕਿ *ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਗੁਣਨ ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਯੋਗ ਹੈ। ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਕੋਈ ਦੋ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦੇ ਲਈ $a\times b=b\times a$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।*

(d) ਭਾਗ

ਕੀ $\frac{-5}{4}\div\frac{3}{7}=\frac{3}{7}\div\left(\frac{-5}{4}\right)$ ਹੈ?

ਆਪ ਵੇਖੋਗੇ ਕਿ ਦੋਵੇਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦੇ ਵਿਅੰਜਕ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਭਾਗ ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਯੋਗ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਖ਼ਾਲੀ ਥਾਵਾਂ ਭਰੋ :

ਸੰਖਿਆਵਾਂ	ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਯੋਗ			
	ਜੋੜ ਦੇ ਲਈ	ਘਟਾਉ ਦੇ ਲਈ	ਗੁਣਾ ਦੇ ਲਈ	ਭਾਗ ਦੇ ਲਈ
ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ	ਹਾਂ	...	...	...
ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ	...	ਨਹੀਂ	...	...
ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ	...	...	ਹਾਂ	...
ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ	...	...	...	ਨਹੀਂ

1.2.3 ਸਹਿਚਾਰਿਤਾ

(i) ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਣੀ ਦੇ ਮਾਧਿਅਮ ਰਾਹੀਂ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਚਾਰ ਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦੀ ਸਹਿਚਾਰਿਤਾ ਨੂੰ ਯਾਦ ਕਰੋ।

ਕਿਰਿਆ	ਸੰਖਿਆਵਾਂ	ਟਿੱਪਣੀ
ਜੋੜ	....	ਜੋੜ ਸਹਿਚਰ ਹੈ।
ਘਟਾਉ	....	ਘਟਾਉ ਸਹਿਚਰ ਨਹੀਂ ਹੈ।
ਗੁਣਾ	ਕੀ $7 \times (2 \times 5) = (7 \times 2) \times 5$? ਕੀ $4 \times (6 \times 0) = (4 \times 6) \times 0$? ਕੋਈ ਤਿੰਨ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a, b ਅਤੇ c ਦੇ ਲਈ $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$	ਸਹਿਚਰ ਹੈ।
ਭਾਗ	....	ਭਾਗ ਸਹਿਚਰ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਇਸ ਸਾਰਣੀ ਨੂੰ ਭਰੋ ਅਤੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਟਿੱਪਣੀਆਂ ਦੀ ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ।

ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਲਈ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦੀ ਆਪ ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ।

(ii) ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ

ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਈ ਚਾਰ ਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦੀ ਸਹਿਚਾਰਿਤਾ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਦੇਖੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ :

ਕਿਰਿਆ	ਸੰਖਿਆਵਾਂ	ਟਿੱਪਣੀ
ਜੋੜ	ਕੀ $(-2) + [3 + (-4)]$ $= [(-2) + 3)] + (-4)$ ਹੈ?	ਜੋੜ ਸਹਿਚਰ ਹੈ।

	ਕੀ $(-6) + [(-4) + (-5)]$ $= [(-6) + (-4)] + (-5)$ ਹੈ ? ਕੋਈ ਤਿੰਨ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a, b ਅਤੇ c ਦੇ ਲਈ $a + (b + c) = (a + b) + c$	
ਘਟਾਉ	ਕੀ $5 - (7 - 3) = (5 - 7) - 3$ ਹੈ ?	ਘਟਾਉ ਸਹਿਚਰ ਨਹੀਂ ਹੈ।
ਗੁਣਾ	ਕੀ $5 \times [(-7) \times (-8)]$ $= [5 \times (-7)] \times (-8)$ ਹੈ ? ਕੀ $(-4) \times [(-8) \times (-5)]$ $= [(-4) \times (-8)] \times (-5)$ ਹੈ ? ਕੋਈ ਤਿੰਨ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a, b ਅਤੇ c ਦੇ ਲਈ $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$	ਗੁਣਾ ਸਹਿਚਰ ਹੈ।
ਭਾਗ	ਕੀ $[(-10) \div 2] \div (-5)$ $= (-10) \div [2 \div (-5)]$ ਹੈ ?	ਭਾਗ ਸਹਿਚਰ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(iii) ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ

(a) ਜੋੜ

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ :

$$\frac{-2}{3}+\left[\frac{3}{5}+\left(\frac{-5}{6}\right)\right]=\frac{-2}{3}+\left(\frac{-7}{30}\right)=\frac{-27}{30}=\frac{-9}{10}$$

$$\left[\frac{-2}{3}+\frac{3}{5}\right]+\left(\frac{-5}{6}\right)=\frac{-1}{15}+\left(\frac{-5}{6}\right)=\frac{-27}{30}=\frac{-9}{10}$$

ਇਸ ਲਈ, $\frac{-2}{3}+\left[\frac{3}{5}+\left(\frac{-5}{6}\right)\right]=\left[\frac{-2}{3}+\frac{3}{5}\right]+\left(\frac{-5}{6}\right)$

ਪਤਾ ਕਰੋ $\frac{-1}{2}+\left[\frac{3}{7}+\left(\frac{-4}{3}\right)\right]$ ਅਤੇ $\left[\frac{-1}{2}+\frac{3}{7}\right]+\left(\frac{-4}{3}\right)$

ਕੀ ਦੋਨੋਂ ਜੋੜਫਲ ਬਰਾਬਰ ਹਨ ?

ਕੁਝ ਹੋਰ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਵੋ, ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਜੋੜੋ ਅਤੇ ਦੇਖੋ ਕਿ ਦੋਨੋਂ ਜੋੜ ਸਮਾਨ ਹਨ। ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ *ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਜੋੜਫਲ ਸਹਿਚਰ ਹੈ, ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a, b ਅਤੇ c ਦੇ ਲਈ $a + (b + c) = (a + b) + c$*

(b) ਘਟਾਉ

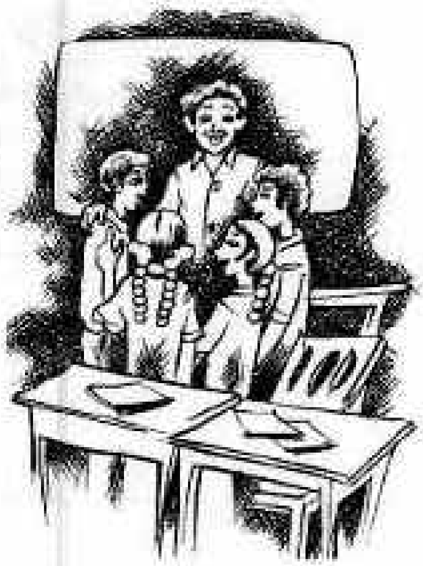
ਕੀ $\frac{-2}{3}-\left[\frac{-4}{5}-\frac{1}{2}\right]=\left[\frac{2}{3}-\left(\frac{-4}{5}\right)\right]-\frac{1}{2}$ ਹੈ ?

ਆਪਣੇ ਆਪ ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ।

ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਘਟਾਉ *ਸਹਿਚਰ ਨਹੀਂ* ਹੈ।

(c) ਗੁਣਾ

ਆਉ, ਅਸੀਂ ਗੁਣਨ ਦੇ ਲਈ ਸਹਿਚਾਰਿਤਾ ਦੀ ਪੜਤਾਲ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।



$$\frac{-7}{3}\times\left(\frac{5}{4}\times\frac{2}{9}\right)=\frac{-7}{3}\times\frac{10}{36}=\frac{-70}{108}=\frac{-35}{54}$$

$$\left(\frac{-7}{3}\times\frac{5}{4}\right)\times\frac{2}{9}=...$$

ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\frac{-7}{3}\times\left(\frac{5}{4}\times\frac{2}{9}\right)=\left(\frac{-7}{3}\times\frac{5}{4}\right)\times\frac{2}{9}$

ਕੀ $\frac{2}{3}\times\left(\frac{-6}{7}\times\frac{4}{5}\right)=\left(\frac{2}{3}\times\frac{-6}{7}\right)\times\frac{4}{5}$ ਹੈ ?

ਕੁਝ ਹੋਰ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਵੋ ਅਤੇ ਆਪ ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ। ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਗੁਣਨ ਸਹਿਚਰ ਹੈ। *ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਤਿੰਨ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a, b ਅਤੇ c ਦੇ ਲਈ $a\times(b\times c)=(a\times b)\times c$*

(d) ਭਾਗ

ਆਉ, ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$\frac{1}{2}\div\left[\frac{-1}{3}\div\frac{2}{5}\right]=\left[\frac{1}{2}\div\left(\frac{-1}{3}\right)\right]\div\frac{2}{5}$ ਹੈ ? ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ,

ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ (L.H.S) $=\frac{1}{2}\div\left(\frac{-1}{3}\div\frac{2}{5}\right)$

$=\frac{1}{2}\div\left(\frac{-1}{3}\times\frac{5}{2}\right)$ ($\frac{2}{5}$ ਦਾ ਉਲਟਕ੍ਰਮ $\frac{5}{2}$ ਹੈ)

$=\frac{1}{2}\div\left(-\frac{5}{6}\right)$

$=...$

ਹੁਣ ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ (R.H.S) $=\left[\frac{1}{2}\div\left(\frac{-1}{3}\right)\right]\div\frac{2}{5}$

$=\left(\frac{1}{2}\times\frac{-3}{1}\right)\div\frac{2}{5}$

$=\frac{-3}{2}\div\frac{2}{5}=...$

ਕੀ L.H.S. = R.H.S. ਹੈ ? ਆਪਣੇ ਆਪ ਜਾਂਚ ਕਰੋ। ਤੁਸੀਂ ਦੇਖੋਗੇ ਕਿ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਭਾਗ ਸਹਿਚਰ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਖਾਲੀ ਥਾਵਾਂ ਭਰੋ :

ਸੰਖਿਆਵਾਂ	ਸਹਿਚਰ			
	ਜੋੜ ਦੇ ਲਈ	ਘਟਾਉ ਦੇ ਲਈ	ਗੁਣਾ ਦੇ ਲਈ	ਭਾਗ ਦੇ ਲਈ
ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ	...	...	...	ਨਹੀਂ
ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ	...	...	ਹਾਂ	...
ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ	ਹਾਂ	...	...	...
ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ	...	ਨਹੀਂ	...	...

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਹੱਲ ਕਰੋ : $\frac{3}{7}+\left(\frac{-6}{11}\right)+\left(\frac{-8}{21}\right)+\left(\frac{5}{22}\right)$

ਹੱਲ : $\frac{3}{7}+\left(\frac{-6}{11}\right)+\left(\frac{-8}{21}\right)+\left(\frac{5}{22}\right)$

$$=\frac{198}{462}+\left(\frac{-252}{462}\right)+\left(\frac{-176}{462}\right)+\left(\frac{105}{462}\right)$$

(ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ 7, 11, 21 ਅਤੇ 22 ਦਾ ਲ.ਸ.ਵ. 462 ਹੈ।)

$$=\frac{198-252-176+105}{462}=\frac{-125}{462}$$

ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਢੰਗ ਨਾਲ ਵੀ ਹੱਲ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

$$\frac{3}{7}+\left(\frac{-6}{11}\right)+\left(\frac{-8}{21}\right)+\frac{5}{22}$$

$$=\left[\frac{3}{7}+\left(\frac{-8}{21}\right)\right]+\left[\frac{-6}{11}+\frac{5}{22}\right]$$ (ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਯੋਗਤਾ ਤੇ ਸਹਿਚਾਰਿਤਾ ਦੇ ਗੁਣਾ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਨਾਲ)

$$=\left[\frac{9+(-8)}{21}\right]+\left[\frac{-12+5}{22}\right]$$

(7 ਅਤੇ 21 ਦਾ ਲ.ਸ.ਵ. 21 ਹੈ। 11 ਅਤੇ 22 ਦਾ ਲ.ਸ.ਵ. 22 ਹੈ।)

$$=\frac{1}{21}+\left(\frac{-7}{22}\right)=\frac{22-147}{462}=\frac{-125}{462}$$

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਸੋਚਦੇ ਹੋ ਕਿ ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਯੋਗਤਾ ਅਤੇ ਸਹਿਚਾਰਿਤਾ ਦੇ ਗੁਣਾ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਹੱਲ ਕਰਨਾ ਸੌਖਾ ਹੋ ਗਿਆ ਹੈ ?

ਉਦਾਹਰਣ 2 : $\frac{-4}{5}\times\frac{3}{7}\times\frac{15}{16}\times\left(\frac{-14}{9}\right)$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਹੈ,

$$\frac{-4}{5}\times\frac{3}{7}\times\frac{15}{16}\times\left(\frac{-14}{9}\right)$$

$$=\left(-\frac{4\times3}{5\times7}\right)\times\left(\frac{15\times(-14)}{16\times9}\right)$$

$$=\frac{-12}{35}\times\left(\frac{-35}{24}\right)=\frac{-12\times(-35)}{35\times24}=\frac{1}{2}$$

ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਵੀ ਹੱਲ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

$$\frac{-4}{5}\times\frac{3}{7}\times\frac{15}{16}\times\left(\frac{-14}{9}\right)$$

$$=\left(\frac{-4}{5}\times\frac{15}{16}\right)\times\left[\frac{3}{7}\times\left(\frac{-14}{9}\right)\right]$$

(ਵਟਾਂਦਰਾ ਯੋਗਤਾ ਅਤੇ ਸਹਿਚਾਰਿਤਾ ਦੇ ਗੁਣਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਨਾਲ)

$$=\frac{-3}{4}\times\left(\frac{-2}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

1.2.4 ਸਿਫ਼ਰ (0) ਦੀ ਭੂਮਿਕਾ

ਹੇਠ ਲਿਖੇ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

$2+0=0+2=2$ (ਸਿਫ਼ਰ ਨੂੰ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਜੋੜਨਾ)

$-5+0=\ldots+\ldots=-5$ (ਸਿਫ਼ਰ ਨੂੰ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਜੋੜਨਾ)

$\frac{-2}{7}+\ldots=0+\left(\frac{-2}{7}\right)=\frac{-2}{7}$ (ਸਿਫ਼ਰ ਨੂੰ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਜੋੜਨਾ)

ਤੁਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਵੀ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਜੋੜਫਲ ਪਤਾ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹੋ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਕੁਝ ਹੋਰ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਦੇਖਦੇ ਹੋ ? ਤੁਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰੋਗੇ ਕਿ ਜਦੋਂ ਕੋਈ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਸਿਫ਼ਰ ਜੋੜਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਜੋੜਫਲ ਫਿਰ ਤੋਂ ਉਹੀ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਹ ਤੱਥ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਤੇ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ।

ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ

$a+0=0+a=a,$ (ਇੱਥੇ a ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ)

$b+0=0+b=b,$ (ਇੱਥੇ b ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ)

$c+0=0+c=c,$ (ਇੱਥੇ c ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ)

ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਲਈ ਸਿਫ਼ਰ ਇੱਕ ਤਤਸਮਕ ਹੈ। ਇਹ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਤੇ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਵੀ ਜੋੜਾਤਮਕ ਤਤਸਮਕ ਹੈ।

1.2.5 1 ਦੀ ਭੂਮਿਕਾ

ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$5 \times 1 = 5 = 1 \times 5 \quad \text{(ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਦੀ 1 ਨਾਲ ਗੁਣਾ)}$$

$$\frac{-2}{7} \times 1 = \ldots \times \ldots = \frac{-2}{7}$$

$$\frac{3}{8} \times \ldots = 1 \times \frac{3}{8} = \frac{3}{8}$$

ਸਾਨੂੰ ਕੀ ਮਿਲਿਆ ?

ਤੁਸੀਂ ਦੇਖੋਗੇ ਕਿ ਜਦੋਂ ਤੁਸੀਂ ਕਿਸੇ ਵੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ 1 ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਉਹੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਾਉਂਦੇ ਹੋ। ਕੁਝ ਹੋਰ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਇਸਦੀ ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ। ਤੁਸੀਂ ਦੇਖੋਗੇ ਕਿ ਕੋਈ ਵੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ a ਦੇ ਲਈ, $a \times 1 = 1 \times a = a$ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ 1 *ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਗੁਣਾਤਮਕ ਤਤਸਮਕ ਹੈ*। ਕੀ 1 ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਤੇ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਵੀ ਗੁਣਾਤਮਕ ਤਤਸਮਕ ਹੈ।

ਸੋਚੋ, ਚਰਚਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਲਿਖੋ

ਜਦ ਕੋਈ ਗੁਣ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ ਤਾਂ ਕੀ ਉਹ ਗੁਣ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ, ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਵੀ ਸੱਚ ਹੋਵੇਗਾ ? ਕਿਹੜੇ ਗੁਣ ਇਹਨਾਂ ਲਈ ਸੱਚ ਹੋਣਗੇ ਅਤੇ ਕਿਹੜੇ ਨਹੀਂ ਹੋਣਗੇ ?

1.2.6 ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਰਿਣਾਤਮਕ

ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਦੇ ਸਮੇਂ ਤੁਹਾਨੂੰ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਰਿਣਾਤਮਕ ਵੀ ਮਿਲੇ ਹਨ। 1 ਦਾ ਰਿਣਾਤਮਕ ਕੀ ਹੈ ? ਇਹ -1 ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ $1 + (-1) = (-1) + 1 = 0$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ (-1) ਦਾ ਰਿਣਾਤਮਕ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ ? ਇਹ 1 ਹੋਵੇਗਾ।

ਇਸਦੇ ਇਲਾਵਾ, $2 + (-2) = (-2) + 2 = 0$ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ -2 ਦਾ ਰਿਣਾਤਮਕ ਅਤੇ ਜੋੜਾਤਮਕ ਉਲਟਕ੍ਰਮ 2 ਹੈ ਜੋ ਉਲਟ ਪਾਸੇ ਪੜਨ ਤੇ ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ। ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਕੋਈ ਵੀ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ a ਦੇ ਲਈ $a + (-a) = (-a) + a = 0$; ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $-a$ ਦਾ ਰਿਣਾਤਮਕ a ਹੈ ਅਤੇ a ਦਾ ਰਿਣਾਤਮਕ $-a$ ਹੈ।

ਕੋਈ ਵੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ $\frac{2}{3}$ ਦੇ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ,

$$\frac{2}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2 + (-2)}{3} = 0$$

ਇਸਦੇ ਇਲਾਵਾ $\quad \left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3} = 0 \quad$ (ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ?)

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ $\quad \frac{-8}{9} + \ldots = \ldots + \left(\frac{-8}{9}\right) = 0$

$$\ldots + \left(\frac{-11}{7}\right) = \left(\frac{-11}{7}\right) + \ldots = 0$$

ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਕੋਈ ਵੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ $\frac{a}{b}$ ਦੇ ਲਈ $\frac{a}{b}+\left(-\frac{a}{b}\right)=\left(-\frac{a}{b}\right)+\frac{a}{b}=0$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਦੱਸ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\frac{a}{b}$ ਦਾ ਜੋੜਾਤਮਕ ਉਲਟ $-\frac{a}{b}$ ਹੈ ਅਤੇ $\left(-\frac{a}{b}\right)$ ਦਾ ਜੋੜਾਤਮਕ ਉਲਟ $\frac{a}{b}$ ਹੈ।

1.2.7 ਉਲਟਕ੍ਰਮ

ਤੁਸੀਂ $\frac{8}{21}$ ਨੂੰ ਕਿਸ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰੋਗੇ ਤਾਂ ਕਿ ਗੁਣਨਫਲ 1 ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ ? ਸਪੱਸ਼ਟ ਰੂਪ ਵਿੱਚ $\frac{21}{8}$ ਨਾਲ, ਕਿਉਂਕਿ $\frac{8}{21}\times\frac{21}{8}=1$ ਹੈ।

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ, $\frac{-5}{7}$ ਨੂੰ $\frac{7}{-5}$ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਕਿ ਗੁਣਨਫਲ 1 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਸਕੇ।

ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\frac{8}{21}$ ਦਾ ਉਲਟਕ੍ਰਮ $\frac{21}{8}$ ਹੈ ਅਤੇ $\frac{-5}{7}$ ਦਾ ਉਲਟਕ੍ਰਮ $\frac{7}{-5}$ ਹੈ।

ਕੀ ਅਸੀਂ ਦੱਸ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਿਫ਼ਰ ਦਾ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਕੀ ਹੈ ? ਕੋਈ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਜਿਸ ਨੂੰ ਸਿਫ਼ਰ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ ਤੇ 1 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਜਾਵੇ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਿਫ਼ਰ ਦਾ ਕੋਈ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ $\frac{c}{d}$ ਦੂਸਰੀ ਸੰਖਿਆ $\frac{a}{b}$ ਦਾ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਜਾਂ ਗੁਣਾਤਮਕ ਉਲਟ ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ ਜਦੋਂਕਿ $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=1$ ਹੈ।

1.2.8 ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਗੁਣਨ ਦੀ ਜੋੜ 'ਤੇ ਵੰਡਣਸ਼ੀਲਤਾ

ਇਸ ਤੱਥ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਲਈ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $\frac{-3}{4}, \frac{2}{3}$ ਅਤੇ $\frac{-5}{6}$ ਨੂੰ ਲਵੋ :

$$\frac{-3}{4}\times\left\{\frac{2}{3}+\left(\frac{-5}{6}\right)\right\}=\frac{-3}{4}\times\left\{\frac{(4)+(-5)}{6}\right\}$$

$$=\frac{-3}{4}\times\left(\frac{-1}{6}\right)=\frac{3}{24}=\frac{1}{8}$$

ਇਸਦੇ ਇਲਾਵਾ $\quad \frac{-3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{-3\times 2}{4\times 3}=\frac{-6}{12}=\frac{-1}{2}$

ਅਤੇ $\quad \frac{-3}{4}\times\frac{-5}{6}=\frac{5}{8}$

ਇਸ ਲਈ, $\quad \left(\frac{-3}{4}\times\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{-3}{4}\times\frac{-5}{6}\right)=\frac{-1}{2}+\frac{5}{8}=\frac{1}{8}$

> **ਜੋੜ ਅਤੇ ਘਟਾਓ 'ਤੇ ਗੁਣਾ ਦੀ ਵੰਡਣਸ਼ੀਲਤਾ**
> ਸਾਰੀਆਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a, b ਅਤੇ c ਦੇ ਲਈ
> $a(b+c)=ab+ac$
> $a(b-c)=ab-ac$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$\frac{-3}{4}\times\left\{\frac{2}{3}+\frac{-5}{6}\right\}=\left(\frac{-3}{4}\times\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{-3}{4}\times\frac{-5}{6}\right)$$

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

ਵੰਡਣਸ਼ੀਲਤਾ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਨਾਲ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $\left\{\frac{7}{5}\times\left(\frac{-3}{12}\right)\right\}+\left\{\frac{7}{5}\times\frac{5}{12}\right\}$ (ii) $\left\{\frac{9}{16}\times\frac{4}{12}\right\}+\left\{\frac{9}{16}\times\frac{-3}{9}\right\}$

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਦੇ ਜੋੜਾਤਮਕ ਉਲਟ ਲਿਖੋ

(i) $\frac{-7}{19}$ (ii) $\frac{21}{112}$

ਜਦੋਂ ਤੁਸੀਂ ਵੰਡਣਸ਼ੀਲਤਾ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋ ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਗੁਣਨਫਲ ਨੂੰ ਦੋ ਗੁਣਨਫਲਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਜਾਂ ਅੰਤਰ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵੰਡ ਦਿੰਦੇ ਹੋ।

ਹੱਲ :

(i) $\frac{7}{19}$ ਦਾ ਜੋੜਾਤਮਕ ਉਲਟ $\frac{-7}{19}$ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ $\frac{-7}{19}+\frac{7}{19}=\frac{-7+7}{19}=\frac{0}{19}=0$ ਹੈ।

(ii) $\frac{21}{112}$ ਦਾ ਜੋੜਾਤਮਕ ਉਲਟ $\frac{-21}{112}$ ਹੈ। (ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ।)

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਦੇ ਲਈ $-(-x)$ ਅਤੇ x ਬਰਾਬਰ ਹਨ।

(i) $x=\frac{13}{17}$ (ii) $x=\frac{-21}{31}$

ਹੱਲ :

(i) ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ $x=\frac{13}{17}$

$x=\frac{13}{17}$ ਦਾ ਜੋੜਾਤਮਕ ਉਲਟ $-x=\frac{-13}{17}$ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ $\frac{13}{17}+\left(\frac{-13}{17}\right)=0$ ਹੈ।

ਸਮੀਕਰਨ $\frac{13}{17}+\left(\frac{-13}{17}\right)=0$, ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ ਕਿ $\frac{-13}{17}$ ਦਾ ਜੋੜਾਤਮਕ ਉਲਟ $\frac{13}{17}$ ਹੈ,

ਜਿਵੇਂ ਕਿ $-\left(\frac{-13}{17}\right)=\frac{13}{17}$, ਜਿਵੇਂ ਕਿ $-(-x)=x$

(ii) $x=\frac{-21}{31}$ ਦਾ ਜੋੜਾਤਮਕ ਉਲਟ $-x=\frac{21}{31}$ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ $\frac{-21}{31}+\frac{21}{31}=0$ ਹੈ।

ਸਮੀਕਰਨ $\frac{-21}{31}+\frac{21}{31}=0$, ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ ਕਿ $\frac{21}{31}$ ਦਾ ਜੋੜਾਤਮਕ ਉਲਟ $\frac{-21}{31}$ ਹੈ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ $-(-x)=x$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ਸਰਲ ਕਰੋ $\frac{2}{5}\times\frac{-3}{7}-\frac{1}{14}-\frac{3}{7}\times\frac{3}{5}$

ਹੱਲ : $\frac{2}{5}\times\frac{-3}{7}-\frac{1}{14}-\frac{3}{7}\times\frac{3}{5}=\frac{2}{5}\times\frac{-3}{7}-\frac{3}{7}\times\frac{3}{5}-\frac{1}{14}$ (ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਯੋਗਤਾ ਨਾਲ)

$=\frac{2}{5}\times\frac{-3}{7}+\left(\frac{-3}{7}\right)\times\frac{3}{5}-\frac{1}{14}=\frac{-3}{7}\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\right)-\frac{1}{14}$ (ਵੰਡਣਸ਼ੀਲਤਾ ਨਾਲ)

$=\frac{-3}{7}\times1-\frac{1}{14}=\frac{-6-1}{14}=\frac{-1}{2}$

ਅਭਿਆਸ 1.1

1. ਉਚਿਤ ਗੁਣਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਨਾਲ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :
   (i) $-\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}+\frac{5}{2}-\frac{3}{5}\times\frac{1}{6}$ (ii) $\frac{2}{5}\times\left(-\frac{3}{7}\right)-\frac{1}{6}\times\frac{3}{2}+\frac{1}{14}\times\frac{2}{5}$

2. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਦਾ ਜੋੜਾਤਮਕ ਉਲਟ ਲਿਖੋ :
   (i) $\frac{2}{8}$ (ii) $\frac{-5}{9}$ (iii) $\frac{-6}{-5}$ (iv) $\frac{2}{-9}$ (v) $\frac{19}{-6}$
3. (i) $x=\frac{11}{15}$ (ii) $x=-\frac{13}{17}$ ਦੇ ਲਈ ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ ਕਿ $-(-x)=x$
4. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਦੇ ਗੁਣਾਤਮਕ ਉਲਟ ਪਤਾ ਕਰੋ :
   (i) -13 (ii) $\frac{-13}{19}$ (iii) $\frac{1}{5}$ (iv) $\frac{-5}{8}\times\frac{-3}{7}$
   (v) $-1\times\frac{-2}{5}$ (vi) -1
5. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿੱਚ ਗੁਣਨ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਵਰਤੇ ਗਏ ਗੁਣ ਦਾ ਨਾਮ ਲਿਖੋ।
   (i) $\frac{-4}{5}\times1=1\times\frac{-4}{5}=-\frac{4}{5}$ (ii) $-\frac{13}{17}\times\frac{-2}{7}=\frac{-2}{7}\times\frac{-13}{17}$
   (iii) $\frac{-19}{29}\times\frac{29}{-19}=1$
6. $\frac{6}{13}$ ਨੂੰ $\frac{-7}{16}$ ਦੇ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰੋ।
7. ਦੱਸੋ ਕਿਹੜੇ ਗੁਣ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਤੁਸੀਂ $\frac{1}{3}\times\left(6\times\frac{4}{3}\right)$ ਨੂੰ $\left(\frac{1}{3}\times6\right)\times\frac{4}{3}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹੋ।
8. ਕੀ $-1\frac{1}{8}$ ਦਾ ਗੁਣਾਤਮਕ ਉਲਟ $\frac{8}{9}$ ਹੈ ? ਕਿਉਂ ਅਤੇ ਕਿਉਂ ਨਹੀਂ ?
9. ਕੀ $3\frac{1}{3}$ ਦਾ ਗੁਣਾਤਮਕ ਉਲਟ 0.3 ਹੈ ? ਕਿਉਂ ਅਤੇ ਕਿਉਂ ਨਹੀਂ ?

10. ਲਿਖੋ :

(i) ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਜਿਸਦਾ ਕੋਈ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(ii) ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਜੋ ਆਪਣੇ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

(iii) ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਜੋ ਆਪਣੇ ਰਿਣਾਤਮਕ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

11. ਖ਼ਾਲੀ ਥਾਵਾਂ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਕਰੋ :

(i) ਸਿਫ਼ਰ ਦਾ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ________ ਹੈ।

(ii) ਸੰਖਿਆਵਾਂ ________ ਅਤੇ ________ ਆਪਣੇ ਆਪ ਦੇ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਹਨ।

(iii) -5 ਦਾ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ________ ਹੈ।

(iv) $\frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ ਦਾ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ________ ਹੈ।

(v) ਦੋ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਹਮੇਸ਼ਾ ________ ਹੈ।

(vi) ਕਿਸੀ ਧਨਾਤਮਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ________ ਹੈ।

1.3 ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਨਿਰੂਪਣ

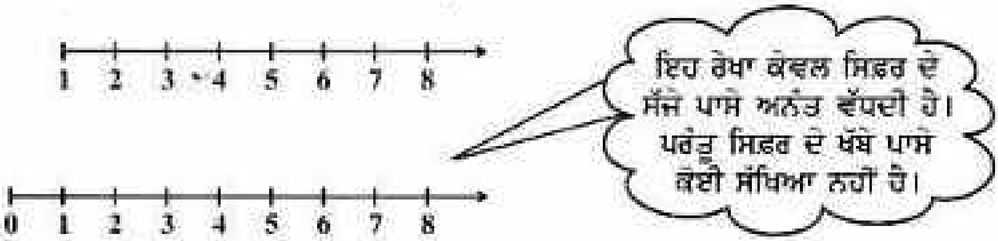
ਤੁਸੀਂ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ, ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ, ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਤੇ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਅੰਕਿਤ ਕਰਨਾ ਸਿੱਖ ਚੁੱਕੇ ਹੋ। ਅਸੀਂ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਦੁਹਰਾਈ ਕਰਾਂਗੇ।

ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ

(i)

ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ

(ii)



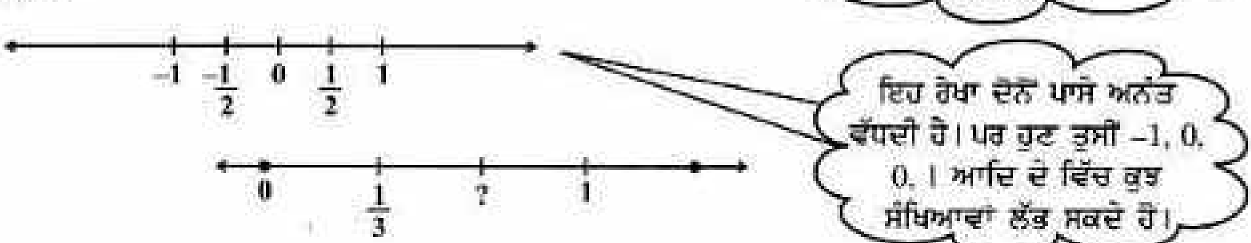
ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ

(iii)

ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ

(iv)

(v)

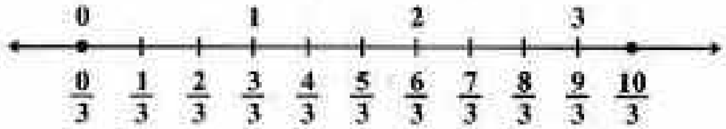


ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ (iv) 'ਤੇ ਉਹ ਬਿੰਦੂ ਜੋ 0 ਅਤੇ 1 ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਹੈ ਉਸ ਨੂੰ $\frac{1}{2}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅੰਕਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ (v) ਪਰ 0 ਅਤੇ 1 ਦੇ ਵਿੱਚ ਦੀ ਦੂਰੀ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਬਰਾਬਰ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਣ ਵਾਲੇ ਸਮਦੂਰਵਰਤੀ ਬਿੰਦੂਆਂ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲੇ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ $\frac{1}{3}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅੰਕਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ (v) 'ਤੇ ਭਾਜਕ ਬਿੰਦੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਦੂਜੇ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਤੁਸੀਂ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅੰਕਿਤ ਕਰੋਗੇ ?

ਅੰਕਿਤ ਕੀਤੇ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਇਹ ਬਿੰਦੂ ਸਿਫ਼ਰ ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ $\frac{1}{3}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅੰਕਿਤ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਦੁੱਗਣੀ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਹ $\frac{1}{3}$ ਨਾਲੋਂ ਦੁਗਣਾ ਹੈ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ $\frac{2}{3}$ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਸਮਾਨ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਅੰਕਿਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ। ਅਗਲਾ ਚਿੰਨ੍ਹ 1 ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ 1 ਅਤੇ $\frac{3}{3}$ ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਹਨ।

ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ (vi) ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ ਇਸਦੇ ਬਾਅਦ $\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{6}{3}$ (ਜਾਂ 2), $\frac{7}{3}$ ਆਉਂਦੇ ਹਨ।

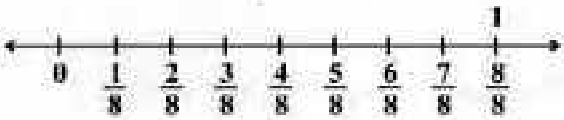
(vi)



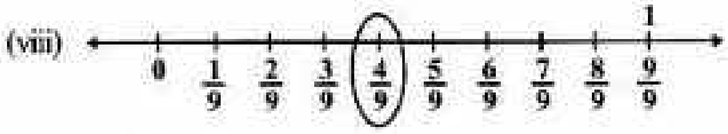
ਇਸੇ ਪ੍ਰਕਾਰ, $\frac{1}{8}$ ਨੂੰ ਅੰਕਿਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾਖੰਡ ਨੂੰ ਅੱਠ ਬਰਾਬਰ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਅਕ੍ਰਿਤੀ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ :

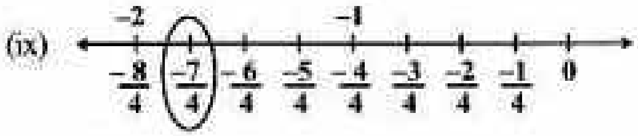
ਇਸ ਵੰਡ ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਨਾਮ ਦੇਣ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਸੰਖਿਆ $\frac{1}{8}$ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਵੰਡ ਦਾ ਦੂਸਰਾ ਬਿੰਦੂ $\frac{2}{8}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅੰਕਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ, ਤੀਸਰਾ ਬਿੰਦੂ $\frac{3}{8}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਤੇ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਅੱਗੇ ਵੀ, ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ (vii) ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ।

(vii)



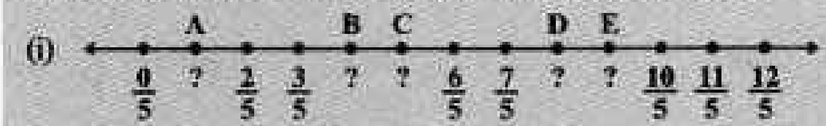
ਇਸੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ ਵਿੱਚ ਕਿਸੀ ਵੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਅੰਕਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਰੇਖਾ ਦੇ ਹੇਠਾਂ ਦਾ ਸੰਖਿਆ ਅੰਕ (ਜਾਂ ਹਰ) ਇਹ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਪਹਿਲੀ ਇਕਾਈ ਨੂੰ ਕਿੰਨੇ ਬਰਾਬਰ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਿਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਰੇਖਾ ਦੇ ਉੱਪਰ ਦੀ ਸੰਖਿਆ (ਜਾਂ ਅੰਸ਼) ਇਹ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਸਮਾਨ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੇ ਭਾਗਾਂ ਨੂੰ ਸ਼ਾਮਿਲ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ $\frac{4}{9}$ ਦਾ ਮਤਲਬ ਹੈ ਕਿ ਸਿਫ਼ਰ ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਨੌਂ ਸਮਾਨ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਚਾਰ ਨੂੰ ਲਿਆ ਗਿਆ ਹੈ। (ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ viii) ਅਤੇ $\frac{-7}{4}$, ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਸਿਫ਼ਰ ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ 7 ਚਿੰਨ੍ਹ ਲਗਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਦੀ ਦੂਰੀ $\frac{1}{4}$ ਹੈ। ਸੱਤਵਾਂ ਚਿੰਨ੍ਹ $\frac{-7}{4}$ ਹੈ। [ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ (ix)]।

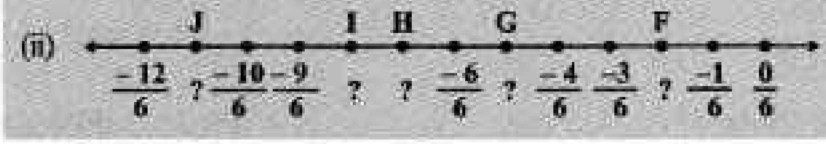




ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

ਅੱਖਰ ਨਾਲ ਅੰਕਿਤ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਲਈ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਲਿਖੋ :





1.4 ਦੋ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ

ਕੀ ਤੁਸੀਂ 1 ਅਤੇ 5 ਦੇ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੱਸ ਸਕਦੇ ਹੋ ? ਉਹ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 2, 3 ਅਤੇ 4 ਹਨ। 7 ਅਤੇ 9 ਦੇ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੀਆਂ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹਨ ? ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਉਹ ਹੈ 8

10 ਅਤੇ 11 ਦੇ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੀਆਂ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ? ਸਪੱਸ਼ਟ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਵੀ ਨਹੀਂ।

–5 ਅਤੇ 4 ਦੇ ਵਿੱਚ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਸੂਚੀ ਬਣਾਓ। ਇਹ ਹੈ, – 4, – 3, –2, –1, 0, 1, 2, 3.

–1 ਅਤੇ 1 ਦੇ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੀਆਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ?

–9 ਅਤੇ –10 ਦੇ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੀਆਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ?

ਤੁਸੀਂ ਦੋ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ (ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ) ਦੇ ਵਿੱਚ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ (ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ) ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰੋਗੇ।

$\frac{3}{10}$ ਅਤੇ $\frac{7}{10}$ ਦੇ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੀਆਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ? ਸ਼ਾਇਦ ਤੁਸੀਂ ਸੋਚ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਇਹ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $\frac{4}{10}, \frac{5}{10}$ ਅਤੇ $\frac{6}{10}$ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ ਤੁਸੀਂ $\frac{3}{10}$ ਨੂੰ $\frac{30}{100}$ ਅਤੇ $\frac{7}{10}$ ਨੂੰ $\frac{70}{100}$ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹੋ। ਹੁਣ ਸੰਖਿਆਵਾਂ, $\frac{31}{100}, \frac{32}{100}, \frac{33}{100}, \ldots, \frac{68}{100}, \frac{69}{100}$, ਸਾਰੀਆਂ $\frac{3}{10}$ ਅਤੇ $\frac{7}{10}$ ਦੇ ਵਿੱਚ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 39 ਹੈ।

ਇਸਦੇ ਇਲਾਵਾ $\frac{3}{10}$ ਨੂੰ $\frac{3000}{10000}$ ਅਤੇ $\frac{7}{10}$ ਨੂੰ $\frac{7000}{10000}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵੀ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $\frac{3001}{10000}, \frac{3002}{10000}, \ldots, \frac{6998}{10000}, \frac{6999}{10000}$ ਸਾਰੀਆਂ $\frac{3}{10}$ ਅਤੇ $\frac{7}{10}$ ਦੇ ਵਿੱਚ ਹਨ। ਇਹ ਕੁੱਲ 3999 ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ $\frac{3}{10}$ ਅਤੇ $\frac{7}{10}$ ਦੇ ਵਿੱਚ ਜ਼ਿਆਦਾ ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਲਈ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਤੇ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੋ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਪਾਈਆਂ ਜਾਣ ਵਾਲੀਆਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਇੱਕ ਹੋਰ ਉਦਾਹਰਣ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। $\frac{-1}{10}$ ਅਤੇ $\frac{3}{10}$ ਦੇ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੀਆਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ? ਸਪੱਸ਼ਟ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ $\frac{0}{10}, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}$ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ।

ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ $\frac{-1}{10}$ ਨੂੰ $\frac{-10000}{100000}$ ਅਤੇ $\frac{3}{10}$ ਨੂੰ $\frac{30000}{100000}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਅਸੀਂ $\frac{-1}{10}$ ਅਤੇ $\frac{3}{10}$ ਦੇ ਵਿੱਚ $\frac{-9999}{100000}, \frac{-9998}{100000}, \ldots, \frac{-29998}{100000}, \frac{29999}{100000}$, ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਤੁਸੀਂ ਕੋਈ ਵੀ ਦੋ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਅਨੰਤ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ।

ਉਦਾਹਰਣ 6 : -2 ਅਤੇ 0 ਦੇ ਵਿੱਚ 3 ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : -2 ਨੂੰ $\frac{-20}{10}$ ਅਤੇ 0 ਨੂੰ $\frac{0}{10}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ -2 ਅਤੇ 10 ਦੇ ਵਿੱਚ $\frac{-19}{10}, \frac{-18}{10}, \frac{-17}{10}, \frac{-16}{10}, \frac{-15}{10}, \ldots, \frac{-1}{10}$ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਵੀ ਤਿੰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲੈ ਸਕਦੇ ਹੋ।

ਉਦਾਹਰਣ 7 : $\frac{-5}{6}$ ਅਤੇ $\frac{5}{8}$ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦਸ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ $\frac{-5}{6}$ ਅਤੇ $\frac{5}{8}$ ਨੂੰ ਸਮਾਨ ਹਰ ਵਾਲੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲਾਂਗੇ।

$$\frac{-5\times4}{6\times4}=\frac{-20}{24} \quad \text{ਅਤੇ} \quad \frac{5\times3}{8\times3}=\frac{15}{24}$$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਅਸੀਂ $\frac{-20}{24}$ ਅਤੇ $\frac{15}{24}$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਵੀ ਦਸ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲੈ ਸਕਦੇ ਹੋ $\frac{-19}{24}, \frac{-18}{24}, \frac{-17}{24}, \ldots, \frac{14}{24}$

ਦੂਜੀ ਵਿਧੀ

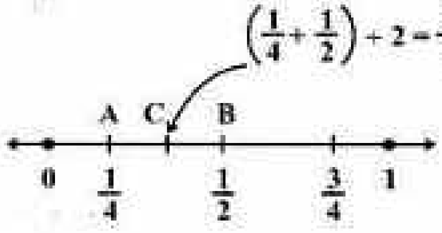
ਆਉ 1 ਅਤੇ 2 ਦੇ ਵਿੱਚ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਉਸ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ 1.5 ਜਾਂ $1\frac{1}{2}$ ਜਾਂ $\frac{3}{2}$ ਹੈ। ਇਹ 1 ਅਤੇ 2 ਦਾ ਮੱਧ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਜਮਾਤ VII ਵਿੱਚ ਮੱਧ ਦੇ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹਿਆ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹਮੇਸ਼ਾ ਸਥਿਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਦੋ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਮੱਧ ਦੇ ਸੰਕਲਪ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 8 : $\frac{1}{4}$ ਅਤੇ $\frac{1}{2}$ ਦੇ ਮੱਧ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਮੱਧ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\div 2=\left(\frac{1+2}{4}\right)\div 2=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$$



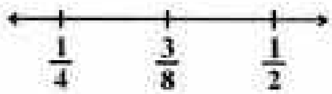
$\frac{1}{4}$ ਅਤੇ $\frac{1}{2}$ ਦੇ ਮੱਧ ਵਿੱਚ $\frac{3}{8}$ ਸਥਿਤ ਹੈ।
ਇਸ ਨੂੰ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਵੀ ਦੇਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਅਸੀਂ AB ਦੇ ਮੱਧ ਵਿੱਚ ਬਿੰਦੂ C ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜੋ $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\div 2=\frac{3}{8}$ ਨਾਲ ਅੰਕਿਤ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\frac{1}{4}<\frac{3}{8}<\frac{1}{2}$ ਹੈ।

ਜੇਕਰ a ਅਤੇ b ਕੋਈ ਦੋ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਤਾਂ a ਅਤੇ b ਦੇ ਮੱਧ ਵਿੱਚ $\frac{a+b}{2}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ ਕਿ $a<\frac{a+b}{2}<b$

ਇਸ ਤੋਂ ਇਹ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਦੋ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਅਨੰਤ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

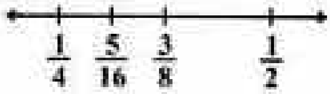
ਉਦਾਹਰਣ 9 : $\frac{1}{4}$ ਅਤੇ $\frac{1}{2}$ ਦੇ ਵਿੱਚਕਾਰ ਤਿੰਨ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਮੱਧ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੀ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਇਹਨਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਮੱਧ $\frac{3}{8}$ ਹੈ ਅਤੇ $\frac{1}{4}<\frac{3}{8}<\frac{1}{2}$ ਹੈ।

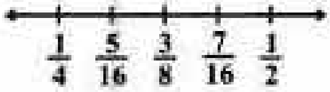
ਹੁਣ $\frac{1}{4}$ ਅਤੇ $\frac{3}{8}$ ਦੇ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਹੋਰ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਦੁਬਾਰਾ $\frac{1}{4}$ ਅਤੇ $\frac{3}{8}$ ਦਾ ਮੱਧ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਜਿਵੇਂ ਕਿ $\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\right)\div 2=\frac{5}{8}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{16}$ ਹੈ।

$$\frac{1}{4}<\frac{5}{16}<\frac{3}{8}<\frac{1}{2}$$



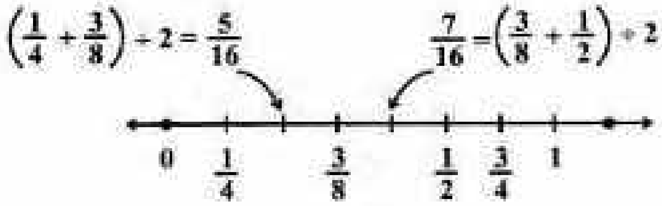
ਹੁਣ $\frac{3}{8}$ ਅਤੇ $\frac{1}{2}$ ਦਾ ਮੱਧ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਅਸੀਂ ਹੁਣ $\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\right)\div 2 = \frac{7}{8}\times\frac{1}{2} = \frac{7}{16}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਾਨੂੰ $\frac{1}{4} < \frac{5}{16} < \frac{3}{8} < \frac{7}{16} < \frac{1}{2}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।



ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\frac{1}{4}$ ਅਤੇ $\frac{1}{2}$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਤਿੰਨ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $\frac{5}{16}, \frac{3}{8}, \frac{7}{16}$ ਹਨ।

ਇਸ ਨੂੰ ਸਪੱਸ਼ਟ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਅਨੁਸਾਰ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।



ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਦੋ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਆਪਣੀ ਇੱਛਾ ਅਨੁਸਾਰ ਕਿੰਨੀਆਂ ਵੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਤੁਸੀਂ ਵੇਖ ਚੁੱਕੇ ਹੋ ਕਿ ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਅਨੰਤ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

ਅਭਿਆਸ 1.2

1. ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਅੰਕਿਤ ਕਰੋ : (i) $\frac{7}{4}$ (ii) $\frac{-5}{6}$
2. $\frac{-2}{11}, \frac{-5}{11}, \frac{-9}{11}$ ਨੂੰ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਅੰਕਿਤ ਕਰੋ।
3. ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਪੰਜ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਿਖੋ ਜੋ 2 ਨਾਲੋਂ ਛੋਟੀਆਂ ਹੋਣ।
4. $\frac{-2}{5}$ ਅਤੇ $\frac{1}{2}$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦਸ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।
5. (i) $\frac{2}{3}$ ਅਤੇ $\frac{4}{5}$ (ii) $\frac{-3}{2}$ ਅਤੇ $\frac{5}{3}$

   (iii) $\frac{1}{4}$ ਅਤੇ $\frac{1}{2}$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਪੰਜ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।
6. -2 ਨਾਲੋਂ ਵੱਡੀਆਂ ਪੰਜ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।
7. $\frac{3}{5}$ ਅਤੇ $\frac{3}{4}$ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦਸ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਅਸੀਂ ਕੀ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀ

1. ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਜੋੜ, ਘਟਾਉ ਅਤੇ ਗੁਣਾ ਦੀ ਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ **ਬੰਦ** ਹੈ।
2. ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਜੋੜ ਅਤੇ ਗੁਣਾ ਦੀਆਂ ਕ੍ਰਿਰਿਆਵਾਂ
   (i) **ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਯੋਗ** ਹਨ।
   (ii) **ਸਹਿਚਰ** ਹਨ।
3. ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਸਿਫ਼ਰ **ਜੋੜਾਤਮਕ ਤਤਸਮਕ** ਹੈ।
4. ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਲਈ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ 1 **ਗੁਣਾਤਮਕ ਤਤਸਮਕ** ਹੈ।
5. ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $\frac{a}{b}$ ਦਾ **ਜੋੜਾਤਮਕ ਉਲਟ** $-\frac{a}{b}$ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਦਾ ਉਲਟ ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ।
6. ਜੇਕਰ $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = 1$ ਤਾਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ $\frac{a}{b}$ ਦਾ **ਉਲਟਕ੍ਰਮ** ਜਾਂ **ਗੁਣਾਤਮਕ ਉਲਟ** $\frac{c}{d}$ ਹੈ।
7. ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ **ਵੰਡਣਸ਼ੀਲਤਾ**, ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a, b ਅਤੇ c ਦੇ ਲਈ
   $a(b + c) = ab + ac$ ਅਤੇ $a(b - c) = ab - ac$ ਹੈ।
8. ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਅੰਕਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।
9. ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਦੋ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਅਨੰਤ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਦੋ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਮੱਧ ਦਾ ਸੰਕਲਪ ਸਹਾਇਤਾ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਨੋਟ

ਨੋਟ

ਅਧਿਆਇ 2

ਇੱਕ ਚਲ ਵਾਲੇ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਨ

2.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਪਿਛਲੀਆਂ ਸ਼੍ਰੇਣੀਆਂ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਕਈ **ਬੀਜਗਣਿਤਿਕ ਵਿਅੰਜਕਾਂ** ਅਤੇ **ਸਮੀਕਰਨਾਂ** ਦੇ ਬਾਰੇ ਜਾਣਕਾਰੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੀ ਹੈ। ਇਹ ਵਿਅੰਜਕ ਜੋ ਅਸੀਂ ਵੇਖੇ, ਉਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਹਨ–

$$5x,\ 2x-3,\ 3x+y,\ 2xy+5,\ xyz+x+y+z,\ x^2+1,\ y+y^2$$

ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਦੀਆਂ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਹਨ : $5x = 25,\ 2x - 3 = 9,\ 2y + \frac{5}{2} = \frac{37}{2},\ 6z + 10 = -2$

ਤੁਹਾਨੂੰ ਯਾਦ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਵਿੱਚ *ਬਰਾਬਰ* '=' ਚਿੰਨ੍ਹ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਜੋ ਕਿ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ।

ਇਹਨਾਂ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਵਿੱਚ, ਕੁਝ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਨਾਲੋਂ ਵੱਧ ਚਲ ਹਨ। ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦੇ ਲਈ, $2xy + 5$ ਵਿੱਚ ਦੋ ਚਲ ਹਨ। ਪਰ ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਸਮੀਕਰਨ ਬਣਾਉਣ ਵਿੱਚ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਚਲ ਵਾਲੇ ਵਿਅੰਜਕ ਦੀ ਹੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਾਂਗੇ ਅਤੇ ਜੋ ਵਿਅੰਜਕ ਸਮੀਕਰਨ ਬਣਾਉਣ ਵਿੱਚ ਲਿਖੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ ਉਹ ਰੇਖੀ ਹੀ ਹੋਣਗੇ। ਇਸ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਹੋਣ ਵਾਲੇ ਚਲ ਦੀ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਘਾਤ ਇੱਕ ਹੋਵੇਗੀ।

ਕੁਝ ਰੇਖੀ ਵਿਅੰਜਕ ਹਨ–

$$2x,\ 2x+1,\ 3y-7,\ 12-5z,\ \frac{5}{4}(x-4)+10$$

ਇਹ ਰੇਖੀ ਵਿਅੰਜਕ ਨਹੀਂ ਹਨ : $x^2 + 1,\ y + y^2,\ 1 + z + z^2 + z^3$

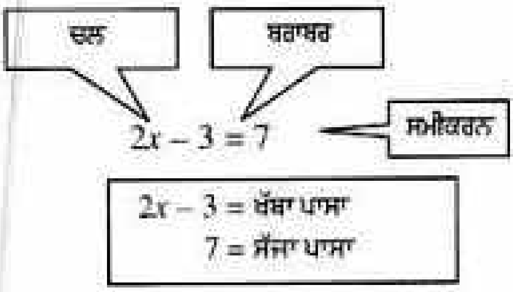
(ਧਿਆਨ ਰੱਖੋ ਚਲ ਦੀ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਘਾਤ 1 ਨਾਲੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਹੈ।)

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਵਿੱਚ, ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਚਲ ਵਾਲੇ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਦਾ ਹੀ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਮੀਕਰਨ **ਇੱਕ ਚਲ ਵਾਲੇ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਨ** ਕਹਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਪਿਛਲੀਆਂ ਸ਼੍ਰੇਣੀਆਂ ਵਿੱਚ ਜਿਹੜੀਆਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਤੁਸੀਂ ਹੱਲ ਕਰਨਾ ਸਿੱਖਿਆ ਉਹ ਸਾਰੀਆਂ ਇਸੇ ਕਿਸਮ ਦੀਆਂ ਸਨ।

ਆਉ, ਅਸੀਂ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਸੰਖੇਪ ਵਿੱਚ ਦੁਹਰਾਉਂਦੇ ਹਾਂ, ਜੋ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ :

(a) ਇੱਕ ਬੀਜਗਣਿਤਿਕ ਸਮੀਕਰਨ ਵਿੱਚ ਚਲਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਇੱਕ ਬਰਾਬਰਤਾ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਬਰਾਬਰੀ ਦਾ ਚਿੰਨ੍ਹ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਬਰਾਬਰੀ ਦੇ ਚਿੰਨ੍ਹ ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਵਾਲਾ ਵਿਅੰਜਕ ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ (LHS) ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਵਾਲਾ ਵਿਅੰਜਕ ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ (RHS) ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।



(b) *ਇੱਕ ਸਮੀਕਰਨ ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਵਿੱਚ ਵਿਅੰਜਕ ਦਾ ਮੁੱਲ, ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਵਿੱਚ ਵਿਅੰਜਕ ਦੇ ਮੁੱਲ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।* ਇਹ ਚਲ ਦੇ ਕੁਝ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਲਈ ਹੀ ਸੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਚਲ ਦੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਹੀ ਸਮੀਕਰਨ ਦਾ ਹੱਲ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ।

> $2x - 3 = 7$ ਇਸ ਸਮੀਕਰਨ ਦਾ ਹੱਲ ਹੈ– $x = 5$ ਕਿਉਂਕਿ $x = 5$ ਹੋਣ 'ਤੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦਾ ਮੁੱਲ ਹੋਵੇਗਾ $2 \times 5 - 3 = 7$, ਜੋ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦਾ ਮੁੱਲ ਹੈ ਪਰੰਤੂ $x = 10$ ਇਸਦਾ ਹੱਲ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ $x = 10$ ਹੋਣ ਤੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦਾ ਮੁੱਲ ਹੋਵੇਗਾ $2 \times 10 - \frac{1}{17}$ ਜੋ ਕਿ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(c) *ਕਿਸੇ ਸਮੀਕਰਨ ਦਾ ਹੱਲ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਤਾ ਕਰੀਏ ?*

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਮੀਕਰਨ ਦੇ ਦੋਨੋਂ ਪਾਸੇ, ਸੰਤੁਲਿਤ (ਬਰਾਬਰ) ਹਨ। ਅਸੀਂ ਸਮੀਕਰਨ ਦੇ ਦੋਨੋਂ ਪਾਸੇ ਇੱਕ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਗਣਿਤਕ ਕਿਰਿਆਵਾਂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਸਮੀਕਰਨ ਸਰਲ, ਜਿਆਦਾ ਸਰਲ ਹੁੰਦਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੁਝ ਪਗਾਂ ਦੇ ਬਾਅਦ ਸਮੀਕਰਨ ਦਾ ਹੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

2.2 ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨਾ, ਜਿਸਦੇ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਵਿੱਚ ਰੇਖੀ ਵਿਅੰਜਕ ਅਤੇ ਦੂਸਰੇ ਪਾਸੇ ਕੇਵਲ ਸੰਖਿਆ ਹੋਵੇ।

ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਲੈ ਕੇ, ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੀ ਵਿਧੀ ਫਿਰ ਧਿਆਨ ਵਿੱਚ ਲਿਆਉ। ਹੱਲਾਂ 'ਤੇ ਧਿਆਨ ਦਿਉ। ਹੱਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਵੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 : $2x - 3 = 7$ ਦਾ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ :

ਪਗ 1. ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਵਿੱਚ 3 ਜੋੜਨ 'ਤੇ

$$2x - 3 + 3 = 7 + 3 \quad \text{(ਸੰਤੁਲਨ ਨਹੀਂ ਵਿਗੜਿਆ)}$$

ਜਾਂ $$2x = 10$$

ਪਗ 2. ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ 2 ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ 'ਤੇ

$$\frac{2x}{2} = \frac{10}{2}$$

ਜਾਂ $$x = 5 \quad \text{(ਲੋੜੀਂਦਾ ਹੱਲ)}$$

ਉਦਾਹਰਣ 2 : $2y + 9 = 4$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : 9 ਦਾ, ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਸਥਾਨ ਪਰਿਵਰਤਨ ਕਰਨ 'ਤੇ

$$2y = 4 - 9$$

ਜਾਂ $$2y = -5$$

ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ 2 ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ 'ਤੇ, $$y = \frac{-5}{2} \quad \text{(ਹੱਲ)}$$

ਹੱਲ ਦੀ ਪੜਤਾਲ : ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ $= 2\left(\frac{-5}{2}\right) + 9 = -5 + 9 = 4 =$ ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ

(ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਸੀ)

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਧਿਆਨ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ ਸੰਖਿਆ $\frac{-5}{2}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ? ਸੱਤਵੀਂ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਜੋ ਸਮੀਕਰਨ ਹੱਲ ਕੀਤੇ ਗਏ ਹਨ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਹੱਲ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨਹੀਂ ਸਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 3 : $\frac{x}{3}+\frac{5}{2} = -\frac{3}{2}$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $\frac{5}{2}$ ਨੂੰ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਸਥਾਨ ਪਰਿਵਰਤਨ ਕਰਨ 'ਤੇ $\frac{x}{3} = \frac{-3}{2} - \frac{5}{2} = -\frac{8}{2}$

ਜਾਂ $\frac{x}{3} = -4$

ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ 3 ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ 'ਤੇ $x = -4 \times 3$

ਜਾਂ $x = -12$ (ਹੱਲ)

ਪੜਤਾਲ : ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ $= -\frac{12}{3}+\frac{5}{2} = -4+\frac{5}{2} = \frac{-8+5}{2} = \frac{-3}{2} =$ ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ

(ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਸੀ)

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਸਮੀਕਰਨ ਵਿੱਚ ਚਲ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਕਿ ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੀ ਹੋਵੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 4 : $\frac{15}{4} - 7x = 9$ ਦਾ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਪਤਾ ਹੈ $\frac{15}{4} - 7x = 9$

ਜਾਂ $-7x = 9 - \frac{15}{4}$ ($\frac{15}{4}$ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਵਿੱਚ ਸਥਾਨ ਪਰਿਵਰਤਨ ਕਰਨ 'ਤੇ)

ਜਾਂ $-7x = \frac{21}{4}$

ਜਾਂ $x = \frac{21}{4\times(-7)}$ (ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ –7 ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ 'ਤੇ)

ਜਾਂ $x = -\frac{3\times7}{4\times7}$

ਜਾਂ $x = -\frac{3}{4}$ (ਲੋੜੀਂਦਾ ਹੱਲ)

ਪੜਤਾਲ : ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ $= \frac{15}{4} - 7\left(\frac{-3}{4}\right) = \frac{15}{4} + \frac{21}{4} = \frac{36}{4} = 9 =$ ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ (ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਸੀ)

ਅਭਿਆਸ 2.1

ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ :

1. $x - 2 = 7$
2. $y + 3 = 10$
3. $6 = z + 2$
4. $\frac{3}{7} + x = \frac{17}{7}$
5. $6x = 12$
6. $\frac{t}{5} = 10$

7. $\frac{2x}{3} = 18$ **8.** $1.6 = \frac{y}{1.5}$ **9.** $7x - 9 = 16$

10. $14y - 8 = 13$ **11.** $17 + 6p = 9$ **12.** $\frac{x}{3} + 1 = \frac{7}{15}$

2.3 ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਨ ਦੀ ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਜੀਵਨ ਵਿੱਚ ਵਰਤੋਂ

ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਅਸਮਾਨ ਉਦਾਹਰਣ ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 74 ਹੈ। ਉਸ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਦੂਸਰੀ ਨਾਲੋਂ 10 ਵੱਧ ਹੈ। ਉਹ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਕਿਹੜੀਆਂ ਹਨ ? ਇਹ ਇੱਕ ਬੁਝਾਰਤ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ। ਸਾਨੂੰ ਦੋਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਵੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਨਹੀਂ ਅਤੇ ਅਸੀਂ ਉਹ ਪਤਾ ਕਰਨੀਆਂ ਹਨ। ਸਾਨੂੰ ਦੋ ਸ਼ਰਤਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਹਨ :

(i) ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਦੂਸਰੀ ਨਾਲੋਂ 10 ਵੱਧ ਹੈ।

(ii) ਉਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 74 ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਜਮਾਤ VII ਵਿੱਚ ਸਿੱਖ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਸਮੱਸਿਆ ਵਿੱਚ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੱਲ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ x ਹੈ। ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ x ਨਾਲੋਂ 10 ਵੱਧ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਕਿ $x + 10$। ਦੂਜੀ ਸ਼ਰਤ ਅਨੁਸਾਰ ਇਨ੍ਹਾਂ ਦੋਵਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 74 ਹੈ।

ਇਸਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ $x + (x + 10) = 74$

ਜਾਂ $2x + 10 = 74$

10 ਨੂੰ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਵਿੱਚ ਸਥਾਨ ਪਰਿਵਰਤਨ ਕਰਨ 'ਤੇ $2x = 74 - 10$

ਜਾਂ $2x = 64$

ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ 2 ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ 'ਤੇ $x = 32$

ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ ਹੈ 32 ਅਤੇ ਦੂਸਰੀ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ ਹੈ $x + 10 = 32 + 10 = 42$

ਭਾਵ ਲੋੜੀਂਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 32 ਅਤੇ 42 ਹਨ, ਜੋ ਦੋਨੋਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਵੀ ਪੂਰੀ ਕਰਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਵਿਧੀ ਦੇ ਲਾਭ ਦਿਖਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਹੋਰ ਉਦਾਹਰਣਾਂ 'ਤੇ ਵੀ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ $\frac{-7}{3}$ ਦੇ ਦੁਗਣੇ ਵਿੱਚ ਕੀ ਜੋੜਿਆ ਜਾਵੇ ਜਿਸ ਨਾਲ $\frac{3}{7}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇ ?

ਹੱਲ : ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ $\frac{-7}{3}$ ਦਾ ਦੁਗਣਾ ਹੈ $2 \times \left(\frac{-7}{3}\right) = \frac{-14}{3}$

ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਇਸ ਵਿੱਚ x ਜੋੜਨ ਨਾਲ $\frac{3}{7}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $x + \left(\frac{-14}{3}\right) = \frac{3}{7}$

ਜਾਂ $x - \frac{14}{3} = \frac{3}{7}$

ਜਾਂ $x = \frac{3}{7} + \frac{14}{3}$ ($\frac{-14}{3}$ ਨੂੰ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਵਿੱਚ ਸਥਾਨ ਪਰਿਵਰਤਨ ਕਰਨ 'ਤੇ)

$$= \frac{(3 \times 3) + (14 \times 7)}{21} = \frac{9 + 98}{21} = \frac{107}{21}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\frac{3}{7}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ $2 \times \left(\frac{-7}{3}\right)$ ਵਿੱਚ $\frac{107}{21}$ ਜੋੜਨਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਇੱਕ ਆਇਤ ਦਾ ਪਰਿਮਾਪ 13 cm ਹੈ ਅਤੇ ਉਸਦੀ ਚੌੜਾਈ $2\frac{3}{4}$ cm ਹੈ। ਇਸਦੀ ਲੰਬਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਵੋ ਕਿ ਆਇਤ ਦੀ ਲੰਬਾਈ x cm ਹੈ।

$$\text{ਆਇਤ ਦਾ ਪਰਿਮਾਪ} = 2 \times (\text{ਲੰਬਾਈ} + \text{ਚੌੜਾਈ})$$

$$= 2\times\left(x+2\frac{3}{4}\right) = 2\times\left(x+\frac{11}{4}\right)$$

ਪਰਿਮਾਪ 13 cm ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ

ਇਸ ਲਈ $$2\left(x+\frac{11}{4}\right) = 13$$

ਜਾਂ $$x+\frac{11}{4} = \frac{13}{2}$$

(ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ 2 ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ 'ਤੇ)

ਜਾਂ $$x = \frac{13}{2} - \frac{11}{4}$$ ($\frac{11}{4}$ ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਵਿੱਚ ਸਥਾਨ ਪਰਿਵਰਤਨ ਕਰਨ 'ਤੇ)

$$= \frac{26}{4} - \frac{11}{4} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$$

ਆਇਤ ਦੀ ਲੰਬਾਈ $3\frac{3}{4}$ cm ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 7 : ਸਾਹਿਲ ਦੀ ਮਾਂ ਦੀ ਵਰਤਮਾਨ ਉਮਰ ਸਾਹਿਲ ਦੀ ਵਰਤਮਾਨ ਉਮਰ ਤੋਂ ਤਿੰਨ ਗੁਣਾ ਹੈ। 5 ਸਾਲਾਂ ਬਾਅਦ ਉਹਨਾਂ ਦੋਨਾਂ ਦੀ ਉਮਰ ਦਾ ਜੋੜਫਲ 66 ਸਾਲ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ। ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੀ ਵਰਤਮਾਨ ਉਮਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਵੋ ਸਾਹਿਲ ਦੀ ਵਰਤਮਾਨ ਉਮਰ = x ਸਾਲ

ਅਸੀਂ ਸਾਹਿਲ ਦੀ 5 ਸਾਲ ਬਾਅਦ ਵਾਲੀ ਉਮਰ x ਸਾਲ ਮੰਨ ਕੇ ਚਲ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਚਲ ਕੇ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ।

	ਸਾਹਿਲ	ਮਾਂ	ਜੋੜਫਲ
ਵਰਤਮਾਨ ਉਮਰ	x	$3x$	
5 ਸਾਲਾਂ ਬਾਅਦ ਉਮਰ	$x + 5$	$3x + 5$	$4x + 10$

ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੀ ਉਮਰ ਦਾ ਜੋੜ 66 ਸਾਲ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $$4x + 10 = 66$$

ਇਸ ਸਮੀਕਰਨ ਵਿੱਚ x ਸਾਹਿਲ ਦੀ ਵਰਤਮਾਨ ਉਮਰ ਹੈ। ਸਮੀਕਰਨ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ 10 ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਵਿੱਚ ਪੱਖ ਅੰਤਰਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

$$4x = 66 - 10$$

ਜਾਂ $$4x = 56$$

ਜਾਂ $$x = \frac{56}{4} = 14$$ (ਹੱਲ)

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਾਹਿਲ ਦੀ ਵਰਤਮਾਨ ਉਮਰ 14 ਸਾਲ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸਦੀ ਮਾਂ ਦੀ ਉਮਰ 42 ਸਾਲ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਪੜਤਾਲ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ 5 ਸਾਲ ਬਾਅਦ ਉਹਨਾਂ ਦੋਨਾਂ ਦੀਆਂ ਉਮਰਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 66 ਸਾਲ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ।

ਉਦਾਹਰਣ 8 : ਬੰਸੀ ਦੇ ਕੋਲ ਕੁਝ ਸਿੱਕੇ ₹ 2 ਵਾਲੇ ਅਤੇ ਕੁਝ ₹ 5 ਵਾਲੇ ਹਨ। ਜੇਕਰ ₹ 2 ਵਾਲੇ ਸਿੱਕੇ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ₹ 5 ਵਾਲੇ ਸਿੱਕਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦੀ ਤਿੰਨ ਗੁਣਾ ਹੋ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਦਾ ਕੁੱਲ ਜੋੜ ₹ 77 ਹੋ ਤਾਂ ਦੋਨੋਂ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਿੱਕਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਵੋ ਕਿ ਬੰਸੀ ਦੇ ਕੋਲ ₹ 5 ਵਾਲੇ ਸਿੱਕਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ x ਹੈ।

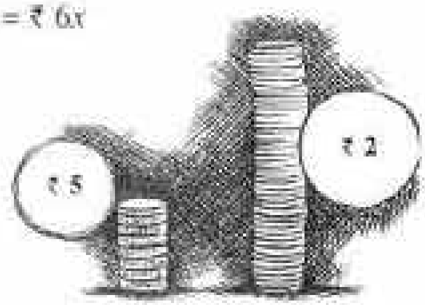
ਤਾਂ ₹ 2 ਵਾਲੇ ਸਿੱਕਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ $= 3x$

ਇਸ ਲਈ (i) ₹ 5 ਵਾਲੇ x ਸਿੱਕਿਆਂ ਦਾ ਮੁੱਲ $= 5 \times x =$ ₹ $5x$

ਅਤੇ (ii) ₹ 2 ਵਾਲੇ $3x$ ਸਿੱਕਿਆਂ ਦਾ ਮੁੱਲ $= 2 \times 3x =$ ₹ $6x$

ਇਸ ਲਈ ਕੁੱਲ ਮੁੱਲ $= 5x + 6x =$ ₹ $11x$

ਕੁੱਲ ਮੁੱਲ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ₹ 77



ਇਸ ਲਈ $11x = 77$

ਜਾਂ $x = \frac{77}{11} = 7$ (ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ 11 ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ ਤੇ)

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ₹ 5 ਵਾਲੇ ਸਿੱਕਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ $= x = 7$

ਅਤੇ ₹ 2 ਵਾਲੇ ਸਿੱਕਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ $= 3x = 21$ (ਹੱਲ)

ਤੁਸੀਂ ਪੜਤਾਲ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਇਹਨਾਂ ਦੋਨਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ₹ 77 ਹੀ ਬਣਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 9 : ਜੇਕਰ 11 ਦੇ ਤਿੰਨ ਲਗਾਤਾਰ ਗੁਣਜਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ 363 ਹੋ ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਜੇ 11 ਦਾ ਇੱਕ ਗੁਣਜ x ਹੈ ਅਤੇ ਅਗਲਾ ਗੁਣਜ ਹੋਵੇਗਾ $x + 11$

ਅਤੇ ਉਸ ਤੋਂ ਅਗਲਾ ਗੁਣਜ ਹੋਵੇਗਾ $x + 11 + 11$ ਜਾਂ $x + 22$

ਇਹ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ 11 ਦੇ ਤਿੰਨ ਲਗਾਤਾਰ ਗੁਣਜਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 363 ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਮੀਕਰਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

$x + (x + 11) + (x + 22) = 363$

ਜਾਂ $x + x + 11 + x + 22 = 363$

ਜਾਂ $3x + 33 = 363$

ਜਾਂ $3x = 363 - 33$

ਜਾਂ $3x = 330$

ਜਾਂ $x = \frac{330}{3} = 110$

> ਬਦਲਵਾਂ ਹੱਲ : ਜੇ ਅਸੀਂ ਦੂਜੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸੋਚੀਏ ਤਾਂ ਅਸੀਂ 11 ਦਾ ਗੁਣਜ x ਤੋਂ ਇਕਦਮ ਪਹਿਲਾਂ ਵੀ ਸੋਚ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $(x - 11)$। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ 11 ਦੇ ਤਿੰਨ ਲਗਾਤਾਰ ਗੁਣਜ ਲਈ $x-11$, x, $x+11$ ਲੈ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਰਨ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਇਸ ਸਮੀਕਰਨ ਤੇ ਪਹੁੰਚਦੇ ਹਾਂ
>
> $x - 11, x, x + 11$
>
> $(x - 11) + x + (x + 11) = 363$
>
> ਜਾਂ $3x = 363$
>
> ਦੋਨਾਂ ਪੱਖਾਂ ਨੂੰ 3 ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ ਤੇ
>
> $x = \frac{363}{3} = 121$
>
> ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $x = 121$, $x - 11 = 110$, $x + 11 = 132$
>
> ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ 11 ਦੇ ਤਿੰਨ ਲਗਾਤਾਰ ਗੁਣਜ ਹਨ 110, 121 ਅਤੇ 132

ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਇਹ ਤਿੰਨ ਲਗਾਤਾਰ ਗੁਣਜ ਹਨ 110, 121 ਅਤੇ 132 ।

ਅਸੀਂ ਇੱਥੇ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਢੰਗਾਂ ਨਾਲ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੱਲ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 10 : ਦੋ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਅੰਤਰ 66 ਹੈ। ਜਦ ਉਸ ਵਿੱਚ 2:5 ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ ਦੋਨੋਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 2 : 5 ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ $2x$ ਅਤੇ ਦੂਸਰੀ $5x$ ਮੰਨ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। (ਧਿਆਨ ਦਿਓ $2x : 5x$ ਵਿੱਚ 2 : 5 ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ ਹੈ।)

ਇਸ ਵਿੱਚ ਅੰਤਰ ਹੈ, $5x - 2x$ ਜੋ ਕਿ 66 ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $5x - 2x = 66$

ਜਾਂ $3x = 66$

ਜਾਂ $x = 22$

ਕਿਉਂਕਿ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $2x$ ਅਤੇ $5x$ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ 2×22 ਜਾਂ 44 ਅਤੇ 5×22 ਜਾਂ 110 ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਅੰਤਰ $110 - 44 = 66$ ਹੀ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਲੋੜੀਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 11 : ਦੇਵੇਸ਼ੀ ਦੇ ਕੋਲ ₹ 50, ₹ 20 ਅਤੇ ₹ 10 ਵਾਲੇ ਕੁੱਲ ਮਿਲਾ ਕੇ 25 ਨੋਟ ਹਨ ਜਿਸਦਾ ਮੁੱਲ ₹ 590 ਬਣਦਾ ਹੈ। ਜਦ ਕਿ ₹ 50 ਅਤੇ ₹ 20 ਵਾਲੇ ਨੋਟਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਅਨੁਪਾਤ 3:5 ਹੈ ਤਾਂ ਹਰੇਕ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਨੋਟਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਵੋ ਕਿ ₹ 50 ਅਤੇ ₹ 20 ਵਾਲੇ ਨੋਟਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $3x$ ਅਤੇ $5x$ ਹੈ।

ਜਦਕਿ ਕੁੱਲ ਨੋਟਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 25 ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ₹ 10 ਵਾਲੇ ਨੋਟਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ $= 25 - (3x + 5x) = 25 - 8x$

ਇਹਨਾਂ ਨੋਟਾਂ ਵਿੱਚ ਉਸਦੇ ਕੋਲ ਧਨ ਹੋਇਆ

₹ 50 ਵਾਲੇ ਨੋਟਾਂ ਨਾਲ : $3x \times 50 =$ ₹ $150x$

₹ 20 ਵਾਲੇ ਨੋਟਾਂ ਨਾਲ : $5x \times 20 =$ ₹ $100x$

₹ 10 ਵਾਲੇ ਨੋਟਾਂ ਨਾਲ $(25 - 8x) \times 10 =$ ₹ $(250 - 80x)$

ਅਤੇ ਕੁੱਲ ਧਨ ਹੋਇਆ $= 150x + 100x + (250 - 80x)$

$=$ ₹ $(170x + 250)$

ਇਹ ਧਨ ₹ 590 ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $170x + 250 = 590$

ਜਾਂ $170x = 590 - 250 = 340$

ਜਾਂ $$x = \frac{340}{170} = 2$$

ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਦੇਵੇਸ਼ੀ ਦੇ ਕੋਲ ₹ 50 ਵਾਲੇ ਨੋਟ $= 3x$

$= 3 \times 2 = 6$ ਨੋਟ

₹ 20 ਵਾਲੇ ਨੋਟ $= 5x = 5 \times 2 = 10$ ਨੋਟ

ਅਤੇ ₹ 10 ਵਾਲੇ ਨੋਟ $= 25 - 8x$

$= 25 - (8 \times 2) = 25 - 16 = 9$ ਨੋਟ

ਅਭਿਆਸ 2.2

1. ਜੇ ਤੁਹਾਨੂੰ ਕਿਸੇ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚੋਂ $\frac{1}{2}$ ਘਟਾਉਣ ਅਤੇ ਨਤੀਜੇ ਨੂੰ $\frac{1}{2}$ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ 'ਤੇ $\frac{1}{8}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਸੰਖਿਆ ਕੀ ਹੈ ?
2. ਇੱਕ ਆਇਤਾਕਾਰ ਸਵੀਮਿੰਗ ਪੂਲ (swimming pool) ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਉਸਦੀ ਚੌੜਾਈ ਦੇ ਦੁਗਣੇ ਤੋਂ 2 ਮੀਟਰ ਜ਼ਿਆਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਇਸਦਾ ਪਰਿਮਾਪ 154 ਮੀਟਰ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸਦੀ ਲੰਬਾਈ ਅਤੇ ਚੌੜਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।
3. ਇੱਕ ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਤਿਕੋਣ ਦਾ ਅਧਾਰ $\frac{4}{3}$ cm ਅਤੇ ਉਸਦਾ ਪਰਿਮਾਪ $4\frac{2}{15}$ cm ਹੈ। ਇਸ ਦੀਆਂ ਦੋ ਬਰਾਬਰ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਾ ਮਾਪ ਪਤਾ ਕਰੋ।
4. ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ 95 ਹੈ। ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਦੂਸਰੀ ਨਾਲੋਂ 15 ਜ਼ਿਆਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਦੋਨੋਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।
5. ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਅਨੁਪਾਤ 5 : 3 ਹੈ। ਜੇਕਰ ਉਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਅੰਤਰ 18 ਹੈ ਤਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।
6. ਤਿੰਨ ਲਗਾਤਾਰ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ 51 ਹੈ। ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।
7. 8 ਦੇ ਤਿੰਨ ਲਗਾਤਾਰ ਗੁਣਜਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ 888 ਹੈ। ਗੁਣਜਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ।
8. ਤਿੰਨ ਲਗਾਤਾਰ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਵੱਧਦੇ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਲੈ ਕੇ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 2, 3 ਅਤੇ 4 ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ ਤੇ ਜੋੜਫਲ 74 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਤਿੰਨੋਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।
9. ਰਾਹੁਲ ਅਤੇ ਹਾਰੂਨ ਦੀ ਵਰਤਮਾਨ ਉਮਰ ਵਿੱਚ ਅਨੁਪਾਤ 5 : 7 ਹੈ। 4 ਸਾਲ ਬਾਅਦ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਉਮਰ ਦਾ ਜੋੜ 56 ਸਾਲ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ। ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਉਮਰ ਕੀ ਹੈ ?
10. ਕਿਸੇ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਮੁੰਡੇ ਅਤੇ ਕੁੜੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਅਨੁਪਾਤ 7:5 ਹੈ। ਜੇਕਰ ਮੁੰਡਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਕੁੜੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲੋਂ 8 ਜ਼ਿਆਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਕੁੱਲ ਕਿੰਨੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਹਨ ?
11. ਬਾਈਚੁੰਗ ਦੇ ਪਿਤਾ ਜੀ, ਉਸਦੇ ਦਾਦਾ ਜੀ ਨਾਲੋਂ 26 ਸਾਲ ਛੋਟੇ ਹਨ ਅਤੇ ਉਸ ਤੋਂ 29 ਸਾਲ ਵੱਡੇ ਹਨ। ਜਦਕਿ ਉਹਨਾਂ ਤਿੰਨਾਂ ਦੀ ਉਮਰਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 135 ਸਾਲ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਉਮਰ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਪਤਾ ਕਰੋ।
12. 15 ਸਾਲ ਬਾਅਦ ਰਵੀ ਦੀ ਉਮਰ, ਉਸਦੀ ਵਰਤਮਾਨ ਉਮਰ ਤੋਂ ਚਾਰ ਗੁਣਾ ਹੋ ਜਾਵੇਗੀ। ਰਵੀ ਦੀ ਵਰਤਮਾਨ ਉਮਰ ਕੀ ਹੈ ?
13. ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ $\frac{5}{2}$ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਕੇ $\frac{2}{3}$ ਜੋੜਨ ਤੇ $-\frac{7}{12}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਉਹ ਸੰਖਿਆ ਕੀ ਹੈ ?

14. ਲਕਸ਼ਮੀ ਇੱਕ ਬੈਂਕ ਵਿੱਚ ਖਜਾਨਚੀ ਹੈ। ਉਸ ਕੋਲ ਨਗਦੀ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ₹ 100, ₹ 50 ਅਤੇ ₹ 10 ਵਾਲੇ ਨੋਟ ਹਨ। ਉਹਨਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 2:3:5 ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ ਹੈ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਕੁੱਲ ਮੁੱਲ ₹ 4,00,000 ਰੁਪਏ ਹੈ। ਉਸਦੇ ਕੋਲ ਹਰੇਕ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਕਿੰਨੇ-ਕਿੰਨੇ ਨੋਟ ਹਨ ?
15. ਮੇਰੇ ਕੋਲ ₹ 300 ਮੁੱਲ ਦੇ, ₹ 1, ₹ 2 ਅਤੇ ₹ 5 ਵਾਲੇ ਸਿੱਕੇ ਹਨ। ₹ 2 ਵਾਲੇ ਸਿੱਕਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ₹ 5 ਵਾਲੇ ਸਿੱਕਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਤਿੰਨ ਗੁਣਾ ਹੈ ਅਤੇ ਸਿੱਕਿਆਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸੰਖਿਆ 160 ਹੈ। ਮੇਰੇ ਕੋਲ ਹਰੇਕ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਕਿੰਨੇ-ਕਿੰਨੇ ਸਿੱਕੇ ਹਨ ?
16. ਇੱਕ ਲੇਖ ਮੁਕਾਬਲੇ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਬੰਧਕਾਂ ਨੇ ਇਹ ਤੈਅ ਕੀਤਾ ਕਿ ਹਰੇਕ ਜਿੱਤਣ ਵਾਲੇ ਨੂੰ ₹ 100 ਅਤੇ ਜਿੱਤਣ ਵਾਲੇ ਨੂੰ ਛੱਡ ਕੇ ਹਰੇਕ ਹਿੱਸਾ ਲੈਣ ਵਾਲੇ ਨੂੰ ₹ 25 ਇਨਾਮ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਜਾਣਗੇ। ਜੇਕਰ ਇਨਾਮਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡੀ ਰਾਸ਼ੀ ₹ 3,000 ਹੈ ਤਾਂ ਕੁੱਲ 63 ਹਿੱਸਾ ਲੈਣ ਵਾਲਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਜਿੱਤਣ ਵਾਲਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ।

2.4 ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨਾ ਜਦੋਂ ਦੋਨੋਂ ਹੀ ਪਾਸੇ ਚਲ ਹੋਵੇ

ਇੱਕ ਸਮੀਕਰਨ, ਦੋ ਬੀਜ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਦੀ ਬਰਾਬਰਤਾ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਸਮੀਕਰਨ $2x - 3 = 7$ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਵਿਅੰਜਕ ਹੈ $2x - 3$ ਅਤੇ ਦੂਸਰਾ ਹੈ 7 । ਹੁਣ ਤੱਕ ਲਈਆਂ ਗਈਆਂ ਲਗਭਗ ਸਾਰੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਵਿੱਚ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਹੀ ਸੰਖਿਆ ਸੀ। ਜਦਕਿ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੋਣਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਚਲ ਰਾਸ਼ੀ ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਵਿੱਚ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ ਸਮੀਕਰਨ $2x - 3 = x + 2$ ਵਿੱਚ, ਦੋਨਾਂ ਹੀ ਪਾਸਿਆਂ ਵਿੱਚ ਚਲ ਵਾਲੇ ਵਿਅੰਜਕ ਹਨ। ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਵਿੱਚ ਵਿਅੰਜਕ ਹੈ $(2x - 3)$ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਹੈ $(x + 2)$।

- ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ। ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਦੋਨੋਂ ਪਾਸੇ ਚਲ ਵਾਲੇ ਵਿਅੰਜਕ ਹੋਣ।

ਉਦਾਹਰਣ 12 : ਹੱਲ ਕਰੋ : $2x - 3 = x + 2$

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ : $2x = x + 2 + 3$

ਜਾਂ $2x = x + 5$

ਜਾਂ $2x - x = x + 5 - x$ (ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ x ਘਟਾਉਣ 'ਤੇ)

ਜਾਂ $x = 5$ (ਹੱਲ)

ਇੱਥੇ, ਅਸੀਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਦੇ ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਵਿੱਚ, ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਜਾਂ ਅਚਲ ਹੀ ਨਹੀਂ, ਬਲਕਿ ਚਲ ਵਾਲਾ ਪਦ ਘਟਾ ਦਿੱਤਾ। ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿਉਂਕਿ ਚਲ ਦਾ ਮੁੱਲ ਵੀ ਕੋਈ ਸੰਖਿਆ ਹੀ ਹੈ। ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ x ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਤੋਂ ਘਟਾਉਣ ਤੋਂ ਅਰਥ ਹੈ x ਨੂੰ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਸਥਾਨ ਪਰਿਵਰਤਨ ਕਰਨਾ।

ਉਦਾਹਰਣ 13 : ਹੱਲ ਕਰੋ : $5x + \frac{7}{2} = \frac{3}{2}x - 14$

ਹੱਲ : ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ 2 ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ

$$2 \times \left(5x + \frac{7}{2}\right) = 2 \times \left(\frac{3}{2}x - 14\right)$$

ਜਾਂ $(2 \times 5x) + \left(2 \times \frac{7}{2}\right) = \left(2 \times \frac{3}{2}x\right) - (2 \times 14)$

ਜਾਂ $10x + 7 = 3x - 28$

ਜਾਂ $10x - 3x + 7 = -28$ ($3x$ ਨੂੰ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਵਿੱਚ ਸਥਾਨ ਪਰਿਵਰਤਨ ਕਰਨ 'ਤੇ)

ਜਾਂ $7x + 7 = -28$

ਜਾਂ $7x = -28 - 7$

ਜਾਂ $7x = -35$

ਜਾਂ $x = \frac{-35}{7}$

ਜਾਂ $x = -5$ (ਹੱਲ)

ਅਭਿਆਸ 2.3

ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ ਅਤੇ ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਦੀ ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ।

1. $3x = 2x + 18$
2. $5t - 3 = 3t - 5$
3. $5x + 9 = 5 + 3x$

4. $4z + 3 = 6 + 2z$ 5. $2x - 1 = 14 - x$ 6. $8x + 4 = 3(x - 1) + 7$

7. $x = \frac{4}{5}(x + 10)$ 8. $\frac{2x}{3} + 1 = \frac{7x}{15} + 3$ 9. $2y + \frac{5}{3} = \frac{26}{3} - y$

10. $3m = 5m - \frac{8}{5}$

2.5 ਕੁਝ ਹੋਰ ਉਦਾਹਰਣਾਂ

ਉਦਾਹਰਣ 14 : ਦੋ ਅੰਕਾਂ ਵਾਲੀ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਦੋਨੋਂ ਅੰਕਾਂ ਵਿੱਚ 3 ਦਾ ਅੰਤਰ ਹੈ। ਇਸ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ, ਇਸਦੇ ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਬਦਲ ਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਜੋੜ ਕੇ 143 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ ਦੋ ਅੰਕਾਂ ਵਾਲੀ ਕੋਈ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ, ਜਿਵੇਂ 56 ਲਵੋ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵੀ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, $56 = (10 \times 5) + 6$

ਇਸ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਅੰਕ ਬਦਲਣ 'ਤੇ ਸੰਖਿਆ ਮਿਲਦੀ ਹੈ 65 ਜਿਸ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, $65 = (10 \times 6) + 5$

ਅਸੀਂ ਦੋ ਅੰਕਾਂ ਵਾਲੀ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਇਕਾਈ ਦਾ ਅੰਕ b ਮੰਨਦੇ ਹਾਂ। ਕਿਉਂਕਿ ਦੋਨੋਂ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਅੰਤਰ 3 ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਦਹਾਈ ਦਾ ਅੰਕ $= b + 3$

ਭਾਵ, ਦੋ ਅੰਕਾਂ ਵਾਲੀ ਸੰਖਿਆ $= 10(b + 3) + b = 10b + 30 + b = 11b + 30$

ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਬਦਲਣ 'ਤੇ ਸੰਖਿਆ ਹੋਵੇਗੀ $= 10b + (b + 3) = 11b + 3$

ਇਹਨਾਂ ਦੋਨੋਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਜੋੜਨ 'ਤੇ ਮਿਲਦਾ ਹੈ : 143

ਇਸ ਲਈ $(11b + 30) + (11b + 3) = 143$

ਜਾਂ $11b + 11b + 30 + 3 = 143$

ਜਾਂ $22b + 33 = 143$

ਜਾਂ $22b = 143 - 33$

ਜਾਂ $22b = 110$

ਜਾਂ $b = \frac{110}{22}$

ਜਾਂ $b = 5$

ਭਾਵ ਇਕਾਈ ਦਾ ਅੰਕ = 5

ਤਦ ਦਹਾਈ ਦਾ ਅੰਕ = 5 + 3 = 8

ਇਸ ਲਈ ਸੰਖਿਆ = 85

ਪੜਤਾਲ : ਅੰਕ ਬਦਲਣ 'ਤੇ ਸੰਖਿਆ 58 ਮਿਲਦੀ ਹੈ। 58 ਅਤੇ 85 ਦਾ ਜੋੜ ਹੈ 143 ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

ਜੇ ਇਕਾਈ ਦਾ ਅੰਕ b ਹੈ ਤਾਂ ਕੀ ਅਸੀਂ ਦਹਾਈ ਦਾ ਅੰਕ $b - 3$ ਵੀ ਲੈ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ? ਲੈ ਕੇ ਵੇਖੋ ਕੀ ਉੱਤਰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਇਹ ਹੱਲ ਹੈ ਜਦ ਅਸੀਂ ਦਹਾਈ ਦਾ ਅੰਕ ਇਕਾਈ ਨਾਲੋਂ 3 ਜ਼ਿਆਦਾ ਲਿਆ ਹੈ। ਦੇਖੋ, ਕੀ ਹੱਲ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਜਦ ਅਸੀਂ ਦਹਾਈ ਦਾ ਅੰਕ $(b - 3)$ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦਾ ਕਥਨ 58 ਅਤੇ 85, ਦੋਨੋਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੋਨੋਂ ਉੱਤਰ ਠੀਕ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 15 : ਅਰਜੁਨ ਦੀ ਉਮਰ ਸ਼੍ਰੇਆ ਦੀ ਉਮਰ ਤੋਂ ਦੁਗਣੀ ਹੈ। 5 ਸਾਲ ਪਹਿਲੇ ਉਸਦੀ ਉਮਰ ਸ਼੍ਰੇਆ ਦੀ ਉਮਰ ਦੀ ਤਿੰਨ ਗੁਣਾ ਸੀ। ਦੋਨਾਂ ਦੀ ਉਮਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਵੋ ਸ਼੍ਰੇਆ ਦੀ ਵਰਤਮਾਨ ਉਮਰ = x ਸਾਲ

ਉਸ ਸਮੇਂ ਅਰਜੁਨ ਦੀ ਉਮਰ = $2x$ ਸਾਲ
ਸ਼ਰੇਆ ਦੀ 5 ਸਾਲ ਪਹਿਲਾਂ ਉਮਰ ਸੀ $(x - 5)$ ਸਾਲ
ਅਤੇ ਅਰਜੁਨ ਦੀ 5 ਸਾਲ ਪਹਿਲਾਂ ਉਮਰ ਸੀ $(2x - 5)$ ਸਾਲ
ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ 5 ਸਾਲ ਪਹਿਲੇ ਅਰਜੁਨ ਦੀ ਉਮਰ ਸ਼ਰੇਆ ਦੀ ਉਮਰ ਦੀ ਤਿੰਨ ਗੁਣਾ ਸੀ।

ਇਸ ਲਈ $2x - 5 = 3(x - 5)$

ਜਾਂ $2x - 5 = 3x - 15$

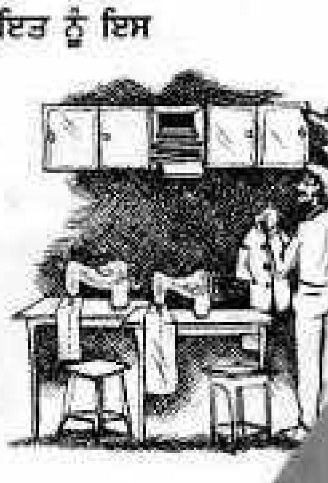
ਜਾਂ $15 - 5 = 3x - 2x$

ਜਾਂ $10 = x$

ਇਸ ਲਈ ਸ਼ਰੇਆ ਦੀ ਵਰਤਮਾਨ ਉਮਰ $= x = 10$ ਸਾਲ
ਅਤੇ ਅਰਜੁਨ ਦੀ ਵਰਤਮਾਨ ਉਮਰ $= 2x = 2 \times 10 = 20$ ਸਾਲ

ਅਭਿਆਸ 2.4

1. ਅਮੀਨਾ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਸੋਚਦੀ ਹੈ। ਉਹ ਇਸ ਵਿੱਚੋਂ $\frac{5}{2}$ ਘਟਾ ਕੇ ਨਤੀਜੇ ਨੂੰ 8 ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਹੁਣ ਜੋ ਨਤੀਜਾ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਉਹ ਸੋਚੀ ਗਈ ਸੰਖਿਆ ਦੀ ਤਿੰਨ ਗੁਣਾ ਹੈ। ਉਹ ਸੋਚੀ ਗਈ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ।
2. ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲੀ ਸੰਖਿਆ ਦੂਸਰੀ ਤੋਂ ਪੰਜ ਗੁਣਾ ਹੈ। ਹਰੇਕ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ 21 ਜੋੜਨ 'ਤੇ ਪਹਿਲੀ ਸੰਖਿਆ ਦੂਸਰੀ ਤੋਂ ਦੁਗਣੀ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।
3. ਦੋ ਅੰਕਾਂ ਵਾਲੀ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 9 ਹੈ। ਇਸ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਅੰਕਾਂ ਦੇ ਸਥਾਨ ਬਦਲ ਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੀ ਸੰਖਿਆ, ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲੋਂ 27 ਜ਼ਿਆਦਾ ਹੈ। ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ।
4. ਦੋ ਅੰਕਾਂ ਵਾਲੀ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਅੰਕ ਦੂਸਰੇ ਦਾ ਤਿੰਨ ਗੁਣਾ ਹੈ। ਇਸਦੇ ਅੰਕਾਂ ਦੇ ਸਥਾਨ ਬਦਲ ਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ, ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਜੋੜਨ 'ਤੇ 88 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ।
5. ਸ਼ੋਬੋ ਦੀ ਮਾਂ ਦੀ ਉਮਰ, ਸ਼ੋਬੋ ਦੀ ਉਮਰ ਦਾ 6 ਗੁਣਾ ਹੈ। 5 ਸਾਲ ਬਾਅਦ ਸ਼ੋਬੋ ਦੀ ਉਮਰ, ਉਸਦੀ ਮਾਂ ਦੀ ਵਰਤਮਾਨ ਉਮਰ ਦੀ ਇੱਕ ਤਿਹਾਈ ਹੋ ਜਾਵੇਗੀ। ਉਸਦੀ ਉਮਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।
6. ਮਹੂਲੀ ਪਿੰਡ ਵਿੱਚ, ਇੱਕ ਤੰਗ ਆਇਤਾਕਾਰ ਪਲਾਟ ਸਕੂਲ ਬਣਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਰੱਖਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਪਲਾਟ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਅਤੇ ਚੌੜਾਈ ਵਿੱਚ 11:4 ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ ਹੈ। ਪਿੰਡ ਦੀ ਪੰਚਾਇਤ ਨੂੰ ਇਸ ਪਲਾਟ ਦੀ ਚਾਰ ਦੀਵਾਰੀ ਕਰਨ ਲਈ, ₹ 100 ਪ੍ਰਤੀ ਮੀਟਰ ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ₹ 75000 ਦੇਣੇ ਪੈਣਗੇ। ਪਲਾਟ ਦਾ ਮਾਪ (dimensions) ਪਤਾ ਕਰੋ।



7. ਹਸਨ, ਸਕੂਲ ਵਰਦੀ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਦੋ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਕੱਪੜਾ ਖਰੀਦਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਵਿੱਚ ਕਮੀਜ਼ ਦੇ ਕੱਪੜੇ ਦਾ ਮੁੱਲ ₹ 50 ਪ੍ਰਤੀ ਮੀਟਰ ਅਤੇ ਪੈਂਟ ਦੇ ਕੱਪੜੇ ਦਾ ਮੁੱਲ ₹ 90 ਪ੍ਰਤੀ ਮੀਟਰ ਹੈ। ਉਹ ਪੈਂਟ ਦੇ ਹਰੇਕ 2 ਮੀਟਰ ਕੱਪੜੇ ਦੇ ਲਈ ਕਮੀਜ਼ ਦਾ 3 ਮੀਟਰ ਕੱਪੜਾ ਖਰੀਦਦਾ ਹੈ। ਉਹ ਇਸ ਕੱਪੜੇ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 12% ਅਤੇ 10% ਲਾਭ 'ਤੇ ਵੇਚ ਕੇ ₹ 36,660 ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਉਸਨੇ ਪੈਂਟਾਂ ਦੇ ਲਈ ਕਿੰਨਾ ਕੱਪੜਾ ਖਰੀਦਿਆ ?

8. ਹਿਰਨਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਝੁੰਡ ਦਾ ਅੱਧਾ ਭਾਗ ਮੈਦਾਨ ਵਿੱਚ ਚਰ ਰਿਹਾ ਹੈ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਦਾ ਤਿੰਨ ਚੌਥਾਈ ਨੇੜੇ ਖੇਡ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਬਾਕੀ ਬਚੇ 9 ਹਿਰਨ ਇੱਕ ਤਲਾਬ ਵਿੱਚ ਪਾਣੀ ਪੀ ਰਹੇ ਸਨ। ਝੁੰਡ ਵਿੱਚ ਹਿਰਨਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ।
9. ਦਾਦਾ ਜੀ ਦੀ ਉਮਰ ਆਪਣੀ ਪੋਤਰੀ ਦੀ ਉਮਰ ਦਾ ਦਸ ਗੁਣਾ ਹੈ। ਜਦਕਿ ਉਸਦੀ ਉਮਰ ਪੋਤਰੀ ਦੀ ਉਮਰ ਨਾਲੋਂ 54 ਸਾਲ ਜ਼ਿਆਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦੋਨਾਂ ਦੀ ਉਮਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।
10. ਅਮਨ ਦੀ ਉਮਰ ਉਸਦੇ ਪੁੱਤਰ ਦੀ ਉਮਰ ਨਾਲੋਂ ਤਿੰਨ ਗੁਣਾ ਹੈ। 10 ਸਾਲ ਪਹਿਲਾਂ ਉਸਦੀ ਉਮਰ ਪੁੱਤਰ ਦੀ ਉਮਰ ਦਾ ਪੰਜ ਗੁਣਾ ਸੀ। ਦੋਨਾਂ ਦੀ ਵਰਤਮਾਨ ਉਮਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

2.6 ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਸਰਲ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲਣਾ

ਉਦਾਹਰਣ 16 : ਹੱਲ ਕਰੋ : $\frac{6x+1}{3}+1=\frac{x-3}{6}$

ਹੱਲ : ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ 6 ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ 'ਤੇ

> 6 ਨਾਲ ਹੀ ਕਿਉਂ ? ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਹਰਾਂ ਦਾ ਲ.ਸ.ਵ. (L.C.M.) 6 ਹੈ।

$$\frac{6\,(6x+1)}{3}+6\times 1=\frac{6(x-3)}{6}$$

ਜਾਂ $2\,(6x+1)+6=x-3$

ਜਾਂ $12x+2+6=x-3$ (ਬਰੈਕਟਾਂ ਹਟਾਉਣ 'ਤੇ)

ਜਾਂ $12x+8=x-3$

ਜਾਂ $12x-x+8=-3$

ਜਾਂ $11x+8=-3$

ਜਾਂ $11x=-3-8$

ਜਾਂ $11x=-11$

ਜਾਂ $x=-1$ (ਲੋੜੀਂਦਾ ਹੱਲ)

ਪੜਤਾਲ : ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ (LHS) $=\frac{6(-1)+1}{3}+1=\frac{-6+1}{3}+1=\frac{-5}{3}+\frac{3}{3}=\frac{-5+3}{3}=\frac{-2}{3}$

ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ (RHS) $=\frac{(-1)-3}{6}=\frac{-4}{6}=\frac{-2}{3}$

ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ (LHS) = ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ (RHS) (ਜੋ ਕਿ ਚਾਹੀਦਾ ਸੀ)

ਉਦਾਹਰਣ 17 : ਹੱਲ ਕਰੋ : $5x-2\,(2x-7)=2\,(3x-1)+\frac{7}{2}$

ਹੱਲ : ਬਰੈਕਟਾਂ ਹਟਾਉਣ 'ਤੇ

ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ (LHS) $=5x-4x+14=x+14$

ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ (RHS) $=6x-2+\frac{7}{2}=6x-\frac{4}{2}+\frac{7}{2}=6x+\frac{3}{2}$

ਇਸ ਲਈ ਸਮੀਕਰਨ $x + 14 = 6x + \frac{3}{2}$ ਹੋਈ

ਜਾਂ $$14 = 6x - x + \frac{3}{2}$$

ਜਾਂ $$14 = 5x + \frac{3}{2}$$

ਜਾਂ $$14 - \frac{3}{2} = 5x \qquad (\tfrac{3}{2} \text{ ਸਥਾਨ ਪਰਿਵਰਤਨ ਕਰਨ 'ਤੇ})$$

ਜਾਂ $$\frac{28-3}{2} = 5x$$

ਜਾਂ $$\frac{25}{2} = 5x$$

ਜਾਂ $$x = \frac{25}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{5 \times 5}{2 \times 5} = \frac{5}{2}$$

ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਦਾ ਹੱਲ ਹੈ $$x = \frac{5}{2}$$

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਧਿਆਨ ਦਿੱਤਾ ਕਿ ਅਸੀਂ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਕਿਵੇਂ ਸਰਲ ਬਣਾਇਆ ? ਅਸੀਂ ਸਮੀਕਰਨ ਦੇ ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ ਸਾਰੇ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਦੇ ਹਰਾਂ ਦੇ ਲ.ਸ.ਵ. ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕੀਤੀ।

ਪੜਤਾਲ : ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ (LHS) $= 5 \times \frac{5}{2} - 2\left(\frac{5}{2} \times 2 - 7\right)$

$$= \frac{25}{2} - 2(5-7) = \frac{25}{2} - 2(-2) = \frac{25}{2} + 4 = \frac{25+8}{2} = \frac{33}{2}$$

ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ (RHS) $= 2\left(\frac{5}{2} \times 3 - 1\right) + \frac{7}{2}$

$$= 2\left(\frac{15}{2} - \frac{2}{2}\right) + \frac{7}{2} = \frac{2 \times 13}{2} + \frac{7}{2}$$

$$= \frac{26+7}{2} = \frac{33}{2} = \text{LHS} \quad (\text{ਜੋ ਕਿ ਚਾਹੀਦਾ ਸੀ})$$

ਧਿਆਨ ਦਿਉ, ਇਸ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਬਰੈਕਟਾਂ ਨੂੰ ਹਟਾ ਦਿੱਤਾ ਅਤੇ ਸਮਾਨ ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾ ਕੇ ਸਮੀਕਰਨ ਸਰਲ ਬਣਾਇਆ।

ਅਭਿਆਸ 2.5

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

1. $\frac{x}{2} - \frac{1}{5} = \frac{x}{3} + \frac{1}{4}$
2. $\frac{n}{2} - \frac{3n}{4} + \frac{5n}{6} = 21$
3. $x + 7 - \frac{8x}{3} = \frac{17}{6} - \frac{5x}{2}$
4. $\frac{x-5}{3} = \frac{x-3}{5}$
5. $\frac{3t-2}{4} - \frac{2t+3}{3} = \frac{2}{3} - t$
6. $m - \frac{m-1}{2} = 1 - \frac{m-2}{3}$

ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਨੂੰ ਸਰਲ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲਦੇ ਹੋਏ ਹੱਲ ਕਰੋ :

7. $3(t-3)=5(2t+1)$ **8.** $15(y-4)-2(y-9)+5(y+6)=0$

9. $3(5z-7)-2(9z-11)=4(8z-13)-17$

10. $0.25(4f-3)=0.05(10f-9)$

2.7 ਰੇਖੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਸਮੀਕਰਨ

ਉਦਾਹਰਣ 18 : ਹੱਲ ਕਰੋ : $\dfrac{x+1}{2x+3}=\dfrac{3}{8}$

ਹੱਲ : ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਇਹ ਸਮੀਕਰਨ ਰੇਖੀ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਇਸਦੇ ਖੱਬੇ ਪੱਖ ਵਿੱਚ ਵਿਅੰਜਕ ਰੇਖੀ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਪਰ ਇਸ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਅਸੀਂ ਸਮੀਕਰਨ ਦੇ ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ $(2x+3)$ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਧਿਆਨ ਦਿਉ
$2x+3 \neq 0$ (ਕਿਉਂ)

$$\left(\frac{x+1}{2x+3}\right)\times(2x+3)=\frac{3}{8}\times(2x+3)$$

$(2x+3)$ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਵਿੱਚ ਕੱਟਿਆ (cancel) ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$x+1=\frac{3(2x+3)}{8}$$

ਹੁਣ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਨ ਮਿਲਿਆ। ਜਿਸ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਹੱਲ ਕਰਨਾ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ।

ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ 8 ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ 'ਤੇ

$$8(x+1)=3(2x+3)$$

ਇਹ ਪਗ ਤਿਰਛੀ-ਗੁਣਾ ਦੀ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਨਾਲ ਵੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ :
$\dfrac{x+1}{2x+3} \times \dfrac{3}{8}$

ਜਾਂ $8x+8=6x+9$

ਜਾਂ $8x=6x+9-8$

ਜਾਂ $8x=6x+1$

ਜਾਂ $8x-6x=1$

ਜਾਂ $2x=1$

ਜਾਂ $x=\dfrac{1}{2}$

ਇਸ ਲਈ, ਹੱਲ $x=\dfrac{1}{2}$ ਹੈ।

ਪੜਤਾਲ : ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਵਿੱਚ ਅੰਸ਼ $=\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{1+2}{2}=\dfrac{3}{2}$ ਹੈ।

ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਵਿੱਚ ਹਰ $=2x+3=2\times\dfrac{1}{2}+3=1+3=4$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ = ਅੰਸ਼ ÷ ਹਰ $=\dfrac{3}{2}\div4=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{8}$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ (LHS) = ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ (RHS)

ਉਦਾਹਰਣ 19 : ਅਨੁ ਅਤੇ ਰਾਜ ਦੀ ਵਰਤਮਾਨ ਉਮਰ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ 4 : 5 ਹੈ। 8 ਸਾਲ ਬਾਅਦ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੀ ਉਮਰ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ 5 : 6 ਹੋਵੇਗਾ। ਉਸਦੀ ਵਰਤਮਾਨ ਉਮਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਵੋ ਕਿ ਅਨੁ ਅਤੇ ਰਾਜ ਦੀ ਵਰਤਮਾਨ ਉਮਰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $4x$ ਅਤੇ $5x$ ਹੈ।

8 ਸਾਲ ਬਾਅਦ ਅਨੁ ਦੀ ਉਮਰ = $(4x + 8)$ ਸਾਲ

8 ਸਾਲ ਬਾਅਦ ਰਾਜ ਦੀ ਉਮਰ = $(5x + 8)$ ਸਾਲ

ਉਸਦੀ ਉਮਰ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ = $\frac{4x+8}{5x+8}$, ਜੋ ਦਿੱਤਾ ਹੈ 5 : 6

ਇਸ ਲਈ $$\frac{4x+8}{5x+8} = \frac{5}{6}$$

ਤਿਰਛੀ-ਗੁਣਾ ਕਰਨ 'ਤੇ $$6(4x+8) = 5(5x+8)$$

ਜਾਂ $$24x + 48 = 25x + 40$$

ਜਾਂ $$24x + 48 - 40 = 25x$$

ਜਾਂ $$24x + 8 = 25x$$

ਜਾਂ $$8 = 25x - 24x$$

ਜਾਂ $$8 = x$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਨੁ ਦੀ ਵਰਤਮਾਨ ਉਮਰ $4x = 4 \times 8 = 32$ ਸਾਲ

ਅਤੇ ਰਾਜ ਦੀ ਵਰਤਮਾਨ ਉਮਰ $5x = 5 \times 8 = 40$ ਸਾਲ

ਅਭਿਆਸ 2.6

ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ :

1. $\frac{8x-3}{3x} = 2$
2. $\frac{9x}{7-6x} = 15$
3. $\frac{z}{z+15} = \frac{4}{9}$
4. $\frac{3y+4}{2-6y} = \frac{-2}{5}$
5. $\frac{7y+4}{y+2} = \frac{-4}{3}$
6. ਹਰੀ ਅਤੇ ਹੈਰੀ ਦੀ ਵਰਤਮਾਨ ਉਮਰ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ 5 : 7 ਹੈ। 4 ਸਾਲ ਬਾਅਦ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਉਮਰ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ 3 : 4 ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ। ਇਸਦੀ ਵਰਤਮਾਨ ਉਮਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।
7. ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਹਰ ਉਸਦੇ ਅੰਸ਼ ਨਾਲੋਂ 8 ਜ਼ਿਆਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਅੰਸ਼ ਵਿੱਚ 17 ਜੋੜ ਦਿੱਤਾ ਜਾਵੇ ਅਤੇ ਹਰ ਵਿੱਚੋਂ 1 ਘਟਾ ਦਿੱਤਾ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ $\frac{3}{2}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗਾ। ਉਹ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਅਸੀਂ ਕੀ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀ ?

1. ਇੱਕ ਬੀਜ ਸਮੀਕਰਨ, ਚਲਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਬਰਾਬਰਤਾ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਹ ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ ਕਿ ਬਰਾਬਰਤਾ ਦੇ ਚਿੰਨ੍ਹ ਦੇ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਵਾਲੇ ਵਿਅੰਜਕ ਦਾ ਮੁੱਲ ਉਸਦੇ ਦੂਸਰੇ ਪਾਸੇ ਵਾਲੇ ਵਿਅੰਜਕ ਦੇ ਮੁੱਲ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
2. ਜਮਾਤ VI, VII ਅਤੇ VIII ਵਿੱਚ ਸਿੱਖੇ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਸਮੀਕਰਨ, ਇੱਕ ਚਲ ਵਾਲੇ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਨ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਵਿੱਚ ਸਮੀਕਰਨ ਬਣਾਉਣ ਵਾਲੇ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਹੀ ਚਲ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸਦੇ ਇਲਾਵਾ ਇਹ ਸਮੀਕਰਨ ਰੇਖੀ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤੇ ਗਏ ਚਲਾਂ ਦੀ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਘਾਤ 1 ਹੈ।
3. ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਨ ਦਾ ਹੱਲ ਕੋਈ ਵੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ।
4. ਸਮੀਕਰਨ ਦੇ ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਰੇਖੀ ਵਿਅੰਜਕ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਜੋ ਸਮੀਕਰਨ ਅਸੀਂ ਜਮਾਤ VI ਅਤੇ VII ਵਿੱਚ ਸਿੱਖੇ, ਉਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਵਿੱਚ ਕੇਵਲ ਸੰਖਿਆ ਹੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
5. ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ ਚਲਾਂ ਨੂੰ ਵੀ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਤੋਂ ਦੂਸਰੇ ਪਾਸੇ ਵਿੱਚ ਸਥਾਨ ਪਰਿਵਰਤਨ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।
6. ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਸਮੀਕਰਨ ਬਣਾਉਣ ਵਾਲੇ ਵਿਅੰਜਕ ਨੂੰ, ਉਸ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ, ਸਰਲ ਬਣਾ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਸ਼ੁਰੂ ਵਿੱਚ ਕੁੱਝ ਸਮੀਕਰਨ ਰੇਖੀ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੇ। ਪਰ ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ ਉੱਚਿਤ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਕੇ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।
7. ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਦੀ ਉਪਯੋਗਿਤਾ, ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਵਿੱਚ ਹਨ। ਸੰਖਿਆਵਾਂ, ਉਮਰਾਂ, ਘੇਰੇ ਅਤੇ ਕਰੰਸੀ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਹੋਣ ਵਾਲੇ ਸਿੱਕੇ ਅਤੇ ਨੋਟਾਂ 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਕਈ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ ਹੱਲ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਅਧਿਆਇ

3

ਚਤੁਰਭੁਜਾਵਾਂ ਨੂੰ ਸਮਝਣਾ

3.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ ਕਾਗਜ਼, **ਸਮਤਲ** ਦਾ ਇੱਕ ਨਮੂਨਾ ਰੂਪ ਹੈ। ਜਦ ਤੁਸੀਂ ਕਾਗਜ਼ ਤੋਂ ਪੈਨਸਿਲ ਨੂੰ ਚੁੱਕੇ ਬਿਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਜੋੜਦੇ ਹੋ (ਇਕੱਲੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਛੱਡ ਕੇ ਅਕ੍ਰਿਤੀ ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਭਾਗ ਨੂੰ ਦੁਬਾਰਾ ਵਾਹੇ ਬਿਨਾਂ) ਤਾਂ ਤੁਹਾਨੂੰ ਇੱਕ **ਸਮਤਲ ਵਕਰ** ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਪਿਛਲੀਆਂ ਸ਼੍ਰੇਣੀਆਂ ਵਿੱਚ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਵੇਖੀਆਂ ਗਈਆਂ ਵਕਰਾਂ ਨੂੰ ਯਾਦ ਕਰਨ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ।

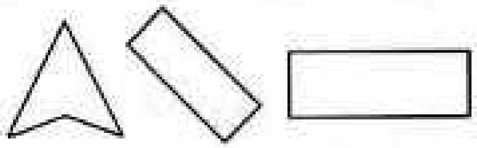
ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਚਿੱਤਰਾਂ ਦਾ ਮੇਲ ਕਰੋ : (ਧਿਆਨ ਰੱਖੋ! ਇੱਕ ਚਿੱਤਰ ਦਾ ਇੱਕ ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਚਿੱਤਰਾਂ ਨਾਲ ਮੇਲ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ।)

ਚਿੱਤਰ	ਨਮੂਨਾ
(1)	(a) ਸਧਾਰਨ ਬੰਦ ਵਕਰ ਹੈ।
(2)	(b) ਬੰਦ ਵਕਰ ਜੋ ਕਿ ਸਧਾਰਨ ਨਹੀਂ ਹੈ।
(3)	(c) ਸਧਾਰਨ ਵਕਰ ਜੋ ਕਿ ਬੰਦ ਨਹੀਂ ਹੈ।
(4)	(d) ਸਧਾਰਨ ਵਕਰ ਨਹੀਂ ਹੈ।

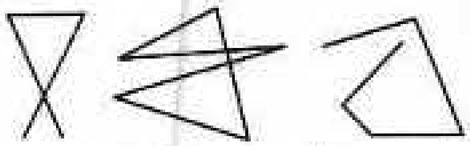
ਆਪਣੇ ਦੋਸਤਾਂ ਨਾਲ ਇਸ ਮਿਲਾਣ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰੋ, ਕੀ ਉਹ ਸਹਿਮਤ ਹਨ?

3.2 ਬਹੁਭੁਜ

ਸਿਰਫ਼ ਰੇਖਾਖੰਡਾਂ ਨਾਲ ਬਣੀ ਸਧਾਰਨ ਬੰਦ ਵਕਰ ਨੂੰ **ਬਹੁਭੁਜ** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।



ਵਕਰਾਂ ਜੋ ਬਹੁਭੁਜ ਹਨ



ਵਕਰਾਂ ਜੋ ਬਹੁਭੁਜ ਨਹੀਂ ਹਨ

ਕੁਝ ਹੋਰ ਬਹੁਭੁਜਾਂ ਦੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦੇਣ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰੋ ਅਤੇ ਕੁਝ ਹੋਰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦਿਉ। ਜੋ ਬਹੁਭੁਜ ਨਾ ਹੋਣ। ਇੱਕ ਬਹੁਭੁਜ ਦਾ ਕੱਚਾ (Rough) ਚਿੱਤਰ ਖਿੱਚੋ ਅਤੇ ਉਸਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਅਤੇ ਸਿਖਰਾਂ ਦੀ ਪਹਿਚਾਣ ਕਰੋ।

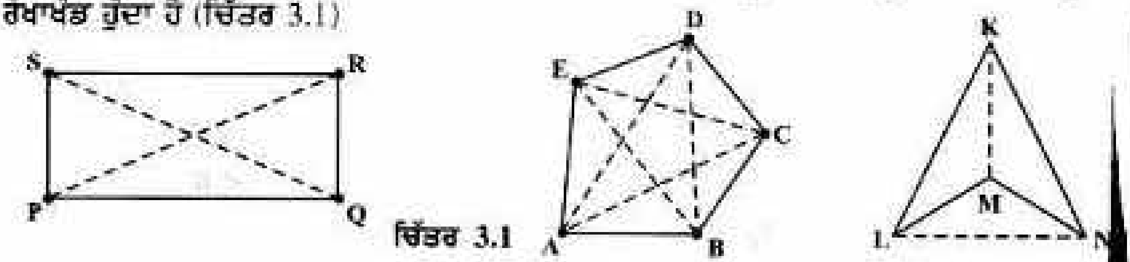
3.2.1 ਬਹੁਭੁਜਾਂ ਦਾ ਵਰਗੀਕਰਨ

ਅਸੀਂ ਬਹੁਭੁਜਾਂ ਦਾ ਵਰਗੀਕਰਨ ਉਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ (ਜਾਂ ਸਿਖਰਾਂ) ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਭੁਜਾਵਾਂ ਜਾਂ ਸਿਖਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ	ਵਰਗੀਕਰਨ	ਚਿੱਤਰ ਨਮੂਨਾ
3	ਤ੍ਰਿਭੁਜ	
4	ਚਤੁਰਭੁਜ	
5	ਪੰਜਭੁਜ	
6	ਛੇਭੁਜ	
7	ਸੱਤਭੁਜ	
8	ਅੱਠਭੁਜ	
9	ਨੌਂ ਭੁਜ	
10	ਦਸ ਭੁਜ	
⋮	⋮	⋮
n	n-ਭੁਜ	

3.2.2 ਵਿਕਰਨ

ਕਿਸੇ ਬਹੁਭੁਜ ਦਾ ਵਿਕਰਨ ਉਸਦੇ ਕੋਈ ਦੋ ਸਿਖਰਾਂ (ਲਾਗਵੇਂ ਸਿਖਰਾਂ ਨੂੰ ਛੱਡ ਕੇ) ਨੂੰ ਜੋੜਨ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਰੇਖਾਖੰਡ ਹੁੰਦਾ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 3.1)

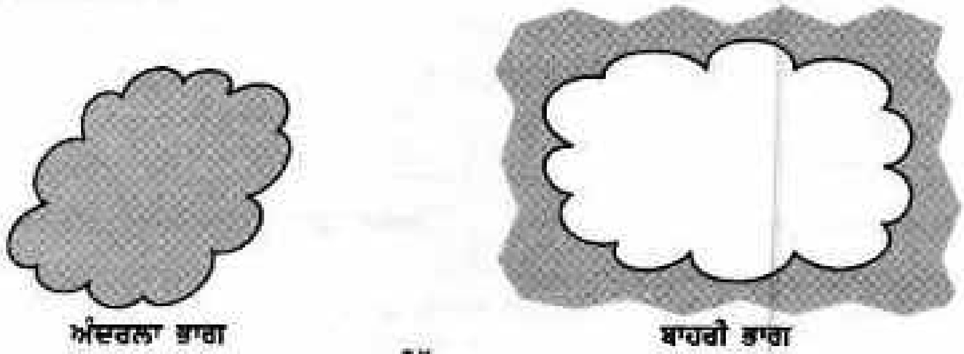


ਚਿੱਤਰ 3.1

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਚਿੱਤਰਾਂ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਵਿਕਰਨ ਦਾ ਨਾਂ ਦੇ ਸਕਦੇ ਹੋ ? (ਚਿੱਤਰ 3.1)

ਕੀ $\overline{PQ}$ ਇੱਕ ਵਿਕਰਨ ਹੈ ? $\overline{LN}$ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ ?

ਇੱਕ ਬੰਦ ਵਕਰ ਵਿੱਚ ਅੰਦਰਲੇ ਅਤੇ ਬਾਹਰੀ ਭਾਗ ਦਾ ਕੀ ਅਰਥ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਇਹ ਤੁਸੀਂ ਭਲੀ-ਭਾਂਤੀ ਜਾਣਦੇ ਹੋ (ਚਿੱਤਰ 3.2)।

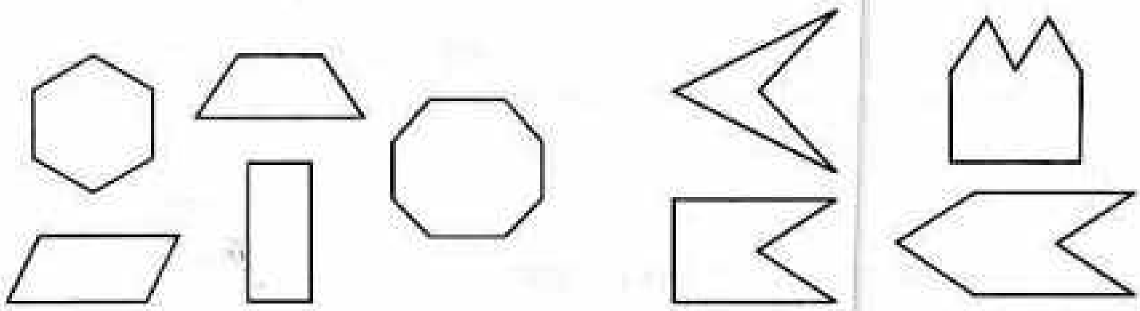


ਚਿੱਤਰ 3.2

ਅੰਦਰਲੇ ਭਾਗ ਦਾ ਇੱਕ ਘੇਰਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਕੀ ਬਾਹਰੀ ਭਾਗ ਦਾ ਘੇਰਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਆਪਣੇ ਦੋਸਤਾਂ ਦੇ ਨਾਲ ਚਰਚਾ ਕਰੋ।

3.2.3 ਉੱਤਲ ਅਤੇ ਅਵਤਲ ਬਹੁਭੁਜ

ਇੱਥੇ ਕੁਝ ਉੱਤਲ (convex) ਬਹੁਭੁਜ ਅਤੇ ਕੁਝ ਅਵਤਲ (concave) ਬਹੁਭੁਜ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਨ : (ਚਿੱਤਰ 3.3)



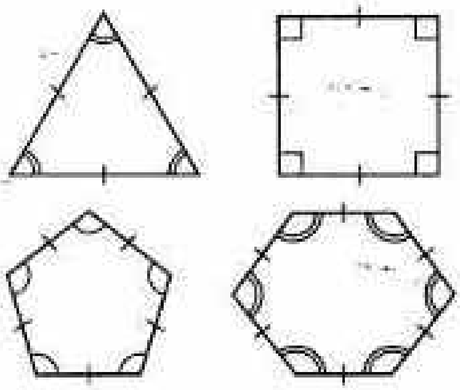
ਚਿੱਤਰ 3.3

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਦੱਸ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਬਹੁਭੁਜ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਤੋਂ ਅਲੱਗ ਕਿਉਂ ਹਨ ? ਜੋ ਬਹੁਭੁਜ ਉੱਤਲ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਵਿਕਰਨਾਂ ਦਾ ਕੋਈ ਵੀ ਭਾਗ ਬਾਹਰੀ ਹਿੱਸੇ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਕੀ ਇਹ ਅਵਤਲ ਬਹੁਭੁਜਾਂ ਦੇ ਲਈ ਵੀ ਸੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਚਿੱਤਰਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰੋ। ਇਸ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਆਪਣੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ ਉੱਤਲ ਬਹੁਭੁਜ ਅਤੇ ਅਵਤਲ ਬਹੁਭੁਜ ਸਮਝਣ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰੋ। ਹਰੇਕ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਦੋ ਚਿੱਤਰ ਬਣਾਉ।

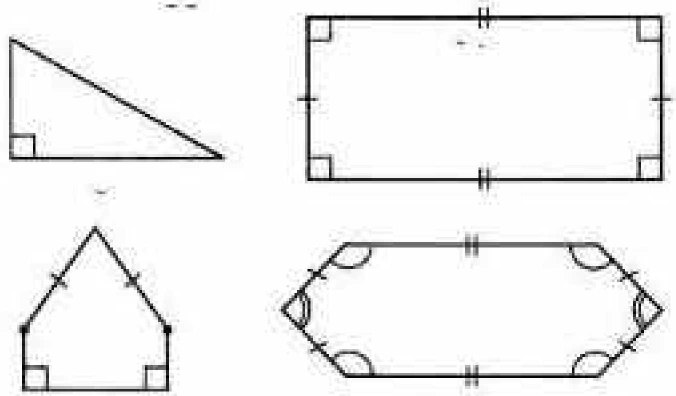
ਇਸ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕੇਵਲ ਉੱਤਲ ਬਹੁਭੁਜਾਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ।

3.2.4 ਸਮ ਅਤੇ ਅਸਮ ਬਹੁਭੁਜ (Regular and Irregular Polygons)

ਇੱਕ ਸਮ ਬਹੁਭੁਜ, ਸਮਭੁਜੀ ਅਤੇ ਸਮਾਨ ਕੋਣੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਇੱਕ ਵਰਗ ਵਿੱਚ ਭੁਜਾਵਾਂ ਅਤੇ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਮਾਪ ਦੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਇੱਕ ਸਮ ਬਹੁਭੁਜ ਹੈ। ਇੱਕ ਆਇਤ ਸਮਾਨ ਕੋਣੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਸਮਭੁਜ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ। ਕੀ ਇੱਕ ਆਇਤ ਇੱਕ ਸਮ ਬਹੁਭੁਜ ਹੈ ? ਕੀ ਇੱਕ ਸਮਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਇੱਕ ਸਮ ਬਹੁਭੁਜ ਹੈ ?



ਸਮ ਬਹੁਭੁਜ (Regular polygons)



ਅਸਮ ਬਹੁਭੁਜ (Irregular polygons)

[ਸੰਕੇਤ : ⩘ ਜਾਂ ⩘ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਬਰਾਬਰ ਲੰਬਾਈ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾਖੰਡਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।]

ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ, ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹਿਆ ਹੈ ਜੋ ਸਮਭੁਜ ਤਾਂ ਹੋਵੇ ਪਰੰਤੂ ਸਮਾਨ ਕੋਣੀ ਨਾ ਹੋਵੇ। ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਵੇਖੇ ਗਏ ਚਤੁਰਭੁਜਾਂ ਦੇ ਚਿੱਤਰਾਂ ਨੂੰ ਯਾਦ ਕਰੋ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਆਇਤ, ਵਰਗ, ਸਮ ਚਤੁਰਭੁਜ ਆਦਿ।

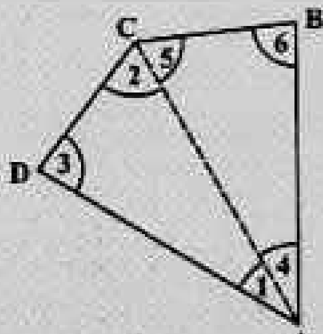
ਕੀ ਕੋਈ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਸਮਭੁਜ ਤਾਂ ਹੋਵੇ ਪਰੰਤੂ ਸਮਾਨ ਕੋਣੀ ਨਾ ਹੋਵੇ ?

3.2.5 ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਗੁਣ

ਕੀ ਤੁਹਾਨੂੰ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਗੁਣ ਯਾਦ ਹੈ ? ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਤਿੰਨਾਂ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਮਾਪਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 180° ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇਸ ਤੱਥ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਦੇ ਲਈ ਜਿਸ ਵਿਧੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਹੈ ਉਸਨੂੰ ਯਾਦ ਕਰੋ। ਹੁਣ ਇਸ ਸੰਕਲਪ ਦਾ ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਲਈ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੋ।

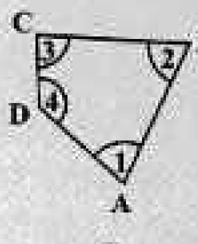
ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਰੋ

1. ਕੋਈ ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ, ਮੰਨ ਲਵੋ ABCD, (ਚਿੱਤਰ 3.4)। ਇੱਕ ਵਿਕਰਨ ਖਿੱਚ ਕੇ, ਇਸ ਨੂੰ ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡੋ। ਤੁਹਾਨੂੰ ਛੇ ਕੋਣ 1, 2, 3, 4, 5 ਅਤੇ 6 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।
   ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਗੁਣ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰੋ ਅਤੇ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ ਅਤੇ $\angle D$ ਦੇ ਮਾਪਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ $180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

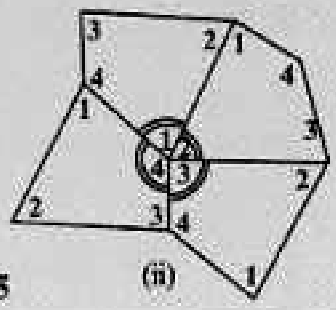


ਚਿੱਤਰ 3.4

2. ਕਿਸੇ ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD, ਦੇ ਗੱਤੇ ਵਾਲੇ ਚਾਰ ਸਰਬੰਗਸਮ ਚਿੱਤਰ ਲਵੋ ਜਿਸਦੇ ਕੋਣ ਦਰਸਾਏ ਗਏ ਹਨ। (ਚਿੱਤਰ 3.5 (i)) ਇਹਨਾਂ ਚਾਰ ਚਿੱਤਰਾਂ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ

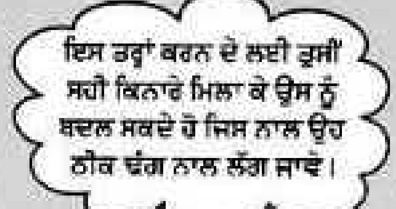


(i)



(ii)

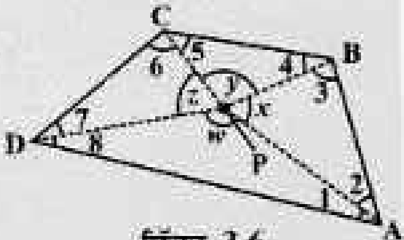
ਚਿੱਤਰ 3.5



ਤਰਤੀਬ ਦਿਉ ਜਿਸ ਨਾਲ ∠1, ∠2, ∠3, ∠4 ਇਹ ਇੱਕ ਹੀ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਮਿਲਣ। ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। (ਚਿੱਤਰ 3.1(ii))। ਤੁਸੀਂ ∠1, ∠2, ∠3 ਅਤੇ ∠4 ਦੇ ਜੋੜਫਲ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਕੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ?

[**ਟਿੱਪਣੀ** : ਅਸੀਂ ਕੋਣਾਂ ਨੂੰ ∠1, ∠2, ∠3 ਆਦਿ ਨਾਲ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਮਾਪਾਂ ਨੂੰ $m\angle 1, m\angle 2, m\angle 3$ ਆਦਿ ਨਾਲ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ]

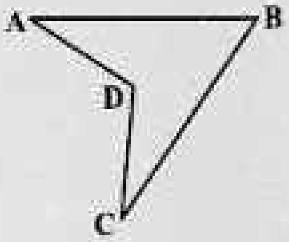
ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਚਾਰਾਂ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਮਾਪਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ________ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਨਤੀਜੇ 'ਤੇ ਹੋਰ ਵੀ ਕਈ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਪਹੁੰਚ ਸਕਦੇ ਹੋ।



ਚਿੱਤਰ 3.6

3. ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD 'ਤੇ ਦੁਬਾਰਾ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ (ਚਿੱਤਰ 3.6)। ਮੰਨ ਲਵੋ ਇਸਦੇ ਅੰਦਰਲੇ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ P ਸਥਿਤ ਹੈ। P ਨੂੰ ਸਿਖਰਾਂ A, B, C ਅਤੇ D ਨਾਲ ਜੋੜੋ। ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ, ΔPAB 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $x = 180° - m\angle 2 - m\angle 3$; ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, ΔPBC, ਵਿੱਚ $y = 180° - m\angle 4 - m\angle 5$, ΔPCD ਵਿੱਚ $z = 180° - m\angle 6 - m\angle 7$ ਅਤੇ ΔPDA, $w = 180° - m\angle 8 - m\angle 1$ ਇਸਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਕੇ ਕੁੱਲ ਮਾਪ $m\angle 1 + m\angle 2 + ... + m\angle 8$, ਪਤਾ ਕਰੋ। ਕੀ ਇਹ ਤੁਹਾਨੂੰ ਨਤੀਜੇ ਤਕ ਪਹੁੰਚਾਉਣ ਵਿੱਚ ਸਹਾਇਤਾ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਯਾਦ ਰੱਖੋ, $\angle x + \angle y + \angle z + \angle w = 360°$ ਹੈ।

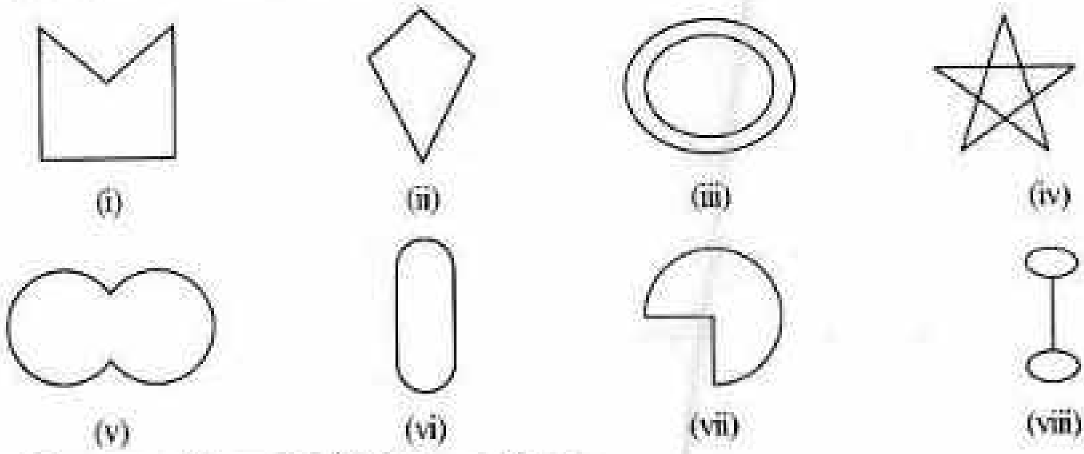
4. ਇਹ ਸਾਰੇ ਚਤੁਰਭੁਜ ਉੱਤਲ (convex) ਚਤੁਰਭੁਜ ਹਨ। ਜੇ ਚਤੁਰਭੁਜ ਉੱਤਲ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਤਾਂ ਕੀ ਹੁੰਦਾ? ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਇਸ ਨੂੰ ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡੋ ਅਤੇ ਫਿਰ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ? (ਚਿੱਤਰ 3.7)



ਚਿੱਤਰ 3.7

ਅਭਿਆਸ 3.1

1. ਇੱਥੇ ਕੁਝ ਚਿੱਤਰ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਨ :



ਹਰੇਕ ਦਾ ਵਰਗੀਕਰਨ ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਆਧਾਰ 'ਤੇ ਕਰੋ :

(a) ਸਧਾਰਨ ਵਕਰ (b) ਸਧਾਰਨ ਬੰਦ ਵਕਰ (c) ਬਹੁਭੁਜ

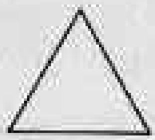
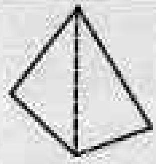
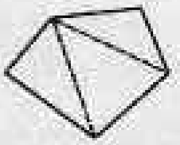
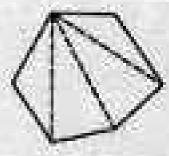
(d) ਉੱਤਲ ਬਹੁਭੁਜ (e) ਅਵਤਲ ਬਹੁਭੁਜ

2. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੇ ਵਿਕਰਨ ਹਨ?

(a) ਇੱਕ ਉੱਤਲ ਚਤੁਰਭੁਜ (b) ਇੱਕ ਸਮਛੇਭੁਜ (c) ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ

3. ਉੱਤਲ ਚਤੁਰਭੁਜਾਂ ਦੇ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਮਾਪਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਕੀ ਹੈ? ਜੇ ਚਤੁਰਭੁਜ, ਉੱਤਲ ਨਾ ਹੋਵੇ 'ਤੇ ਕੀ ਇਹ ਗੁਣ ਲਾਗੂ ਹੋਵੇਗਾ? (ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਬਣਾਉ ਜੋ ਉੱਤਲ ਨਾ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ।)

4. ਸਾਰਣੀ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੋ : (ਹਰੇਕ ਚਿੱਤਰ ਨੂੰ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡੋ ਅਤੇ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ)

ਚਿੱਤਰ				
ਭੁਜਾ	3	4	5	6
ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ	$180°$	$2 \times 180° = (4-2) \times 180°$	$3 \times 180° = (5-2) \times 180°$	$4 \times 180° = (6-2) \times 180°$

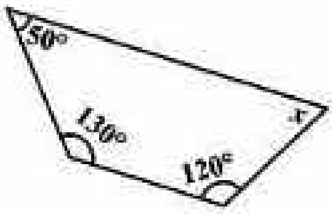
ਇੱਕ ਬਹੁਭੁਜ ਦੇ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਜੋੜਫਲ ਬਾਰੇ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ ? ਜਿਸਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਹਨ ?

(a) 7 (b) 8 (c) 10 (d) n

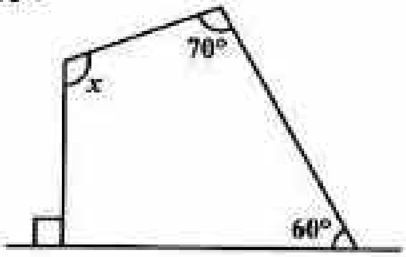
5. ਸਮ ਬਹੁਭੁਜ ਕੀ ਹੈ ? ਇੱਕ ਸਮ ਬਹੁਭੁਜ ਦਾ ਨਾਮ ਦੱਸੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ

(i) 3 ਭੁਜਾਵਾਂ (ii) 4 ਭੁਜਾਵਾਂ (iii) 6 ਭੁਜਾਵਾਂ ਹੋਣ।

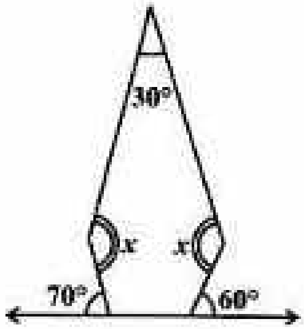
6. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਚਿੱਤਰਾਂ ਵਿੱਚ x (ਕੋਣ ਦਾ ਮਾਪ) ਪਤਾ ਕਰੋ :



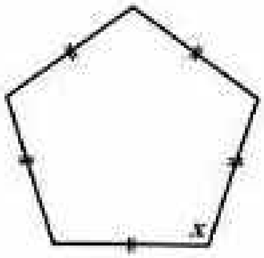
(a)



(b)

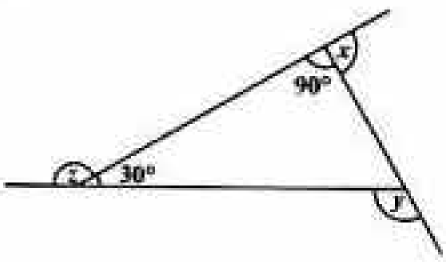


(c)

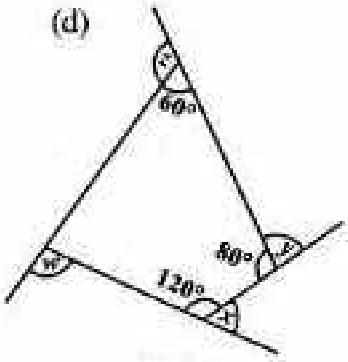


(d)

7.



(a) $x + y + z$ ਪਤਾ ਕਰੋ।



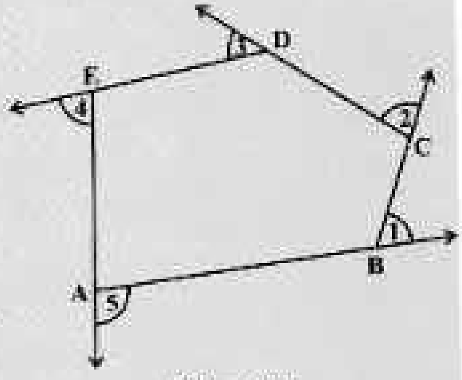
(b) $x + y + z + w$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

3.3 ਇੱਕ ਬਹੁਭੁਜ ਦੇ ਬਾਹਰੀ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਮਾਪਾਂ ਦਾ ਜੋੜ

ਕਈ ਮੌਕਿਆਂ 'ਤੇ ਬਾਹਰੀ ਕੋਣਾਂ ਦੀ ਜਾਣਕਾਰੀ ਅੰਦਰਲੇ ਕੋਣਾਂ ਅਤੇ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਤੀ 'ਤੇ ਚਾਨਣਾ ਪਾਉਂਦੀ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਰੋ

ਇੱਕ ਚਾਕ ਦੇ ਟੁੱਕੜੇ ਨਾਲ ਫਰਸ਼ ਤੇ ਇੱਕ ਬਹੁਭੁਜ ਬਣਾਉ। (ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ, ਇੱਕ ਪੰਜਭੁਜ ABCDE ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ) (ਚਿੱਤਰ 3.8)। ਅਸੀਂ ਸਾਰੇ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਮਾਪਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਜਾਣਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 4 + m\angle 5$ ਹੈ। A ਨਾਲ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰੋ ਅਤੇ $\overline{AB}$ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਸਾਰ ਚੱਲੋ। B 'ਤੇ ਪਹੁੰਚਣ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਤੁਹਾਨੂੰ ਕੋਣ $m\angle 1$ 'ਤੇ ਘੁੰਮਣ ਦੀ ਲੋੜ ਹੈ। ਜਿਸ ਨਾਲ ਤੁਸੀਂ $\overline{BC}$ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਸਾਰ ਚੱਲ ਸਕੋ C 'ਤੇ ਪਹੁੰਚਣ 'ਤੇ, $\overline{CD}$ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਸਾਰ ਚੱਲਣ ਲਈ ਤੁਹਾਨੂੰ $m\angle 2$ 'ਤੇ ਘੁੰਮਣ ਦੀ ਲੋੜ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਚੱਲਣਾ ਜਾਰੀ ਰੱਖੋ ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਤੁਸੀਂ A 'ਤੇ ਨਹੀਂ ਪਹੁੰਚ ਜਾਂਦੇ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਪੂਰਾ ਚੱਕਰ ਘੁੰਮ ਲਿਆ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 3.8

ਇਸ ਲਈ, $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 4 + m\angle 5 = 360°$ ਹੈ।

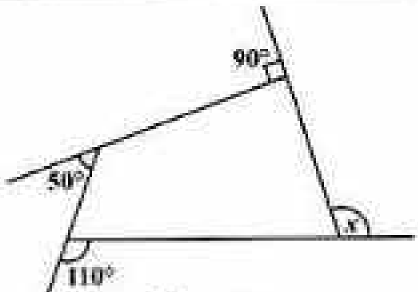
ਇੱਕ ਬਹੁਭੁਜ ਦੀਆਂ ਚਾਹੇ ਕਿੰਨੀਆਂ ਵੀ ਬਹੁਭੁਜਾਵਾਂ ਹੋਣ ਉਹਨਾਂ ਸਾਰਿਆਂ ਲਈ ਇਹ ਸਹੀ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿਸੀ ਬਹੁਭੁਜ ਦੇ ਬਾਹਰੀ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਮਾਪਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 360° ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਚਿੱਤਰ 3.9 ਵਿੱਚ ਮਾਪ x ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ :

$$x + 90° + 50° + 110° = 360° \quad \text{(ਕਿਉਂ ?)}$$
$$x + 250° = 360°$$
$$x = 110°$$



ਚਿੱਤਰ 3.9

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

ਇੱਕ ਸਮ ਛੇਭੁਜ ਲਵੋ (ਚਿੱਤਰ 3.10)।

(i) ਬਾਹਰੀ ਕੋਣ x, y, z, p, q ਅਤੇ r ਦੇ ਮਾਪਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਕੀ ਹੈ?

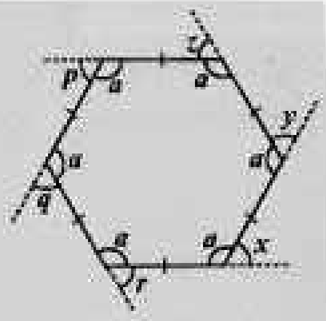
(ii) ਕੀ $x = y = z = p = q = r$ ਹੈ? ਕਿਉਂ?

(iii) ਹਰ ਇੱਕ ਦਾ ਮਾਪ ਕੀ ਹੈ?

(i) ਬਾਹਰੀ ਕੋਣ (ii) ਅੰਦਰਲਾ ਕੋਣ

(iv) ਇਸ ਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਦੇ ਲਈ ਦੁਹਰਾਉ :

(i) ਇੱਕ ਸਮ ਅੱਠਭੁਜ (ii) ਇੱਕ ਸਮ 20 ਭੁਜ



ਚਿੱਤਰ 3.10

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਇੱਕ ਸਮ ਬਹੁਭੁਜ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦੇ ਹਰੇਕ ਬਾਹਰੀ ਕੋਣ ਦਾ ਮਾਪ 45° ਹੈ।

ਹੱਲ : ਸਾਰੇ ਬਾਹਰੀ ਕੋਣਾਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਮਾਪ = 360°

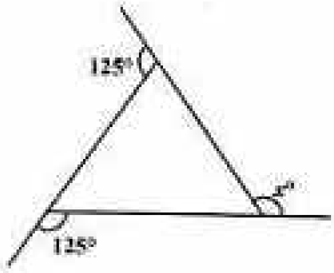
ਹਰੇਕ ਬਾਹਰੀ ਕੋਣ ਦਾ ਮਾਪ = 45°

ਇਸ ਲਈ, ਬਾਹਰੀ ਕੋਣਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ $= \frac{360}{45} = 8$

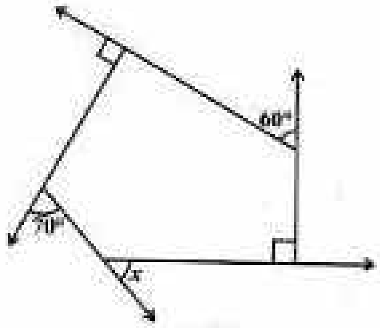
ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਹੁਭੁਜ ਦੀਆਂ 8 ਭੁਜਾਵਾਂ ਹਨ।

ਅਭਿਆਸ 3.2

1. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਚਿੱਤਰਾਂ ਵਿੱਚ x ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।



(a)



(b)

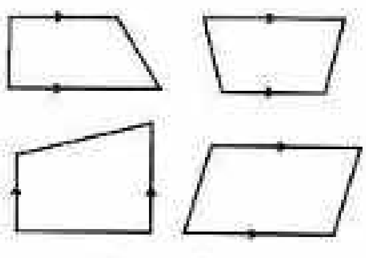
2. ਇੱਕ ਸਮ ਬਹੁਭੁਜ ਦੇ ਹਰੇਕ ਬਾਹਰੀ ਕੋਣ ਦਾ ਮਾਪ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦੀਆਂ
   (i) 9 ਭੁਜਾਵਾਂ (ii) 15 ਭੁਜਾਵਾਂ ਹਨ।
3. ਇੱਕ ਸਮ ਬਹੁਭੁਜ ਦੀਆਂ ਕਿੰਨੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਹਨ ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਬਾਹਰੀ ਕੋਣ ਦਾ ਮਾਪ 24° ਹੈ?
4. ਇੱਕ ਸਮ ਬਹੁਭੁਜ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ ਇਸਦਾ ਹਰੇਕ ਅੰਦਰਲਾ ਕੋਣ 165° ਦਾ ਹੈ?
5. (a) ਕੀ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਸਮ ਬਹੁਭੁਜ ਸੰਭਵ ਹੈ ਜਿਸਦੇ ਹਰੇਕ ਬਾਹਰੀ ਕੋਣ ਦਾ ਮਾਪ 22° ਹੈ?
   (b) ਕੀ ਇਹ ਕਿਸੇ ਸਮ ਬਹੁਭੁਜ ਦਾ ਅੰਦਰਲਾ ਕੋਣ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ? ਕਿਉਂ?
6. (a) ਕਿਸੇ ਸਮ ਬਹੁਭੁਜ ਵਿੱਚ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਕਿੰਨੇ ਮੁੱਲ ਦਾ ਅੰਦਰਲਾ ਕੋਣ ਸੰਭਵ ਹੈ? ਕਿਉਂ?
   (b) ਕਿਸੇ ਸਮ ਬਹੁਭੁਜ ਵਿੱਚ ਜ਼ਿਆਦਾ ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਕਿੰਨੇ ਮੁੱਲ ਦਾ ਬਾਹਰੀ ਕੋਣ ਸੰਭਵ ਹੈ?

3.4 ਚਤੁਰਭੁਜਾਂ ਦੀਆਂ ਕਿਸਮਾਂ

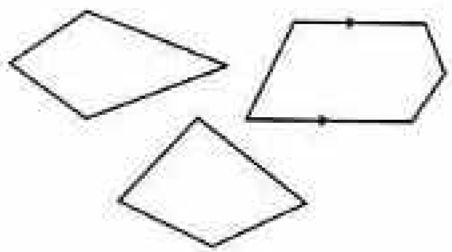
ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਅਤੇ ਕੋਣਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰਕਿਰਤੀ ਦੇ ਆਧਾਰ 'ਤੇ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਖਾਸ ਨਾਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਨ।

3.4.1 ਸਮਲੰਬ

ਸਮਲੰਬ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਜੋੜਾ ਸਮਾਂਤਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।



ਇਹ ਸਮਲੰਬ ਹਨ

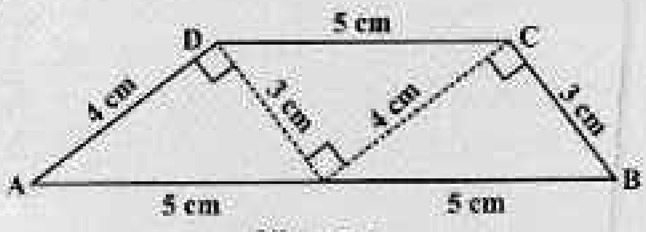


ਇਹ ਸਮਲੰਬ ਨਹੀਂ ਹਨ

ਉਪਰੋਕਤ ਚਿੱਤਰਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰੋ ਅਤੇ ਆਪਣੇ ਮਿੱਤਰਾਂ ਦੇ ਨਾਲ ਚਰਚਾ ਕਰੋ ਕਿ ਕਿਉਂ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਕੁਝ ਸਮਲੰਬ ਹਨ ਅਤੇ ਕੁਝ ਸਮਲੰਬ ਨਹੀਂ ਹਨ। (**ਸੰਕੇਤ** : *ਤੀਰ ਦਾ ਨਿਸ਼ਾਨ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ*।)

ਇਸ ਨੂੰ ਕਰੋ

1. ਸਮਾਨ ਸਰਬੰਗਸਮ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਕੱਟੇ ਹੋਏ ਭਾਗ ਲਵੋ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ 3 cm, 4 cm, 5 cm ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸੈੱਟ ਕਰੋ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਇਹ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 3.11)।



ਚਿੱਤਰ 3.11

ਤੁਹਾਨੂੰ ਇੱਕ ਸਮਲੰਬ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। (ਨਿਰੀਖਣ ਕਰੋ)

ਇੱਥੇ ਕਿਹੜੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ ? ਕੀ ਅਸਮਾਂਤਰ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਮਾਪ ਦੀਆਂ ਹੋਣੀਆਂ ਚਾਹੀਦੀਆਂ ਹਨ ?

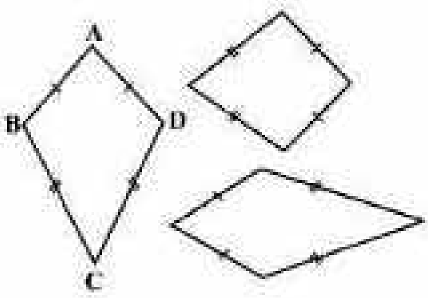
ਇਹਨਾਂ ਸਮਾਨ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰ ਤੁਸੀਂ ਦੋ ਹੋਰ ਸਮਲੰਬ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ। ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਲੱਭੋ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਚਿੱਤਰਾਂ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰੋ।

2. ਆਪਣੇ ਅਤੇ ਆਪਣੇ ਮਿੱਤਰਾਂ ਦੇ ਜੁਮੈਟਰੀ ਬਾਕਸ ਵਿੱਚੋਂ ਚਾਰ ਸੈੱਟ-ਸੁਕੇਅਰ ਲਵੋ। ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਗਿਣਤੀ ਵਿੱਚ ਵਰਤ ਕੇ ਨਾਲ-ਨਾਲ ਰੱਖੋ ਅਤੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਕਿਸਮਾਂ ਦੇ ਸਮਲੰਬ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰੋ।

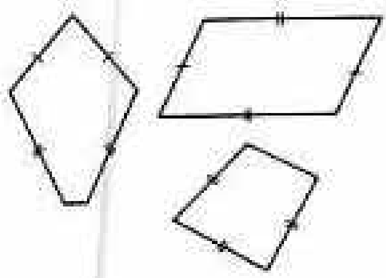
ਜੇ ਸਮਲੰਬ ਦੀ ਅਸਮਾਂਤਰ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਲੰਬਾਈ ਦੀਆਂ ਹੋਣ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਸਮਲੰਬ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਆਪਣੇ ਨਿਰੀਖਣ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਸਮਲੰਬ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਹੈ।

3.4.2 ਪਤੰਗ

ਪਤੰਗ ਇੱਕ ਖਾਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ। ਹਰੇਕ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਇੱਕੋ ਜਿਹੇ ਚਿੰਨ੍ਹ ਬਰਾਬਰ ਭੁਜਾਵਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਉਦਾਹਰਣ AB = AD ਅਤੇ BC = CD



ਇਹ ਪਤੰਗ ਹਨ



ਇਹ ਪਤੰਗ ਨਹੀਂ ਹਨ

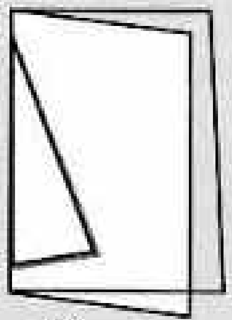
ਇਹਨਾਂ ਚਿੱਤਰਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰੋ ਅਤੇ ਇਹ ਦੱਸਣ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ ਕਿ ਪਤੰਗ ਕੀ ਹੈ। ਨਿਰੀਖਣ ਕਰੋ ਕਿ :

(i) ਇੱਕ ਪਤੰਗ ਵਿੱਚ 4 ਭੁਜਾਵਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਹ ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ।

(ii) ਇਸ ਵਿੱਚ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਲਾਗਵੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਦੋ ਜੋੜੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਇਸ ਨੂੰ ਕਰੋ

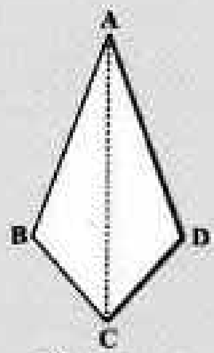
ਇੱਕ ਮੋਟੇ ਕਾਗਜ਼ ਦੀ ਸ਼ੀਟ ਲਵੋ।
ਇਸਨੂੰ ਦੋਹਰਾ ਮੋੜੋ।
ਦੋ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਲੰਬਾਈ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾਖੰਡ ਖਿੱਚੋ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਚਿੱਤਰ 3.12 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਰੇਖਾਖੰਡਾਂ ਨੂੰ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਸਾਰ ਕੱਟ ਕੇ ਖੋਲੋ।
ਤੁਹਾਨੂੰ ਇੱਕ ਪਤੰਗ ਦਾ ਚਿੱਤਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 3.13)।
ਕੀ ਪਤੰਗ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਸਮਮਿਤੀ ਰੇਖਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 3.12

ਦਿਖਾਓ ਕਿ ΔABC ਅਤੇ ΔADC ਸਰਬੰਗਸਮ ਹਨ। ਇਸ ਤੋਂ ਤੁਸੀਂ ਕਿਸ ਨਤੀਜੇ 'ਤੇ ਪਹੁੰਚਦੇ ਹੋ?

ਪਤੰਗ ਨੂੰ ਦੋ ਵਿਕਰਨਾਂ 'ਤੇ ਮੋੜੋ। ਸੈੱਟ-ਸੁਕੇਅਰ ਦੇ ਉਪਯੋਗ ਨਾਲ ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ ਕਿ ਉਹ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਨੂੰ ਸਮਕੋਣ 'ਤੇ ਕੱਟਦੇ ਹਨ। ਕੀ ਵਿਕਰਨ ਬਰਾਬਰ ਲੰਬਾਈ ਦੇ ਹਨ?
ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ (ਪੇਪਰ ਨੂੰ ਮੋੜੋ ਜਾਂ ਮਾਪਣ ਦੁਬਾਰਾ) ਕਿ ਵਿਕਰਨ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਨੂੰ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ?
ਪਤੰਗ ਦੇ ਇੱਕ ਕੋਣ ਨੂੰ ਇੱਕ ਵਿਕਰਨ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਸਾਰ ਮੋੜਨ 'ਤੇ ਬਰਾਬਰ ਮਾਪ ਵਾਲੇ ਕੋਣਾਂ ਨੂੰ ਲੱਭੋ।
ਵਿਕਰਨ 'ਤੇ ਪਈ ਤਹਿ ਦਾ ਨਿਰੀਖਣ ਕਰੋ, ਕੀ ਇਹ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਵਿਕਰਨ ਇੱਕ ਕੋਣ ਸਮਦੁਭਾਜਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ? (ਚਿੱਤਰ 3.13)।

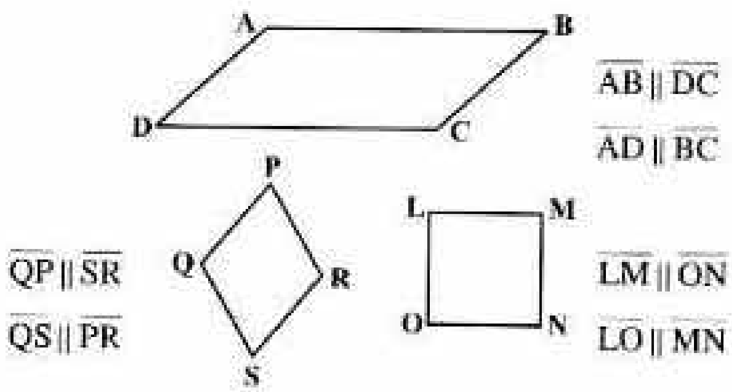


ਚਿੱਤਰ 3.13

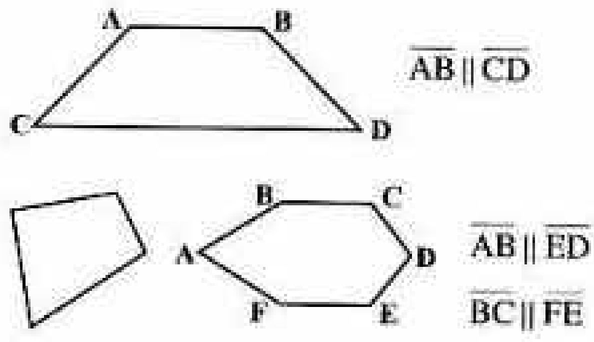
ਆਪਣੀ ਜਾਣਕਾਰੀ ਨੂੰ ਸਾਥੀਆਂ ਨਾਲ ਸਾਂਝੀ ਕਰੋ ਅਤੇ ਉਸਦੀ ਸੂਚੀ ਬਣਾਉ। ਇਨ੍ਹਾਂ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦਾ ਸਾਰ ਪਾਠ ਵਿੱਚ ਕਿਤੇ ਤੁਹਾਡੇ ਲਈ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

3.4.3 ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ

ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੀ ਹੈ। ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਨਾਂ ਤੋਂ ਪਤਾ ਲੱਗਦਾ ਹੈ ਇਸਦਾ ਸੰਬੰਧ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ ਨਾਲ ਹੈ।



ਇਹ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹਨ



ਇਹ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਨਹੀਂ ਹਨ

ਇਹਨਾਂ ਚਿੱਤਰਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰੋ ਅਤੇ ਆਪਣੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ ਦੱਸਣ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ ਕਿ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਕੀ ਹੈ। ਆਪਣੇ ਨਤੀਜੇ ਨੂੰ ਆਪਣੇ ਮਿੱਤਰਾਂ ਨਾਲ ਸਾਂਝਾ ਕਰੋ।

ਇਸ ਨੂੰ ਕਰੋ

ਦੋ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਚੌੜਾਈ ਵਾਲੇ ਗੱਤੇ ਦੀ ਆਇਤਾਕਾਰ ਪੱਟੀਆਂ ਲਓ (ਚਿੱਤਰ 3.14)।

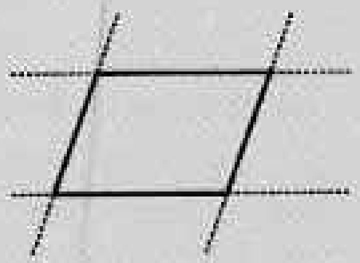
ਪੱਟੀ 1 ਚਿੱਤਰ 3.14 ਪੱਟੀ 2

ਇੱਕ ਗੱਤੇ ਦੀ ਪੱਟੀ ਨੂੰ ਸਮਤਲ 'ਤੇ ਰੱਖੋ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਕਿਨਾਰਿਆਂ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਸਾਰ ਰੇਖਾਵਾਂ ਖਿੱਚੋ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 3.15)।

ਹੁਣ ਦੂਸਰੀ ਪੱਟੀ ਨੂੰ ਖਿੱਚੀਆਂ ਗਈਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਉੱਪਰ ਤਿਰਛੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਰੱਖੋ ਅਤੇ ਇਸਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਦੋ ਹੋਰ ਰੇਖਾਵਾਂ ਖਿੱਚੋ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 3.16)।

ਚਿੱਤਰ 3.15

ਚਿੱਤਰ 3.16



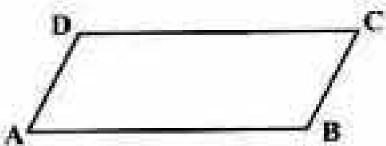
ਚਿੱਤਰ 3.17

ਇਹਨਾਂ ਚਾਰ ਰੇਖਾਵਾਂ ਨਾਲ ਬਣੀ ਬੰਦ ਚਿੱਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ। (ਚਿੱਤਰ 3.17)।

ਇਹ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਦੋ ਜੋੜਿਆਂ ਨਾਲ ਮਿਲ ਕੇ ਬਣੀ ਹੈ। ਇਹ ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ। **ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾਵਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।**

3.4.4 ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਹਿੱਸੇ

ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਵਿੱਚ ਚਾਰ ਭੁਜਾਵਾਂ ਅਤੇ ਚਾਰ ਕੋਣ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਵਿੱਚ ਕੁਝ ਬਰਾਬਰ ਮਾਪ ਦੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਤੁਹਾਨੂੰ ਕੁਝ ਹਿੱਸਿਆਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਕੁਝ ਤੱਥਾਂ ਨੂੰ ਯਾਦ ਰੱਖਣ ਦੀ ਲੋੜ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 3.18

ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 3.18)।

$\overline{AB}$ ਅਤੇ $\overline{DC}$, ਇਸ ਦੀਆਂ ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾਵਾਂ ਹਨ। $\overline{AD}$ ਅਤੇ $\overline{BC}$ ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਾ ਦੂਸਰਾ ਜੋੜਾ ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਨ।

$\angle A$ ਅਤੇ $\angle C$ ਸਨਮੁੱਖ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਜੋੜਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\angle B$ ਅਤੇ $\angle D$ ਸਨਮੁੱਖ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਦੂਸਰਾ ਜੋੜਾ ਹੈ।

$\overline{AB}$ ਅਤੇ $\overline{BC}$ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀ **ਲਾਗਵੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ** ਹਨ। ਇਸ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ਜਿੱਥੇ ਇੱਕ ਭੁਜਾ ਸਮਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਉੱਥੋਂ ਹੀ ਦੂਸਰੀ ਭੁਜਾ ਸ਼ੁਰੂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਕੀ $\overline{BC}$ ਅਤੇ $\overline{CD}$ ਲਾਗਵੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਹਨ। ਦੋ ਹੋਰ ਲਾਗਵੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜਿਆਂ ਨੂੰ ਲੱਭਣ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ।

$\angle A$ ਅਤੇ $\angle B$ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ **ਲਾਗਵੇਂ ਕੋਣ** ਹਨ। ਦੋਨੋਂ ਹੀ ਕੋਣ ਆਧਾਰ ਭੁਜਾ ਦੇ ਅੰਤ ਬਿੰਦੂਆਂ 'ਤੇ ਬਣੇ ਹਨ। $\angle B$ ਅਤੇ $\angle C$ ਵੀ ਲਾਗਵੇਂ ਕੋਣ ਹਨ। ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਲਾਗਵੇ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਦੂਸਰੇ ਜੋੜਿਆਂ ਦੀ ਪਹਿਚਾਣ ਕਰੋ।

ਇਸ ਨੂੰ ਕਰੋ

ਦੋ ਸਮਾਨ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜਾਂ ਦੇ ਕੱਟੇ ਹੋਏ ਭਾਗ ABCD ਅਤੇ A′B′C′D′ ਲਵੋ (ਚਿੱਤਰ 3.19)।

ਚਿੱਤਰ 3.19

ਇੱਥੇ ਭੁਜਾ $\overline{AB}$, ਭੁਜਾ $\overline{A'B'}$ ਦੇ ਸਮਾਨ ਹਨ ਪਰੰਤੂ ਇਸਦੇ ਨਾਂ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਹਨ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੂਸਰੀਆਂ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਵੀ ਸਮਾਨ ਹਨ।

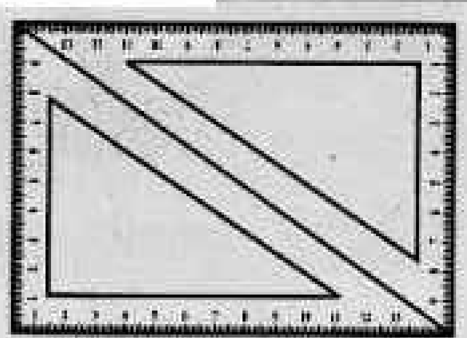
$\overline{A'B'}$ ਨੂੰ $\overline{DC}$ ਦੇ ਉੱਪਰ ਰੱਖੋ। ਕੀ ਉਹ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਨੂੰ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਢੱਕਦੀਆਂ ਹਨ। ਹੁਣ ਤੁਸੀਂ $\overline{AB}$ ਅਤੇ $\overline{DC}$ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਦੇ ਬਾਰੇ ਕੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ?

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\overline{AD}$ ਅਤੇ $\overline{BC}$ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਦੀ ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ। ਤੁਹਾਨੂੰ ਕੀ ਪਤਾ ਲੱਗਦਾ ਹੈ?

ਤੁਸੀਂ $\overline{AB}$ ਅਤੇ $\overline{DC}$ ਨੂੰ ਮਾਪ ਕੇ ਇਸ ਨਤੀਜੇ 'ਤੇ ਪਹੁੰਚ ਸਕਦੇ ਹੋ।

ਗੁਣ : *ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀਆਂ ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਮਾਪ ਦੀਆਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।*

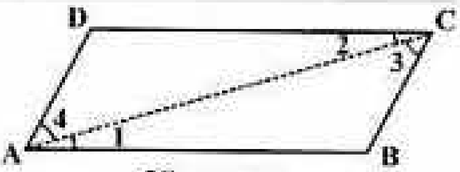
ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ



ਚਿੱਤਰ 3.20

30° – 60° – 90° ਕੋਣਾਂ ਵਾਲੇ ਦੋ ਇਕੋ ਜਿਹੇ ਸੈੱਟ-ਸੁਕੇਅਰ ਲਵੋ। ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਮਿਲਾ ਕੇ ਰੱਖੋ ਜਿਸ ਨਾਲ ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਬਣ ਜਾਵੇ (ਚਿੱਤਰ 3.20) ਕੀ ਇਹ ਉੱਪਰ ਦੱਸੇ ਗਏ ਗੁਣ ਨੂੰ ਸਾਬਤ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਤੁਹਾਡੀ ਸਹਾਇਤਾ ਕਰਦਾ ਹੈ?

ਤੁਸੀਂ ਤਰਕ ਅਤੇ ਵਿਚਾਰ ਨਾਲ ਇਸ ਸੰਕਲਪ ਨੂੰ ਹੋਰ ਪ੍ਰਭਾਵ ਵਾਲਾ ਬਣਾ ਸਕਦੇ ਹੋ। ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। (ਚਿੱਤਰ 3.21)।



ਚਿੱਤਰ 3.21

ਇੱਕ ਵਿਕਰਨ, $\overline{AC}$ ਖਿੱਚੋ

ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\angle 1 = \angle 2$ ਅਤੇ $\angle 3 = \angle 4$ (ਕਿਉਂ?)

ਕਿਉਂਕਿ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਅਤੇ ADC ਵਿੱਚ $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$ ਅਤੇ $\overline{AC}$ ਅਧਾਰ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ASA ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ ਗੁਣ ਨਾਲ

$\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (ਇੱਥੇ ASA ਗੁਣ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵਰਤਿਆ ਗਿਆ?)

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $AB = DC$ ਅਤੇ $BC = AD$.

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ PQRS ਦਾ ਪਰਿਮਾਪ ਪਤਾ ਕਰੋ (ਚਿੱਤਰ 3.22)।

ਹੱਲ : ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਵਿੱਚ, ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਲੰਬਾਈ ਦੀਆਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ, $PQ = SR = 12$ cm ਅਤੇ $QR = PS = 7$ cm

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਮਾਪ = PQ + QR + RS + SP

= 12 cm + 7 cm + 12 cm + 7 cm = 38 cm

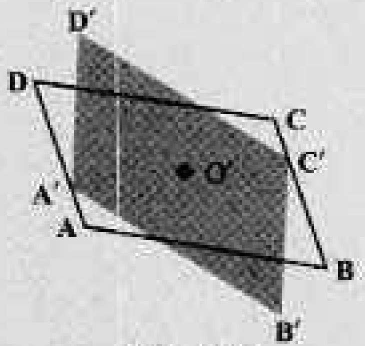
ਚਿੱਤਰ 3.22

3.4.5 ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਕੋਣ

ਅਸੀਂ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀਆਂ ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾਵਾਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਇੱਕ ਗੁਣ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ। ਅਸੀਂ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਕੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ?

ਇਸ ਨੂੰ ਕਰੋ

ਮੰਨ ਲਵੋ ABCD ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 3.23) ਟਰੇਸਿੰਗ ਸ਼ੀਟ 'ਤੇ ਇਸਦੀ ਪ੍ਰਤੀਲਿਪੀ ਬਣਾਉ। ਇਸ ਪ੍ਰਤੀਲਿਪੀ ਨੂੰ A'B'C'D' ਨਾਲ ਅੰਕਿਤ ਕਰੋ। A'B'C'D' ਨੂੰ ABCD ਤੇ ਰੱਖ ਦਿਓ। ਦੋਨੋਂ ਚਤੁਰਭੁਜਾਂ ਨੂੰ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਮਿਲਾ ਕੇ ਉਸ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਪਿੰਨ ਲਗਾਉ। ਜਿੱਥੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਵਿਕਰਨ ਕੱਟਦੇ ਹਨ। ਟਰੇਸਿੰਗ ਸ਼ੀਟ ਨੂੰ 180° 'ਤੇ ਘੁਮਾਉ। ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੁਣ ਵੀ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਨੂੰ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਢੱਕ ਲੈਂਦੇ ਹਨ; ਪਰੰਤੂ ਹੁਣ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ A' ਪੂਰਨ ਰੂਪ ਵਿੱਚ C 'ਤੇ ਅਤੇ C ਪੂਰਨ ਰੂਪ ਵਿੱਚ B' 'ਤੇ ਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ B' ਬਿੰਦੂ D 'ਤੇ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਉਲਟ ਗੱਲ ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 3.23

ਕੀ ਇਹ ਕੋਣ A ਅਤੇ ਕੋਣ C ਦੇ ਮਾਪਾਂ ਬਾਰੇ ਤੁਹਾਨੂੰ ਕੁਝ ਦੱਸਦਾ ਹੈ ? ਕੋਣ B ਅਤੇ D ਦੇ ਮਾਪਾਂ ਦੇ ਲਈ ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ। ਆਪਣੇ ਸਿੱਟੇ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰੋ।

ਗੁਣ : *ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਸਨਮੁੱਖ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਮਾਪ ਦੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।*

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

30° – 60° – 90° ਕੋਣਾਂ ਵਾਲੇ ਦੋ ਸਮਾਨ ਸੈੱਟ-ਸੁਕੇਅਰ ਲੈ ਕੇ ਪਹਿਲੇ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਬਣਾਉ। ਕੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਚਿੱਤਰ ਉੱਤੇ ਦੱਸੇ ਗਏ ਗੁਣ ਨੂੰ ਸਾਬਤ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਤੁਹਾਡੀ ਸਹਾਇਤਾ ਕਰਦੀ ਹੈ ?

ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਸੰਕਲਪ ਨੂੰ ਤਰਕ-ਵਿਤਰਕ ਨਾਲ ਵੀ ਸਾਬਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ।

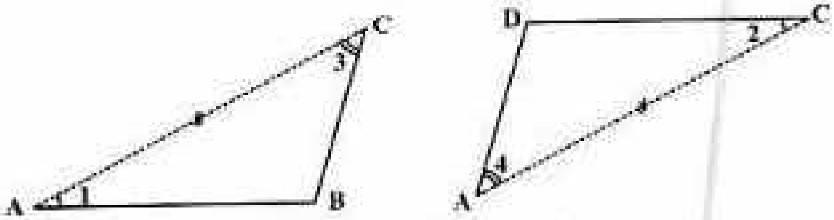
ਜੇ $\overline{AC}$ ਅਤੇ $\overline{BD}$ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਵਿਕਰਨ ਹੋਣ (ਚਿੱਤਰ 3.24) ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖੋਗੇ ਕਿ

$\angle 1 = \angle 2$ ਅਤੇ $\angle 3 = \angle 4$ (ਕਿਉਂ ?)

Δ ABC ਅਤੇ Δ ADC ਦਾ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਅਧਿਐਨ ਕਰਨ 'ਤੇ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖੋਗੇ ਕਿ (ਚਿੱਤਰ 3.25) ASA ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ ਗੁਣ ਦੁਆਰਾ

$\Delta ABC = \Delta CDA$ (ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ)

ਚਿੱਤਰ 3.24

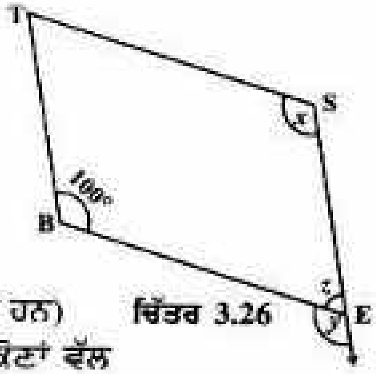


ਚਿੱਤਰ 3.25

ਇਸ ਤੋਂ ਪਤਾ ਲੱਗਦਾ ਹੈ ਕਿ ∠B ਅਤੇ ∠D ਸਮਾਨ ਮਾਪ ਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਤੁਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹੋ

$m\angle A = m\angle C$

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਚਿੱਤਰ 3.26 ਵਿੱਚ BEST ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ। x, y ਅਤੇ z ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 3.26

ਹੱਲ : ਬਿੰਦੂ S, ਬਿੰਦੂ B ਦੇ ਸਨਮੁੱਖ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $x = 100°$ (ਸਨਮੁੱਖ ਕੋਣ ਗੁਣ)

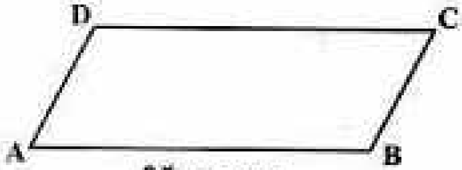
$y = 100°$ ($\angle x$ ਦੇ ਸੰਗਤ ਕੋਣ ਦਾ ਮਾਪ)

$z = 80°$ (ਕਿਉਂਕਿ $\angle y$ ਅਤੇ $\angle z$ ਰੇਖੀ ਜੋੜਾ ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਨ)

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਆਪਣਾ ਧਿਆਨ ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਲਾਗਵੇਂ ਕੋਣਾਂ ਵੱਲ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਵਿੱਚ (ਚਿੱਤਰ 3.27) $\angle A$ ਅਤੇ $\angle D$ ਸੰਪੂਰਨ ਕੋਣ ਹਨ।

ਕਿਉਂਕਿ $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$ ਅਤੇ $\overline{DA}$, ਇੱਕ ਕਾਟਵੀਂ ਰੇਖਾ ਹੈ।
ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੋਨੋਂ ਕੋਣ ਇਕੋ ਪਾਸੇ ਦੇ ਅੰਦਰਲੇ ਕੋਣ ਹਨ।
$\angle A$ ਅਤੇ $\angle B$ ਵੀ ਸੰਪੂਰਨ ਕੋਣ ਹਨ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਦੱਸ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿਉਂ ?

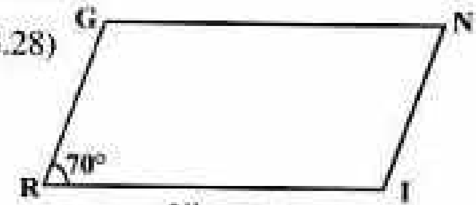


ਚਿੱਤਰ 3.27

$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ਅਤੇ BA ਇੱਕ ਕਾਟਵੀਂ ਰੇਖਾ ਹੈ ਜੋ $\angle A$ ਅਤੇ $\angle B$ ਨੂੰ ਇਕੋ ਪਾਸੇ ਦੇ ਅੰਦਰਲੇ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਚਿੱਤਰ ਤੋਂ ਦੋ ਹੋਰ ਸੰਪੂਰਨ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਜੋੜਿਆਂ ਦੀ ਪਹਿਚਾਣ ਕਰੋ।

ਗੁਣ : *ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਲਾਗਵੇਂ ਕੋਣ ਸੰਪੂਰਨ ਕੋਣ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।*

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ RING ਵਿੱਚ (ਚਿੱਤਰ 3.28) ਜਦ ਕਿ $m\angle R = 70°$ ਹੋ ਤਾਂ ਦੂਸਰੇ ਸਾਰੇ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 3.28

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ $\quad m\angle R = 70°$

ਤਦ $\quad m\angle N = 70°$

ਕਿਉਂਕਿ $\angle R$ ਅਤੇ $\angle I$ ਸੰਪੂਰਨ ਕੋਣ ਹਨ

$m\angle I = 180° - 70° = 110°$

ਅਤੇ $\quad m\angle G = 110°$ ਕਿਉਂਕਿ $\angle G$, $\angle I$ ਦਾ ਸਨਮੁੱਖ ਕੋਣ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\quad m\angle R = m\angle N = 70°$ ਅਤੇ $m\angle I = m\angle G = 110°$

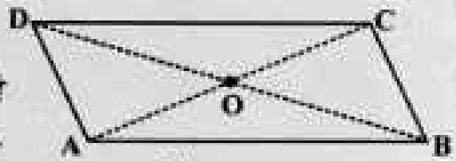
ਸੋਚੋ, ਚਰਚਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਲਿਖੋ

$m\angle R = m\angle N = 70°$, ਦਰਸਾਉਣ ਦੇ ਉਪਰੰਤ ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਹੋਰ ਕਿਸੇ ਢੰਗ ਨਾਲ $m\angle I$ ਅਤੇ $m\angle G$ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ ?

3.4.6 ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਵਿਕਰਨ

ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਵਿਕਰਨ ਬਰਾਬਰ ਮਾਪ ਦੇ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੇ।
(ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਆਪਣੀਆਂ ਪੂਰਵ ਕਿਰਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਇਸ ਦੀ ਪੜਤਾਲ ਕੀਤੀ ?)
ਫਿਰ ਵੀ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਵਿਕਰਨਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਰੋਚਕ ਗੁਣ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਨੂੰ ਕਰੋ

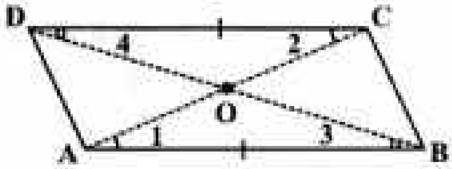


ਚਿੱਤਰ 3.29

ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ, (ਮੰਨ ਲਵੋ ABCD,) ਦਾ ਇੱਕ ਕੱਟਿਆ ਹੋਇਆ ਭਾਗ ਲਵੋ (ਚਿੱਤਰ 3.29)। ਮੰਨੋ ਕਿ ਇਸਦੇ ਵਿਕਰਨ $\overline{AC}$ ਅਤੇ $\overline{DB}$ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਨੂੰ 'O' 'ਤੇ ਕੱਟਦੇ ਹਨ।

C ਨੂੰ A 'ਤੇ ਰੱਖਕੇ ਇੱਕ ਤਹਿ (Fold) ਦੇ ਦੁਆਰਾ $\overline{AC}$ ਦਾ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਕੀ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ 'O' ਹੀ ਹੈ? ਕੀ ਇਹ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਵਿਕਰਨ $\overline{DB}$, ਵਿਕਰਨ $\overline{AC}$ ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ 'O' 'ਤੇ ਸਮਦੁਭਾਜਕ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਆਪਣੇ ਮਿੱਤਰਾਂ ਦੇ ਨਾਲ ਇਸਦੀ ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ ਇਸਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰੋ। ਇਸ ਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਇਹ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਦੁਹਰਾਉ ਕਿ $\overline{DB}$ ਦਾ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਕਿੱਥੇ ਹੋਵੇਗਾ।

ਗੁਣ : *ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਵਿਕਰਨ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਨੂੰ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ। (ਸਪੱਸ਼ਟ ਰੂਪ ਨਾਲ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ)*



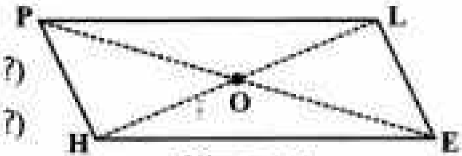
ਚਿੱਤਰ 3.30

ਇਸ ਗੁਣ ਦਾ ਤਰਕ-ਵਿਤਰਕ ਅਤੇ ਸਾਬਤ ਕਰਨਾ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਨਹੀਂ ਹੈ। (ਚਿੱਤਰ 3.30) ਨਾਲ, ASA ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ ਗੁਣ ਨਾਲ ਬਹੁਤ ਆਸਾਨੀ ਨਾਲ ਦੇਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ

$\Delta AOB \cong \Delta COD$ (ਇੱਥੇ ASA ਗੁਣ ਦਾ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ?)

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ AO = CO ਅਤੇ BO = DO

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਚਿੱਤਰ 3.31 ਵਿੱਚ HELP ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ। ਦਿੱਤਾ ਹੈ (ਲੰਬਾਈ cm ਵਿੱਚ ਹੈ): OE = 4 ਅਤੇ HL, PE ਤੋਂ 5 ਜ਼ਿਆਦਾ ਹੈ। OH ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 3.31

ਹੱਲ : ਜਦਕਿ OE = 4 ਅਤੇ OP = 4 (ਕਿਉਂ ?)

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ PE = 8, (ਕਿਉਂ ?)

ਇਸ ਲਈ HL = 8 + 5 = 13

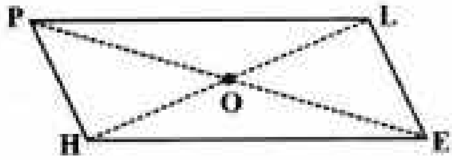
ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $OH = \frac{1}{2} \times 13 = 6.5$ cm

ਅਭਿਆਸ 3.3

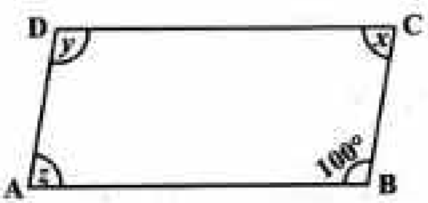
1. ABCD ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ। ਹਰੇਕ ਕਥਨ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤੇ ਗਏ ਗੁਣ ਦੁਆਰਾ ਪੂਰਾ ਕਰੋ :

   (i) AD = ... (ii) $\angle DCB$ = ...

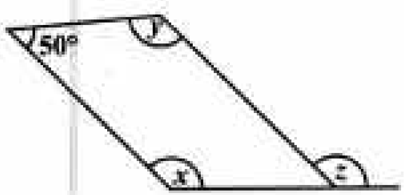
   (iii) OC = ... (iv) $m\angle DAB + m\angle CDA$ = ...



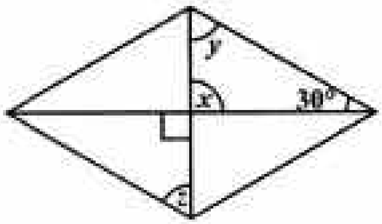
2. ਹੇਠਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਵਿੱਚ ਅਗਿਆਤ x, y, z ਦੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :



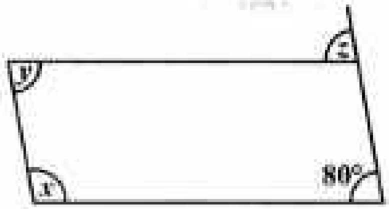
(i)



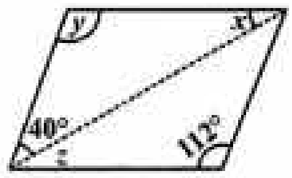
(ii)



(iii)



(iv)



(v)

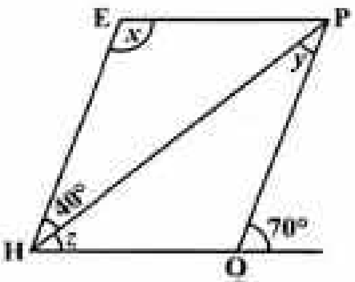
3. ਕੀ ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜੇ

(i) $\angle D + \angle B = 180°$? (ii) AB = DC = 8 cm, AD = 4 cm ਅਤੇ BC = 4.4 cm ?

(iii) $\angle A = 70°$ ਅਤੇ $\angle C = 65°$?

4. ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਰਫ਼ (Rough) ਚਿੱਤਰ ਖਿੱਚੋ ਜੋ ਕਿ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਨਾ ਹੋਵੇ ਪਰ ਜਿਸਦੇ ਦੋ ਸਨਮੁੱਖ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਮਾਪ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ।

5. ਕਿਸੇ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਦੋ ਲਾਗਵੇਂ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ 3:2 ਹੈ। ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਸਾਰੇ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

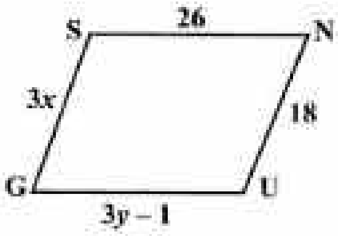


6. ਕਿਸੀ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਦੋ ਲਾਗਵੇਂ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਮਾਪ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਸਾਰੇ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

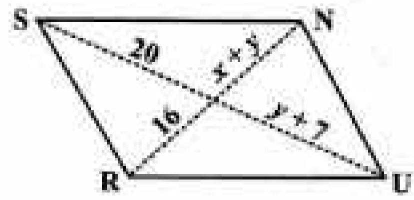
7. ਨਾਲ ਦਿੱਤਾ ਚਿੱਤਰ HOPE ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ। x, y ਅਤੇ z ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਮਾਪ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤੇ ਗਏ ਗੁਣਾਂ ਨੂੰ ਦੱਸੋ।

8. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਚਿੱਤਰਾਂ GUNS ਅਤੇ RUNS ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹਨ। x ਅਤੇ y ਪਤਾ ਕਰੋ (ਲੰਬਾਈ cm ਵਿੱਚ ਹੈ) :

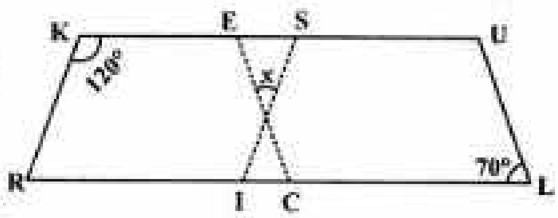
(i)



(ii)

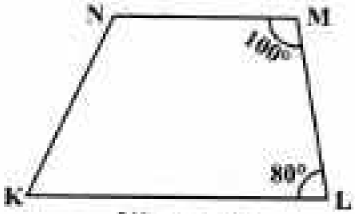


9. ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ RISK ਅਤੇ CLUE ਦੋਨੋਂ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹਨ, x ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

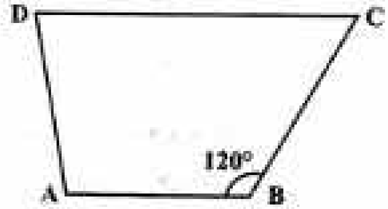


10. ਦੱਸੋ ਕਿ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਹ ਚਿੱਤਰ ਇੱਕ ਸਮਲੰਬ ਹੈ। ਇਸਦੀ ਕਿਹੜੀਆਂ ਦੋ ਭੁਜਾਵਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ ? (ਚਿੱਤਰ 3.32)

11. ਚਿੱਤਰ 3.33 ਵਿੱਚ $m\angle C$ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 3.32



ਚਿੱਤਰ 3.33

12. ਚਿੱਤਰ 3.34 ਵਿੱਚ $\angle P$ ਅਤੇ $\angle S$ ਦਾ ਮਾਪ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇ $\overline{SP} \parallel \overline{RQ}$ ਹੈ। (ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ $m\angle R$, ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹੋ, ਤਾਂ ਕੀ $m\angle P$ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਇੱਕ ਨਾਲੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਢੰਗ ਹਨ ?)

ਚਿੱਤਰ 3.34

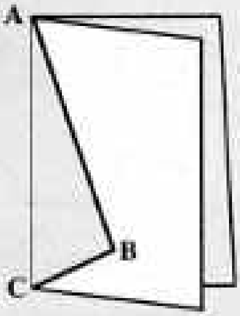
3.5 ਕੁਝ ਖਾਸ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ

3.5.1 ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ

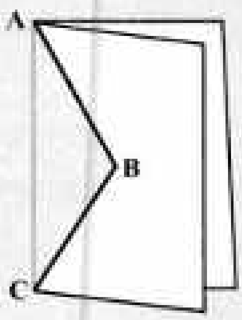
ਪਤੰਗ (ਜੋ ਕਿ ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਨਹੀਂ ਹੈ) ਦੀ ਇੱਕ ਖਾਸ ਸਥਿਤੀ ਦੇ ਵਿੱਚ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ **ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ** (Rhombus) ਜੋ ਕਿ ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਵੀ ਹੈ, ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਨੂੰ ਕਰੋ

ਤੁਹਾਡੇ ਦੁਆਰਾ ਕਾਗਜ਼ ਨਾਲ ਕੱਟਕੇ ਪਹਿਲਾਂ ਬਣਾਈ ਗਈ ਪਤੰਗ ਨੂੰ ਯਾਦ ਕਰੋ।



ਪਤੰਗ ਕੱਟ (Kite-cut)



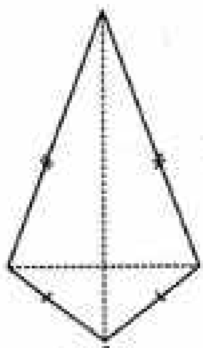
ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਕੱਟ (Rhombus-cut)

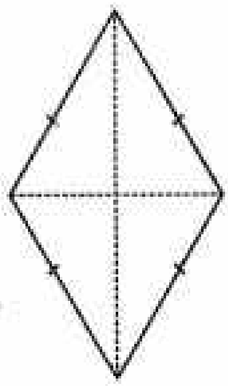
ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ABC ਨੂੰ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਸਾਰ ਕੱਟਕੇ ਖੋਲਦੇ ਹੋ ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਪਤੰਗ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹੋ। ਇੱਥੇ ਲੰਬਾਈ AB ਅਤੇ BC ਵੱਖ-ਵੱਖ ਸੀ। ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ AB = BC ਖਿੱਚਦੇ ਹੋ ਤਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੀ ਗਈ ਪਤੰਗ ਇੱਕ **ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ** ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੀ ਬਰਾਬਰ ਲੰਬਾਈ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਪਤੰਗ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਹੀਂ ਹੈ।
ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਲੰਬਾਈ ਦੀਆਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

ਕਿਉਂਕਿ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀ ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਲੰਬਾਈ ਦੀਆਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਵੀ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ *ਇੱਕ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਅਤੇ ਇੱਕ ਪਤੰਗ ਦੇ ਸਾਰੇ ਗੁਣ ਮੌਜੂਦ ਹਨ।* ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਸੂਚੀ ਤਿਆਰ ਕਰਨ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰੋ। ਤਦ ਤੁਸੀਂ ਆਪਣੀ ਸੂਚੀ ਪੁਸਤਕ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਪੜਤਾਲ ਸੂਚੀ ਦੇ ਨਾਲ ਮਿਲਾ ਕੇ ਪੁਸ਼ਟੀ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ। ਇੱਕ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਜ਼ਿਆਦਾ ਉਪਯੋਗੀ ਗੁਣ ਉਸਦੇ ਵਿਕਰਨਾਂ ਦਾ ਹੈ।

ਗੁਣ : *ਇੱਕ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਵਿਕਰਨ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਲੰਬ ਸਮਦੁਭਾਜਕ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।*

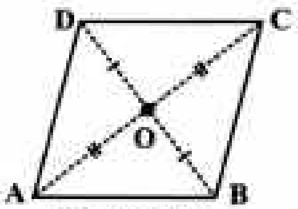

ਪਤੰਗ


ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ

ਇਸ ਨੂੰ ਕਰੋ

ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀ ਇੱਕ ਨਕਲ ਲਵੋ। ਪੇਪਰ ਨੂੰ ਮੋੜ ਕੇ ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ ਕਿ ਕੀ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ ਹਰੇਕ ਵਿਕਰਨ ਦਾ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਸੈੱਟ-ਸੁਕੇਅਰ ਦੇ ਕਿਨਾਰਿਆਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ ਪੜਤਾਲ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਉਹ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਨੂੰ ਸਮਕੋਣ 'ਤੇ ਕੱਟਦੇ ਹਨ।

ਤਰਕ-ਪੂਰਨ ਤੱਥਾਂ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰ ਕੇ ਇੱਥੇ ਇੱਕ ਖਾਕਾ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਇਸ ਗੁਣ ਦੀ ਪੁਸ਼ਟੀ ਕਰਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 3.35

ABCD ਇੱਕ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 3.35)। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਹ ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਵੀ ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ ਵਿਕਰਨ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਨੂੰ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ,

ਇਸ ਲਈ OA = OC ਅਤੇ OB = OD

ਅਸੀਂ ਇਹ ਦਰਸਾਉਣਾ ਹੈ ਕਿ $m\angle AOD = m\angle COD = 90^\circ$ ਹੈ।

SAS ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ ਗੁਣ ਨਾਲ ਇਹ ਦੇਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ,

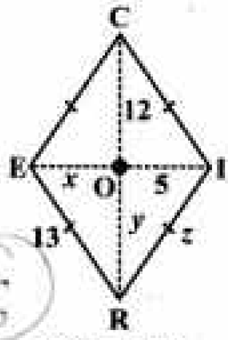
[ਕਿਉਂਕਿ AO = CO (ਕਿਉਂ ?)
AD = CD (ਕਿਉਂ ?)
OD = OD

$$\Delta AOD \cong \Delta COD$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $m\angle AOD = m\angle COD$

ਕਿਉਂਕਿ $\angle AOD$ ਅਤੇ $\angle COD$ ਰੇਖੀ ਜੋੜਾ ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਨ,

$$m\angle AOD = m\angle COD = 90^\circ$$



ਚਿੱਤਰ 3.36

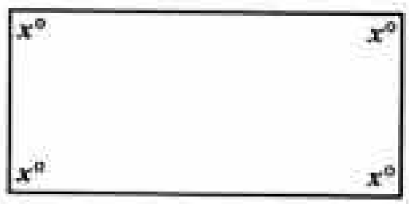
ਉਦਾਹਰਣ 7 : RICE ਇੱਕ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 3.35)। x, y, ਅਤੇ z ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਦੀ ਪੁਸ਼ਟੀ ਕਰੋ।

ਹੱਲ :

x = OE	y = OR	z = ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀ ਭੁਜਾ
= OI (ਵਿਕਰਨ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ)	= OC (ਵਿਕਰਨ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ)	= 13 (ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀ ਸਾਰੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਮਾਪ ਦੀਆਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।
= 5	= 12	

3.5.2 ਇੱਕ ਆਇਤ

ਆਇਤ ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ ਜਿਸਦੇ ਸਾਰੇ ਕੋਣ ਸਮਾਨ ਮਾਪ ਦੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। (ਚਿੱਤਰ 3.37)।



ਚਿੱਤਰ 3.37

ਇਸ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦਾ ਪੂਰਨ ਅਰਥ ਕੀ ਹੈ ? ਇਸਦੀ ਚਰਚਾ ਆਪਣੇ ਮਿੱਤਰਾਂ ਨਾਲ ਕਰੋ। ਜੇ ਆਇਤ ਸਮਾਨ ਕੋਣੀ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਹਰੇਕ ਕੋਣ ਦਾ ਮਾਪ ਕੀ ਹੈ ? ਮੰਨ ਲਉ ਹਰੇਕ ਕੋਣ ਦਾ ਮਾਪ x° ਹੈ।

ਤਾਂ $4x^\circ = 360^\circ$ (ਕਿਉਂ ?)

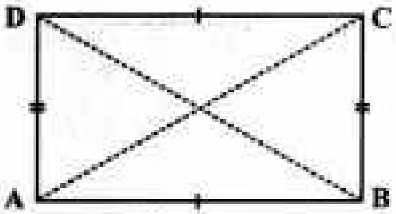
ਇਸ ਲਈ $x^\circ = 90^\circ$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਆਇਤ ਦਾ ਹਰੇਕ ਕੋਣ ਸਮਕੋਣ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇੱਕ ਆਇਤ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਹਰੇਕ ਕੋਣ ਸਮਕੋਣ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

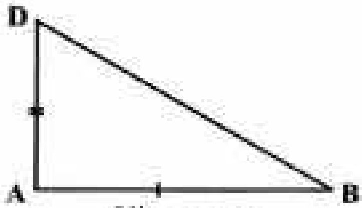
ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੋਣ ਦੇ ਕਾਰਨ ਆਇਤ ਦੀਆਂ ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਲੰਬਾਈ ਦੀਆਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ ਵਿਕਰਨ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਨੂੰ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਵਿੱਚ ਵਿਕਰਨ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਲੰਬਾਈ ਦੇ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ (ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ) : ਪਰੰਤੂ ਆਇਤ ਦੇ (ਖਾਸ ਹਾਲਤ ਵਿੱਚ) ਵਿਕਰਨ ਬਰਾਬਰ ਮਾਪ (ਲੰਬਾਈ) ਦੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਗੁਣ : *ਆਇਤ ਦੇ ਵਿਕਰਨ ਬਰਾਬਰ ਲੰਬਾਈ ਦੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।*



ਚਿੱਤਰ 3.38

ਚਿੱਤਰ 3.39



ਚਿੱਤਰ 3.40

ਇਸਦੀ ਪੁਸ਼ਟੀ ਆਸਾਨੀ ਨਾਲ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਜੇ ABCD ਇੱਕ ਆਇਤ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 3.38) ਤਾਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਅਤੇ ABD ਨੂੰ ਵੱਖ-ਵੱਖ (ਚਿੱਤਰ 3.39 ਅਤੇ ਚਿੱਤਰ 3.40) ਦੇਖਣ ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ,

$$\Delta ABC \cong \Delta ABD$$

ਕਿਉਂਕਿ $AB = AB$ (ਸਾਂਝੀ ਭੁਜਾ)

$BC = AD$ (ਕਿਉਂ ?)

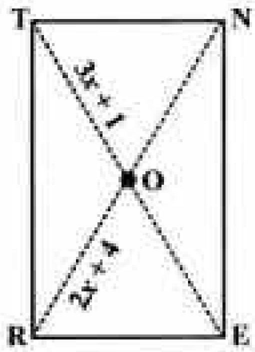
$m\angle A = m\angle B = 90^\circ$ (ਕਿਉਂ ?)

SAS ਗੁਣ ਨਾਲ ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $AC = BD$

ਅਤੇ ਇੱਕ ਆਇਤ ਵਿੱਚ ਵਿਕਰਨ ਬਰਾਬਰ ਲੰਬਾਈ ਦੇ ਹੋਣ ਦੇ ਇਲਾਵਾ ਇੱਕ-ਦੂਸਰੇ ਨੂੰ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ। (ਕਿਉਂ ?)

ਉਦਾਹਰਣ 8 : RENT ਇੱਕ ਆਇਤ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 3.41)। ਇਸਦੇ ਵਿਕਰਨ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਨੂੰ 'O' 'ਤੇ ਕੱਟਦੇ ਹਨ। x ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਦਕਿ $OR = 2x + 4$ ਅਤੇ $OT = 3x + 1$ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 3.41

ਹੱਲ : $\overline{OT}$, ਵਿਕਰਨ $\overline{TE}$ ਦਾ ਅੱਧਾ ਹੈ। $\overline{OR}$, ਵਿਕਰਨ $\overline{RN}$ ਦਾ ਅੱਧਾ ਹੈ।

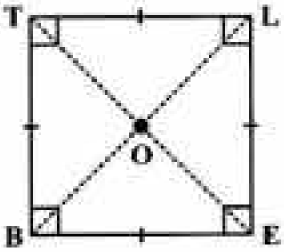
ਇੱਥੇ ਹਰ ਵਿਕਰਨ ਬਰਾਬਰ ਲੰਬਾਈ ਦੇ ਹਨ। (ਕਿਉਂ ?) ਇਸ ਲਈ ਉਸਦੇ ਅੱਧੇ ਵੀ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਬਰਾਬਰ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ $3x + 1 = 2x + 4$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $x = 3$

3.5.3 ਵਰਗ

ਵਰਗ ਇੱਕ ਆਇਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਸਦਾ ਮਤਲਬ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਵਰਗ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਆਇਤ ਦੇ ਸਾਰੇ ਗੁਣ ਹੋਣ ਦੇ ਇਲਾਵਾ ਇੱਕ ਹੋਰ ਗੁਣ ਵੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਲੰਬਾਈ ਦੀਆਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਵਰਗ ਦੇ ਵਿਕਰਨ, ਆਇਤ ਦੇ ਵਿਕਰਨ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ, ਬਰਾਬਰ ਲੰਬਾਈ ਦੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।



ਇੱਕ ਆਇਤ ਵਿੱਚ ਵਿਕਰਨ ਦਾ ਇੱਕ-ਦੂਸਰੇ ਤੇ ਲੰਬ ਹੋਣਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ) ਕਿਸੇ ਵਰਗ ਵਿੱਚ ਵਿਕਰਨ

(i) ਇੱਕ-ਦੂਸਰੇ ਨੂੰ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ। (ਵਰਗ ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ)।

(ii) ਬਰਾਬਰ ਲੰਬਾਈ ਦੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। (ਵਰਗ ਇੱਕ ਆਇਤ ਹੈ।) ਅਤੇ

(iii) ਇੱਕ-ਦੂਸਰੇ ਨੂੰ ਸਮਕੋਣ ਤੇ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ।

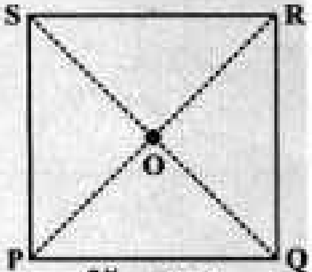
ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਸਾਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆ ਗੁਣ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਗੁਣ : *ਵਰਗ ਦੇ ਵਿਕਰਨ ਇੱਕ-ਦੂਸਰੇ ਨੂੰ ਸਮਕੋਣ 'ਤੇ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ।*

BELT ਇੱਕ ਵਰਗ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ
$BE = EL = LT = TB$
$\angle B, \angle E, \angle L$ ਅਤੇ $\angle T$ ਸਮਕੋਣ ਹੈ।
$BL = ET$ ਅਤੇ $\overline{BL} \perp \overline{ET}$
$OB = OL$ ਅਤੇ $OE = OT$

ਇਸ ਨੂੰ ਕਰੋ

ਇੱਕ ਵਰਗਾਕਾਰ ਸ਼ੀਟ, ਮੰਨ ਲਓ PQRS (ਚਿੱਤਰ 3.42)।
ਦੋਨੋਂ ਵਿਕਰਨਾਂ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਸਾਰ ਤਹਿ (fold) ਲਗਾਉ। ਕੀ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਇਕੋ ਹੀ ਹਨ। (ਚਿੱਤਰ 3.42)
ਸੈੱਟ-ਸੁਕੇਅਰ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ, ਕੀ 'O' 'ਤੇ ਬਣਿਆ ਕੋਣ 90° ਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਉੱਪਰ ਦੱਸੇ ਗਏ ਗੁਣ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 3.42

ਤਰਕ-ਵਿਤਰਕ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਇਸਦੀ ਪੁਸ਼ਟੀ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ABCD ਇੱਕ ਵਰਗ ਹੈ ਜਿਸਦੇ ਵਿਕਰਨ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਨੂੰ 'O' 'ਤੇ ਕੱਟਦੇ ਹਨ (ਚਿੱਤਰ 3.43)।

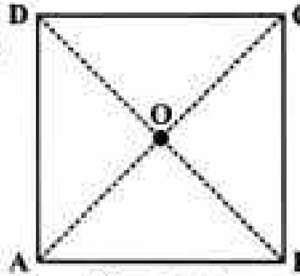
OA = OC (ਕਿਉਂਕਿ ਵਰਗ ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ)

SSS ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ ਗੁਣ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ

$\Delta AOD \cong \Delta COD$ (ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ?)

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $m\angle AOD = m\angle COD$

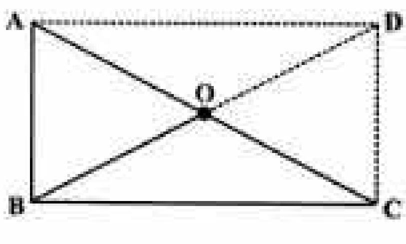
ਇਹ ਕੋਣ ਰੇਖੀ ਜੋੜਾ ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਰੇਕ ਕੋਣ ਸਮਕੋਣ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 3.43

ਅਭਿਆਸ 3.4

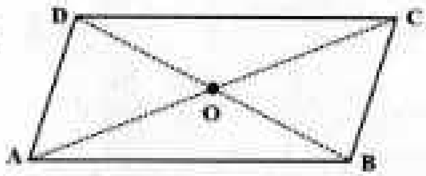
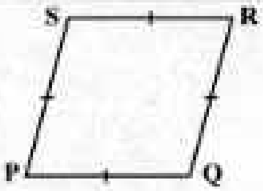
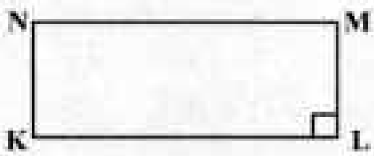
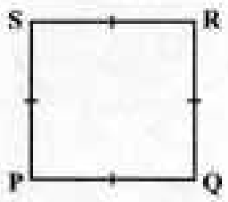
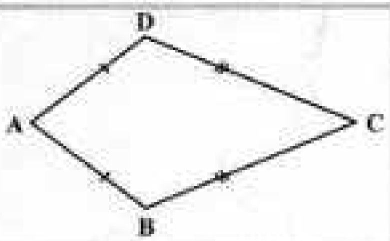
1. ਦੱਸੋ, ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ :
   (a) ਸਾਰੇ ਆਇਤ ਵਰਗ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।
   (b) ਸਾਰੇ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੁੰਦੇ ਹਨ
   (c) ਸਾਰੇ ਵਰਗ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਅਤੇ ਆਇਤ ਵੀ ਹੁੰਦੇ ਹਨ
   (d) ਸਾਰੇ ਵਰਗ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੇ।
   (e) ਸਾਰੀਆਂ ਪਤੰਗਾਂ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ
   (f) ਸਾਰੇ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਪਤੰਗ ਹੁੰਦੇ ਹਨ
   (g) ਸਾਰੇ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਸਮਲੰਬ ਹੁੰਦੇ ਹਨ
   (h) ਸਾਰੇ ਵਰਗ ਸਮਲੰਬ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।
2. ਉਹ ਸਾਰੇ ਚਤੁਰਭੁਜਾਂ ਦੀ ਪਹਿਚਾਣ ਕਰੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ
   (a) ਚਾਰ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਲੰਬਾਈ ਦੀਆਂ ਹੋਣ। (b) ਚਾਰ ਸਮਕੋਣ ਹੋਣ।
3. ਦੱਸੋ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇੱਕ ਵਰਗ
   (i) ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ (ii) ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ
   (iii) ਇੱਕ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ (iv) ਇੱਕ ਆਇਤ ਹੈ।
4. ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਨਾਮ ਦੱਸੋ ਜਿਸਦੇ ਵਿਕਰਨ
   (i) ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਨੂੰ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ। (ii) ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ 'ਤੇ ਲੰਬ ਸਮਦੁਭਾਜਕ ਹੋਣ।
   (iii) ਬਰਾਬਰ ਹਣ।
5. ਦੱਸੋ ਇੱਕ ਆਇਤ ਉੱਤਲ ਚਤੁਰਭੁਜ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ ?
6. ABC ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ ਅਤੇ 'O' ਸਮਕੋਣ ਦੀ ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾ ਦਾ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। ਦੱਸੋ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ 'O' ਬਿੰਦੂ A, B ਅਤੇ C ਤੋਂ ਸਮਾਨ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੈ। (ਬਿੰਦੂਆਂ ਨਾਲ ਬਣਾਈਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਤੁਹਾਡੀ ਸਹਾਇਤਾ ਦੇ ਲਈ ਖਿੱਚੀਆਂ ਗਈਆਂ ਹਨ)।



ਸੋਚੋ, ਚਰਚਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਲਿਖੋ

1. ਇੱਕ ਰਾਜ ਮਿਸਤਰੀ ਇੱਕ ਪੱਥਰ ਦੀ ਪੱਟੀ ਬਣਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਉਹ ਇਸ ਨੂੰ ਆਇਤਾਕਾਰ ਬਣਾਉਣਾ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਕਿੰਨੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਢੰਗਾਂ ਨਾਲ ਉਸ ਨੂੰ ਇਹ ਵਿਸ਼ਵਾਸ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਆਇਤਾਕਾਰ ਹੈ।
2. ਵਰਗ ਨੂੰ ਉਸ ਆਇਤ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਸੀ ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਕੀ ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਸਦੇ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਮਾਪ ਦੇ ਹੋਣ। ਇਸ ਵਿਚਾਰ ਨੂੰ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕਰੋ।
3. ਕੀ ਇੱਕ ਸਮਲੰਬ ਦੇ ਸਾਰੇ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਮਾਪ ਦੇ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ? ਕੀ ਇਸਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ? ਸਪੱਸ਼ਟ ਕਰੋ।

ਅਸੀਂ ਕੀ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀ?

ਚਤੁਰਭੁਜ	ਗੁਣ
ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ : ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਾ ਹਰੇਕ ਜੋੜਾ ਸਮਾਂਤਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। 	(1) ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। (2) ਸਨਮੁੱਖ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। (3) ਵਿਕਰਨ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਨੂੰ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ।
ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ : ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਮਾਪ ਦੀਆਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। 	(1) ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਸਾਰੇ ਗੁਣ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। (2) ਵਿਕਰਨ ਲੰਬ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।
ਆਇਤ : ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਕੋਣ ਸਮਕੋਣ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। 	(1) ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਸਾਰੇ ਗੁਣ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। (2) ਹਰੇਕ ਕੋਣ ਸਮਕੋਣ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। (3) ਵਿਕਰਨ ਬਰਾਬਰ ਮਾਪ ਦੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।
ਵਰਗ : ਇੱਕ ਆਇਤ ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। 	ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ, ਸਮ ਚਤੁਰਭੁਜ ਅਤੇ ਆਇਤ ਸਾਰਿਆਂ ਦੇ ਗੁਣ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।
ਪਤੰਗ : ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਦੋ ਲਾਗਵੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। 	(1) ਵਿਕਰਨ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ 'ਤੇ ਲੰਬ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। (2) ਇੱਕ ਵਿਕਰਨ ਦੂਸਰੇ ਵਿਕਰਨ ਨੂੰ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। (3) ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ, $m\angle B = m\angle D$ ਪਰੰਤੂ $m\angle A \neq m\angle C$

ਨੋਟ

ਅਧਿਆਇ

4

ਪ੍ਰਯੋਗਿਕ ਜਿਆਮਿਤੀ

4.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਤੁਸੀਂ ਜਮਾਤ VII ਵਿੱਚ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰਨਾ ਸਿੱਖ ਚੁੱਕੇ ਹੋ। ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਵੱਖਰੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਰਚਨਾ ਦੇ ਲਈ ਤਿੰਨ ਮਾਪਾਂ (ਭੁਜਾਵਾਂ ਅਤੇ ਕੋਣਾਂ) ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਤਿੰਨ ਮਾਪਾਂ ਦਾ ਹੋਣਾ ਕਾਫ਼ੀ ਹੈ, ਇੱਕ ਸੁਭਾਵਿਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਉੱਠਦਾ ਹੈ, ਕੀ ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ ਚਾਰ ਭੁਜਾਵਾਂ ਵਾਲਾ ਬੰਦ ਚਿੱਤਰ ਜਿਸਨੂੰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ, ਦੀ ਰਚਨਾ ਦੇ ਲਈ ਚਾਰ ਮਾਪਾਂ ਕਾਫ਼ੀ ਹੋਣਗੀਆਂ ?

ਇਸ ਨੂੰ ਕਰੋ

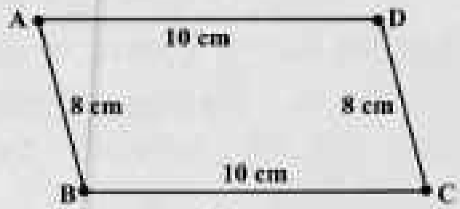
ਸਮਾਨ ਲੰਬਾਈ (ਮੰਨ ਲਵੋ 10 cm) ਵਾਲੀ ਤੀਲੀਆਂ (sticks) ਦਾ ਇੱਕ ਜੋੜਾ ਲਓ। ਹੁਣ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਸਮਾਨ ਲੰਬਾਈ, (ਮੰਨ ਲਵੋ 8 cm) ਵਾਲੀ ਤੀਲੀਆਂ ਦਾ ਜੋੜਾ ਲਵੋ। ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜੋੜੋ (Hinge) ਜਿਸ ਨਾਲ 10 cm ਲੰਬਾਈ ਅਤੇ 8 cm ਚੌੜਾਈ ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਆਇਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਜਾਵੇ। ਇਸ ਆਇਤ ਦੀ ਰਚਨਾ ਚਾਰ ਮਾਪਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਨਾਲ ਕੀਤੀ ਗਈ ਹੈ। (ਚਿੱਤਰ 4.1)

ਚਿੱਤਰ 4.1

ਹੁਣ ਆਇਤ ਦੀ ਚੌੜਾਈ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਸਾਰ ਦਬਾਅ ਪਾਉ। ਕੀ ਨਵੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਚਿੱਤਰ ਹੁਣ ਵੀ ਇੱਕ ਆਇਤ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 4.2)? ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਹੁਣ ਆਇਤ ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਬਣ ਗਿਆ ਹੈ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਤੀਲੀਆਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਨੂੰ ਬਦਲਿਆ ਹੈ? ਨਹੀਂ, ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਾ ਮਾਪ ਉਹ ਹੀ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ।

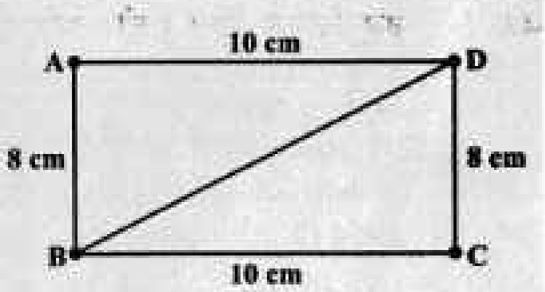
ਚਿੱਤਰ 4.2

ਨਵੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਚਿੱਤਰ ਨੂੰ ਦੂਸਰੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਦਬਾਅ ਪਾਉ। ਤੁਹਾਨੂੰ ਕੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ? ਤੁਹਾਨੂੰ ਫਿਰ ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਬਿੱਲਕੁਲ ਵੱਖਰਾ ਹੈ। (ਚਿਤਰ 4.3) ਹੁਣ ਵੀ ਚਾਰ ਮਾਪ ਉਹ ਹੀ ਰਹਿੰਦੇ ਹਨ।



ਚਿੱਤਰ 4.3

ਇਸ ਤੋਂ ਇਹ ਪਤਾ ਲਗਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਚਾਰ ਮਾਪਾਂ ਨਾਲ ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ ਚਤੁਰਭੁਜ ਪ੍ਰਾਪਤ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਕੀ ਪੰਜ ਮਾਪਾਂ ਨਾਲ ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ ਚਤੁਰਭੁਜ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ?



ਚਿੱਤਰ 4.4

ਆਉ, ਇਸ ਕਿਰਿਆ 'ਤੇ ਦੁਬਾਰਾ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ। ਤੁਸੀਂ, ਹਰੇਕ 10 cm ਲੰਬਾਈ ਦੀਆਂ ਦੋ ਤੀਲੀਆਂ ਅਤੇ ਹਰੇਕ 8 cm ਲੰਬਾਈ ਦੀਆਂ ਦੋ ਤੀਲੀਆਂ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਇੱਕ ਆਇਤ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹੋ। ਹੁਣ BD ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਲੰਬਾਈ ਵਾਲੀ ਇੱਕ ਦੂਸਰੀ ਤੀਲੀ ਨੂੰ BD ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਸਾਰ ਬੰਨ੍ਹੋ (ਚਿੱਤਰ 4.4)। ਜੇ ਤੁਸੀਂ ਹੁਣ ਚੌੜਾਈ ਦੇ ਵੱਲ ਦਬਾਓ ਪਾਉਂਦੇ ਹੋ ਤਾਂ ਕੀ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਬਦਲਾਓ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਨਹੀਂ, ਚਿੱਤਰ ਨੂੰ ਖੋਲ੍ਹੇ ਬਿਨਾਂ ਬਦਲਾਓ ਸੰਭਵ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਪੰਜਵੀਂ ਤੀਲੀ ਦੇ ਆਉਣ ਨਾਲ ਆਇਤ ਵਿਲੱਖਣ ਬਣ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ਕੋਈ ਦੂਸਰਾ ਚਤੁਰਭੁਜ (ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਦੇ ਬਰਾਬਰ) ਹੁਣ ਸੰਭਵ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਿਆ ਕਿ ਪੰਜ ਮਾਪਾਂ ਨਾਲ ਸਾਨੂੰ ਇਕ ਵਿਲੱਖਣ ਚਤੁਰਭੁਜ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਪਰ ਕੀ ਇਕ ਵਿਲੱਖਣ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰਨ ਲਈ ਵੀ ਪੰਜ ਮਾਪ (ਭੁਜਾਵਾਂ ਅਤੇ ਕੋਣਾਂ ਦੇ) ਕਾਫ਼ੀ ਹਨ ?

ਸੋਚੋ, ਚਰਚਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਲਿਖੋ

ਅਰਸ਼ਦ ਕੋਲ ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਦੇ ਪੰਜ ਮਾਪ ਹਨ। ਇਹ AB = 5 cm, $\angle A = 50°$, AC = 4 cm, BD = 5 cm ਅਤੇ AD = 6 cm ਹੈ। ਕੀ ਉਹ ਮਾਪਾਂ ਨਾਲ ਇੱਕ ਅਦੁੱਤੀ ਚਤੁਰਭੁਜ ਬਣਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ? ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਦੇ ਕਾਰਨ ਦੱਸੋ।

4.2 ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀ ਰਚਨਾ

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਸਿੱਖਾਂਗੇ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਮਾਪਾਂ ਨਾਲ ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।

- ਜਦੋਂ ਚਾਰ ਭੁਜਾਵਾਂ ਅਤੇ ਇੱਕ ਵਿਕਰਨ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੋਵੇ।
- ਜਦੋਂ ਦੋ ਵਿਕਰਨ ਅਤੇ ਤਿੰਨ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਣ।
- ਜਦੋਂ ਦੋ ਲਾਗਵੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਤਿੰਨ ਕੋਣ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਹੋਣ।
- ਜਦੋਂ ਤਿੰਨ ਭੁਜਾਵਾਂ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਵਿੱਚ ਦੇ ਦੋ ਕੋਣ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਹੋਣ।
- ਜਦੋਂ ਹੋਰ ਕੋਈ ਖਾਸ ਗੁਣ ਪਤਾ ਹੋਵੇ।

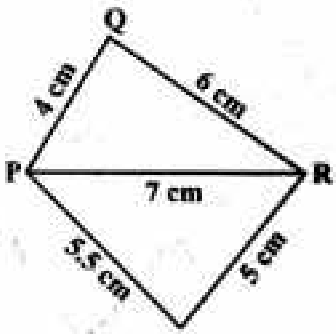
ਆਉ, ਇੱਕ-ਇੱਕ ਕਰਕੇ ਇਹ ਰਚਨਾਵਾਂ ਕਰੀਏ :

4.2.1 ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀ ਰਚਨਾ ਜਦੋਂ ਚਾਰ ਭੁਜਾਵਾਂ ਅਤੇ ਇੱਕ ਵਿਕਰਨ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਦਿੱਤੀ ਹੋਵੇ।

ਅਸੀਂ ਇਸ ਰਚਨਾ ਨੂੰ ਉਦਾਹਰਣ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਸਮਝਾਵਾਂਗੇ।

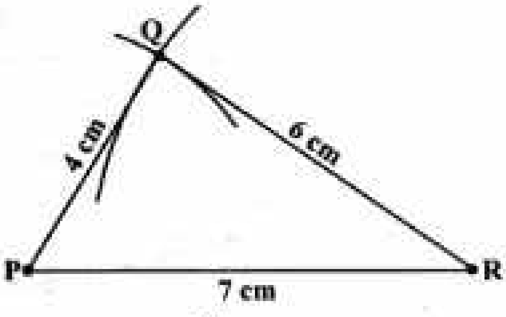
ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ PQRS ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ PQ = 4 cm, QR = 6 cm, RS = 5 cm, PS = 5.5 cm ਅਤੇ PR = 7 cm ਹੈ।

ਹੱਲ : ਇੱਕ ਰਫ਼ (rough) ਚਿੱਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਵਿੱਚ ਸਾਡੀ ਸਹਾਇਤਾ ਕਰੇਗੀ। ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਰਫ਼ ਚਿੱਤਰ ਖਿੱਚਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਮਾਪਾਂ ਨੂੰ ਅੰਕਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ (ਚਿੱਤਰ 4.5)।



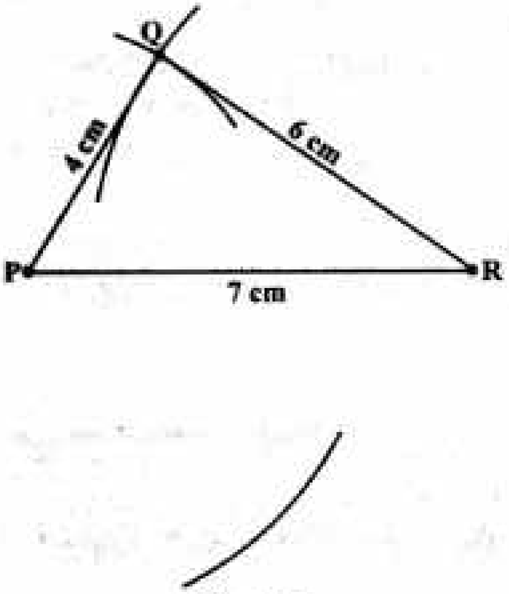
ਚਿੱਤਰ 4.5

ਪਗ 1 ਰਫ਼ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਬੜੀ ਅਸਾਨੀ ਨਾਲ ਦੇਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ SSS ਰਚਨਾ ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ ਨਾਲ Δ PQR ਦੀ ਰਚਨਾ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ। Δ PQR ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ। (ਚਿੱਤਰ 4.6)।



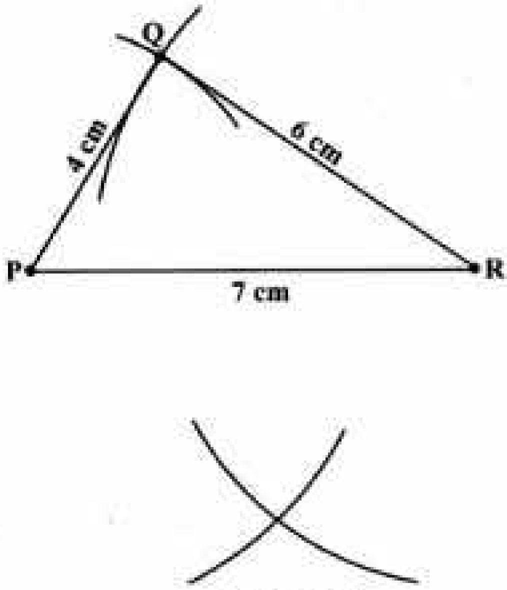
ਚਿੱਤਰ 4.6

ਪਗ 2 ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਚੌਥੇ ਬਿੰਦੂ 'S' ਦਾ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਇਹ ਬਿੰਦੂ S, PR ਦੇ ਹਿਸਾਬ ਨਾਲ ਬਿੰਦੂ Q ਦੇ ਉੱਲਟ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਹੋਵੇਗਾ। ਉਸਦੇ ਲਈ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਦੋ ਮਾਪ ਹਨ। ਬਿੰਦੂ P ਤੋਂ, ਬਿੰਦੂ S, 5.5 cm ਦੀ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ P ਨੂੰ ਕੇਂਦਰ ਮੰਨ ਕੇ 5.5 cm ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਦੀ ਇੱਕ ਚਾਪ ਖਿੱਚੋ। (ਬਿੰਦੂ S ਇਸ ਚਾਪ 'ਤੇ ਹੀ ਕਿਤੇ ਸਥਿਤ ਹੋਵੇਗਾ।) (ਚਿੱਤਰ 4.7)



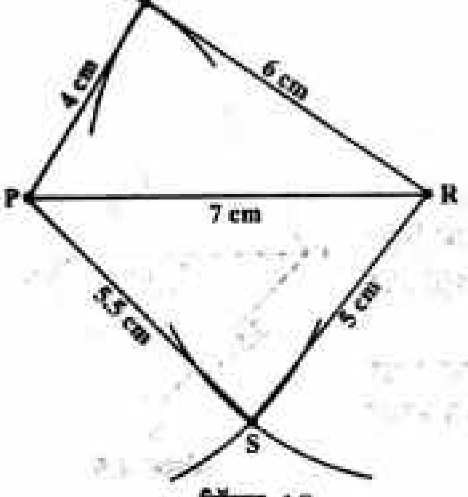
ਚਿੱਤਰ 4.7

ਪਗ 3 R ਤੋਂ ਬਿੰਦੂ S, 5 cm ਦੀ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ R ਨੂੰ ਕੇਂਦਰ ਮੰਨ ਕੇ 5 cm ਅਰਧਵਿਆਸ ਲੈ ਕੇ ਚਾਪ ਖਿੱਚੋ। (ਬਿੰਦੂ 'S' ਇਸ ਚਾਪ 'ਤੇ ਕਿਤੇ ਸਥਿਤ ਹੋਵੇਗਾ।) (ਚਿੱਤਰ 4.8)



ਚਿੱਤਰ 4.8

ਪਗ 4 ਬਿੰਦੂ S ਖਿੱਚੇ ਗਏ ਦੋਨੋਂ ਚਾਪਾਂ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਦੋਨਾਂ ਚਾਪਾਂ ਦਾ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। ਇਸ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ 'S' ਨਾਲ ਅੰਕਿਤ ਕਰੋ ਅਤੇ PQRS ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਕਰੋ। ਇਸ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ PS ਅਤੇ RS ਨੂੰ ਜੋੜੋ। PQRS ਲੋੜੀਂਦੀ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ। (ਚਿੱਤਰ 4.9)



ਚਿੱਤਰ 4.9

ਸੋਚੋ, ਚਰਚਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਲਿਖੋ

(i) ਅਸੀਂ ਦੇਖਿਆ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਪੰਜ ਮਾਪਾਂ ਨਾਲ ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਆਪ ਸੋਚ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀ ਕੋਈ ਵੀ ਪੰਜ ਮਾਪਾਂ ਨਾਲ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਰਚਨਾ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ?

(ii) ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ BATS ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ BA = 5 cm, AT = 6 cm, ਅਤੇ AS = 6.5 cm ਹੈ ? ਕਿਉਂ ?

(iii) ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ (Rhombus) ZEAL ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ZE = 3.5 cm, ਵਿਕਰਨ EL = 5 cm ਹੈ ? ਕਿਉਂ ?

(iv) ਇੱਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ PLAY ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰਨ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਜਿਸ ਵਿੱਚ PL = 3 cm, LA = 4 cm, AY = 4.5 cm, PY = 2 cm ਅਤੇ LY = 6 cm ਹੈ। ਪਰੰਤੂ ਉਹ ਇਸਦੀ ਰਚਨਾ ਨਹੀਂ ਕਰ ਸਕਦਾ। ਕਾਰਨ ਦੱਸੋ ?
[ਸੰਕੇਤ : ਇੱਕ ਰਫ਼ ਚਿੱਤਰ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਚਰਚਾ ਕਰੋ।]

ਅਭਿਆਸ 4.1

1. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਚਤੁਰਭੁਜਾਂ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ :

(i) ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਜਿਸ ਵਿਚ
AB = 4.5 cm
BC = 5.5 cm
CD = 4 cm
AD = 6 cm
AC = 7 cm ਹੈ।

(ii) ਚਤੁਰਭੁਜ JUMP ਜਿਸ ਵਿੱਚ
JU = 3.5 cm
UM = 4 cm
MP = 5 cm
PJ = 4.5 cm
PU = 6.5 cm ਹੈ।

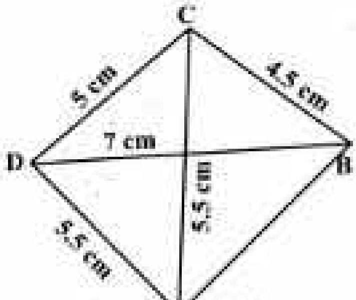
(iii) ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ MORE ਜਿਸ ਵਿੱਚ
OR = 6 cm
EO = 7.5 cm
EO = 7.5 cm ਹੈ।

(iv) ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ BEST ਜਿਸ ਵਿਚ
BE = 4.5 cm ਅਤੇ
ET = 6 cm ਹੈ।

4.2.2 ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰਨਾ ਜਦੋਂ ਦੋ ਵਿਕਰਨ ਅਤੇ ਤਿੰਨ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੀਆਂ ਲੰਬਾਈਆਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਣ।

ਜਦੋਂ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀਆਂ ਚਾਰ ਭੁਜਾਵਾਂ ਅਤੇ ਇੱਕ ਵਿਕਰਨ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਸੀ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਮਾਪਾਂ ਤੋਂ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕੀਤੀ ਅਤੇ ਇਸ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਚੌਥੇ ਬਿੰਦੂ ਦਾ ਪਤਾ ਲਗਾਉਣ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕੀਤੀ ਸੀ। ਇਸੇ ਢੰਗ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਅਸੀਂ ਇੱਥੇ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

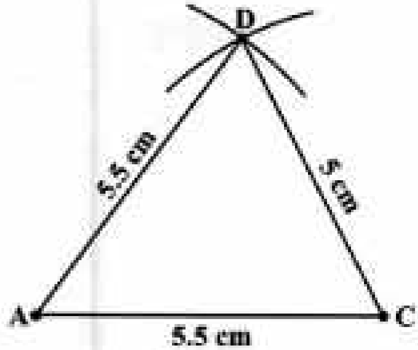
ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ BC = 4.5 cm, AD = 5.5 cm, CD = 5 cm, ਵਿਕਰਣ AC = 5.5 cm ਅਤੇ ਵਿਕਰਨ BD = 7 cm ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 4.10

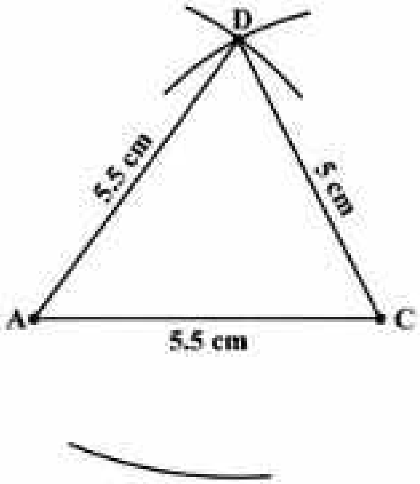
ਹੱਲ : ਇੱਥੇ ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਦਾ ਰਫ਼ ਚਿੱਤਰ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 4.10)। ਇਸ ਰਫ਼ ਚਿੱਤਰ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰ ਕੇ ਅਸੀਂ ਅਸਾਨੀ ਨਾਲ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ Δ ACD ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰਨਾ ਸੰਭਵ ਹੈ। (ਕਿਉਂ ?)

ਪਗ 1 SSS ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ Δ ACD ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ। (ਚਿੱਤਰ 4.11) (ਹੁਣ ਸਾਨੂੰ ਬਿੰਦੂ B ਦਾ ਪਤਾ ਲਗਾਉਣ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਬਿੰਦੂ C ਤੋਂ 4.5 cm ਅਤੇ ਬਿੰਦੂ D ਤੋਂ 7 cm ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੈ।)



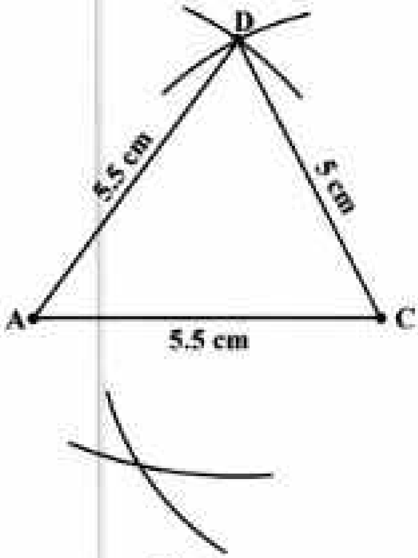
ਚਿੱਤਰ 4.11

ਪਗ 2 D ਨੂੰ ਕੇਂਦਰ ਮੰਨ ਲਵੋ, 7 cm ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਵਾਲੀ ਇੱਕ ਚਾਪ ਖਿੱਚੋ। (ਬਿੰਦੂ B ਇਹ ਚਾਪ 'ਤੇ ਕਿਤੇ ਸਥਿਤ ਹੋਵੇਗਾ।) (ਚਿੱਤਰ 4.12)।



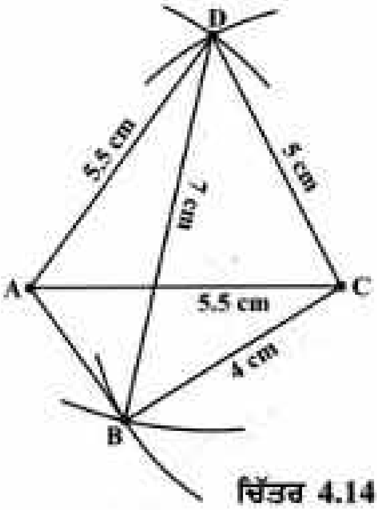
ਚਿੱਤਰ 4.12

ਪਗ 3 C ਨੂੰ ਕੇਂਦਰ ਮੰਨ ਲਵੋ, 4.5 cm ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਵਾਲੀ ਇੱਕ ਚਾਪ ਖਿੱਚੋ। (ਬਿੰਦੂ B ਇਸ ਚਾਪ 'ਤੇ ਕਿਤੇ ਸਥਿਤ ਹੋਵੇਗਾ।) (ਚਿੱਤਰ 4.13)



ਚਿੱਤਰ 4.13

ਪਗ 4 ਕਿਉਂਕਿ ਬਿੰਦੂ B ਇਨ੍ਹਾਂ ਦੋਨੋਂ ਚਾਪਾਂ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਬਿੰਦੂ B ਇਨ੍ਹਾਂ ਦੋਨੋਂ ਚਾਪਾਂ ਦਾ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। ਬਿੰਦੂ B ਨੂੰ ਅੰਕਿਤ ਕਰੋ ਅਤੇ ABCD ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਕਰੋ। ABCD ਇੱਕ ਲੋੜੀਂਦਾ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 4.14)।



ਚਿੱਤਰ 4.14

ਸੋਚੋ, ਚਰਚਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਲਿਖੋ

1. ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ ਕੀ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ Δ ABD ਖਿੱਚ ਕੇ ਉਸਦੇ ਬਾਅਦ ਚੌਥੇ ਬਿੰਦੂ C ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਕੇ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ?
2. ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ PQRS ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ PQ = 3 cm, RS = 3 cm, PS = 7.5 cm, PR = 8 cm ਅਤੇ SQ = 4 cm ਹੈ ? ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਦੀ ਪੁਸ਼ਟੀ ਕਰੋ।

ਅਭਿਆਸ 4.2

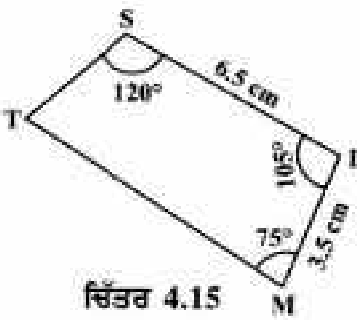
1. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਚਤੁਰਭੁਜਾਂ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ :
   (i) ਚਤੁਰਭੁਜ LIFT ਜਿਸ ਵਿੱਚ
   LI = 4 cm
   IF = 3 cm
   TL = 2.5 cm
   LF = 4.5 cm
   IT = 4 cm ਹੈ।

   (ii) ਚਤੁਰਭੁਜ GOLD ਜਿਸ ਵਿੱਚ
   OL = 7.5 cm
   GL = 6 cm
   GD = 6 cm
   LD = 5 cm
   OD = 10 cm ਹੈ।

   (iii) ਸਮਲੰਬ ਚਤੁਰਭੁਜ BEND ਜਿਸ ਵਿੱਚ
   BN = 5.6 cm
   DE = 6.5 cm ਹੈ।

4.2.3 ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀ ਰਚਨਾ ਜਦੋਂ ਦੋ ਲਾਗਵੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਅਤੇ ਤਿੰਨ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਮਾਪ ਦਿੱਤਾ ਹੋਵੇ।

ਪਹਿਲਾਂ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ, ਅਸੀਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਰਚਨਾ ਤੋਂ ਹੀ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਉਸ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਚਤੁਰਭੁਜ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਚੌਥੇ ਬਿੰਦੂ ਦਾ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

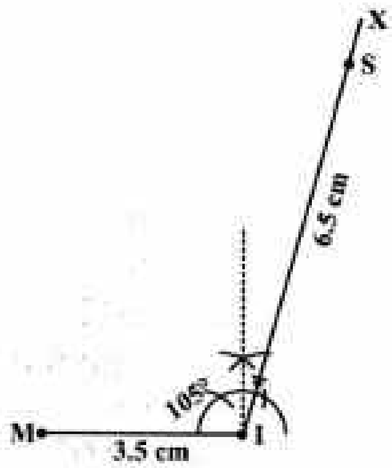


ਚਿੱਤਰ 4.15

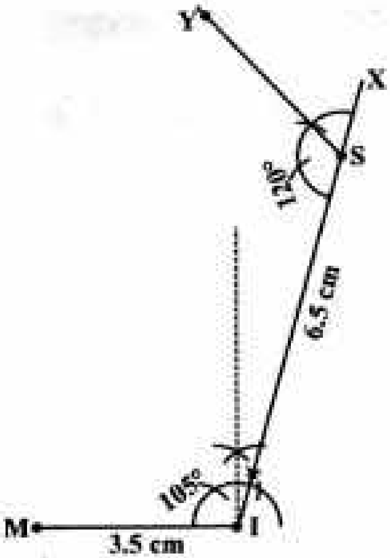
ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ MIST ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ, ਜਿੱਥੇ MI = 3.5 cm, IS = 6.5 cm, ∠M = 75°, ∠I = 105° ਅਤੇ ∠S = 120° ਹੈ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਇੱਥੇ ਰਫ਼ ਚਿੱਤਰ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਸਾਡੀ ਰਚਨਾ ਦੇ ਪਗਾਂ ਨੂੰ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਸਹਾਇਤਾ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਬਾਕੀ ਪਗਾਂ ਦੇ ਲਈ ਕੇਵਲ ਸੰਕੇਤ ਦੇਵਾਂਗੇ। (ਚਿੱਤਰ 4.15)।

ਪਗ 1 ਤੁਸੀਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦਾ ਪਤਾ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਰੋਗੇ। ਤੁਸੀਂ ਕਿਸ ਅਧਾਰ 'ਤੇ ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰਦੇ ਹੋ ਅਤੇ ਤੁਹਾਡਾ ਪਹਿਲਾ ਪਗ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ। (ਚਿੱਤਰ 4.16)।

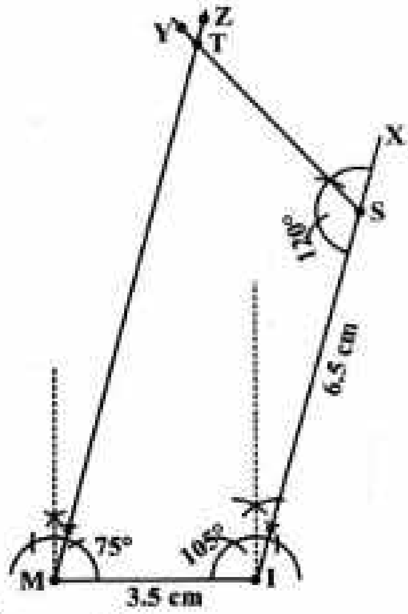


ਚਿੱਤਰ 4.16



ਚਿੱਤਰ 4.17

ਪਗ 2 ਬਿੰਦੂ S 'ਤੇ $\angle ISY = 120°$ ਬਣਾਉ (ਚਿੱਤਰ 4.17)।



ਚਿੱਤਰ 4.18

ਪਗ 3 ਬਿੰਦੂ M 'ਤੇ $\angle IMZ = 75°$ ਬਣਾਉ।
SY ਅਤੇ MZ ਕਿੱਥੇ ਕੱਟਣਗੇ ? ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ T ਨਾਲ ਅੰਕਿਤ ਕਰੋ। ਸਾਨੂੰ ਲੋੜੀਂਦਾ ਚਤੁਰਭੁਜ MIST ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। (ਚਿੱਤਰ 4.18)।

ਸੋਚੋ, ਚਰਚਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਲਿਖੋ

1. ਜੇ ਸਾਨੂੰ M ਤੇ 75° ਮਾਪ ਦੀ ਥਾਂ 'ਤੇ 100° ਦਾ ਮਾਪ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਉੱਪਰ ਦੱਸੇ ਗਏ ਚਤੁਰਭੁਜ MIST ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ ?
2. ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ PLAN ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ, ਜਦੋਂ PL = 6 cm, LA = 9.5 cm, $\angle P = 75°$, $\angle L = 150°$ ਅਤੇ $\angle A = 140°$ ਹੋਵੇ ?
(ਸੰਕੇਤ : ਕੋਣ ਜੋੜਫਲ ਗੁਣ ਨੂੰ ਯਾਦ ਕਰੋ।)
3. ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਵਿੱਚ ਦੋ ਲਾਗਵੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਹੈ। ਕੀ ਸਾਨੂੰ ਰਚਨਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਹੁਣ ਵੀ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਮਾਪਾਂ ਦੀ ਜਰੂਰਤ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 4.3

1. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਚਤੁਰਭੁਜਾਂ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ :

(i) ਚਤੁਰਭੁਜ MORE ਜਿਸ ਵਿੱਚ
MO = 6 cm
OR = 4.5 cm
$\angle M = 60°$
$\angle O = 105°$
$\angle R = 105°$ ਹੈ।

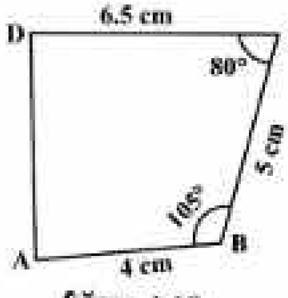
(ii) ਚਤੁਰਭੁਜ PLAN ਜਿਸ ਵਿੱਚ
PL = 4 cm
LA = 6.5 cm
$\angle P = 90°$
$\angle A = 110°$
$\angle N = 85°$ ਹੈ।

(iii) ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ HEAR ਜਿਸ ਵਿੱਚ
HE = 5 cm
EA = 6 cm ਅਤੇ $\angle R = 85°$ ਹੈ।

(iv) ਆਇਤ OKAY ਜਿਸ ਵਿੱਚ
OK = 7 cm
KA = 5 cm ਹੈ।

4.2.4 ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰਨਾ ਜਦੋਂ ਤਿੰਨ ਭੁਜਾਵਾਂ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਵਿੱਚ ਦੇ ਦੋ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਮਾਪ ਦਿੱਤਾ ਹੋਵੇ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਚਤੁਰਭੁਜ ਨੂੰ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਜਦ ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਰਫ ਚਿੱਤਰ ਬਣਾਉਂਦੇ ਹੋ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਖਾਸ ਤੌਰ 'ਤੇ ਉਸਦੇ ਵਿਚਲੇ ਦੋ ਕੋਣਾਂ ਨੂੰ ਧਿਆਨ ਨਾਲ ਦੇਖਾਂਗੇ।

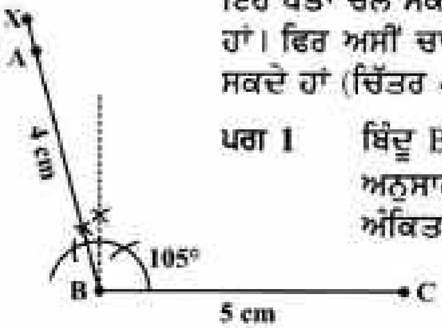


ਚਿੱਤਰ 4.19

ਉਦਾਹਰਣ 4 : **ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ, ਜਿੱਥੇ AB = 4 cm, BC = 5 cm, CD = 6.5 cm ਅਤੇ ∠B = 105° ਅਤੇ ∠C = 80° ਹੈ।**

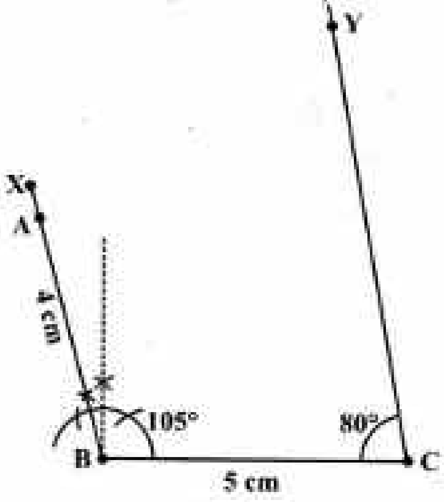
ਹੱਲ : ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਰਫ ਚਿੱਤਰ ਖਿੱਚਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸ ਨਾਲ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਪਤਾ ਚਲ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਰਚਨਾ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਫਿਰ ਅਸੀਂ ਚਾਰੋਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦਾ ਪਤਾ ਲਗਾਉਣ ਦੀ ਯੋਜਨਾ ਬਣਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ (ਚਿੱਤਰ 4.19)।

ਪਗ 1 ਬਿੰਦੂ B 'ਤੇ BC = 5 cm ਲੈ ਕੇ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰੋ। BX ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਸਾਰ 105° ਦਾ ਕੋਣ ਬਣਾਉ। ਇਸ 'ਤੇ ਬਿੰਦੂ B ਤੋਂ 4 cm ਦੀ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਬਿੰਦੂ A ਨੂੰ ਅੰਕਿਤ ਕਰੋ। ਹੁਣ ਸਾਨੂੰ ਬਿੰਦੂ B, C ਅਤੇ A ਮਿਲ ਗਏ ਹਨ। (ਚਿੱਤਰ 4.20)



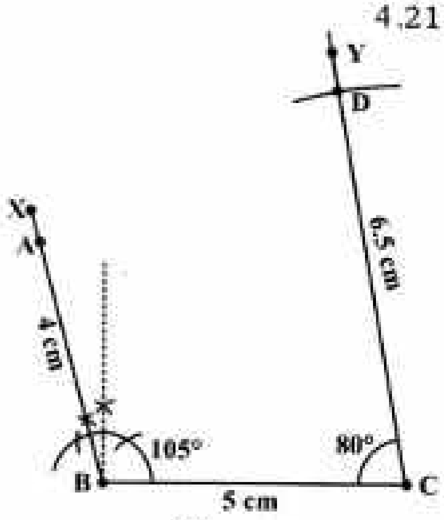
ਚਿੱਤਰ 4.20

ਪਗ 2 ਚੌਥਾ ਬਿੰਦੂ D, CY 'ਤੇ ਕਿਤੇ ਸਥਿਤ ਹੈ ਜੋ ਭੁਜਾ BC ਨਾਲ 80° ਦਾ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦਾ ਹੈ। BC 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਬਿੰਦੂ C 'ਤੇ ∠BCY = 80° ਬਣਾਉ। (ਚਿੱਤਰ 4.21)।



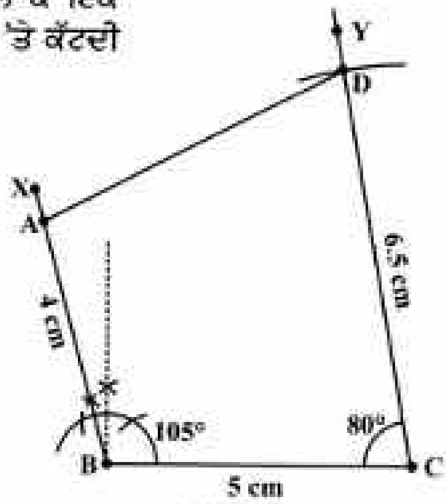
ਚਿੱਤਰ 4.21

ਪਗ 3 ਬਿੰਦੂ D, CY 'ਤੇ 6.5 cm ਦੀ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੈ। C ਨੂੰ ਕੇਂਦਰ ਮੰਨ ਕੇ ਅਤੇ 6.5 cm ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਲੈ ਕੇ ਇੱਕ ਚਾਪ ਖਿੱਚੋ। ਇਹ CY ਨੂੰ D 'ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 4.22)।



ਚਿੱਤਰ 4.22

ਪਗ 4 ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਕਰੋ। ABCD ਲੋੜੀਦਾ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 4.10)। (ਚਿੱਤਰ 4.23)।



ਚਿੱਤਰ 4.23

ਸੋਚੋ, ਚਰਚਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਲਿਖੋ

1. ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੀ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ BC ਖਿੱਚੀ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਅਸੀਂ ਕਿਹੜੇ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ?
2. ਅਸੀਂ ਹੁਣ ਤੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜਾਂ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਕੋਈ ਪੰਜ ਮਾਪਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕੀਤੀ। ਕੀ ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਪੰਜ ਮਾਪਾਂ ਦੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਸਮੂਹ (ਹੁਣ ਤੱਕ ਦੇਖੇ ਗਏ ਮਾਪਾਂ ਨੂੰ ਛੱਡ ਕੇ) ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ ?
   ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ, ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਉੱਤਰ ਦੇਣ ਵਿੱਚ ਤੁਹਾਡੀ ਸਹਾਇਤਾ ਕਰ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ।
   (i) ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਜਿਸ ਵਿੱਚ AB = 5 cm, BC = 5.5 cm, CD = 4 cm, AD = 6 cm ਅਤੇ $\angle B = 80°$ ਹੈ।
   (ii) ਚਤੁਰਭੁਜ PQRS ਜਿਸ ਵਿੱਚ PQ = 4.5 cm, $\angle P = 70°$, $\angle Q = 100°$, $\angle R = 80°$ ਅਤੇ $\angle S = 110°$ ਹੈ।
   ਤੁਸੀਂ ਆਪ ਕੁਝ ਹੋਰ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਕਿਹੜੇ-ਕਿਹੜੇ ਅੰਕੜੇ (ਮਾਪ) ਕਾਫੀ ਹਨ ਜਾਂ ਨਾ ਕਾਫ਼ੀ ਹਨ, ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਅਭਿਆਸ 4.4

1. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਚਤੁਰਭੁਜਾਂ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ :
   (i) ਚਤੁਰਭੁਜ DEAR ਜਿਸ ਵਿੱਚ
   DE = 4 cm
   EA = 5 cm
   AR = 4.5 cm
   $\angle E = 60°$
   ਅਤੇ $\angle A = 90°$ ਹੈ।
   (ii) ਚਤੁਰਭੁਜ TRUE ਜਿਸ ਵਿੱਚ
   TR = 3.5 cm
   RU = 3 cm
   UE = 4 cm
   $\angle R = 75°$
   ਅਤੇ $\angle U = 120°$ ਹੈ।

4.3 ਕੁਝ ਖਾਸ ਸਥਿਤੀਆਂ

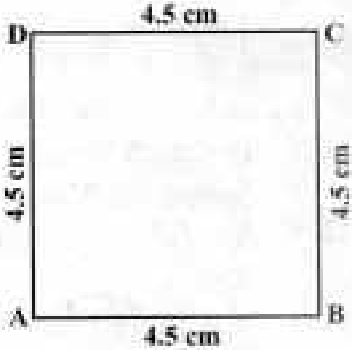
ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਪੰਜ ਮਾਪਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ। ਕੀ ਕਿਸੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ ਜਿਸਦੇ ਮਾਪਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਇਸ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੋਵੇ। ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਖਾਸ ਸਥਿਤੀਆਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 5 : 4.5 cm ਭੁਜਾ ਵਾਲੇ ਵਰਗ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਦੇਖਣ 'ਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਗਦਾ ਹੈ ਕਿ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਹੀ ਮਾਪ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਹੋਰ ਬਹੁਤ ਸਾਰੀਆਂ ਜਾਣਕਾਰੀਆਂ ਹਨ ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਚਿੱਤਰ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਨਾਂ ਵਰਗ ਹੈ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਸਦਾ ਹਰੇਕ ਕੋਣ ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਹੈ। (ਰਫ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਦੇਖੋ) (ਚਿੱਤਰ 4.24)।

ਇਹ SAS ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਨਾਲ Δ ABC ਖਿੱਚਣ ਵਿੱਚ ਸਾਡੀ ਸਹਾਇਤਾ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਉਹ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਬਿੰਦੂ D ਦਾ ਬੜੀ ਆਸਾਨੀ ਨਾਲ ਪਤਾ ਲਗਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਮਾਪਾਂ ਨਾਲ ਹੁਣ ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਵਰਗ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ।

ਰਫ ਚਿੱਤਰ



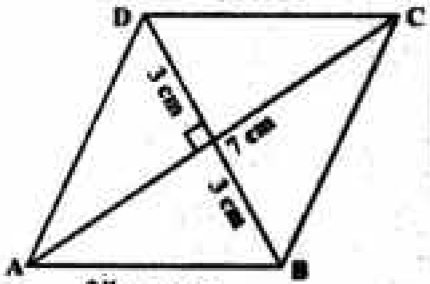
ਚਿੱਤਰ 4.24

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਕੀ ਇੱਕ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰਨਾ ਸੰਭਵ ਹੈ ਜਿੱਥੇ AC = 6 cm ਅਤੇ BD = 7 cm ਹੋਵੇ ? ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਦੀ ਪੁਸ਼ਟੀ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਕੇਵਲ ਦੋ ਮਾਪ (ਵਿਕਰਨ) ਦਿੱਤੇ ਹਨ। ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਇੱਕ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ, ਇਸਦੇ ਗੁਣਾਂ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਹੋਰ ਸਹਾਇਤਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਵਿਕਰਨ ਇੱਕ-ਦੂਸਰੇ ਦੇ ਲੰਬ ਸਮਦੁਭਾਜਕ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

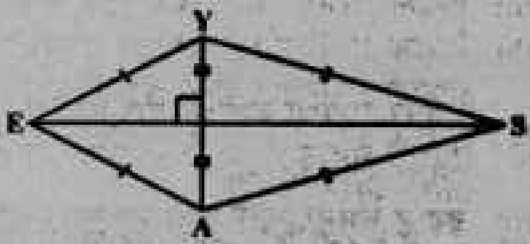
ਇਸ ਲਈ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ AC = 7 cm ਖਿੱਚੋ ਅਤੇ ਫਿਰ ਇਸਦੇ ਲੰਬ ਸਮਦੁਭਾਜਕ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ। ਦੋਨੋਂ ਇੱਕ-ਦੂਸਰੇ ਨੂੰ O 'ਤੇ ਕੱਟਦੇ ਹਨ। ਖਿੱਚੇ ਗਏ ਸਮਦੁਭਾਜਕ ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ O ਤੋਂ ਦੋਨੋਂ ਪਾਸੇ ਲੰਬਾਈ BD ਦੀ ਅੱਧੀ ਲੰਬਾਈ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਅਰਧਵਿਆਸ ਲੈ ਕੇ ਕੱਟੋ। ਹੁਣ ਤੁਹਾਨੂੰ ਬਿੰਦੂ B ਅਤੇ ਬਿੰਦੂ D ਮਿਲ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਉੱਪਰ ਦੱਸੇ ਗਏ ਢੰਗ ਦੇ ਅਧਾਰ 'ਤੇ ਹੁਣ ਇੱਕ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ। (ਚਿੱਤਰ 4.25)



ਚਿੱਤਰ 4.25

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

1. ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਆਇਤ PQRS ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਰੋਗੇ ਜੇ ਤੁਹਾਨੂੰ ਸਿਰਫ PQ ਅਤੇ QR ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਪਤਾ ਹੋਵੇ ?
2. ਇੱਕ ਪਤੰਗ EASY ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ ਜਦੋਂ AY = 8 cm, EY = 4 cm ਅਤੇ SY = 6 cm ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 4.26)। ਰਚਨਾ ਦੇ ਦੌਰਾਨ ਤੁਸੀਂ ਪਤੰਗ ਦੇ ਕਿਹੜੇ ਗੁਣਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕੀਤੀ ?



ਚਿੱਤਰ 4.26

ਅਭਿਆਸ 4.5

ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ :

1. ਇੱਕ ਵਰਗ READ ਜਿਸ ਵਿੱਚ RE = 5.1 cm ਹੈ।
2. ਇੱਕ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਜਿਸਦੇ ਵਿਕਰਨਾਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 5.2 cm ਅਤੇ 6.4 cm ਹੈ।
3. ਇੱਕ ਆਇਤ ਜਿਸਦੀ ਲਾਗਵੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 5 cm ਅਤੇ 4 cm ਹੈ।
4. ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ OKAY ਜਿੱਥੇ OK = 5.5 cm ਅਤੇ KA = 4.2 cm ਹੈ। ਕੀ ਇਹ ਵਿਲੱਖਣ ਹੈ ?

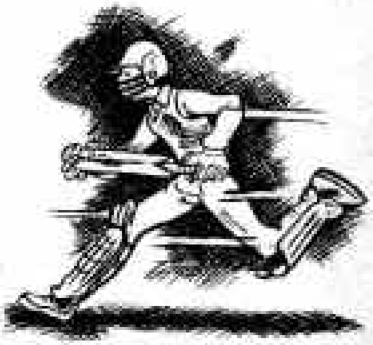
ਅਸੀਂ ਕੀ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀ ?

1. ਪੰਜ ਮਾਪਾਂ ਨਾਲ ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ ਚਤੁਰਭੁਜ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ।
2. ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ ਜਦੋਂ ਉਸਦੀਆਂ ਚਾਰ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਅਤੇ ਇੱਕ ਵਿਕਰਨ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੋਵੇ।
3. ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ ਜਦੋਂ ਉਸਦੇ ਦੋ ਵਿਕਰਨ ਅਤੇ ਤਿੰਨ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਣ।
4. ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ ਜਦੋਂ ਉਸਦੀਆਂ ਦੋ ਲਾਗਵੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਅਤੇ ਤਿੰਨ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਮਾਪ ਪਤਾ ਹੋਵੇ।
5. ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ ਜਦੋਂ ਉਸ ਦੀਆਂ ਤਿੰਨ ਭੁਜਾਵਾਂ ਅਤੇ ਦੋ ਵਿਚਲੇ ਕੋਣ ਦਿੱਤੇ ਹੋਣ।

ਅਧਿਆਇ 5

ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਪ੍ਰਬੰਧਨ

5.1 ਸੂਚਨਾਵਾਂ ਦੀ ਖੋਜ ਵਿੱਚ



ਤੁਹਾਡੇ ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਜੀਵਨ ਵਿੱਚ ਤੁਹਾਡੇ ਸਾਹਮਣੇ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਵਰਗੀਆਂ ਸੂਚਨਾਵਾਂ ਆਈਆਂ ਹੋਣਗੀਆਂ :

(a) ਪਿਛਲੇ 10 ਟੈਸਟ ਮੈਚਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਬੱਲੇਬਾਜ਼ ਦੁਆਰਾ ਬਣਾਏ ਗਏ ਕੁੱਲ ਰਨ।

(b) ਪਿਛਲੇ 10 ਇੱਕ ਦਿਨਾਂ ਅੰਤਰ ਰਾਸ਼ਟਰੀ ਮੈਚਾਂ (ODI) ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਗੇਂਦਬਾਜ਼ ਦੁਆਰਾ ਲਈਆਂ ਗਈਆਂ ਕੁੱਲ ਵਿਕਟਾਂ।

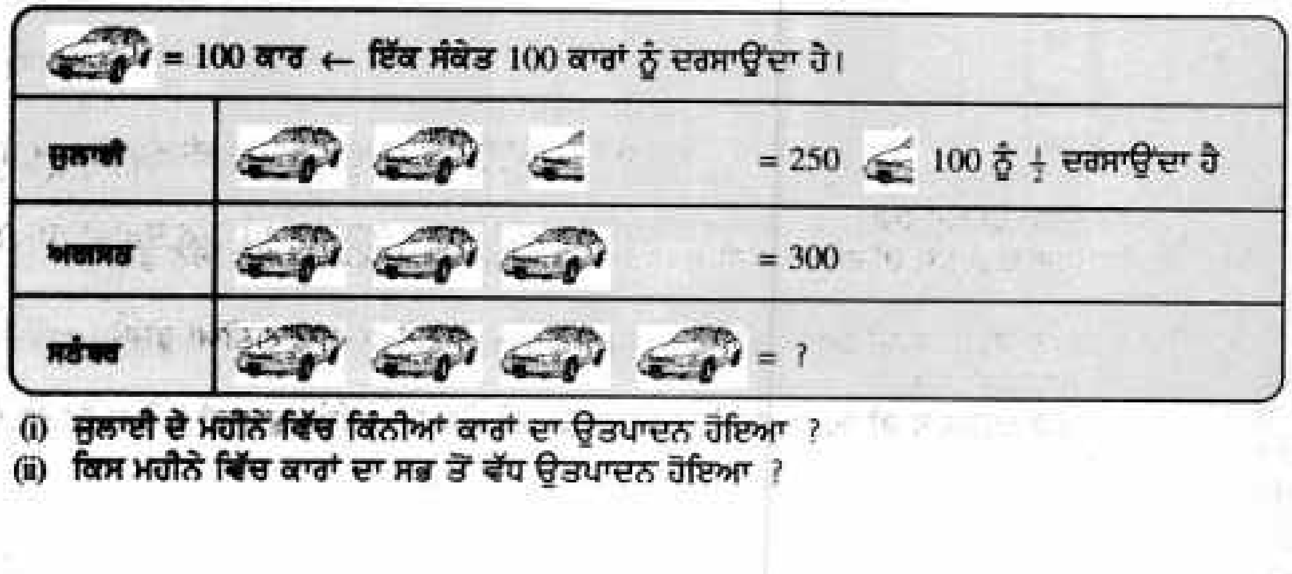
(c) ਤੁਹਾਡੀ ਜਮਾਤ ਦੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਗਣਿਤ ਦੇ ਯੂਨਿਟ ਟੈਸਟ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਗਏ ਅੰਕ।

(d) ਤੁਹਾਡੇ ਦੋਸਤਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦੁਆਰਾ ਪੜ੍ਹੀਆਂ ਗਈਆਂ ਕਹਾਣੀਆਂ ਦੀਆਂ ਪੁਸਤਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ, ਆਦਿ।

ਇਹਨਾਂ ਸਾਰੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਇਕੱਠੀਆਂ ਕੀਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਸੂਚਨਾਵਾਂ (data) ਅੰਕੜੇ ਕਹਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ। ਅੰਕੜੇ ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਇੱਕਠੇ ਕੀਤੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ, ਜਿਸਦਾ ਅਸੀਂ ਅਧਿਐਨ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ, ਇੱਕ ਅਧਿਆਪਕਾ ਦੀ ਆਪਣੀ ਜਮਾਤ ਦੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਔਸਤ ਉਚਾਈ ਜਾਨਣ ਵਿੱਚ ਰੁਚੀ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਉਹ ਆਪਣੀ ਜਮਾਤ ਦੇ ਸਾਰੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਉਚਾਈਆਂ ਲਿਖੇਗੀ। ਇਹਨਾਂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਕੱਠਾ ਕਰੇਗੀ ਅਤੇ ਫਿਰ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰੇਗੀ।

ਕਦੇ-ਕਦੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ, ਇਹ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਕਿ ਉਹ ਕੀ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ, ਗਰਾਫ਼ (graphically) ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਕੀ ਤੁਹਾਨੂੰ ਉਹਨਾਂ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਕਿਸਮਾਂ ਦੇ ਗਰਾਫ਼ ਬਾਰੇ ਕੁਝ ਯਾਦ ਹੈ ਜੋ ਅਸੀਂ ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹੇ ਸੀ ?

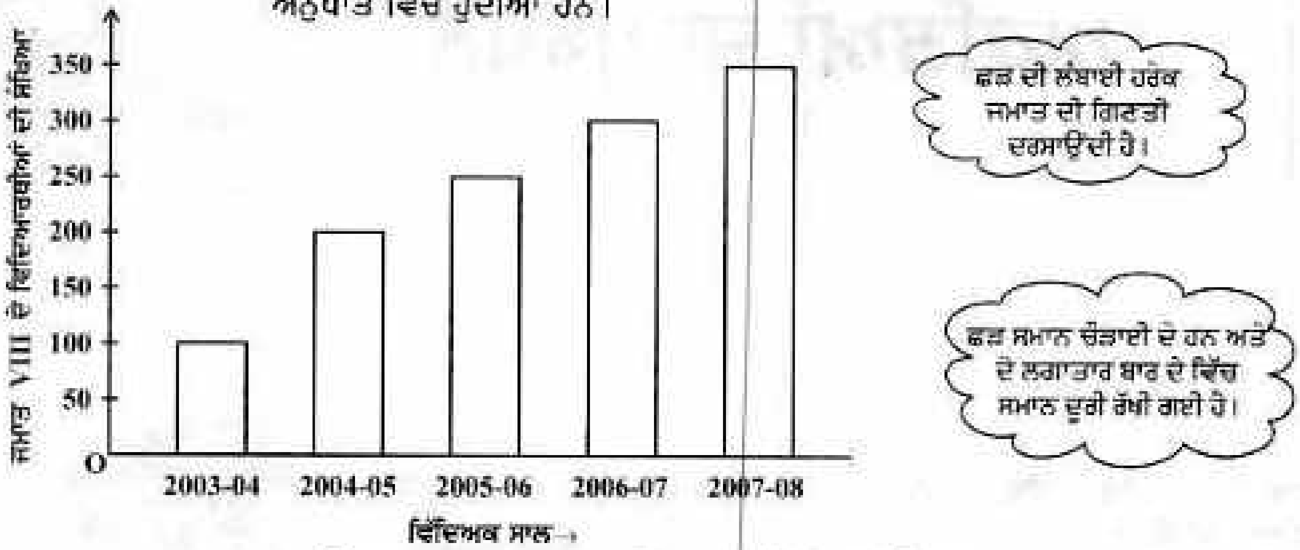
1. **ਇੱਕ ਚਿੱਤਰਗਰਾਫ਼** (pictograph) : ਸੰਕੇਤਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਚਿੱਤਰ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਦਰਸਾਉਣਾ।



(i) ਜੁਲਾਈ ਦੇ ਮਹੀਨੇ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੀਆਂ ਕਾਰਾਂ ਦਾ ਉਤਪਾਦਨ ਹੋਇਆ ?

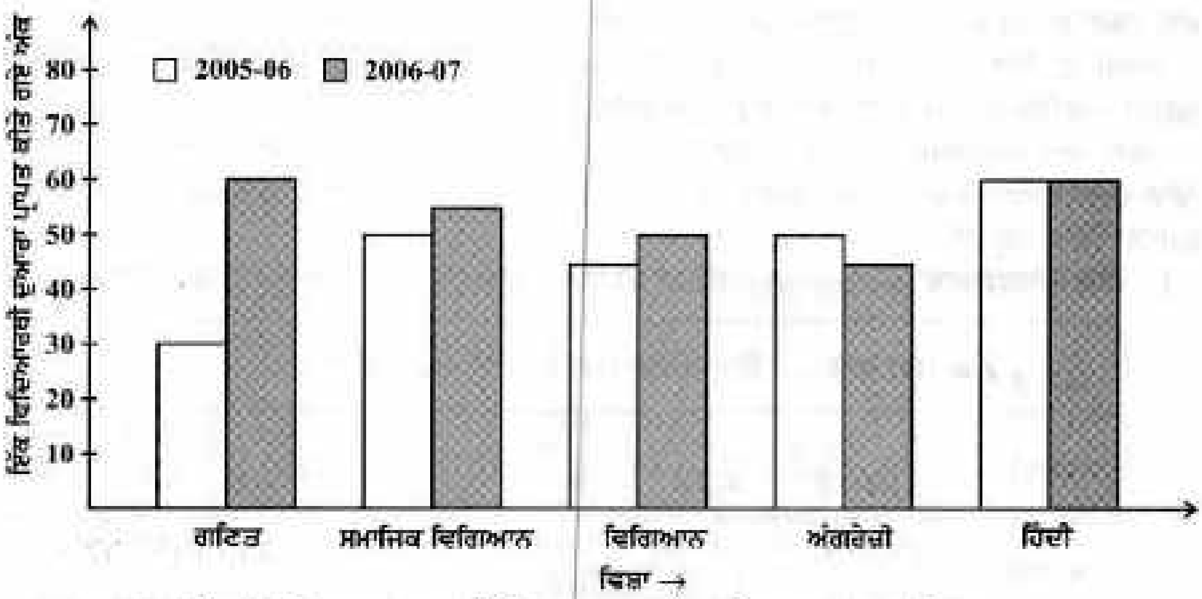
(ii) ਕਿਸ ਮਹੀਨੇ ਵਿੱਚ ਕਾਰਾਂ ਦਾ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਉਤਪਾਦਨ ਹੋਇਆ ?

2. **ਇੱਕ ਛੜ ਗਰਾਫ** (bar graph) : ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਚੌੜਾਈ ਦੇ ਛੜਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਸੂਚਨਾ ਦਰਸਾਉਣਾ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਛੜਾਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈਆਂ (ਉਚਾਈਆਂ) ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਉਸਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।



(i) ਇਸ ਛੜ ਗਰਾਫ ਦੁਆਰਾ ਕੀ ਸੂਚਨਾ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹੈ ?
(ii) ਕਿਸ ਸਾਲ ਵਿੱਚ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਵਿੱਚ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਵਾਧਾ ਹੋਇਆ ?
(iii) ਕਿਸ ਸਾਲ ਵਿੱਚ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੈ ?
(iv) ਦੱਸੋ ਕਿ ਇਹ ਸੱਚ ਹੈ ਜਾਂ ਝੂਠ : '2005-06 ਵਿੱਚ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 2003-04 ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਦੀ ਦੁੱਗਣੀ ਹੈ।

3. **ਦੋਹਰਾ ਛੜ ਗਰਾਫ** (double bar graph) :ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੇ ਦੋ ਗੁੱਟਾਂ ਨੂੰ ਨਾਲ-ਨਾਲ ਦਰਸਾਉਣ ਵਾਲਾ ਛੜ ਗਰਾਫ।



(i) ਇਸ ਦੋਹਰੇ ਛੜ ਗਰਾਫ ਤੋਂ ਕਿਸ ਜਾਣਕਾਰੀ ਬਾਰੇ ਪਤਾ ਲਗਦਾ ਹੈ ?
(ii) ਕਿਸ ਵਿਸ਼ੇ ਵਿੱਚ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦੀ ਕਾਰਗੁਜ਼ਾਰੀ ਵਿੱਚ ਸਭ ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਸੁਧਾਰ ਹੋਇਆ ਹੈ ?
(iii) ਕਿਸ ਵਿਸ਼ੇ ਵਿੱਚ ਕਾਰਗੁਜ਼ਾਰੀ ਵਿੱਚ ਗਿਰਾਵਟ ਆਈ ਹੈ ?
(iv) ਕਿਸ ਵਿਸ਼ੇ ਵਿੱਚ ਕਾਰਗੁਜ਼ਾਰੀ ਇੱਕੋ-ਜਿਹੀ ਰਹੀ ਹੈ ?

ਸੋਚੋ, ਚਰਚਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਲਿਖੋ

ਜੇ ਇੱਕ ਛੜ ਗਰਾਫ਼ ਦੇ ਛੜਾਂ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਬਦਲ ਦਿੱਤੀ ਜਾਵੇ, ਤਾਂ ਕੀ ਦਰਸਾਈ ਗਈ ਜਾਣਕਾਰੀ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਬਦਲਾਓ ਜਾਂ ਪਰਿਵਰਤਨ ਹੋਵੇਗਾ ? ਕਿਉਂ ?

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸੂਚਨਾ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਲਈ ਇੱਕ ਢੁਕਵਾਂ (suitable) ਗਰਾਫ਼ ਖਿੱਚ

1.

ਮਹੀਨਾ	ਜੁਲਾਈ	ਅਗਸਤ	ਸਤੰਬਰ	ਅਕਤੂਬਰ	ਨਵੰਬਰ	ਦਸੰਬਰ
ਵੇਚੀਆਂ ਗਈਆਂ ਘੜੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ	1000	1500	1500	2000	2500	1500

2.

ਬੱਚਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਪਸੰਦ ਹੈ	ਸਕੂਲ A	ਸਕੂਲ B	ਸਕੂਲ C
ਪੈਦਲ ਚਲਨਾ	40	55	15
ਸਾਈਕਲ ਚਲਾਉਣਾ	45	25	35

3. ਸਭ ਤੋਂ ਵਧੀਆ ਕ੍ਰਿਕੇਟ ਟੀਮਾਂ ਦੁਆਰਾ ODI ਵਿੱਚ ਜਿੱਤਣ ਦਾ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ

ਟੀਮ	ਚੈਂਪੀਅਨ ਟਰਾਫ਼ੀ ਤੋਂ ਵਰਲਡ ਕਪ 2006 ਤੱਕ	2007 ਵਿੱਚ ਪਿਛਲੇ 10 ODI
ਦੱਖਣੀ ਅਫਰੀਕਾ	75%	78%
ਆਸਟਰੇਲੀਆ	61%	40%
ਸ਼੍ਰੀਲੰਕਾ	54%	38%
ਨਿਊਜ਼ੀਲੈਂਡ	47%	50%
ਇੰਗਲੈਂਡ	46%	50%
ਪਾਕਿਸਤਾਨ	45%	44%
ਵੈਸਟ ਇੰਡੀਜ਼	44%	30%
ਭਾਰਤ	43%	56%

5.2 ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਸੰਗਠਨ (Organising Data)

ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਉਪਲੱਬਧ ਅੰਕੜੇ ਅਸੰਗਠਿਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਮੂਲ ਰੂਪ ਵਿੱਚ **ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕੜੇ (raw data)** ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਸਾਰਥਕ ਨਤੀਜੇ ਕੱਢਣ ਲਈ, ਸਾਨੂੰ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਲੜੀਵਾਰ ਸੰਗਠਿਤ ਕਰਨ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਇੱਕ ਗੁੱਟ ਨੂੰ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਮਨਪਸੰਦ ਵਿਸ਼ਿਆਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਪੁੱਛਿਆ ਗਿਆ। ਇਸਦੇ ਨਤੀਜੇ ਦੀ ਸੂਚੀ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹੈ।

ਕਲਾ, ਗਣਿਤ, ਵਿਗਿਆਨ, ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ, ਗਣਿਤ, ਕਲਾ, ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ, ਗਣਿਤ ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ, ਕਲਾ ਵਿਗਿਆਨ, ਕਲਾ, ਵਿਗਿਆਨ, ਗਣਿਤ, ਕਲਾ, ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ, ਕਲਾ, ਵਿਗਿਆਨ, ਗਣਿਤ, ਵਿਗਿਆਨ, ਕਲਾ।

ਕਿਹੜਾ ਵਿਸ਼ਾ ਸਭ ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਪਸੰਦ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਅਤੇ ਕਿਹੜਾ ਵਿਸ਼ਾ ਸਭ ਤੋਂ ਘੱਟ ਪਸੰਦ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ?

ਸਧਾਰਨ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੀਆਂ ਗਈਆਂ ਰੁਚੀਆਂ ਜਾਂ ਪਸੰਦ ਵੇਖ ਕੇ ਇਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦਾ ਉੱਤਰ ਦੇਣਾ ਸੌਖਾ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਮਿਲਾਣ ਚਿੰਨ੍ਹਾਂ (tally marks) ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਇਹਨਾਂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਸਾਰਣੀ 5.1 ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :

ਸਾਰਣੀ 5.1

ਵਿਸ਼ਾ	ਮਿਲਾਣ ਚਿੰਨ੍ਹ	ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ
ਕਲਾ	~~||||~~ ||	7
ਗਣਿਤ	~~||||~~	5
ਵਿਗਿਆਨ	~~||||~~ |	6
ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ	||||	4

ਹਰੇਕ ਵਿਸ਼ੇ ਦੇ ਸਾਹਮਣੇ ਲਿਖੇ ਮਿਲਾਣ ਚਿੰਨ੍ਹਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਖਾਸ ਵਿਸ਼ੇ ਨੂੰ ਪਸੰਦ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਇਸ ਗਿਣਤੀ ਨੂੰ ਉਸ ਵਿਸ਼ੇ ਦੀ **ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ** (**frequency**) ਆਖਦੇ ਹਾਂ।

ਕਿਸੇ ਇੰਦਰਾਜ਼ ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਉਹ ਗਿਣਤੀ ਹੈ ਜਿੰਨੀ ਵਾਰ ਉਹ ਇੰਦਰਾਜ਼ ਅੰਕੜਿਆਂ ਵਿੱਚ ਆਉਂਦਾ ਹੈ।

ਸਾਰਣੀ 5.1 ਵਿੱਚ, ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਨੂੰ ਪਸੰਦ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ 4 ਹੈ।

ਗਣਿਤ ਨੂੰ ਪਸੰਦ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ 5 ਹੈ।

ਉਪਰੋਕਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਣਾਈ ਗਈ ਸਾਰਣੀ ਨੂੰ ਇੱਕ **ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਸਾਰਣੀ** (**frequency distribution table**) ਆਖਦੇ ਹਨ, ਕਿਉਂਕਿ ਇਸ ਤੋਂ ਪਤਾ ਚਲਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਇੰਦਰਾਜ਼ ਕਿੰਨੀ ਵਾਰ ਆਇਆ ਹੈ।

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

1. ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਇੱਕ ਗੁੱਟ ਵਿੱਚ ਇਹ ਦੱਸਣ ਨੂੰ ਕਿਹਾ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ ਉਹ ਕਿਸ ਪਸ਼ੂ ਨੂੰ ਸਭ ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਘਰ ਵਿੱਚ ਪਾਲਣਾ ਪਸੰਦ ਕਰਨਗੇ। ਇਸਦੇ ਨਤੀਜੇ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਨ :
   ਕੁੱਤਾ, ਬਿੱਲੀ, ਬਿੱਲੀ, ਮੱਛੀ, ਬਿੱਲੀ, ਖਰਗੋਸ਼, ਕੁੱਤਾ, ਖਰਗੋਸ਼, ਕੁੱਤਾ, ਬਿੱਲੀ, ਕੁੱਤਾ, ਕੁੱਤਾ, ਕੁੱਤਾ, ਬਿੱਲੀ, ਗਾਂ, ਮੱਛੀ, ਖਰਗੋਸ਼, ਕੁੱਤਾ, ਬਿੱਲੀ, ਕੁੱਤਾ, ਬਿੱਲੀ, ਬਿੱਲੀ, ਕੁੱਤਾ, ਖਰਗੋਸ਼, ਬਿੱਲੀ, ਮੱਛੀ, ਕੁੱਤਾ। ਉਪਰੋਕਤ ਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਸਾਰਣੀ ਬਣਾਓ।

5.3 ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਵਰਗੀਕਰਨ

ਵਿਸ਼ਿਆਂ ਦੀ ਪਸੰਦ ਨਾਲ ਜੁੜੇ ਅੰਕੜੇ ਹਰੇਕ ਇੰਦਰਾਜ਼ ਦੇ ਅਨੇਕ ਵਾਰ ਆਉਣ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ, ਕਲਾ ਨੂੰ 7 ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਪਸੰਦ ਕਰਦੇ ਹਨ, ਗਣਿਤ ਨੂੰ 5 ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਪਸੰਦ ਕਰਦੇ ਹਨ ਆਦਿ (ਸਾਰਣੀ 5.1) ਇਸ ਸੂਚਨਾ ਨੂੰ ਗਰਾਫ਼ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਚਿੱਤਰ ਗਰਾਫ਼ ਜਾਂ ਬਾਰ ਗਰਾਫ਼ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ ਕਿਤੇ-ਕਿਤੇ ਸਾਨੂੰ ਵੱਡੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨਾਲ ਕੰਮ ਕਰਨਾ ਪੈਂਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ, ਜਮਾਤ VIII ਦੇ 60 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਗਏ (50 ਵਿੱਚੋਂ) ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਅੰਕੜਿਆਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

21, 10, 30, 22, 33, 5, 37, 12, 25, 42, 15, 39, 26, 32, 18, 27, 28, 19, 29, 35, 31, 24, 36, 18, 20, 38, 22, 44, 16, 24, 10, 27, 39, 28, 49, 29, 32, 23, 31, 21, 34, 22, 23, 36, 24, 36, 33, 47, 48, 50, 39, 20, 7, 16, 36, 45, 47, 30, 22, 17.

ਜੇ ਅਸੀਂ ਹਰੇਕ ਅੰਕ ਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਸਾਰਣੀ ਬਣਾਈਏ ਤਾਂ ਇਹ ਬਹੁਤ ਲੰਬੀ ਹੋਵੇਗੀ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਸੌਖਾ ਕਰਨ ਲਈ ਇੰਦਰਾਜ਼ਾਂ ਦੇ ਕੁਝ ਗੁੱਟ ਜਾਂ ਵਰਗ ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ 0–10, 10–20 ਆਦਿ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਗੁੱਟ ਜਾਂ ਵਰਗ ਵਿੱਚ ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਇੰਦਰਾਜ਼ਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਦੇ ਅਧਾਰ 'ਤੇ ਇੱਕ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਸਾਰਣੀ (frequency distribution) ਬਣ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਉਪਰੋਕਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੇ ਲਈ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਸਾਰਣੀ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ।

ਸਾਰਣੀ 5.2

ਗੁੱਟ	ਮਿਲਾਣ ਚਿੰਨ੍ਹ	ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ
0-10	||	2
10-20	~~||||~~ ~~||||~~	10
20-30	~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~ |	21
30-40	~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~ ||||	19
40-50	~~||||~~ ||	7
50-60	|	1
	ਜੋੜ	**60**

ਉਪਰੋਕਤ ਢੰਗ ਨਾਲ ਦਰਸਾਏ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ **ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜੇ (grouped data)** ਆਖਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਵੰਡ ਨੂੰ ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਆਖਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਤੋਂ ਸਾਰਥਕ ਸਿੱਟੇ ਕੱਢਣ ਵਿੱਚ ਸਹਾਇਤਾ ਮਿਲਦੀ ਹੈ। ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ :

(1) ਜ਼ਿਆਦਾ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੇ 20 ਤੋਂ 40 ਦੇ ਵਿੱਚ ਅੰਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਹਨ।

(2) 8 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੇ 50 ਵਿਚੋਂ 40 ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਅੰਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਹਨ।

ਗੁੱਟਾਂ 0–10, 10–20, 20–30 ਆਦਿ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਨੂੰ ਇਕ **ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ (class interval)** [ਜਾਂ ਸੰਖੇਪ ਵਿੱਚ **ਇੱਕ ਵਰਗ (class)**] ਆਖਦੇ ਹਨ।

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਸੰਖਿਆ 10 ਦੋਨੋਂ ਵਰਗਾਂ 0–10 ਅਤੇ 10–20 ਵਿੱਚ ਮੌਜੂਦ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, 20 ਦੋਨੋਂ ਵਰਗਾਂ 10–20 ਅਤੇ 20–30 ਵਿੱਚ ਮੌਜੂਦ ਹੈ। ਪਰ ਇੱਕ ਅੰਕੜਾ (10 ਜਾਂ 20) ਦੋ ਵਰਗਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਮੇਂ ਮੌਜੂਦ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ। ਇਸ ਤੋਂ ਬਚਣ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਇਕ ਧਾਰਨਾ ਬਣਾ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਾਂਝੇ ਅੰਕੜੇ ਦੀ ਉਪਰਲੇ ਵਰਗ ਵਿੱਚ ਗਿਣਤੀ ਕੀਤੀ ਜਾਵੇਗੀ। ਜਿਵੇਂ ਕਿ 10 ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ 10–20 ਵਿੱਚ ਗਿਣਿਆ ਜਾਵੇਗਾ (0–10 ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ) ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, 20 ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ 20–30 ਵਿੱਚ ਗਿਣਿਆ ਜਾਵੇਗਾ (10-20 ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ)। ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ 10-20 ਵਿੱਚ, 10 ਨੂੰ **ਹੇਠਲੀ ਵਰਗ ਸੀਮਾ (lower class limit)** ਆਖਦੇ ਹਨ ਅਤੇ 20 **ਉਪਰਲੀ ਜਾਂ ਉੱਚ ਵਰਗ ਸੀਮਾ (Upper class limit)** ਹੈ ਅਤੇ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ 20–30 ਵਿੱਚ 20 ਹੇਠਲੀ ਵਰਗ ਸੀਮਾ ਹੈ ਅਤੇ 30 ਉੱਪਰਲੀ ਵਰਗ ਸੀਮਾ ਹੈ। ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲਾਂ 0–10, 10–20, 20–30 ਆਦਿ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਦੀ ਉੱਚ ਵਰਗ ਸੀਮਾ ਅਤੇ ਹੇਠਲੀ ਵਰਗ ਸੀਮਾ ਦਾ ਅੰਤਰ ਬਰਾਬਰ ਹੈ (ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ 10)। ਉਪਰਲੀ (ਜਾਂ ਉੱਚ) ਵਰਗ ਸੀਮਾ ਅਤੇ ਹੇਠਲੀ ਵਰਗ ਸੀਮਾ ਵਿੱਚ ਇਸ ਅੰਤਰ ਨੂੰ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਦੀ **ਚੌੜਾਈ (width)** ਜਾਂ ਮਾਪ (size) ਆਖਦੇ ਹਨ।

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

1. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਸਾਰਣੀ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰੋ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਉੱਤਰ ਦਿਓ :

ਸਾਰਣੀ 5.3

ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ (ਰੁਪਏ ਵਿੱਚ ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਆਮਦਨ)	ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ (ਮਜ਼ਦੂਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ)
100-125	45
125-150	25
150-175	55
175-200	125
200-225	140
225-250	55
250-275	35
275-300	50
300-325	20
ਜੋੜ	**550**

(i) ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਦਾ ਮਾਪ ਕੀ ਹੈ ?

(ii) ਕਿਸ ਵਰਗ ਦੀ ਸਭ ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਹੈ ?

(iii) ਕਿਸ ਵਰਗ ਦੀ ਸਭ ਤੋਂ ਘੱਟ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਹੈ ?

(iv) ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ 250-275 ਦੀ ਉੱਚ ਸੀਮਾ ਕੀ ਹੈ ?

(iv) ਕਿਹੜੇ ਦੋ ਵਰਗਾਂ ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਇੱਕ ਹੀ ਹੈ ?

2. ਅੰਤਰਾਲਾਂ 30-35, 35-40 ਆਦਿ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਇੱਕ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ 20 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਭਾਰ (Kg ਵਿੱਚ) ਦੇ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਇੱਕ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਸਾਰਣੀ ਬਣਾਉ।

40, 38, 33, 48, 60, 53, 31, 46, 34, 36, 49, 41, 55, 49, 65, 42, 44, 47, 38, 39

5.3.1. ਬਾਰ ਇੱਕ ਵੱਖਰੇ ਢੰਗ ਦੇ ਨਾਲ

ਆਉ, 60 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਗਣਿਤ ਟੈਸਟ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਗਏ ਅੰਕਾਂ ਦੇ ਵਰਗੀਕਰਨ ਕੀਤੇ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ 'ਤੇ ਦੁਬਾਰਾ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ (ਸਾਰਣੀ 5.4)।

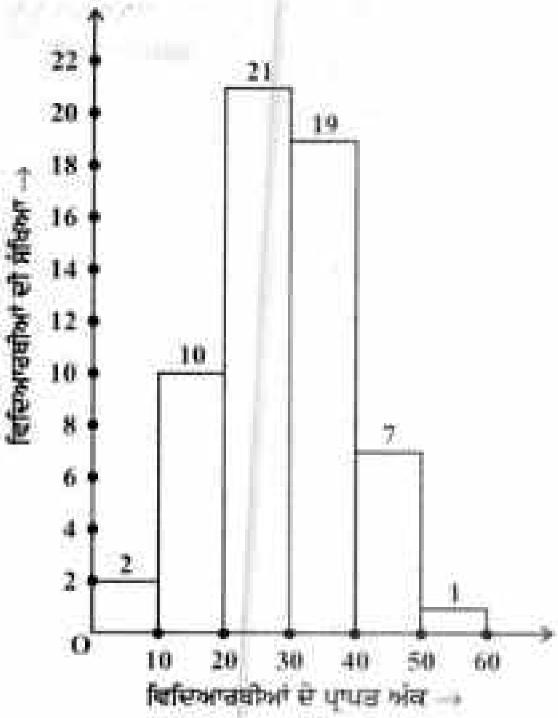
ਸਾਰਣੀ 5.4

ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ	ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ
0-10	2
10-20	10
20-30	21
30-40	19
40-50	7
50-60	1
ਜੋੜ	**60**

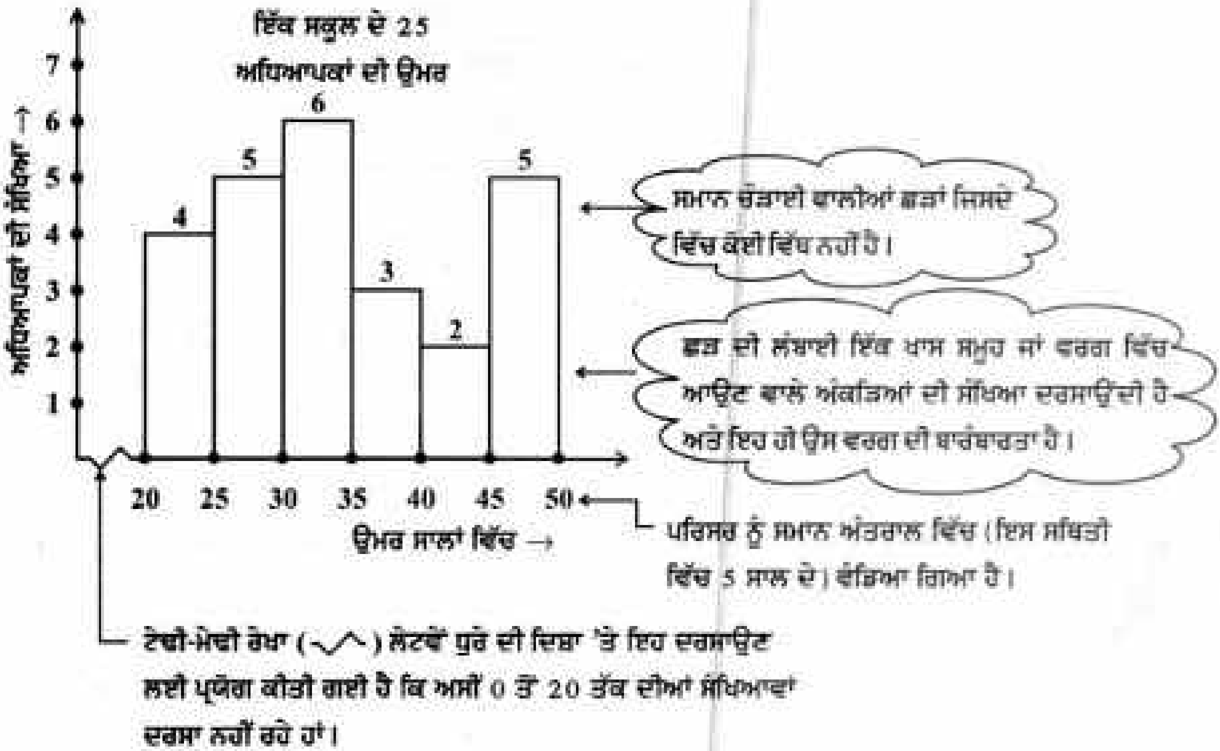
ਉਪਰੋਕਤ ਨੂੰ ਨਾਲ ਦਿੱਤੇ ਗਰਾਫ਼ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। (ਚਿੱਤਰ 5.1)।

ਕੀ ਇਹ ਗਰਾਫ਼ ਉਹਨਾਂ ਬਾਰ ਗਰਾਫ਼ਾਂ ਨਾਲੋਂ ਕਿਸੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵੱਖਰਾ ਹੈ ਜੋ ਤੁਸੀਂ ਜਮਾਤ VII ਵਿੱਚ ਖਿੱਚੇ ਸਨ ? ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਲੇਟਵੇਂ ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੇ ਗੁੱਟਾਂ (ਜਾਂ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲਾਂ) ਨੂੰ ਅੰਕਿਤ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਛੜ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ, ਇੱਥੇ ਛੜਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਵਿੱਥ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਵਿੱਥ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਗਰਾਫ਼ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉਣ ਨੂੰ **ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ (histogram)** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਾ ਗਰਾਫ਼ ਇੱਕ ਹੋਰ ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ ਹੈ। (ਚਿੱਤਰ 5.2) :



ਚਿੱਤਰ 5.1



ਚਿੱਤਰ 5.2

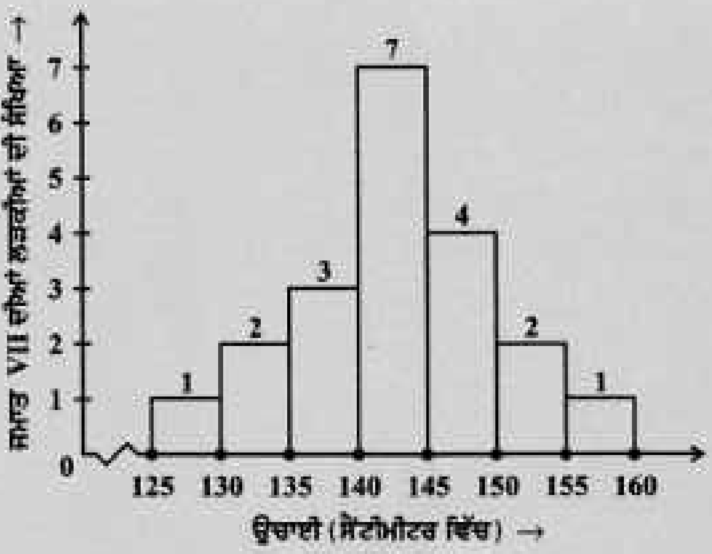
ਇਸ ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ ਦੇ ਛੜਾਂ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਉੱਤਰ ਦੇ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :

(i) ਕਿੰਨੇ ਅਧਿਆਪਕਾਂ ਦੀ ਉਮਰ 45 ਸਾਲ ਹੈ ਜਾਂ ਉਸ ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਹੈ ਪਰ 50 ਸਾਲ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ ?

(ii) 35 ਸਾਲ ਤੋਂ ਘੱਟ ਉਮਰ ਵਾਲੇ ਅਧਿਆਪਕਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਕਿੰਨੀ ਹੈ ?

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

1. ਇੱਕ ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ (ਚਿੱਤਰ 5.3) ਨੂੰ ਦੇਖੋ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਉੱਤਰ ਦਿਓ:



ਚਿੱਤਰ 5.3

(i) ਇਸ ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ ਦੁਆਰਾ ਕੀ ਸੂਚਨਾ ਦਿੱਤੀ ਜਾ ਰਹੀ ਹੈ ?

(ii) ਕਿਸ ਵਰਗ ਵਿੱਚ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਲੜਕੀਆਂ ਹਨ ?

(iii) ਕਿੰਨੀਆਂ ਲੜਕੀਆਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 145 cm ਜਾਂ ਉਸ ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਹੈ ?

(iv) ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਲੜਕੀਆਂ ਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਤਿੰਨ ਸ਼੍ਰੇਣੀਆਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡੀਏ, ਤਾਂ ਹਰੇਕ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੀਆਂ ਲੜਕੀਆਂ ਹੋਣਗੀਆਂ ?

150 cm ਜਾਂ ਉਸ ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ — ਗੁੱਟ A

140 cm ਜਾਂ ਉਸ ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਪਰ 150 cm ਤੋਂ ਘੱਟ — ਗੁੱਟ B

140 cm ਤੋਂ ਘੱਟ — ਗੁੱਟ C

ਅਭਿਆਸ 5.1

1. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਆਇਤਾਕਾਰ ਚਿੱਤਰ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰੋਗੇ ?
   (a) ਇੱਕ ਡਾਕੀਏ ਦੇ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਖੇਤਰਾਂ ਦੀਆਂ ਚਿੱਠੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ।
   (b) ਕਿਸੇ ਖੇਡ ਮੁਕਾਬਲੇ ਵਿੱਚ ਹਿੱਸਾ ਲੈਣ ਵਾਲੇ ਖਿਡਾਰੀਆਂ ਦੀਆਂ ਉਚਾਈਆਂ।
   (c) 5 ਕੰਪਨੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਬਣਾਈਆਂ ਕੈਸਟਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ।
   (d) ਕਿਸੇ ਸਟੇਸ਼ਨ 'ਤੇ ਸਵੇਰੇ 7 ਵਜੇ ਤੋਂ ਸ਼ਾਮ 7 ਵਜੇ ਤੱਕ ਰੇਲਗੱਡੀਆਂ ਵਿੱਚ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਯਾਤਰੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ।

   ਹਰੇਕ ਦੇ ਲਈ, ਕਾਰਨ ਵੀ ਦੱਸੋ।

2. ਕਿਸੇ ਡਿਪਾਰਟਮੈਂਟਲ ਸਟੋਰ 'ਤੇ ਖਰੀਦਦਾਰੀ ਕਰਨ ਆਏ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਨੂੰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਅੰਕਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ : ਪੁਰਸ਼ (M) ਔਰਤ (W), ਲੜਕਾ (B) ਜਾਂ ਲੜਕੀਆਂ (G)। ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀ ਸੂਚੀ

ਉਹਨਾਂ ਖਰੀਦਦਾਰਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਜੋ ਕਿ ਸਵੇਰ ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਘੰਟੇ ਵਿੱਚ ਆਏ ਹਨ :

W W W G B W W M G G M M W W W W G B M W B G G M W W M M W W
W M W B W G M W W W W G W M M W W M W G W M G W M M B G G W

ਮਿਲਾਨ ਚਿੰਨ੍ਹਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਇੱਕ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਸਾਰਣੀ ਬਣਾਉ। ਇਸ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਲਈ ਇੱਕ ਛੜ ਗਰਾਫ਼ ਖਿੱਚੋ।

3. ਕਿਸੇ ਫੈਕਟਰੀ ਦੇ 30 ਮਜ਼ਦੂਰਾਂ ਦੀ ਹਫ਼ਤੇ ਦੀ ਆਮਦਨ (ਰੁਪਏ ਵਿੱਚ) ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀ ਹੈ :

830, 835, 890, 810, 835, 836, 869, 845, 898, 890, 820, 860, 832, 833, 855, 845, 804, 808, 812, 840, 885, 835, 835, 836, 878, 840, 868, 890, 806, 840

ਮਿਲਾਣ ਚਿੰਨ੍ਹਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਅੰਤਰਾਲਾਂ 800–810, 810–820 ਆਦਿ ਵਾਲੀ ਇੱਕ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਸਾਰਣੀ ਬਣਾਉ :

4. ਪ੍ਰਸ਼ਨ 3 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸਾਰਣੀ ਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ ਬਣਾਉ ਅਤੇ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਉੱਤਰ ਦਿਓ।

(i) ਕਿਸ ਗੁੱਟ ਵਿੱਚ ਮਜ਼ਦੂਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਸਭ ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਹੈ ?

(ii) ਕਿੰਨੇ ਮਜ਼ਦੂਰ ₹ 850 ਜਾਂ ਉਸ ਤੋਂ ਵੱਧ ਕਮਾਉਂਦੇ ਹਨ ?

(iii) ਕਿੰਨੇ ਮਜ਼ਦੂਰ ₹ 850 ਤੋਂ ਘੱਟ ਕਮਾਉਂਦੇ ਹਨ ?

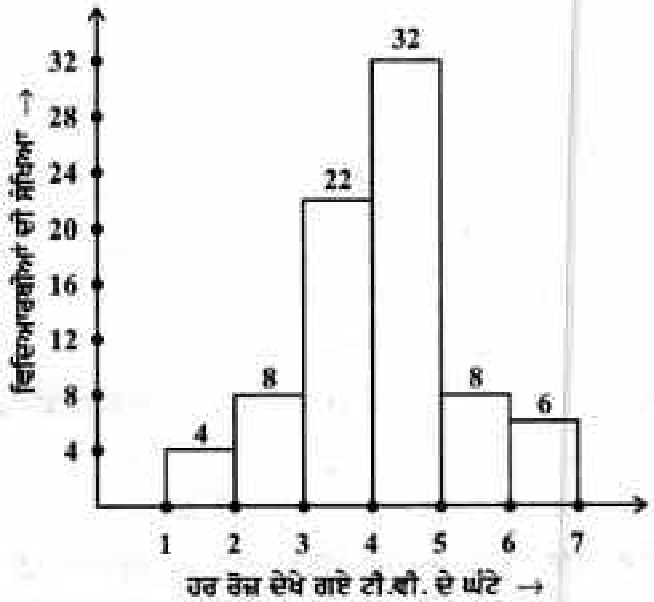
5. ਛੁੱਟੀਆਂ ਦੇ ਦਿਨਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਖਾਸ ਜਮਾਤ ਦੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਤੀ ਦਿਨ ਟੈਲੀਵਿਜ਼ਨ (ਟੀ.ਵੀ.) ਦੇਖਣ ਦੇ ਸਮੇਂ (ਘੰਟਿਆਂ ਵਿੱਚ), ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਗਰਾਫ਼ ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ :

ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਉੱਤਰ ਦਿਓ :

(i) ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੇ ਕਿੰਨੇ ਘੰਟੇ ਤੱਕ ਟੀ.ਵੀ. ਦੇਖਿਆ ?

(ii) 4 ਘੰਟਿਆਂ ਤੋਂ ਘੱਟ ਸਮੇਂ ਤੱਕ ਕਿੰਨੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੇ ਟੀ.ਵੀ. ਦੇਖਿਆ ?

(iii) ਕਿੰਨੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੇ ਟੀ.ਵੀ. ਦੇਖਣ ਵਿੱਚ 5 ਘੰਟੇ ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਸਮਾਂ ਬਿਤਾਇਆ ?

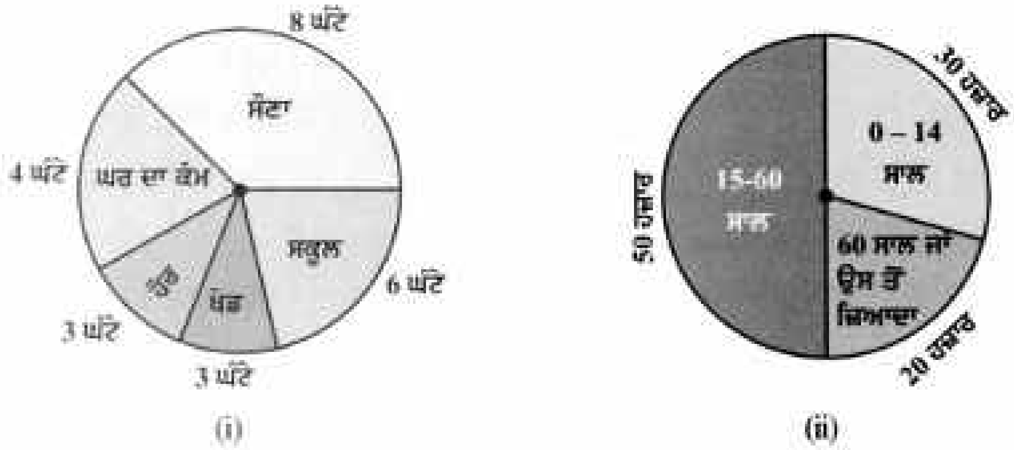


5.4 ਚੱਕਰ ਗਰਾਫ਼ ਜਾਂ ਪਾਈ ਚਾਰਟ

ਕੀ ਤੁਹਾਡੇ ਸਾਹਮਣੇ ਕਦੇ ਚੱਕਰ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅੰਕੜੇ ਦਰਸਾਏ ਗਏ ਹਨ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 5.4 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ ?

ਇੱਕ ਦਿਨ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਬੱਚੇ ਦੁਆਰਾ ਬਿਤਾਇਆ ਗਿਆ ਸਮਾਂ

ਇੱਕ ਕਸਬੇ ਵਿੱਚ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੇ ਉਮਰ ਗੁੱਟ



ਚਿੱਤਰ 5.4

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਰਸਾਉਣ ਨੂੰ **ਚੱਕਰ ਗਰਾਫ਼ (circle graphs)** ਆਖਦੇ ਹਨ। ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਗਰਾਫ਼ ਇੱਕ ਪੂਰਨ (whole) ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਸੰਬੰਧ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਪੂਰਨ ਚੱਕਰ ਨੂੰ ਚੱਕਰਖੰਡਾਂ (sectors) ਵਿੱਚ ਵੰਡਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਹਰੇਕ ਚੱਕਰਖੰਡ ਦਾ ਮਾਪ ਉਸਦੇ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਈ ਗਈ ਸੂਚਨਾ ਦੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ, ਉਪਰੋਕਤ ਗਰਾਫ਼ ਵਿੱਚ, ਸੌਣ ਵਿੱਚ ਬਿਤਾਏ ਗਏ ਘੰਟਿਆਂ ਵਿੱਚ ਚੱਕਰਖੰਡ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤਕ ਹਿੱਸਾ

$$= \frac{\text{ਸੌਣ ਦੇ ਘੰਟਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ}}{\text{ਪੂਰਾ ਦਿਨ}} = \frac{8 \text{ ਘੰਟੇ}}{24 \text{ ਘੰਟੇ}} = \frac{1}{3}$$

ਇਸ ਲਈ, ਇਸ ਚੱਕਰਖੰਡ ਨੂੰ ਪੂਰੇ ਚੱਕਰ ਦੇ $\frac{1}{3}$ ਭਾਗ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਖਿੱਚਿਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਸਕੂਲ ਵਿੱਚ ਬਿਤਾਏ ਘੰਟਿਆਂ ਦੇ ਚੱਕਰਖੰਡ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ ਹਿੱਸਾ

$$= \frac{\text{ਸਕੂਲ ਦੇ ਘੰਟਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ}}{\text{ਪੂਰਾ ਦਿਨ}} = \frac{6 \text{ ਘੰਟੇ}}{24 \text{ ਘੰਟੇ}} = \frac{1}{4}$$

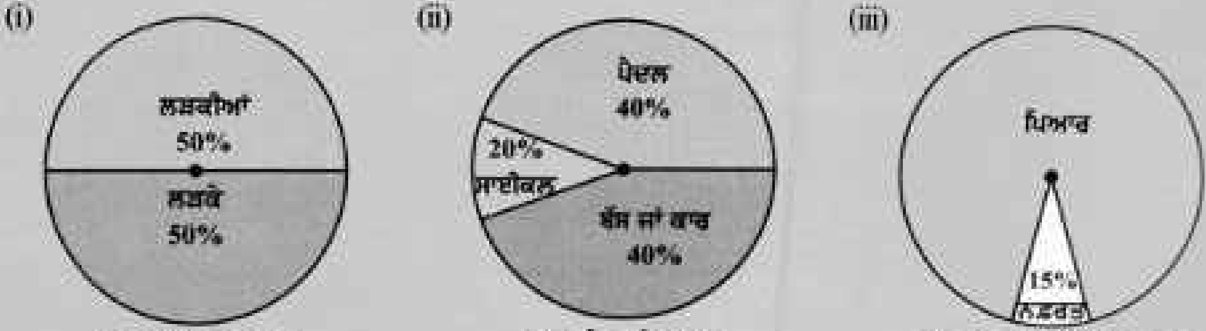
ਇਸ ਲਈ, ਇਸ ਚੱਕਰਖੰਡ ਨੂੰ ਪੂਰੇ ਚੱਕਰ ਦੇ $\frac{1}{4}$ ਭਾਗ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਖਿੱਚਿਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੋਰ ਚੱਕਰਖੰਡਾਂ ਦੇ ਮਾਪ ਪਤਾ ਕੀਤੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ।

ਸਾਰੀਆਂ ਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦੀਆਂ ਭਿੰਨਾਂ ਨੂੰ ਜੋੜੋ। ਕੀ ਤੁਹਾਨੂੰ ਜੋੜ ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ?

ਚੱਕਰ ਗਰਾਫ਼ ਨੂੰ ਪਾਈ ਚਾਰਟ (pie chart) ਵੀ ਆਖਦੇ ਹਨ।

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

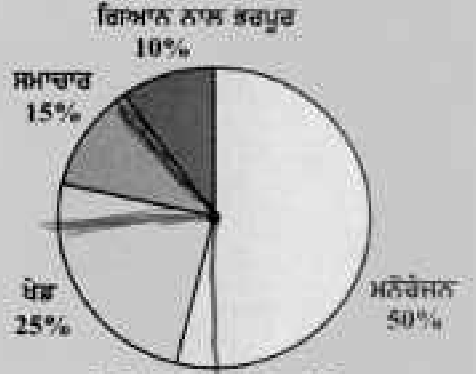
1. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਪਾਈ ਚਾਰਟਾਂ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ (ਚਿੱਤਰ 5.5) ਤੁਹਾਡੀ ਜਮਾਤ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਵੱਖ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਸੂਚਨਾ ਦਿੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਸੂਚਨਾ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਵਾਲਾ ਚੱਕਰ ਦਾ ਭਾਗ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਲੜਕੀਆਂ ਜਾਂ ਲੜਕੇ | ਸਕੂਲ ਦੇ ਲਈ ਵਾਹਨ | ਗਣਿਤ ਨਾਲ ਪਿਆਰ/ਨਫ਼ਰਤ

ਚਿੱਤਰ 5.5

2. ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਪਾਈ ਚਾਰਟ (ਚਿੱਤਰ 5.6) ਦੇ ਅਧਾਰ 'ਤੇ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਉੱਤਰ ਦਿਓ :
   (i) ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮ ਸਭ ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਦੇਖੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ ?
   (ii) ਕਿਹੜੇ ਦੋ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਾਂ ਨੂੰ ਦੇਖਣ ਵਾਲਿਆਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਗਿਣਤੀ ਖੇਡਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮ ਨੂੰ ਦੇਖਣ ਵਾਲਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ?



ਟੀ.ਵੀ. ਤੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਚੈਨਲ ਦੇਖਣ ਵਾਲਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ

ਚਿੱਤਰ 5.6

5.4.1. ਪਾਈ ਚਾਰਟ ਬਣਾਉਣਾ

ਕਿਸੀ ਸਕੂਲ ਦੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਪਸੰਦ ਕੀਤੇ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਆਈਸ ਕਰੀਮਾਂ ਦੀ ਖੁਸ਼ਬੂ ਜਾਂ ਸਵਾਦ (ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਵਿੱਚ) ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ :

ਖੁਸ਼ਬੂ	ਖੁਸ਼ਬੂ ਨੂੰ ਪਸੰਦ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦਾ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ
ਚਾਕਲੇਟ	50%
ਵਨੀਲਾ	25%
ਹੋਰ ਪ੍ਰਕਾਰ	25%

ਆਉ, ਇਹਨਾਂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਪਾਈ ਚਾਰਟ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਈਏ।

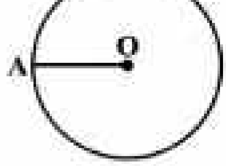
ਚੱਕਰ ਦੇ ਕੇਂਦਰ 'ਤੇ ਪੂਰਾ ਕੋਣ 360° ਹੈ। ਚੱਕਰਖੰਡਾਂ ਦੇ ਕੇਂਦਰੀ ਕੋਣ (central angles) 360° ਦੇ ਭਾਗ

ਜਾਂ ਕੋਈ ਭਿੰਨ ਹੋਣਗੇ। ਅਸੀਂ ਚੱਕਰਖੰਡਾਂ ਦੇ ਕੇਂਦਰੀ ਕੋਣਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਸਾਰਣੀ ਬਣਾਵਾਂਗੇ।

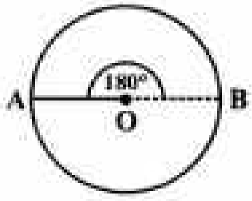
ਸਾਰਣੀ 5.5

ਖੁਸ਼ਬੂ	ਖੁਸ਼ਬੂ ਨੂੰ ਪਸੰਦ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦਾ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ	ਪੂਰਨ ਭਾਗ	360° ਭਾਗ
ਚਾਕਲੇਟ	50%	$\frac{50}{100}=\frac{1}{2}$	360° ਦਾ $\frac{1}{2}$ = 180°
ਵਨੀਲਾ	25%	$\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$	360° ਦਾ $\frac{1}{4}$ = 90°
ਹੋਰ ਪ੍ਰਕਾਰ	25%	$\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$	360° ਦਾ $\frac{1}{4}$ = 90°

1. ਕਿਸੇ ਢੁੱਕਵੇਂ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਦਾ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਖਿੱਚੋ। ਇਸਦਾ ਕੇਂਦਰ (O) ਅਤੇ ਇੱਕ ਅਰਧ ਵਿਆਸ (OA) ਅੰਕਿਤ ਕਰੋ।



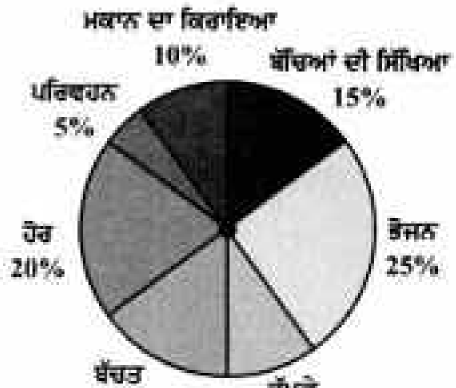
2. ਚਾਕਲੇਟ ਦੇ ਚੱਕਰਖੰਡ ਦਾ ਕੋਣ 180° ਹੈ। ਕੋਣਮਾਪਕ (ਡੀ) ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ ∠AOB=180° ਖਿੱਚੋ।



3. ਬਚੇ ਹੋਏ ਚੱਕਰਖੰਡਾਂ ਨੂੰ ਵੀ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅੰਕਿਤ ਕਰਦੇ ਰਹੋ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਨਾਲ ਦਿੱਤਾ ਪਾਈ ਚਾਰਟ (ਚਿੱਤਰ 5.7) ਇੱਕ ਮਹੀਨੇ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਪਰਿਵਾਰ ਦੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਮੱਦਾਂ ਵਿੱਚ ਖਰਚੇ ਅਤੇ ਉਸਦੀ ਬੱਚਤ (ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤਾਂ ਵਿੱਚ) ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।

(i) ਕਿਸ ਮੱਦ ਵਿੱਚ ਖਰਚ ਸਭ ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਸੀ ?
(ii) ਕਿਸ ਮੱਦ 'ਤੇ ਹੋਇਆ ਖਰਚ ਪਰਿਵਾਰ ਦੀ ਕੁੱਲ ਬੱਚਤ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।
(iii) ਜੇ ਪਰਿਵਾਰ ਦੀ ਮਹੀਨਾਵਾਰ ਬੱਚਤ ₹ 3000 ਹੈ, ਤਾਂ ਕੱਪੜਿਆਂ 'ਤੇ ਹੋਇਆ ਮਹੀਨੇ ਦਾ ਖਰਚ ਕੀ ਹੈ?



ਚਿੱਤਰ 5.7

ਹੱਲ :

(i) ਭੋਜਨ 'ਤੇ ਖਰਚ ਸਭ ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਹੈ।
(ii) ਬੱਚਿਆਂ ਦੀ ਸਿੱਖਿਆ 'ਤੇ ਹੋਇਆ ਖਰਚ (15%) ਪਰਿਵਾਰ ਦੀ ਕੁੱਲ ਬੱਚਤ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।
(iii) 15% ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ, ₹ 3000

ਇਸ ਲਈ 10% ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ, ₹ $\frac{3000}{15} \times 10$ = ₹ 2000

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਇੱਕ ਖਾਸ ਦਿਨ ਕਿਸੇ ਬੇਕਰੀ ਦੀ ਦੁਕਾਨ ਵਿੱਚ ਹੋਈ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਵਸਤੂਆਂ ਦੀ ਵਿਕਰੀ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ) ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹੈ :

ਆਮ ਬਰੈੱਡ	:	320
ਫਰੂਟ ਬਰੈੱਡ	:	80
ਕੇਕ ਅਤੇ ਪੇਸਟਰੀ	:	160
ਬਿਸਕੁਟ	:	120
ਹੋਰ	:	40
ਕੁੱਲ	:	**720**

ਇਹਨਾਂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਇੱਕ ਪਾਈ ਚਾਰਟ ਬਣਾਉ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਹਰੇਕ ਚੱਕਰਖੰਡ ਦਾ ਕੇਂਦਰੀ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇੱਥੇ ਕੁੱਲ ਵਿਕਰੀ ₹ 720 ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ :

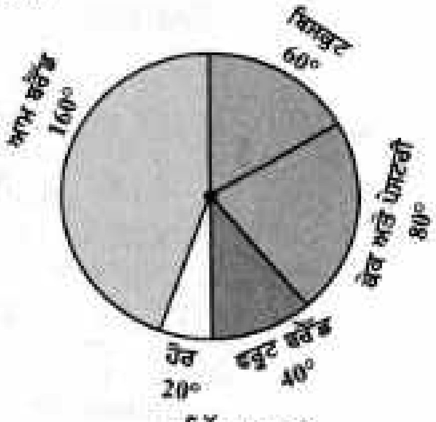
ਵਸਤੂ	ਵਿਕਰੀ (₹ ਵਿੱਚ)	ਪੂਰਨ ਦਾ ਭਾਗ	ਕੇਂਦਰੀ ਕੋਣ
ਆਮ ਬਰੈੱਡ	320	$\frac{320}{720} = \frac{4}{9}$	$\frac{4}{9} \times 360° = 160°$
ਬਿਸਕੁਟ	120	$\frac{120}{720} = \frac{1}{6}$	$\frac{1}{6} \times 360° = 60°$
ਕੇਕ ਅਤੇ ਪੇਸਟੀ	160	$\frac{160}{720} = \frac{2}{9}$	$\frac{2}{9} \times 360° = 80°$
ਫਰੂਟ ਬਰੈੱਡ	80	$\frac{80}{720} = \frac{1}{9}$	$\frac{1}{9} \times 360° = 40°$
ਹੋਰ	40	$\frac{40}{720} = \frac{1}{18}$	$\frac{1}{18} \times 360° = 20°$

ਉਪਰੋਕਤ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ, ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਪਾਈ ਚਾਰਟ ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। (ਚਿੱਤਰ 5.8)।

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੇ ਲਈ ਪਾਈ ਚਾਰਟ ਬਣਾਓ :
ਇੱਕ ਬੱਚੇ ਦੁਆਰਾ ਇੱਕ ਦਿਨ ਵਿੱਚ ਬਤੀਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਸਮਾਂ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ :

ਸੌਣਾ	—	8 ਘੰਟੇ
ਸਕੂਲ	—	6 ਘੰਟੇ
ਘਰ ਦਾ ਕੰਮ	—	4 ਘੰਟੇ
ਖੇਡ	—	4 ਘੰਟੇ
ਹੋਰ	—	2 ਘੰਟੇ



ਚਿੱਤਰ 5.8

ਸੋਚੋ, ਚਰਚਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਲਿਖੋ

ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਦੇ ਲਈ, ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਗਰਾਫ਼ ਉੱਚਿਤ ਰਹੇਗਾ ?

1. ਕਿਸੇ ਰਾਜ ਵਿੱਚ ਅਨਾਜ ਦਾ ਉਤਪਾਦਨ

ਸਾਲ	2001	2002	2003	2004	2005	2006
ਉਤਪਾਦਨ (ਲੱਖ ਟਨਾਂ ਵਿੱਚ)	60	50	70	55	80	85

2. ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੇ ਇੱਕ ਗੁੱਟ ਦੇ ਭੋਜਨ ਦੀ ਪਸੰਦ :

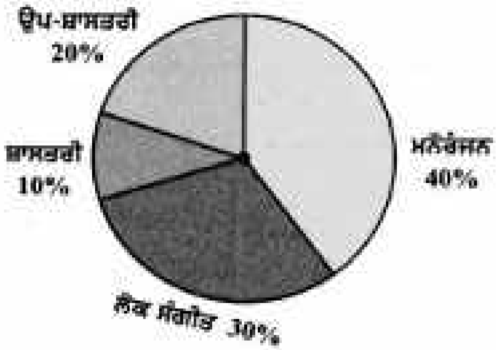
ਮਨਪਸੰਦ ਭੋਜਨ	ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ
ਉੱਤਰ ਭਾਰਤੀ	30
ਦੱਖਣੀ ਭਾਰਤੀ	40
ਚਾਈਨੀਜ਼	25
ਹੋਰ	25
ਜੋੜ	**120**

3. ਕਿਸੇ ਫੈਟਕਰੀ ਦੇ ਮਜ਼ਦੂਰਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਗੁੱਟ ਦੀ ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਆਮਦਨ

ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਆਮਦਨ (₹ ਵਿੱਚ)	ਮਜ਼ਦੂਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ (ਇੱਕ ਫੈਕਟਰੀ ਵਿੱਚ)
75-100	45
100-125	35
125-150	55
150-175	30
175-200	50
200-225	125
225-250	140
ਜੋੜ	**480**

ਅਭਿਆਸ 5.2

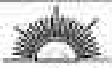
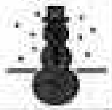
1. ਕਿਸੇ ਸ਼ਹਿਰ ਦੇ ਜਵਾਨ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੇ ਇੱਕ ਗੁੱਟ ਦਾ ਇਹ ਜਾਣਨ ਲਈ ਸਰਵੇ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਕਿ ਉਹ ਕਿਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦਾ ਸੰਗੀਤ ਪਸੰਦ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਨਾਲ ਦਿੱਤੇ ਪਾਈ ਚਾਰਟ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਪਾਈ ਚਾਰਟ ਵਿੱਚ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਉੱਤਰ ਦਿਓ:
   (i) ਜੇ 20 ਵਿਅਕਤੀ ਸ਼ਾਸਤਰੀ ਸੰਗੀਤ ਪਸੰਦ ਕਰਦੇ ਹਨ, ਤਾਂ ਕੁੱਲ ਕਿੰਨੇ ਜਵਾਨ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦਾ ਸਰਵੇ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ?



(ii) ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਸੰਗੀਤ ਸਭ ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਪਸੰਦ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ?

(iii) ਜੇ ਕੋਈ ਕੈਸਟ ਕੰਪਨੀ 1000 ਸੀ.ਡੀ. (C.D.) ਬਣਾਵੇ, ਤਾਂ ਉਹ ਹਰੇਕ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਕਿੰਨੀਆਂ ਸੀ.ਡੀ. ਬਣਾਵੇਗੀ?

2. 360 ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੇ ਇੱਕ ਗੁੱਟ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਰੁੱਤਾਂ—ਵਰਖਾ, ਸਰਦੀ ਅਤੇ ਗਰਮੀ ਵਿੱਚ ਆਪਣੀ ਮਨਪਸੰਦ ਰੁੱਤ ਦੇ ਲਈ ਵੋਟਾਂ ਕਰਨ ਨੂੰ ਕਿਹਾ ਗਿਆ। ਇਸ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਨਾਲ ਦਿੱਤੇ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ :

ਰੁੱਤ		ਵੋਟਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ
ਗਰਮੀ		90
ਵਰਖਾ		120
ਸਰਦੀ		150

(i) ਕਿਸ ਰੁੱਤ ਨੂੰ ਸਭ ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਵੋਟ ਮਿਲੇ ?

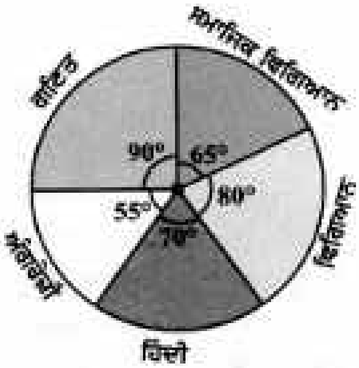
(ii) ਹਰੇਕ ਚੱਕਰਖੰਡ ਦਾ ਕੇਂਦਰੀ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(iii) ਇਸ ਸੂਚਨਾ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਦੇ ਲਈ, ਇੱਕ ਪਾਈ ਚਾਰਟ ਬਣਾਉ।

3. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀ ਸੂਚਨਾ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਪਾਈ ਚਾਰਟ ਬਣਾਉ।
ਇਹ ਸਾਰਣੀ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਲਈ ਇੱਕ ਗੁੱਟ ਦੁਆਰਾ ਪਸੰਦ ਕੀਤੇ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਰੰਗਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ।

ਰੰਗ	ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ
ਨੀਲਾ	18
ਹਰਾ	9
ਲਾਲ	6
ਪੀਲਾ	3
ਜੋੜ	**36**

4. ਨਾਲ ਦਿੱਤਾ ਪਾਈ ਚਾਰਟ ਇੱਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦੁਆਰਾ ਕਿਸੇ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਵਿੱਚ ਹਿੰਦੀ, ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ, ਗਣਿਤ, ਸਮਾਜਿਕ ਵਿਗਿਆਨ ਅਤੇ ਵਿਗਿਆਨ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਗਏ ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਜੇ ਉਸ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਗਏ ਕੁੱਲ ਅੰਕ 540 ਹਨ, ਤਾਂ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਉੱਤਰ ਦਿਓ :



(i) ਕਿਸ ਵਿਸ਼ੇ ਵਿੱਚ ਉਸ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਨੇ 105 ਅੰਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ?
(**ਸੰਕੇਤ** : 540 ਅੰਕਾਂ ਦੇ ਲਈ ਕੇਂਦਰੀ ਕੋਣ 360° ਹੈ। ਇਸ ਲਈ 105 ਅੰਕਾਂ ਦੇ ਲਈ ਕੇਂਦਰੀ ਕੋਣ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ?)

(ii) ਉਸ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਨੇ ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਹਿੰਦੀ ਨਾਲੋਂ ਕਿੰਨੇ ਅੰਕ ਵੱਧ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ?

(iii) ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ ਕਿ ਸਮਾਜਿਕ ਵਿਗਿਆਨ ਅਤੇ ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਗਏ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਵਿਗਿਆਨ ਅਤੇ ਹਿੰਦੀ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਗਏ ਅੰਕਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਹੈ? (**ਸੰਕੇਤ** : ਸਿਰਫ਼ ਕੇਂਦਰੀ ਕੋਣਾਂ 'ਤੇ ਧਿਆਨ ਦਿਓ।)

5. ਕਿਸੇ ਹੋਸਟਲ ਵਿੱਚ, ਵੱਖ-ਵੱਖ ਭਾਸ਼ਾਵਾਂ ਬੋਲਣ ਵਾਲੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਪਾਈ ਚਾਰਟ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਓ।

ਭਾਸ਼ਾ	ਹਿੰਦੀ	ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ	ਮਰਾਠੀ	ਤਾਮਿਲ	ਬੰਗਾਲੀ	ਜੋੜ
ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ	40	12	9	7	4	72

5.5 ਸੰਯੋਗ ਅਤੇ ਸੰਭਾਵਨਾ

ਕਦੇ-ਕਦੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਵਰਖਾ ਰੁੱਤ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਹਰੇਕ ਦਿਨ ਬਰਸਾਤੀ ਲੈ ਕੇ ਬਾਹਰ ਨਿਕਲਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਕਈ ਦਿਨਾਂ ਤੱਕ ਕੋਈ ਵਰਖਾ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ ਸੰਯੋਗ ਨਾਲ ਇੱਕ ਦਿਨ ਤੁਸੀਂ ਬਰਸਾਤੀ ਲੈ ਕੇ ਜਾਣਾ ਭੁੱਲ ਜਾਂਦੇ ਹੋ ਅਤੇ ਉਸ ਦਿਨ ਭਾਰੀ ਵਰਖਾ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

ਕਦੇ-ਕਦੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਇੱਕ ਟੈਸਟ ਦੇ ਲਈ 5 ਵਿੱਚੋਂ 4 ਅਧਿਆਇ ਚੰਗੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਤਿਆਰ ਕਰ ਲੈਂਦਾ ਹੈ। ਪਰ ਇੱਕ ਵੱਡਾ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਉਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਪੁੱਛ ਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਿਸਨੂੰ ਉਸਨੇ ਚੰਗੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਤਿਆਰ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹਰੇਕ ਵਿਅਕਤੀ ਜਾਣਦਾ ਹੈ ਕਿ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੇਲਗੱਡੀ ਸਹੀ ਸਮੇਂ 'ਤੇ ਚਲਦੀ ਹੈ, ਪਰ ਜਿਸ ਦਿਨ ਤੁਸੀਂ ਸਹੀ ਸਮੇਂ 'ਤੇ ਪਹੁੰਚਦੇ ਹੋ, ਉਸ ਦਿਨ ਉਹ ਲੇਟ ਆਉਂਦੀ ਹੈ।

ਤੁਹਾਨੂੰ ਉਪਰੋਕਤ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀਆਂ ਅਨੇਕ ਸਥਿਤੀਆਂ ਦਾ ਸਾਹਮਣਾ ਕਰਨਾ ਪੈਂਦਾ ਹੈ ਜਿੱਥੇ ਤੁਸੀਂ ਸੰਯੋਗ (chance) ਦਾ ਸਹਾਰਾ ਲੈ ਕੇ ਕੰਮ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹੋ। ਪਰ ਉਹ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਤੁਸੀਂ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹੋ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦੇ ਸਕਦੇ ਹੋ ? ਇਹ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਹਨ ਜਿੱਥੇ ਕਿਸੇ ਗੱਲ ਦੇ ਹੋਣ ਜਾਂ ਨਾ ਹੋਣ ਦੇ ਸੰਯੋਗ ਬਰਾਬਰ (ਸਮਾਨ) ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਇੱਕ ਰੇਲਗੱਡੀ ਦੇ ਸਮੇਂ ਤੇ ਆਉਣ 'ਤੇ ਜਾਂ ਨਾ ਆਉਣ ਦੇ ਸੰਯੋਗ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਜਦੋਂ ਤੁਸੀਂ ਕੋਈ ਟਿਕਟ ਖਰੀਦਦੇ ਹੋ ਅਤੇ ਜੇ ਇਹ ਵੇਟਿੰਗ ਸੂਚੀ ਵਿੱਚ ਹੈ ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਹੀ ਸੰਯੋਗ ਦਾ ਸਹਾਰਾ ਲੈਂਦੇ ਹੋ। ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਆਸ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਜਦੋਂ ਤੁਸੀਂ ਯਾਤਰਾ ਕਰੋਗੇ ਤਾਂ ਸੰਭਵ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਟਿਕਟ ਤੇ ਤੁਹਾਡੀ ਸੀਟ ਰਾਖਵੀਂ ਹੋ ਜਾਵੇਗੀ। ਪਰ ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗਾਂ (experiments) 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੇ ਵਾਪਰਨ ਦੇ ਸੰਯੋਗ ਬਰਾਬਰ ਹਨ।

5.5.1 ਕੋਈ ਨਤੀਜਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ

ਤੁਸੀਂ ਸੰਭਵ ਤੌਰ ਤੇ ਇਹ ਦੇਖਿਆ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਇੱਕ ਕ੍ਰਿਕੇਟ ਮੈਚ ਦੇ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋਣ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ, ਦੋਨੋਂ ਟੀਮਾਂ ਦੇ ਕਪਤਾਨ ਬਾਹਰ ਜਾ ਕੇ ਇਹ ਨਿਰਣਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਸਿੱਕਾ (coin) ਸੁੱਟਦੇ (toss) ਹਨ ਕਿ ਕਿਹੜੀ ਟੀਮ ਪਹਿਲਾਂ ਬੱਲੇਬਾਜੀ ਕਰੇਗੀ।

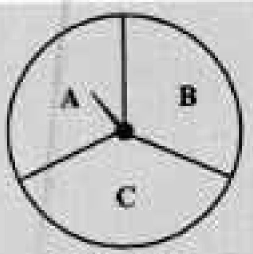
ਜਦ ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਤੁਹਾਨੂੰ ਕੀ ਸੰਭਵ ਨਤੀਜੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ? ਚਿੱਤ (Head) ਜਾਂ ਪਟ (Tail)।

ਕਲਪਨਾ ਕਰੋ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਟੀਮ ਦੇ ਕਪਤਾਨ ਹੋ ਅਤੇ ਤੁਹਾਡਾ ਮਿੱਤਰ ਦੂਸਰੀ ਟੀਮ ਦਾ ਕਪਤਾਨ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਸਿੱਕਾ ਸੁੱਟਦੇ ਹੋ ਅਤੇ ਆਪਣੇ ਮਿੱਤਰ ਨੂੰ ਚਿਤ ਜਾਂ ਪਟ ਬੋਲਣ ਨੂੰ ਕਹਿੰਦੇ ਹੋ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਉਛਾਲ ਦੇ ਨਤੀਜੇ 'ਤੇ ਕੋਈ ਕੰਟਰੋਲ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ ? ਕੀ ਤੁਹਾਨੂੰ ਚਿਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜੇ ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹੋ ? ਜਾਂ ਕੀ ਤੁਹਾਨੂੰ ਪਟ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜੇ ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹੋ ? ਨਹੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸੰਭਵ ਨਹੀਂ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਇੱਕ **ਬੇਤਰਤੀਬ ਜਾਂ ਬੇਤਰਤੀਬ ਪ੍ਰਯੋਗ (random experiment)** ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਚਿਤ ਅਤੇ ਪਟ ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਦੋ **ਨਤੀਜੇ (outcomes)** ਹਨ।

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

1. ਜੇ ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਸਕੂਟਰ ਚਲਾਉਣਾ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰੋ, ਤਾਂ ਸੰਭਵ ਨਤੀਜੇ ਕੀ ਹਨ ?
2. ਜਦੋਂ ਇੱਕ ਪਾਸੇ (die) ਨੂੰ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਸੰਭਵ ਛੇ ਨਤੀਜੇ ਕੀ ਹਨ ?

3. ਜਦੋਂ ਤੁਸੀਂ ਪਹੀਏ ਨੂੰ ਘੁਮਾਉਗੇ ਤਾਂ ਸੰਭਵ ਨਤੀਜੇ ਕੀ ਹੋਣਗੇ (ਚਿੱਤਰ 5.9)? ਇਸਦੀ ਸੂਚੀ ਬਣਾਉ। (ਚਿੱਤਰ 5.9)
(ਇੱਥੇ ਨਤੀਜੇ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ਉਹ ਚੱਕਰਖੰਡ ਜਿਸ 'ਤੇ ਸੂਚਕ (pointer) ਘੁਮਾਉਣ 'ਤੇ ਰੁਕੇਗਾ।



ਚਿੱਤਰ 5.9

4. ਤੁਹਾਡੇ ਕੋਲ ਇੱਕ ਥੈਲਾ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸ ਵਿੱਚ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਰੰਗਾਂ ਦੀਆਂ ਪੰਜ ਇੱਕੋ-ਜਿਹੀਆਂ ਗੇਂਦਾ ਹਨ (ਚਿੱਤਰ 5.10)। ਤੁਸੀਂ ਬਿਨ੍ਹਾਂ ਦੇਖੇ ਇਸ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਗੇਂਦ ਕੱਢ ਲੈਂਦੇ ਹੋ। ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣ ਵਾਲੇ ਨਤੀਜਿਆਂ ਨੂੰ ਲਿਖੋ।

ਚਿੱਤਰ 5.10

ਸੋਚੋ, ਚਰਚਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਲਿਖੋ

ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਸੁੱਟਣ 'ਤੇ :

- ਕੀ ਪਹਿਲੇ ਖਿਡਾਰੀ ਦੇ 6 ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦਾ ਸੰਯੋਗ ਜ਼ਿਆਦਾ ਹੈ?
- ਕੀ ਉਸ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਖੇਡਣ ਵਾਲੇ ਖਿਡਾਰੀ ਦੇ 6 ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦਾ ਸੰਯੋਗ ਘੱਟ ਹੈ?
- ਕੀ ਉਸ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਖੇਡਣ ਵਾਲੇ ਖਿਡਾਰੀ ਦੇ 6 ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦਾ ਸੰਯੋਗ ਘੱਟ ਹੈ। ਕੀ ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਤੀਸਰੇ ਖਿਡਾਰੀ ਦੁਆਰਾ 6 ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦਾ ਕੋਈ ਸੰਯੋਗ ਨਹੀਂ ਹੈ?

5.5.2 ਸਮ ਸੰਭਾਵਿਤ ਨਤੀਜਾ

ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਅਨੇਕ ਵਾਰ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਜਿੰਨੀ ਵਾਰ ਚਿਤ ਜਾਂ ਪਟ ਆਉਂਦੇ ਹਨ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਲਿਖ ਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਆਉ ਆਪਣੀ ਨਤੀਜਾ ਸ਼ੀਟ (ਤਾਲਿਕਾ) ਨੂੰ ਦੇਖੋ, ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਸੁੱਟਣ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਵਿੱਚ ਵਾਧਾ ਕਰਦੇ ਜਾ ਰਹੇ ਹਾਂ :

ਸੁੱਟਣ ਦੀ ਗਿਣਤੀ	ਮਿਲਾਣ ਚਿੰਨ੍ਹ (H)	ਚਿਤ ਦੀ ਗਿਣਤੀ	ਮਿਲਾਣ ਚਿੰਨ੍ਹ (T)	ਪਟ ਦੀ ਗਿਣਤੀ
50	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 ||	27	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |||	23
60	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |||	28	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 ||	32
70	...	33	...	37
80	...	38	...	42
90	...	44	...	46
100	...	48	...	52

ਧਿਆਨ ਰੱਖੋ ਕਿ ਜਦ ਸੁੱਟਣ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਜ਼ਿਆਦਾ ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਵਧਾਈ ਜਾਵੇ ਤਾਂ, ਤਦ ਚਿਤ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਅਤੇ ਪਟ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਨੇੜੇ ਆ ਜਾਂਦੇ ਹਨ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਦੇ ਨਾਲ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਜਦ ਇਸ ਨੂੰ ਇੱਕ ਵੱਡੀ ਗਿਣਤੀ ਵਿੱਚ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਛੇ ਨਤੀਜਿਆਂ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਲਗਭਗ ਬਰਾਬਰ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਨਤੀਜੇ ਬਰਾਬਰ ਸੰਭਾਵਿਤ (equally likely) ਹੈ। ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਸਾਰਿਆਂ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਨਤੀਜੇ ਦੇ ਆਉਣ ਦਾ ਸੰਯੋਗ (chance) ਇੱਕ ਹੀ ਹੈ।

5.5.3 ਸੰਯੋਗ ਨੂੰ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨਾਲ ਜੋੜਨਾ

ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਇੱਕ ਵਾਰ ਉਛਾਲਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਨਤੀਜਾ ਕੀ ਹੈ? ਇੱਥੇ ਕੇਵਲ ਦੋ ਨਤੀਜੇ ਹਨ—ਇੱਕ ਚਿਤ ਜਾਂ ਪਟ। ਦੋਨੋਂ ਹੀ ਨਤੀਜੇ ਬਰਾਬਰ ਸੰਭਾਵਿਤ (equally likely) ਹਨ। ਇੱਕ ਚਿਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ 2 ਨਤੀਜਿਆਂ ਵਿੱਚ 1, ਜਿਵੇਂ $\frac{1}{2}$ ਹੈ। ਦੂਸਰੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇੱਕ ਚਿਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ (probability) = $\frac{1}{2}$ ਹੈ। ਇੱਕ ਪਟ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ?

ਹੁਣ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਸੁੱਟਣ ਦੀ ਉਦਾਹਰਣ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ, ਜਿਸਦੇ ਤਲਾਂ (faces) 'ਤੇ 1, 2, 3, 4, 5, 6 (ਇੱਕ ਤਲ ਤੇ ਇੱਕ ਗਿਣਤੀ) ਅੰਕਿਤ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਇੱਕ ਵਾਰ ਸੁੱਟੋ, ਤਾਂ ਕੀ ਨਤੀਜਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗਾ?

ਨਤੀਜਾ ਹੈ ਕਿ : 1, 2, 3, 4, 5, 6 । ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ, ਇੱਥੇ ਛੇ ਬਰਾਬਰ ਸੰਭਾਵਿਤ ਨਤੀਜੇ ਹਨ।

ਨਤੀਜਾ 2 ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ?

ਇਥੇ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ : $\frac{1}{6}$ ← 2 ਦੇਣ ਵਾਲੇ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ
← ਬਰਾਬਰ ਸੰਭਾਵਿਤ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ

ਗਿਣਤੀ 5 ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ? ਗਿਣਤੀ 7 ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ? 1 ਤੋਂ 6 ਤੱਕ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ?

5.5.4 ਘਟਨਾਵਾਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਤੀਜਾ

ਇੱਕ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਹਰੇਕ ਨਤੀਜੇ ਜਾਂ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਨਾਲ ਇੱਕ **ਘਟਨਾ (event)** ਬਣਦੀ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ, ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਸੁੱਟਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ, ਇੱਕ ਚਿਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ ਇੱਕ ਘਟਨਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇੱਕ ਪਟ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ ਵੀ ਇੱਕ ਘਟਨਾ ਹੈ।

ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਸੁੱਟਣ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਨਤੀਜਿਆਂ 1, 2, 3, 4, 5 ਅਤੇ 6 ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਨਤੀਜਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ ਇੱਕ ਘਟਨਾ ਹੈ।

ਕੀ ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਗਿਣਤੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ ਇੱਕ ਘਟਨਾ ਹੈ ? ਕਿਉਂਕਿ ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਗਿਣਤੀ 2, 4 ਜਾਂ 6 ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਗਿਣਤੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ ਵੀ ਇੱਕ ਘਟਨਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੋਵੇਗੀ ?

ਇਹ ਹੈ: $\frac{3}{6}$ ← ਉਹ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਜੋ ਘਟਨਾ ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਨ
← ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਗਿਣਤੀ

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਇੱਕ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚ 4 ਲਾਲ ਗੇਂਦਾਂ ਅਤੇ 2 ਪੀਲੀਆਂ ਗੇਂਦਾਂ ਹਨ। (ਇਹ ਗੇਂਦਾਂ ਰੰਗ ਦੇ ਇਲਾਵਾ ਹਰ ਪਾਸੇ ਤੋਂ ਇੱਕ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸਮਰੂਪ (identical) ਹਨ।) ਥੈਲੇ ਦੇ ਅੰਦਰ ਦੇਖੇ ਬਿਨ੍ਹਾਂ ਇੱਕ ਗੇਂਦ ਕੱਢੋ। ਇੱਕ ਲਾਲ ਗੇਂਦ ਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ? ਕੀ ਇਹ ਇੱਕ ਪੀਲੀ ਗੇਂਦ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਤੋਂ ਜਿਆਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਘੱਟ ?

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ ਘਟਨਾ ਦੇ ਕੁੱਲ (4 + 2 =) 6 ਨਤੀਜੇ ਹਨ। ਲਾਲ ਗੇਂਦ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ 4 ਨਤੀਜੇ ਹਨ। (ਕਿਉਂ ?)

ਇਸ ਲਈ, ਲਾਲ ਗੇਂਦ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ ਹੈ।

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ, ਪੀਲੀ ਗੇਂਦ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ ਹੈ। (ਕਿਉਂ ?)

ਇਸ ਲਈ ਲਾਲ ਗੇਂਦ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪੀਲੀ ਗੇਂਦ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨਾਲੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਹੈ।

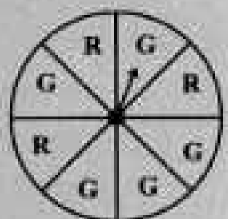
ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

ਮੰਨ ਲਵੋ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਪਹੀਏ ਨੂੰ ਘੁਮਾਉਂਦੇ ਹੋ (ਚਿੱਤਰ 5.11)।

(i) ਇਸ ਪਹੀਏ ਤੇ ਇੱਕ ਹਰਾ ਚੱਕਰਖੰਡ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੇ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਅਤੇ ਹਰਾ ਚੱਕਰਖੰਡ ਪ੍ਰਾਪਤ ਨਾ ਹੋਣ 'ਤੇ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਲਿਖੋ।

(ii) ਇੱਕ ਹਰਾ ਚੱਕਰਖੰਡ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(iii) ਇੱਕ ਹਰਾ ਚੱਕਰਖੰਡ ਪ੍ਰਾਪਤ ਨਾ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 5.11

5.5.5 ਅਸਲ ਜੀਵਨ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਸੰਯੋਗ ਅਤੇ ਸੰਭਾਵਨਾ

ਅਸੀਂ ਉਸ ਸੰਯੋਗ ਦੀ ਗੱਲ ਕੀਤੀ ਸੀ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਕੇਵਲ ਉਸ ਦਿਨ ਵਰਖਾ ਹੋਈ ਜਿਸ ਦਿਨ ਅਸੀਂ ਬਰਸਾਤੀ ਲੈ ਕੇ ਨਹੀਂ ਗਏ ਸੀ। ਤੁਸੀਂ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੇ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਸੰਯੋਗ ਦੇ ਬਾਰੇ ਕੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ ? ਕੀ ਇਹ ਵਰਖਾ ਰੁੱਤ ਵਿੱਚ 10 ਦਿਨ ਵਿੱਚੋਂ 1 ਦਿਨ ਹੋ ਸਕਦਾ ਸੀ।

ਤਾਂ ਵਰਖਾ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{1}{10}$ ਹੈ ਅਤੇ ਵਰਖਾ ਨਾ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{9}{10}$ ਹੈ।

(ਇਹ ਕਲਪਨਾ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਕਿ ਕਿਸੇ ਦਿਨ ਵਰਖਾ ਹੋਣਾ ਜਾਂ ਨਾ ਹੋਣਾ ਬਰਾਬਰ ਸੰਭਾਵਿਤ ਹੈ।)

ਅਸਲ ਜੀਵਨ ਦੀਆਂ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

1. ਇੱਕ ਵੱਡੇ ਗੁੱਟ ਦੀਆਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਨੂੰ ਉਸ ਗੁੱਟ ਦੇ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਛੋਟੇ ਭਾਗ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ, ਚੋਣਾਂ ਵੇਲੇ 'ਐਗਜਿਟ ਪੋਲ' (exit poll) ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਵਿੱਚ ਸੰਪੂਰਨ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਵੰਡੇ ਕੇਂਦਰਾਂ ਵਿੱਚੋਂ (ਬਿਨ੍ਹਾਂ ਕਿਸੇ ਤਰਤੀਬ ਦੇ) ਕੁਝ

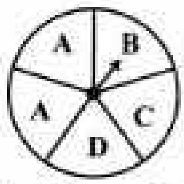
ਕੇਂਦਰ ਚੁਣ ਕੇ ਵੋਟਾਂ ਪਾਉਣ ਵਾਲੇ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਤੋਂ ਇਹ ਪੁੱਛਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਕਿਸ ਨੂੰ ਵੋਟ ਦਿੱਤਾ ਹੈ। ਇਸ ਨਾਲ ਹਰੇਕ ਉਮੀਦਵਾਰ ਦੇ ਜਿੱਤਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦਾ ਅਨੁਮਾਨ ਲੱਗ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਅਧਾਰ 'ਤੇ ਭਵਿੱਖਬਾਣੀਆਂ ਕੀਤੀਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ।

2. ਮੌਸਮ ਵਿਭਾਗ ਪਿਛਲੇ ਸਾਲਾਂ ਦੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੇ ਰੁਝਾਨ (ਰੁਖ) ਨੂੰ ਦੇਖ ਕੇ ਮੌਸਮ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਭਵਿੱਖਬਾਣੀ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 5.3

1. ਇਹਨਾਂ ਪ੍ਰਯੋਗਾਂ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਜੋ ਨਤੀਜਾ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ, ਉਹ ਲਿਖੋ :

(a) ਪਹੀਏ ਨੂੰ ਘੁਮਾਉਣਾ (b) ਦੋ ਸਿੱਕਿਆਂ ਨੂੰ ਇੱਕੋ ਵੇਲੇ ਸੁੱਟਣਾ



2. ਜਦੋਂ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਤਦ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਹਰੇਕ ਘਟਨਾ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣ ਵਾਲੇ ਨਤੀਜਿਆਂ ਨੂੰ ਲਿਖੋ :

(i) (a) ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ (b) ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ

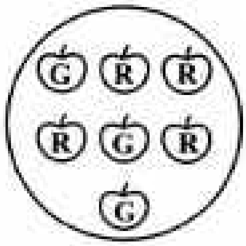
(ii) (a) 5 ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ (b) 5 ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ

3. ਪਤਾ ਕਰੋ :

(a) ਪ੍ਰਸ਼ਨ 1 (a) ਵਿੱਚ ਸੂਚਕ ਦੇ D 'ਤੇ ਰੁਕਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ।

(b) ਚੰਗੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਫੈਂਟ ਕੇ ਸੁੱਟੀ ਹੋਈ 52 ਪੱਤਿਆਂ ਦੀ ਇੱਕ ਤਾਸ਼ ਵਿੱਚੋਂ 1 ਇੱਕਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ।

(c) ਇੱਕ ਲਾਲ ਸੇਬ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ (ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਦੇਖੋ)।



4. 10 ਵੱਖ-ਵੱਖ ਪਰਚੀਆਂ 'ਤੇ 1 ਤੋਂ 10 ਤੱਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਹਨ। (ਇੱਕ ਪਰਚੀ 'ਤੇ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ), ਉਸਨੂੰ ਇੱਕ ਬਕਸੇ ਵਿੱਚ ਰੱਖ ਕੇ ਚੰਗੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਮਿਲਾ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਬਕਸੇ ਦੇ ਅੰਦਰ ਦੇਖੇ ਬਿਨ੍ਹਾਂ ਇੱਕ ਪਰਚੀ ਕੱਢੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ ?

(i) ਸੰਖਿਆ 6 ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ।

(ii) 6 ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ।

(iii) 6 ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ।

(iv) 1 ਅੰਕ ਦੀ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ।

5. ਜੇਕਰ ਤੁਹਾਡੇ ਕੋਲ 3 ਹਰੇ ਚੱਕਰਖੰਡ, 1 ਨੀਲਾ ਚੱਕਰਖੰਡ ਅਤੇ ਲਾਲ ਚੱਕਰਖੰਡ ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਘੁੰਮਣ ਵਾਲਾ ਪਹੀਆ ਹੈ ਤਾਂ ਇੱਕ ਚੱਕਰਖੰਡ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ ? ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਚੱਕਰਖੰਡ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ, ਜੋ ਨੀਲਾ ਨਾ ਹੋਵੇ ?
6. ਪ੍ਰਸ਼ਨ 2 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਘਟਵਾਨਾਂ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਅਸੀਂ ਕੀ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀ ?

1. ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਜ਼ਿਆਦਾਤਰ ਅੰਕੜੇ ਜੋ ਅਸੰਗਠਿਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਮੂਲ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕੜੇ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
2. ਕਿਸੇ ਅੰਕੜੇ ਦਾ ਸਾਰਥਕ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢਣ ਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸੰਗਠਿਤ ਕਰਨ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
3. ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਉਹ ਸੰਖਿਆ ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ ਜਿੰਨੀ ਵਾਰ ਕੋਈ ਇੱਕ ਖਾਸ ਅੰਕੜਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਜਾਣਕਾਰੀ ਵਿੱਚ ਆਉਂਦਾ ਹੈ।
4. ਮੂਲ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੇ ਗੁੱਟ ਬਣਾਏ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਵਰਗੀਕਰਨ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।
5. ਵਰਗੀਕਰਨ ਕੀਤੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰ ਕੇ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ ਇੱਕ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦਾ ਛੜ ਗਰਾਫ਼ ਹੈ। ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਲੇਟਵੇਂ ਤਲ 'ਤੇ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਛੜਾਂ ਦੀਆਂ ਲੰਬਾਈਆਂ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਦੀਆਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾਵਾਂ ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ, ਛੜਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਵਿੱਥ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ, ਕਿਉਂਕਿ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਵਿੱਥ ਨਹੀਂ ਹੈ।
6. ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਚੱਕਰ ਗਰਾਫ਼ ਜਾਂ ਪਾਈ ਚਾਰਟ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰ ਕੇ ਵੀ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਗਰਾਫ਼ ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਚੱਕਰ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਸੰਬੰਧ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ।
7. ਕੁਝ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੇ ਆਉਣ ਦਾ ਸੰਯੋਗ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
8. ਇੱਕ ਬੇਤਰਤੀਬ ਪ੍ਰਯੋਗ ਉਹ ਪ੍ਰਯੋਗ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੇ ਠੀਕ-ਠੀਕ ਭਵਿੱਖਬਾਣੀ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਨਹੀਂ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।
9. ਕਿਸੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਨਤੀਜਿਆਂ ਨੂੰ ਬਰਾਬਰ ਸੰਭਾਵਿਤ ਆਖਦੇ ਹਨ ਜੇ ਉਸਦੇ ਆਉਣ ਦੇ ਸੰਯੋਗ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ।
10. $$\text{ਇੱਕ ਘਟਨਾ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ} = \frac{\text{ਘਟਨਾ ਨੂੰ ਬਣਾਉਣ ਵਾਲੇ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ}}{\text{ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸੰਖਿਆ}}$$

    ਜਦੋਂ ਨਤੀਜੇ ਬਰਾਬਰ ਸੰਭਾਵਿਤ ਹਨ।
11. ਕਿਸੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਇੱਕ ਜਾਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਨਤੀਜਿਆਂ ਨਾਲ ਘਟਨਾ ਬਣਦੀ ਹੈ।
12. ਸੰਯੋਗ ਅਤੇ ਸੰਭਾਵਨਾ ਅਸਲ ਜੀਵਨ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੈ।

ਨੋਟ

ਅਧਿਆਇ 6

ਵਰਗ ਅਤੇ ਵਰਗਮੂਲ

6.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ ਵਰਗ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = ਭੁਜਾ × ਭੁਜਾ (ਇੱਥੇ ਭੁਜਾ ਦਾ ਅਰਥ ਇੱਕ ਭੁਜਾ ਦੀ ਲੰਬਾਈ) ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਹੇਠਾਂ ਸਾਰਣੀ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰੋ :

ਵਰਗ ਦੀ ਭੁਜਾ (cm ਵਿੱਚ)	ਵਰਗ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ (cm^2 ਵਿੱਚ)
1	$1 \times 1 = 1 = 1^2$
2	$2 \times 2 = 4 = 2^2$
3	$3 \times 3 = 9 = 3^2$
5	$5 \times 5 = 25 = 5^2$
8	$8 \times 8 = 64 = 8^2$
a	$a \times a = a^2$

ਸੰਖਿਆਵਾਂ 4, 9, 25, 64 ਅਤੇ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀਆਂ ਦੂਸਰੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਕੀ ਖਾਸ ਹੈ ? ਕਿਉਂਕਿ 4 ਨੂੰ $2 \times 2 = 2^2$, 9 ਨੂੰ $3 \times 3 = 3^2$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਇਕੋ-ਜਿਹੀਆਂ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਜਿਵੇਂ 1, 4, 9, 16, 25, ... ਨੂੰ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ, ਜੇ ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ m ਨੂੰ n^2 ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ n ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਤਾਂ m ਇੱਕ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਕੀ 32 ਇੱਕ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ?

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $5^2 = 25$ ਅਤੇ $6^2 = 36$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ 32 ਇੱਕ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਤਾਂ ਇਹ ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਜੋ ਕਿ 5 ਅਤੇ 6 ਦੇ ਵਿੱਚ ਹੋਵੇ। ਪਰ ਇੱਥੇ 5 ਅਤੇ 6 ਦੇ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਤੇ ਵਰਗਾਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

ਸੰਖਿਆਵਾਂ	ਵਰਗ
1	$1 \times 1 = 1$
2	$2 \times 2 = 4$

3	$3 \times 3 = 9$
4	$4 \times 4 = 16$
5	$5 \times 5 = 25$
6	-----------
7	-----------
8	-----------
9	-----------
10	-----------

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ ?

ਉਪਰੋਕਤ ਸਾਰਣੀ ਤੋਂ ਕੀ ਤੁਸੀਂ 1 ਤੋਂ 100 ਦੇ ਵਿੱਚ ਮੌਜੂਦ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ?

ਕੀ 100 ਤੱਕ ਕੋਈ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਛੱਡੀ ਗਈ ਹੈ ? ਤੁਸੀਂ ਦੇਖੋਗੇ ਕਿ ਬਾਕੀ ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ, ਵਰਗ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਸੰਖਿਆਵਾਂ 1, 4, 9, 16 ਵਰਗ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵੀ ਆਖਦੇ ਹਨ।

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਮੌਜੂਦ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) 30 ਅਤੇ 40 (ii) 50 ਅਤੇ 60

6.2 ਵਰਗ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣ

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ 1 ਤੋਂ 20 ਤੱਕ ਦੀਆਂ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਸੰਖਿਆ	ਵਰਗ	ਸੰਖਿਆ	ਵਰਗ
1	1	11	121
2	4	12	144
3	9	13	169
4	16	14	196
5	25	15	225
6	36	16	256
7	49	17	289
8	64	18	324
9	81	19	361
10	100	20	400

ਉਪਰੋਕਤ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰੋ। ਵਰਗ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਆਖਰੀ ਅੰਕ (ਜਾਂ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਇਕਾਈ ਸਥਾਨ ਦਾ ਅੰਕ) ਕੀ ਹੈ ? ਇਹ ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਇਕਾਈ ਸਥਾਨ 'ਤੇ 0, 1, 4, 5, 6 ਅਤੇ 9 'ਤੇ ਖਤਮ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਵੀ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਇਕਾਈ ਸਥਾਨ 'ਤੇ 2, 3, 7 ਜਾਂ 8 ਨਹੀਂ ਆਉਂਦਾ ਹੈ।

ਕੀ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਸੰਖਿਆ 0, 1, 4, 5, 6 ਜਾਂ 9 'ਤੇ ਸਮਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਤਾਂ ਉਹ ਇੱਕ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਹੋਵੇਗੀ ? ਇਸ ਬਾਰੇ ਸੋਚੋ।

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

1. ਕੀ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ? ਅਸੀਂ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ?
   (i) 1057 (ii) 23453 (iii) 7928 (iv) 222222
   (v) 1069 (vi) 2061
   ਪੰਜ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਿਖੋ ਜਿਸ ਦੇ ਇਕਾਈ ਸਥਾਨ ਨੂੰ ਦੇਖ ਕੇ ਤੁਸੀਂ ਦੱਸ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਇਹ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨਹੀਂ ਹਨ।
2. ਪੰਜ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਿਖੋ ਜਿਸ ਦੇ ਇਕਾਈ ਸਥਾਨ ਨੂੰ ਦੇਖ ਕੇ ਤੁਸੀਂ ਨਹੀਂ ਦੱਸ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਇਹ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਜਾਂ ਨਹੀਂ ਹਨ।

- ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਕੁੱਝ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰੋ ਅਤੇ ਦੋਨਾਂ ਵਿੱਚ ਇਕਾਈ ਸਥਾਨ ਦਾ ਨਿਰੀਖਣ ਕਰੋ।

ਸਾਰਣੀ 1

ਸੰਖਿਆ	ਵਰਗ	ਸੰਖਿਆ	ਵਰਗ	ਸੰਖਿਆ	ਵਰਗ
1	1	11	121	21	441
2	4	12	144	22	484
3	9	13	169	23	529
4	16	14	196	24	576
5	25	15	225	25	625
6	36	16	256	30	900
7	49	17	289	35	1225
8	64	18	324	40	1600
9	81	19	361	45	2025
10	100	20	400	50	2500

ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅੰਕ 1 'ਤੇ ਖ਼ਤਮ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ :

ਵਰਗ	ਅੰਕ
1	1
81	9
121	11
361	19
441	21

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

$123^2, 77^2, 82^2, 161^2, 109^2$ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅੰਕ 1 'ਤੇ ਖ਼ਤਮ ਹੋਣਗੀਆਂ।

ਇਸ ਦੇ ਇਲਾਵਾ ਅਗਲੀਆਂ ਦੋ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਿਖੋ ਜੋ 1 'ਤੇ ਖ਼ਤਮ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵੀ ਲਿਖੋ।

ਤੁਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹੋ ਕਿ ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਇਕਾਈ ਸਥਾਨ 'ਤੇ 1 ਜਾਂ 9 ਆਉਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸਦੀ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ 1 ਆਉਂਦਾ ਹੈ।

- ਹੁਣ 6 'ਤੇ ਖ਼ਤਮ ਹੋਣ ਵਾਲੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

ਵਰਗ	ਅੰਕ
16	4
36	6
196	14
256	16

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਵਿੱਚ ਕਿਹੜੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਇਕਾਈ ਸਥਾਨ 'ਤੇ 6 ਅੰਕ ਹੋਵੇਗਾ ?

(i) 19^2 (ii) 24^2 (iii) 26^2
(iv) 36^2 (v) 34^2

ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜਦੋਂ ਕੋਈ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ 6 'ਤੇ ਖ਼ਤਮ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਜਿਸ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗ ਹੈ, ਉਸਦਾ ਇਕਾਈ ਅੰਕ 4 ਜਾਂ 6 ਹੋਵੇਗਾ।

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਕੁਝ ਹੋਰ ਨਿਯਮ, ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਲਿਖੀਆਂ ਗਈਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦੇ ਨਿਰੀਖਣ ਨਾਲ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ। (ਸਾਰਣੀ 1) ?

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗ ਕਰਨ 'ਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਇਕਾਈ ਸਥਾਨ 'ਤੇ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ ?

(i) 1234 (ii) 26387 (iii) 52698 (iv) 99880
(v) 21222 (vi) 9106

- ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਇੱਕ ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ।

$10^2 = 100$
$20^2 = 400$
$80^2 = 6400$

ਪਰ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਦੋ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਹਨ।

ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਦੋ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਹਨ।

$100^2 = 10000$
$200^2 = 40000$
$700^2 = 490000$
$900^2 = 810000$

ਪਰ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਚਾਰ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਹਨ।

ਜੇ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋਣ, ਤਾਂ ਉਸਦੇ ਵਰਗ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੇ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋਣਗੇ ?
ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਵਰਗ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 'ਤੇ ਧਿਆਨ ਦਿੱਤਾ ?
ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਕੇਵਲ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ?

- ਸੰਖਿਆ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦੇ ਲਈ ਸਾਰਣੀ 1 ਦੇਖੋ।
ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਅਤੇ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ।

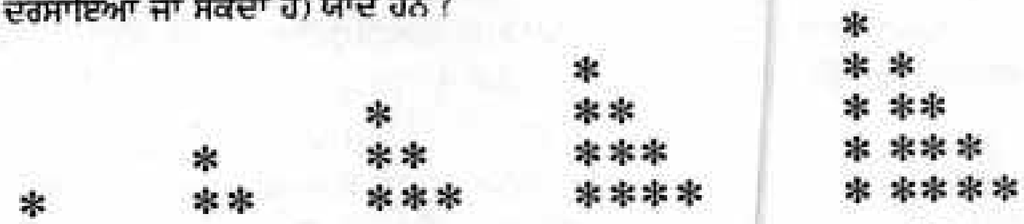
ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

1. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿੱਚ ਕਿਹੜੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ/ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੋਣਗੇ। ਕਿਉਂ ?
   (i) 727 (ii) 158 (iii) 269 (iv) 1980
2. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗ ਵਿੱਚ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਕੀ ਹੋਵੇਗੀ ?
   (i) 60 (ii) 400

6.3 ਕੁਝ ਹੋਰ ਰੋਚਕ ਪੈਟਰਨ

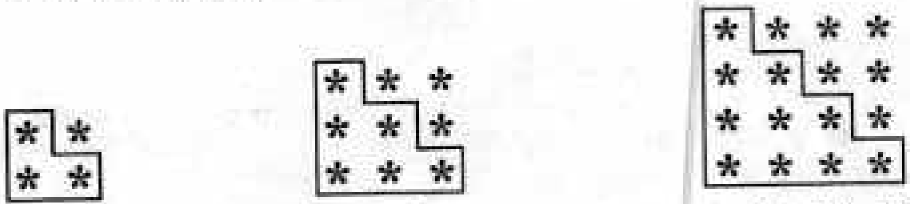
1. ਤਿਕੋਣੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜ

ਕੀ ਤੁਹਾਨੂੰ ਤਿਕੋਣੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ (ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਬਿੰਦੂ ਪੈਟਰਨ ਨੂੰ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ) ਯਾਦ ਹਨ ?



1 3 6 10 15

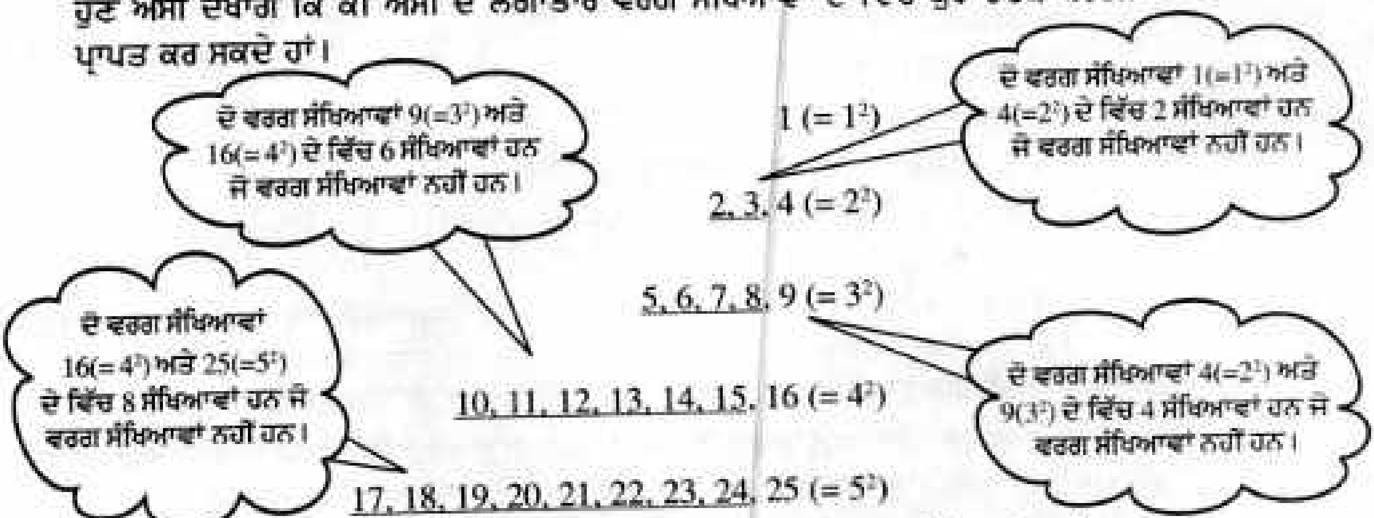
ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਦੋ ਲਗਾਤਾਰ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਜੋੜਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ



$1 + 3 = 4 = 2^2$ $3 + 6 = 9 = 3^2$ $6 + 10 = 16 = 4^2$

2. ਵਰਗ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰਲੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਦੇਖਾਂਗੇ ਕਿ ਕੀ ਅਸੀਂ ਦੋ ਲਗਾਤਾਰ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਕੁੱਝ ਰੋਚਕ ਪੈਟਰਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।



$1^2(=1)$ ਅਤੇ $2^2(=4)$ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦੋ (ਜਿਵੇਂ ਕਿ 2×1) ਸੰਖਿਆਵਾਂ 2, 3, ਹਨ ਜੋ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨਹੀਂ ਹਨ।

$2^2(=4)$ ਅਤੇ $3^2(=9)$ ਦੇ ਵਿੱਚ ਚਾਰ (ਜਿਵੇਂ ਕਿ 2×2) ਸੰਖਿਆਵਾਂ 5, 6, 7, 8, ਹਨ ਜੋ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਹੁਣ $3^2 = 9, \quad 4^2 = 16$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7$

ਇੱਥੇ $9(=3^2)$ ਅਤੇ $16(=4^2)$ ਦੇ ਵਿੱਚ 6 ਸੰਖਿਆਵਾਂ 10, 11, 12, 13, 14, 15 ਹਨ ਜੋ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨਹੀਂ ਹਨ, ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਦੋ ਵਰਗਾਂ ਦੇ ਅੰਤਰ ਨਾਲੋਂ 1 ਘੱਟ ਹੈ।

ਸਾਡੇ ਕੋਲ $4^2 = 16$ ਅਤੇ $5^2 = 25$ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $5^2 - 4^2 = 9$

ਇੱਥੇ $16(= 4^2)$ ਅਤੇ $25(= 5^2)$ ਦੇ ਵਿੱਚ 17, 18, ... , 24 ਅੱਠ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਜੋ ਕਿ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਦੋ ਵਰਗਾਂ ਦੇ ਅੰਤਰ ਨਾਲੋਂ 1 ਘੱਟ ਹੈ।

7^2 ਅਤੇ 6^2 ਨੂੰ ਦੇਖੋ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ 6^2 ਅਤੇ 7^2 ਦੇ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ? ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਕੋਈ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ n ਅਤੇ $(n + 1)$ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਤਦ

$$(n + 1)^2 - n^2 = (n^2 + 2n + 1) - n^2 = 2n + 1$$

ਅਸੀਂ n^2 ਅਤੇ $(n + 1)^2$ ਦੇ ਵਿੱਚ $2n$ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਜੋ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦੇ ਅੰਤਰ ਨਾਲੋਂ 1 ਘੱਟ ਹੈ।

ਸਧਾਰਨ ਰੂਪ ਵਿੱਚ *ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦੋ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆਵਾਂ n ਅਤੇ $(n + 1)$ ਦੇ ਵਿੱਚ $2n$ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਜੋ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨਹੀਂ ਹਨ।* ਪੜਤਾਲ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ $n = 5$, $n = 6$ ਆਦਿ ਲੈ ਲਵੋ ਅਤੇ ਪੁਸ਼ਟੀ ਕਰੋ।

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

1. 9^2 ਅਤੇ 10^2 ਦੇ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੀਆਂ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ? 11^2 ਅਤੇ 12^2 ਦੇ ਵਿੱਚ ਵੀ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦੱਸੋ।
2. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜਿਆਂ ਦੇ ਵਿਚਲੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੱਸੋ ਜੋ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨਹੀਂ ਹਨ।
   (i) 100^2 ਅਤੇ 101^2 (ii) 90^2 ਅਤੇ 91^2 (iii) 1000^2 ਅਤੇ 1001^2

3. ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ

ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

1 [ਇੱਕ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ]	$= 1 = 1^2$
1 + 3 [ਪਹਿਲੀਆਂ ਦੋ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ]	$= 4 = 2^2$
1 + 3 + 5 [ਪਹਿਲੀਆਂ ਤਿੰਨ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ]	$= 9 = 3^2$
1 + 3 + 5 + 7 [...]	$= 16 = 4^2$
1 + 3 + 5 + 7 + 9 [...]	$= 25 = 5^2$
1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 [...]	$= 36 = 6^2$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਪਹਿਲੀ n ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ n^2 ਹੈ।

ਇਸ ਨੂੰ ਅਲੱਗ ਢੰਗ ਨਾਲ ਦੇਖਦੇ ਹੋਏ ਅਸੀਂ ਇਹ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜੇ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ, ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਤਾਂ ਇਹ 1 ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋਣ ਵਾਲੀਆਂ ਲਗਾਤਾਰ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਹੈ।

ਹੁਣ ਇਹਨਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ ਜੋ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨਹੀਂ ਹਨ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ 2, 3, 5, 6, ... । ਕੀ ਹੁਣ ਇਹਨਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ 1 ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਕੇ ਸਾਰੀਆਂ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ?

ਹੁਣ ਦੇਖਾਂਗੇ ਕਿ ਇਹਨਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਹੀਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਸੰਖਿਆ 25 ਨੂੰ ਲਵੋ ਅਤੇ ਇਸ ਵਿੱਚੋਂ 1, 3, 5, 7, 9, ... ਨੂੰ ਘਟਾਉ :

(i) $25 - 1 = 24$ (ii) $24 - 3 = 21$ (iii) $21 - 5 = 16$ (iv) $16 - 7 = 9$
(v) $9 - 9 = 0$

ਜਿਵੇਂ ਕਿ $25 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$ ਹੈ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ 25 ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਹੁਣ ਇੱਕ ਦੂਸਰੀ ਸੰਖਿਆ 38 ਨੂੰ ਲਓ ਅਤੇ ਦੁਬਾਰਾ ਕਰੋ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਉੱਪਰ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

(i) $38 - 1 = 37$ (ii) $37 - 3 = 34$ (iii) $34 - 5 = 29$ (iv) $29 - 7 = 22$

(v) $22 - 9 = 13$ (vi) $13 - 11 = 2$ (vii) $2 - 13 = -11$

ਇਸ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਪਤਾ ਲੱਗਦਾ ਹੈ ਕਿ 38 ਨੂੰ 1 ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਨ ਵਾਲੀਆਂ ਲਗਾਤਾਰ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਨਹੀਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਅਤੇ 38 ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ *ਜਦ ਕੋਈ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ 1 ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋਣ ਵਾਲੀ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਈ ਨਹੀਂ ਜਾ ਸਕਦੀ ਤਾਂ ਉਹ ਸੰਖਿਆ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦੀ।*

ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਪੂਰਨ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ ਹੈ ਇਹ ਜਾਣਨ ਲਈ ਇਸ ਨਤੀਜੇ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ, ਹਰੇਕ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ ?

(i) 121 (ii) 55 (iii) 81

(iv) 49 (v) 69

4. ਲਗਾਤਾਰ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ

ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

ਪਹਿਲੀ ਸੰਖਿਆ $= \frac{3^2 - 1}{2}$

ਦੂਸਰੀ ਸੰਖਿਆ $= \frac{3^2 + 1}{2}$

$$3^2 = 9 = 4 + 5$$
$$5^2 = 25 = 12 + 13$$
$$7^2 = 49 = 24 + 25$$
$$9^2 = 81 = 40 + 41$$
$$11^2 = 121 = 60 + 61$$
$$15^2 = 225 = 112 + 113$$

ਹਾਂ। ਕੋਈ ਵੀ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਵਰਗ ਨੂੰ ਦੋ ਲਗਾਤਾਰ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

1. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਦੋ ਲਗਾਤਾਰ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ :
   (i) 21^2 (ii) 13^2 (iii) 11^2 (iv) 19^2
2. ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਸੋਚ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਇਸਦਾ ਉਲਟ ਸੱਚ ਹੈ ਅਤੇ ਕੀ ਦੋ ਲਗਾਤਾਰ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ? ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਦੇ ਪੱਖ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਦਿਓ।

5. ਦੋ ਲਗਾਤਾਰ ਜਿਸਤ ਜਾਂ ਟਾਂਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ

$11 \times 13 = 143 = 12^2 - 1$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $11 \times 13 = (12 - 1) \times (12 + 1)$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $11 \times 13 = (12 - 1) \times (12 + 1) = 12^2 - 1$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $13 \times 15 = (14 - 1) \times (14 + 1) = 14^2 - 1$

$29 \times 31 = (30 - 1) \times (30 + 1) = 30^2 - 1$

$44 \times 46 = (45 - 1) \times (45 + 1) = 45^2 - 1$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਧਾਰਨ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਹ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $(a + 1) \times (a - 1) = a^2 - 1$

6. ਵਰਗ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਕੁਝ ਹੋਰ ਪੈਟਰਨ

ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦਾ ਨਿਰੀਖਣ ਕਰੋ 1, 11, 111 ... ਆਦਿ। ਇਹ ਇੱਕ ਸੁੰਦਰ ਪੈਟਰਨ ਦਿੰਦੇ ਹਨ।

$1^2 = 1$

$11^2 = 1\ 2\ 1$

$111^2 = 1\ 2\ 3\ 2\ 1$

$1111^2 = 1\ 2\ 3\ 4\ 3\ 2\ 1$

$11111^2 = 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1$

$11111111^2 = 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1$

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

ਉਪਰੋਕਤ ਪੈਟਰਨ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਿਖੋ :

(i) 111111^2 (ii) 1111111^2

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

ਉਪਰੋਕਤ ਪੈਟਰਨ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਵਰਗ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ ?

(i) 6666667^2 (ii) 66666667^2

ਹੋਰ ਰੋਚਕ ਪੈਟਰਨ

$7^2 = 49$

$67^2 = 4489$

$667^2 = 444889$

$6667^2 = 44448889$

$66667^2 = 4444488889$

$666667^2 = 444444888889$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿਉਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਇਹ ਜਾਨਣਾ ਤੁਹਾਡੇ ਲਈ ਮਨੋਰੰਜਨ ਪੂਰਨ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਤੁਹਾਡੇ ਲਈ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਜਾਣਨਾ ਅਤੇ ਸੋਚਣਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੋਵੇਗਾ। ਭਾਵੇਂ ਇਸ ਦੇ ਉੱਤਰ ਕੁੱਝ ਸਮੇਂ ਬਾਅਦ ਮਿਲਣ।

ਅਭਿਆਸ 6.1

1. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦੀ ਇਕਾਈ ਦੇ ਅੰਕ ਕੀ ਹੋਣਗੇ ?
   (i) 81 (ii) 272 (iii) 799 (iv) 3853
   (v) 1234 (vi) 26387 (vii) 52698 (viii) 99880
   (ix) 12796 (x) 55555
2. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਸਪੱਸ਼ਟ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨਹੀਂ ਹਨ, ਇਸਦਾ ਕਾਰਣ ਦੱਸੋ।
   (i) 1057 (ii) 23453 (iii) 7928 (iv) 222222
   (v) 64000 (vi) 89722 (vii) 222000 (viii) 505050
3. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਕਿਸ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ ਹੋਵੇਗੀ ?
   (i) 431 (ii) 2826 (iii) 7779 (iv) 82004
4. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਪੈਟਰਨ ਦਾ ਨਿਰੀਖਣ ਕਰੋ ਅਤੇ ਖਾਲੀ ਥਾਵਾਂ ਭਰੋ।

$11^2 = 121$

$101^2 = 10201$

$1001^2 = 1002001$

$100001^2 = 1 \ldots\ldots 2 \ldots\ldots 1$

$10000001^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

5. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਪੈਟਰਨ ਦਾ ਨਿਰੀਖਣ ਕਰੋ ਅਤੇ ਖਾਲੀ ਥਾਵਾਂ ਭਰੋ।

$$11^2 = 1\,2\,1$$
$$101^2 = 1\,0\,2\,0\,1$$
$$10101^2 = 102030201$$
$$1010101^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots^2 = 10203040504030201$$

6. ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਪੈਟਰਨ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਖਾਲੀ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲੱਭੋ :

$1^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2$

$2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2$

$3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$

$4^2 + 5^2 + _^2 = 21^2$

$5^2 + _^2 + 30^2 = 31^2$

$6^2 + 7^2 + _^2 = __^2$

ਪੈਟਰਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰੋ :
ਤੀਸਰੀ ਸੰਖਿਆ ਪਹਿਲੀ ਅਤੇ ਦੂਸਰੀ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੈ। ਕਿਵੇਂ? ਚੌਥੀ ਸੰਖਿਆ ਤੀਸਰੀ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੈ। ਕਿਵੇਂ?

7. ਜੋੜ ਕਿਰਿਆ ਕੀਤੇ ਬਿਨਾਂ ਜੋੜਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $1 + 3 + 5 + 7 + 9$

(ii) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19$

(iii) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23$

8. (i) 49 ਨੂੰ 7 ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ।

(ii) 121 ਨੂੰ 11 ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ।

9. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ?

(i) 12 ਅਤੇ 13 (ii) 25 ਅਤੇ 26 (iii) 99 ਅਤੇ 100

6.4 ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਵਰਗ ਪਤਾ ਕਰਨਾ

ਛੋਟੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਜਿਵੇਂ 3, 4, 5, 6, 7, ... ਆਦਿ ਦਾ ਵਰਗ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਆਸਾਨ ਹੈ। ਪਰ ਕੀ ਅਸੀਂ 23 ਦਾ ਵਰਗ ਇੰਨੀ ਜਲਦੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ?

ਇਸਦਾ ਉੱਤਰ ਇੰਨਾ ਆਸਾਨ ਨਹੀਂ ਹੈ ਅਤੇ ਸਾਨੂੰ 23 ਨੂੰ 23 ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ।

ਇਸ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦਾ ਇੱਕ ਤਰੀਕਾ ਹੈ ਜਿਸ ਨਾਲ 23×23 ਨੂੰ ਬਿਨ੍ਹਾਂ ਗੁਣਾ ਕੀਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $23 = 20 + 3$

ਇਸ ਲਈ $23^2 = (20 + 3)^2 = 20(20 + 3) + 3(20 + 3)$

$= 20^2 + 20 \times 3 + 3 \times 20 + 3^2$

$= 400 + 60 + 60 + 9 = 529$

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਵਰਗ ਗੁਣਾ ਕੀਤੇ ਬਿਨ੍ਹਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) 39 (ii) 42

ਹੱਲ : (i) $39^2 = (30 + 9)^2 = 30(30 + 9) + 9(30 + 9)$

$= 30^2 + 30 \times 9 + 9 \times 30 + 9^2$

$= 900 + 270 + 270 + 81 = 1521$

(ii) $42^2 = (40 + 2)^2 = 40(40 + 2) + 2(40 + 2)$
$= 40^2 + 40 \times 2 + 2 \times 40 + 2^2$
$= 1600 + 80 + 80 + 4 = 1764$

6.4.1 ਵਰਗ ਦੇ ਹੋਰ ਪੈਟਰਨ

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਪੈਟਰਨ ਨੂੰ ਦੇਖੋ

$25^2 = 625 = (2 \times 3)$ ਸੈਂਕੜੇ $+ 25$

$35^2 = 1225 = (3 \times 4)$ ਸੈਂਕੜੇ $+ 25$

$75^2 = 5625 = (7 \times 8)$ ਸੈਂਕੜੇ $+ 25$

$125^2 = 15625 = (12 \times 13)$ ਸੈਂਕੜੇ $+ 25$

ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਲਵੋ ਜਿਸਦੀ ਇਕਾਈ ਸਥਾਨ 'ਤੇ ਅੰਕ 5 ਹੋਵੇ, ਜਿਵੇਂਕਿ $a5$।

$(a5)^2 = (10a + 5)^2$
$= 10a(10a + 5) + 5(10a + 5)$
$= 100a^2 + 50a + 50a + 25$
$= 100a(a + 1) + 25$
$= a(a + 1)$ ਸੈਂਕੜਾ $+ 25$

ਹੁਣ ਕੀ ਤੁਸੀਂ 95 ਦਾ ਵਰਗ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ ?

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਵਰਗ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਇਕਾਈ ਅੰਕ 5 ਹੈ।

(i) 15 (ii) 95 (iii) 105 (iv) 205

6.4.2 ਪਾਇਥਾਗੋਰੀਅਨ ਤ੍ਰਿਗੁੱਟ (ਤਿੱਕੜੀ)

ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਨੂੰ ਲਓ

$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$$

ਸੰਖਿਆ 3, 4, 5 ਦੇ ਗੁੱਟ ਨੂੰ **ਪਾਇਥਾਗੋਰੀਅਨ ਤ੍ਰਿਗੁੱਟ** ਆਖਦੇ ਹਨ। 6, 8, 10 ਵੀ ਇੱਕ ਪਾਇਥਾਗੋਰੀਅਨ ਤ੍ਰਿਗੁੱਟ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ

$$6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 = 10^2$$

ਦੁਬਾਰਾ ਨਿਰੀਖਣ ਕਰਨ 'ਤੇ

$5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$ । ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 5, 12, 13 ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਦੂਸਰੀ ਪਾਇਥਾਗੋਰੀਅਨ ਤ੍ਰਿਗੁੱਟ ਹੈ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਕੁਝ ਹੋਰ ਤਿੱਕੜੀਆਂ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ ?

ਕਿਸੇ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ $m > 1$ ਦੇ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ $(2m)^2 + (m^2 - 1)^2 = (m^2 + 1)^2$ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $2m$, $m^2 - 1$ ਅਤੇ $m^2 + 1$ ਪਾਇਥਾਗੋਰੀਅਨ ਤ੍ਰਿਗੁੱਟ ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਇਸ ਰੂਪ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਹੋਰ ਪਾਇਥਾਗੋਰੀਅਨ ਤ੍ਰਿਗੁੱਟ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਇੱਕ ਪਾਇਥਾਗੋਰੀਅਨ ਤ੍ਰਿਗੁੱਟ ਲਿਖੋ ਜਿਸਦੀ ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ 8 ਹੈ।

ਹੱਲ : ਸਧਾਰਨ ਰੂਪ ਵਿੱਚ $2m$, $m^2 - 1$, $m^2 + 1$ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਪਾਇਥਾਗੋਰੀਅਨ ਤ੍ਰਿਗੁੱਟ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $m^2 - 1 = 8$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $m^2 = 8 + 1 = 9$

$m = 3$

ਇਸ ਲਈ $2m = 6$ ਅਤੇ $m^2 + 1 = 10$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ 6, 8, 10 ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਗੁੱਟ ਹੈ ਪਰ ਇੱਥੇ 8 ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ $2m = 8$

ਤਾਂ $m = 4$

$$m^2 - 1 = 16 - 1 = 15$$

ਅਤੇ $m^2 + 1 = 16 + 1 = 17$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ 8, 15, 17 ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਤ੍ਰਿਗੁੱਟ ਹੈ ਜਿੱਥੇ 8 ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਇੱਕ ਪਾਇਥਾਗੋਰੀਅਨ ਤ੍ਰਿਗੁੱਟ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦੀ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ 12 ਹੈ।

ਹੱਲ : ਜੇ ਅਸੀਂ ਲਈਏ $m^2 - 1 = 12$

ਤਾਂ, $m^2 = 12 + 1 = 13$

ਇੱਥੇ m ਦਾ ਮੁੱਲ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗਾ।

ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $m^2 + 1 = 12$ । ਫਿਰ $m^2 = 11$ ਜੋ m ਦੇ ਲਈ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਦੇਵੇਗਾ।

ਇਸ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਲੈਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ $2m = 12$

ਤਾਂ, $m = 6$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $m^2 - 1 = 36 - 1 = 35$ ਅਤੇ $m^2 + 1 = 36 + 1 = 37$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲੋੜੀਦਾ ਤ੍ਰਿਗੁੱਟ ਹੈ 12, 35, 37

ਨੋਟ : ਇਸ ਰੂਪ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਅਸੀਂ ਸਾਰੀਆਂ ਪਾਇਥਾਗੋਰੀਅਨ ਤ੍ਰਿਗੁੱਟ ਨਹੀਂ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ ਦੂਸਰਾ ਤ੍ਰਿਗੁੱਟ 5, 12, 13 ਵਿੱਚ ਵੀ 12 ਇੱਕ ਮੈਂਬਰ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 6.2

1. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਵਰਗ ਪਤਾ ਕਰੋ।
   (i) 32 (ii) 35 (iii) 86 (iv) 93
   (v) 71 (vi) 46
2. ਪਾਇਥਾਗੋਰੀਅਨ ਤ੍ਰਿਗੁੱਟ ਲਿਖੋ ਜਿਸਦਾ ਇੱਕ ਮੈਂਬਰ ਹੈ,
   (i) 6 (ii) 14 (iii) 16 (iv) 18

6.5 ਵਰਗਮੂਲ

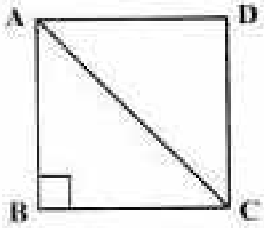
ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰੋ :

(a) ਵਰਗ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ 144 cm^2 ਹੈ। ਵਰਗ ਦੀ ਭੁਜਾ ਕੀ ਹੋਵੇਗੀ ?
ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਵਰਗ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = ਭੁਜਾ^{2} ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਜੇ ਅਸੀਂ ਭੁਜਾ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਦਾ ਮੁੱਲ 'a' ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ $144 = a^2$

ਭੁਜਾ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਇਹ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦਾ ਵਰਗ 144 ਹੈ।

(*b*) ਇੱਕ ਵਰਗ ਜਿਸਦੀ ਭੁਜਾ 8 cm ਹੈ, ਉਸਦੇ ਵਿਕਰਨ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਕੀ ਹੋਵੇਗੀ (ਚਿੱਤਰ 6.1)?



ਚਿੱਤਰ 6.1

ਇਸ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਕੀ ਅਸੀਂ ਪਾਇਥਾਗੋਰਸ ਥਿਊਰਮ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ?

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $AB^2 + BC^2 = AC^2$

ਜਿਵੇਂ $8^2 + 8^2 = AC^2$

ਜਾਂ $64 + 64 = AC^2$

ਜਾਂ $128 = AC^2$

ਫਿਰ ਇੱਥੇ AC ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਸੋਚਣੀ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਵਰਗ 128 ਹੋਵੇ।

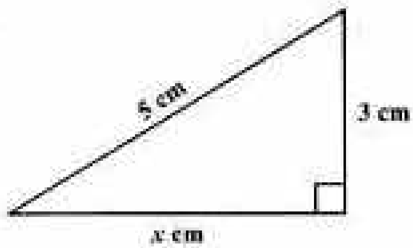
(*c*) ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਵਿੱਚ ਕਰਣ ਅਤੇ ਇੱਕ ਭੁਜਾ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 5 cm ਅਤੇ 3 cm ਹਨ (ਚਿੱਤਰ 6.2)। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਤੀਸਰੀ ਭੁਜਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ ?

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਤੀਸਰੀ ਭੁਜਾ ਦੀ ਲੰਬਾਈ x cm ਹੈ।

ਪਾਇਥਾਗੋਰਸ ਥਿਊਰਮ ਦੁਆਰਾ $5^2 = x^2 + 3^2$

$$25 - 9 = x^2$$

$$16 = x^2$$



ਚਿੱਤਰ 6.2

ਫਿਰ ਇੱਥੇ x ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਵਰਗ 16 ਹੈ। ਉਪਰੋਕਤ ਸਾਰੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ, ਜਿਸਦਾ ਵਰਗ ਪਤਾ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਵਰਗਮੂਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜਾਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

6.5.1 ਵਰਗਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ

ਜੋੜ ਦੀ ਕਿਰਿਆ ਦੇ ਉਲਟ ਘਟਾਉਣਾ ਹੈ ਅਤੇ ਗੁਣਾ ਦੀ ਉਲਟ ਕਿਰਿਆ ਭਾਗ ਹੈ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵਰਗਮੂਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ ਵੀ ਵਰਗ ਦੀ ਉਲਟ ਕਿਰਿਆ ਹੈ।

ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ $1^2 = 1$, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ 1 ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ 1 ਹੈ।

$2^2 = 4$, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ 4 ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ 2 ਹੈ।

$3^2 = 9$, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ 9 ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ 3 ਹੈ।

> ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $9^2 = 81$,
> ਅਤੇ $(-9)^2 = 81$
> ਅਸੀਂ ਇਹ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ 81 ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ 9 ਅਤੇ −9 ਹੈ

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

(i) $11^2 = 121$, 121 ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ ਕੀ ਹੈ? (ii) $14^2 = 196$, 196 ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ ਕੀ ਹੈ?

ਸੋਚੋ, ਚਰਚਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਲਿਖੋ

$(-1)^2 = 1$, ਕੀ 1 ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ ਹੈ −1? $(-2)^2 = 4$, ਕੀ 4 ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ ਹੈ −2?

$(-9)^2 = 81$, ਕੀ 81 ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ ਹੈ −9?

ਉਪਰੋਕਤ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਤੁਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਕੋਈ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਦੋ ਇੰਟੇਗਰਲ (ਇਕੱਠੇ) ਵਰਗਮੂਲ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਕੇਵਲ ਧਨਾਤਮਕ ਵਰਗਮੂਲ ਹੀ ਲਵਾਂਗੇ। ਧਨਾਤਮਕ ਵਰਗਮੂਲ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ $\sqrt{\ }$ ਸੰਕੇਤ ਨਾਲ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ $\sqrt{4} = 2$ (-2 ਨਹੀਂ); $\sqrt{9} = 3$ (-3 ਨਹੀਂ) ਆਦਿ।

ਕਥਨ	ਸਿੱਟਾ
$1^2 = 1$	$\sqrt{1} = 1$
$2^2 = 4$	$\sqrt{4} = 2$
$3^2 = 9$	$\sqrt{9} = 3$
$4^2 = 16$	$\sqrt{16} = 4$
$5^2 = 25$	$\sqrt{25} = 5$

ਕਥਨ	ਸਿੱਟਾ
$6^2 = 36$	$\sqrt{36} = 6$
$7^2 = 49$	$\sqrt{49} = 7$
$8^2 = 64$	$\sqrt{64} = 8$
$9^2 = 81$	$\sqrt{81} = 9$
$10^2 = 100$	$\sqrt{100} = 10$

6.5.2 ਘਟਾਉ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਵਰਗਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ

ਕੀ ਤੁਹਾਨੂੰ ਯਾਦ ਹੈ ਕਿ ਪਹਿਲੀਆਂ n ਟਾਂਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ n^2 ਹੈ? ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਰੇਕ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ 1 ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਕੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਟਾਂਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। $\sqrt{81}$ ਨੂੰ ਲਵੋ

(i) $81 - 1 = 80$ (ii) $80 - 3 = 77$ (iii) $77 - 5 = 72$ (iv) $72 - 7 = 65$
(v) $65 - 9 = 56$ (vi) $56 - 11 = 45$ (vii) $45 - 13 = 32$ (viii) $32 - 15 = 17$
(ix) $17 - 17 = 0$

ਅਸੀਂ ਵੇਖਿਆ ਕਿ 81 ਵਿੱਚੋਂ 1, 3, 5... ਘਟਾਉਂਦਿਆਂ 9ਵੀਂ ਵਾਰ 'ਤੇ ਬਾਕੀ ਸਿਫ਼ਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਇਆ। ਇਸ ਲਈ $\sqrt{81} = 9$ ਹੈ। ਇਸ ਨਿਯਮ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਕੀ ਤੁਸੀਂ 729 ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ? ਹਾਂ ਪਰ ਇਸ ਵਿੱਚ ਸਮਾਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਲੱਗੇਗਾ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਸੌਖੇ ਢੰਗ ਨਾਲ ਵਰਗਮੂਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

1 ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਕੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਟਾਂਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਘਟਾਉਣ ਨਾਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਹਨ ਜਾਂ ਨਹੀਂ? ਜੇਕਰ ਇਹ ਸੰਖਿਆ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸਦਾ ਵਰਗਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) 121 (ii) 55 (iii) 36
(iv) 49 (v) 90

6.5.3 ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ ਵਰਗਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ

ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਨੂੰ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ :

ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ	ਇਸਦੇ ਵਰਗ ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ
$6 = 2 \times 3$	$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$
$8 = 2 \times 2 \times 2$	$64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
$12 = 2 \times 2 \times 3$	$144 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$
$15 = 3 \times 5$	$225 = 3 \times 3 \times 5 \times 5$

6 ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਵਿੱਚ 2 ਕਿੰਨੀ ਵਾਰ ਆਉਂਦਾ ਹੈ? ਇੱਕ ਵਾਰ। 36 ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਵਿੱਚ 2 ਕਿੰਨੀ ਵਾਰ ਆਉਂਦਾ ਹੈ? ਦੋ ਵਾਰ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ 6 ਅਤੇ 36 ਵਿੱਚ 3 ਵਾਰ ਅਤੇ 8 ਅਤੇ 64 ਆਦਿ ਵਿੱਚ 2 ਕਿੰਨੀ ਵਾਰ ਆਉਂਦਾ ਹੈ?

ਤੁਸੀਂ ਵੇਖੋਗੇ ਕਿ ਕਿਸੀ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਵਰਗ ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਉਸ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਤੋਂ ਦੁਗਣੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਆਓ, ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ 324 ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

2	324
2	162
3	81
3	27
3	9
	3

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ 324 ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ

$$324 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਦੇ ਜੋੜੇ ਬਣਾਉਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ

$$324 = \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3} \times \underline{3 \times 3} = 2^2 \times 3^2 \times 3^2 = (2 \times 3 \times 3)^2$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\sqrt{324} = 2 \times 3 \times 3 = 18$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੀ ਤੁਸੀਂ 256 ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ ? 256 ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹਨ,

$$256 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

2	256
2	128
2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
	2

ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਵਿੱਚ ਜੋੜੇ ਬਣਾਉਣ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ?

$$256 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} = (2 \times 2 \times 2 \times 2)^2$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\sqrt{256} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

ਕੀ 48 ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ?

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $48 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times 3$

ਇੱਥੇ ਸਾਰੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਜੋੜਿਆਂ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹਨ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ 48 ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਕਲਪਨਾ ਕਰੋ ਕਿ ਅਸੀਂ 48 ਦੇ ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟੇ ਗੁਣਜ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਜੋ ਕਿ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਹੋਵੇ। ਇਹ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਰੋਗੇ ? 48 ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਬਣਾਉਣ ਤੇ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕੇਵਲ 3 ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਜੋੜੇ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਾਨੂੰ ਜੋੜਾ ਪੂਰਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ 3 ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $48 \times 3 = 144$ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਕੀ ਅਸੀਂ ਇਹ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ 48 ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲ ਵੰਡਣ ਤੇ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗੀ ?

ਗੁਣਜ 3, ਜੋੜੇ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ ਇਸ ਲਈ 48 ਨੂੰ 3 ਨਾਲ ਵੰਡਣ ਤੇ ਸਾਨੂੰ $48 \div 3 = 16 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2}$ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ ਸੰਖਿਆ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਵੀ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 4 : 6400 ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ?

2	6400
2	3200
2	1600
2	800
2	400
2	200
2	100
2	50
5	25
	5

ਹੱਲ : ਲਿਖੋ $6400 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{5 \times 5}$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\sqrt{6400} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 = 80$

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ਕੀ 90 ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਹੈ ?

2	90
3	45
3	15
	5

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ $90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$ ਰੱਖਦੇ ਹਾਂ।

ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਵਿੱਚ 2 ਅਤੇ 5 ਜੋੜਿਆਂ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ 90 ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਜਿਸਨੂੰ ਸਪੱਸ਼ਟ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵੀ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿਉਂਕਿ ਇਸ ਵਿੱਚ ਕੇਵਲ 1 ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਕੀ 2352 ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ? ਜੇਕਰ ਨਹੀਂ ਤਾਂ 2352 ਦਾ ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਗੁਣਜ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰੋ ਜੋ ਕਿ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਨਵੀਂ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

2	2352
2	1176
2	588
2	294
3	147
7	49
	7

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $2352 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times 3 \times \underline{7 \times 7}$

ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ 3 ਜੋੜੇ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ 2352 ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਜੇ 3 ਦਾ ਇੱਕ ਜੋੜਾ ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਸੰਖਿਆ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਹੋ ਜਾਵੇਗੀ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ 2352 ਨੂੰ 3 ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।

$$2352 \times 3 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3} \times \underline{7 \times 7}$$

ਹੁਣ ਹਰੇਕ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਜੋੜਿਆਂ ਵਿੱਚ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $2352 \times 3 = 7056$ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ 2352 ਦਾ ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਗੁਣਜ 7056 ਹੈ ਜੋ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਅਤੇ $$\sqrt{7056} = 2 \times 2 \times 3 \times 7 = 84$$

ਉਦਾਹਰਣ 7 : 9408 ਨੂੰ ਕਿਹੜੀ ਛੋਟੀ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲ ਵੰਡਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਜੋ ਭਾਗਫਲ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇ। ਉਸ ਭਾਗਫਲ ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $9408 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times 3 \times \underline{7 \times 7}$

ਜੇ ਅਸੀਂ 9408 ਨੂੰ 3 ਨਾਲ ਵੰਡਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ

$9408 \div 3 = 3136 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{7 \times 7}$ ਜੋ ਕਿ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। (ਕਿਉਂ)

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਛੋਟੀ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸੰਖਿਆ 3 ਹੈ

ਅਤੇ $$\sqrt{3136} = 2 \times 2 \times 2 \times 7 = 56$$

2	6, 9, 15
3	3, 9, 15
3	1, 3, 5
5	1, 1, 5
	1, 1, 1

ਉਦਾਹਰਣ 8 : ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਹਰੇਕ ਸੰਖਿਆ 6, 9 ਅਤੇ 15 ਨਾਲ ਵੰਡੀ ਜਾਵੇ।

ਹੱਲ : ਇਸ ਨੂੰ ਦੋ ਹਿੱਸਿਆਂ ਵਿੱਚ ਹੱਲ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਛੋਟੇ ਸਾਂਝੇ ਗੁਣਜ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਫਿਰ ਇਸਦੇ ਬਾਅਦ ਜ਼ਰੂਰੀ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ ਜੋ ਹਰੇਕ ਸੰਖਿਆ 6, 9 ਅਤੇ 15 ਵੰਡੀ ਜਾਵੇਗੀ, ਇਹਨਾਂ ਦਾ ਲ.ਸ.ਵ. ਹੋਵੇਗੀ।

6, 9 ਅਤੇ 15 ਦਾ ਲ.ਸ.ਵ. ਹੈ $= 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 90$ ਹੈ।

90 ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ : $90 = 2 \times \underline{3 \times 3} \times 5$ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ 2 ਅਤੇ 5 ਜੋੜਿਆਂ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ 90 ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ 90 ਦੇ ਹਰੇਕ ਗੁਣਨਖੰਡ ਜੋੜਿਆਂ ਵਿੱਚ ਹੋਣੇ ਚਾਹੀਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਾਨੂੰ 2 ਅਤੇ 5 ਦਾ ਜੋੜਾ ਬਣਾਉਣਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ 90 ਨੂੰ 2×5, ਭਾਵ 10 ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਉਹ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ $90 \times 10 = 900$ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 6.3

1. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗਮੂਲ ਵਿੱਚ ਇਕਾਈ ਅੰਕ ਕੀ ਆ ਸਕਦਾ ਹੈ?
   (i) 9801 (ii) 99856 (iii) 998001 (iv) 657666025
2. ਬਿਨ੍ਹਾਂ ਗਣਨਾ ਕੀਤੇ ਉਹ ਸੰਖਿਆ ਦੱਸੋ ਜੋ ਕਿ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ।
   (i) 153 (ii) 257 (iii) 408 (iv) 441
3. ਘਟਾਉ ਵਿਧੀ ਨਾਲ 100 ਅਤੇ 169 ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
4. ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :
   (i) 729 (ii) 400 (iii) 1764 (iv) 4096
   (v) 7744 (v) 9604 (vii) 5929 (viii) 9216
   (ix) 529 (x) 8100

5. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਦੇ ਲਈ ਉਹ ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਨਾਲ ਇਹ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਗੁਣਾ ਕਰਨ ਤੇ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਬਣ ਜਾਵੇ। ਇਸ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
   (i) 252 (ii) 180 (iii) 1008 (iv) 2028
   (v) 1458 (vi) 768
6. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਦੇ ਲਈ ਉਹ ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਨਾਲ ਇਸ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਵੰਡਣ ਤੇ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਬਣ ਜਾਵੇ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਪਤਾ ਕੀਤੀ ਗਈ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
   (i) 252 (ii) 2925 (iii) 396 (iv) 2645
   (v) 2800 (vi) 1620
7. ਇੱਕ ਸਕੂਲ ਵਿੱਚ ਜਮਾਤ VIII ਦੇ ਸਾਰੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੇ ਪ੍ਰਧਾਨ ਮੰਤਰੀ ਰਾਸ਼ਟਰੀ ਰਾਹਤ ਫੰਡ ਵਿੱਚ ₹ 2401 ਦਾਨ ਕੀਤੇ। ਹਰੇਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਨੇ ਉਨ੍ਹੇ ਹੀ ₹ ਦਾਨ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ, ਜਿੰਨੇ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਸਨ। ਜਮਾਤ ਦੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ।
8. ਇੱਕ ਬਾਗ ਵਿੱਚ 2025 ਪੌਦੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਗਾਏ ਗਏ ਹਨ। ਹਰੇਕ ਲਾਈਨ ਵਿੱਚ ਉਨੇ ਹੀ ਪੌਦੇ ਹਨ, ਜਿੰਨੀਆਂ ਲਾਈਨਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਲਾਈਨਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਲਾਈਨ ਵਿੱਚ ਪੌਦਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ।
9. ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਕਿ 4, 9 ਅਤੇ 10 ਹਰੇਕ ਨਾਲ ਵੰਡੀ ਜਾਵੇ?
10. ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਕਿ ਹਰੇਕ 8, 15 ਅਤੇ 20 ਨਾਲ ਵੰਡੀ ਜਾਵੇ।

6.5.4 ਵੰਡ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਵਰਗਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ

ਜਦੋਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵੱਡੀਆਂ ਹੋਣ ਤਾਂ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਵਰਗਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਲੰਬਾ ਅਤੇ ਔਖਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਸਮੱਸਿਆ ਤੋਂ ਨਿਕਲਣ ਲਈ ਵੰਡ ਵਿਧੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਇਸ ਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਵਰਗਮੂਲ ਵਿੱਚ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ।

ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਦੇਖੋ :

ਸੰਖਿਆ	ਵਰਗ	
10	100	ਜੋ 3 ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।
31	961	ਜੋ 3 ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।
32	1024	ਜੋ 4 ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।
99	9801	ਜੋ 4 ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵਰਗਮੂਲ ਵਿੱਚ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਬਾਰੇ ਅਸੀਂ ਕੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ 3 ਅੰਕਾਂ ਜਾਂ 4 ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਹੋਵੇ?

ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜਦੋਂ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ 3 ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਜਾਂ 4 ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਹੈ ਤਦ ਇਸਦਾ ਵਰਗਮੂਲ 2 ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਹੋਵੇਗਾ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਸਾਨੂੰ 5 ਜਾਂ 6 ਅੰਕਾਂ ਵਾਲੀ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਵਰਗਮੂਲ ਵਿੱਚ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦੱਸ ਸਕਦੇ ਹੋ?

ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟੀ 3 ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ 100 ਹੈ ਜੋ ਕਿ 10 ਦਾ ਵਰਗ ਹੈ ਅਤੇ 3 ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ 961 ਹੈ ਜੋ ਕਿ 31 ਦਾ ਵਰਗ ਹੈ। ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟੀ 4 ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ 1024 ਹੈ ਜੋ 32 ਦਾ ਵਰਗ ਹੈ ਅਤੇ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਡੀ 4 ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 9801 ਹੈ ਜੋ ਕਿ 99 ਦਾ ਵਰਗ ਹੈ।

ਸੋਚੋ, ਚਰਚਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਲਿਖੋ

> ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਜੇਕਰ n ਅੰਕ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸਦਾ ਵਰਗਮੂਲ ਵਿੱਚ $\frac{n}{2}$ ਅੰਕ ਹੋਣਗੇ ਜੇਕਰ n ਜਿਸਤ ਹੈ ਜਾਂ $\frac{(n+1)}{2}$ ਹੋਣਗੇ ਜੇਕਰ n ਟਾਂਕ ਹੈ?

ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀ ਵਿਧੀ ਕਿਸੇ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਵਰਗਮੂਲ ਵਿੱਚ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਉਪਯੋਗੀ ਹੋਵੇਗੀ।

- 529 ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਪਗਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਵਰਗਮੂਲ ਵਿੱਚ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਅੰਦਾਜ਼ਾ ਲਗਾ ਸਕਦੇ ਹੋ?

ਪਗ 1 ਇਕਾਈ ਸਥਾਨ ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਹਰੇਕ ਜੋੜੇ ਤੇ ਬਾਰ ਲਗਾਉ। ਜੇ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਟਾਂਕ ਹੈ ਤਾਂ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਇੱਕ ਅੰਕ ਤੇ ਬਾਰ ਲਗਾਉ। $\overline{5}\,\overline{29}$ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਦੇ ਹਨ।

ਪਗ 2 ਉਹ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦਾ ਵਰਗ ਸਭ ਤੋਂ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦੇ ਬਾਰ ਦੇ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀ ਸੰਖਿਆ ਤੋਂ ਘੱਟ ਜਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ ($2^2 < 5 < 3^2$)। ਸਭ ਤੋਂ ਖੱਬੇ ਵਾਲੇ ਬਾਰ ਹੇਠਾਂ ਭਾਜ (ਇੱਥੇ 5) ਦੇ ਨਾਲ ਦੋਨੋਂ ਸਮਾਨ ਭਾਜਕ ਅਤੇ ਭਾਗਫਲ (ਇੱਥੇ 2 ਹੈ) ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਸ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਲਵੋ। ਭਾਗ ਕਰੋ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਪਤਾ ਕਰੋ (ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ 1 ਹੈ।)

```
      2
   ┌─────
 2 │ 5̄ 2̄9̄
   │-4
 ──┼─────
   │ 1
```

ਪਗ 3 ਅਗਲੀ ਬਾਰ ਦੇ ਹੇਠਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਬਾਕੀ ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਲਿਖੋ। (ਜਿਵੇਂ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ 29 ਹੈ।) ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਗਲੀ ਭਾਗ 129 ਹੋਵੇਗੀ।

```
      2
   ┌─────
 2 │ 5̄ 2̄9̄
   │-4
 ──┼─────
   │ 129
```

ਪਗ 4 ਭਾਗਫਲ ਨੂੰ ਦੁੱਗਣਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਖਾਲੀ ਥਾਂ ਰੱਖ ਕੇ ਲਿਖੋ।

```
      2
   ┌─────
 2 │ 5̄ 2̄9̄
   │-4
 ──┼─────
 4_│ 129
```

ਪਗ 5 ਖਾਲੀ ਥਾਂ ਨੂੰ ਭਰਨ ਦੇ ਲਈ ਉਸ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਡੇ ਸੰਭਵ ਅੰਕ ਦਾ ਅੰਦਾਜ਼ਾ ਲਗਾਓ, ਜੋ ਕਿ ਭਾਗਫਲ ਵਿੱਚ ਵੀ ਨਵਾਂ ਅੰਕ ਹੋਵੇਗਾ ਤਾਂ ਕਿ ਨਵੇਂ ਭਾਜਕ ਨੂੰ ਨਵੇਂ ਭਾਗਫਲ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ ਤੇ ਗੁਣਨਫਲ ਭਾਜਕ ਵਿੱਚ ਘੱਟ ਜਾਂ ਬਰਾਬਰ ਸੰਖਿਆ ਹੋਵੇਗੀ।

ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ $42 \times 2 = 84$

ਅਤੇ $43 \times 3 = 129$, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਵਾਂ ਅੰਕ 3 ਚੁਣੋ, ਜਿਸ ਨਾਲ ਬਾਕੀ 0 ਜਾਂ ਭਾਜਕ ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਆ ਜਾਵੇ।

```
      23
    ┌─────
 2  │ 5̄ 2̄9̄
    │-4
 ───┼─────
 43 │ 129
    │-129
 ───┼─────
    │   0
```

ਪਗ 6 ਕਿਉਂਕਿ ਬਾਕੀ 0 ਹੈ ਅਤੇ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਅੰਕ ਬਾਕੀ ਨਹੀਂ ਹੈ,

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\sqrt{529} = 23$

- ਹੁਣ $\sqrt{4096}$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ :

ਪਗ 1 ਇਕਾਈ ਸਥਾਨ ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਹਰੇਕ ਜੋੜੇ ਦੇ ਉੱਪਰ ਬਾਰ ਦਾ ਚਿੰਨ੍ਹ ਲਗਾਉ ($\overline{40}\,\overline{96}$)।

ਪਗ 2 ਇੱਕ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਸਭ ਤੋਂ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦੇ ਬਾਰ ਦੇ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀ ਸੰਖਿਆ ਤੋਂ ਘੱਟ ਜਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ। ($6^2 < 40 < 7^2$)। ਇਸ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਦੋਨੋਂ ਭਾਜਕ, ਭਾਗਫਲ ਲੈ ਕੇ ਅਤੇ ਸਭ ਤੋਂ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਵਾਲੇ ਬਾਰ ਦੇ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਭਾਜ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ। ਭਾਗ ਕਰੋ ਅਤੇ ਬਾਕੀ (ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਜਿਵੇਂ 4) ਪਤਾ ਕਰੋ।

```
      6
   ┌──────
 6 │ 4̄0̄ 9̄6̄
   │-36
 ──┼──────
   │  4
```

	6
6	$\overline{40}\,\overline{96}$
	−36
	496

ਪਗ 3 ਅਗਲੀ ਬਾਰ ਦੇ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀ ਸੰਖਿਆ (ਜਿਵੇਂ 96) ਨੂੰ ਬਾਕੀ ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਲਿਖੋ। ਨਵਾਂ ਭਾਜ 496 ਹੋਵੇਗਾ।

	6
6	$\overline{40}\,\overline{96}$
	−36
12_	496

ਪਗ 4 ਭਾਗਫਲ ਦਾ ਦੁਗਣਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਖਾਲੀ ਥਾਂ ਰੱਖ ਕੇ ਲਿਖੋ।

ਪਗ 5 ਖਾਲੀ ਥਾਂ ਨੂੰ ਭਰਨ ਦੇ ਲਈ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਡੇ ਸੰਭਵ ਅੰਕ ਦਾ ਅੰਦਾਜ਼ਾ ਲਗਾਓ, ਜੋ ਕਿ ਭਾਗਫਲ ਵਿੱਚ ਵੀ ਨਵਾਂ ਅੰਕ ਹੋਵੇਗਾ ਤਾਂ ਕਿ ਨਵੇਂ ਭਾਜਕ ਨੂੰ ਨਵੇਂ ਭਾਗਫਲ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ ਤੇ ਗੁਣਨਫਲ ਭਾਜਕ ਵਿੱਚ ਘੱਟ ਜਾਂ ਬਰਾਬਰ ਸੰਖਿਆ ਹੋਵੇਗੀ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $124 \times 4 = 496$ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਭਾਗਫਲ ਵਿੱਚ ਨਵਾਂ ਅੰਕ 4 ਹੈ। ਬਾਕੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

	64
6	$\overline{40}\,\overline{96}$
	−36
124	496
	−496
	0

ਪਗ 6 ਕਿਉਂਕਿ ਬਾਕੀ 0 ਹੈ ਅਤੇ ਕੋਈ ਬਾਰ ਬਾਕੀ ਨਹੀਂ ਹੈ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\sqrt{4096} = 64$ ਹੈ।

ਵਰਗਮੂਲ ਦੇ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰਨਾ

ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਵਰਗਮੂਲ ਵਿੱਚ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਬਾਰ ਦੇ ਚਿੰਨ੍ਹਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

$$\sqrt{\overline{5}\,\overline{29}} = 23 \quad \text{ਅਤੇ} \quad \sqrt{\overline{40}\,\overline{96}} = 64$$

ਇਹ ਦੋਨੋਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 529 ਅਤੇ 4096 ਵਿੱਚ ਬਾਰ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 2 ਹੈ, ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਵਰਗਮੂਲ ਵਿੱਚ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 2 ਹੈ।

ਕੀ ਤੁਸੀਂ 14400 ਦੇ ਵਰਗਮੂਲ ਵਿੱਚ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦੱਸ ਸਕਦੇ ਹੋ? ਬਾਰ ਲਗਾਉਣ ਤੇ ਸਾਨੂੰ $\overline{1}\,\overline{44}\,\overline{00}$ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਇੱਥੇ ਬਾਰ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 3 ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵਰਗਮੂਲ 3 ਅੰਕ ਦਾ ਹੋਵੇਗਾ।

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗਮੂਲ ਵਿੱਚ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ, ਵਰਗਮੂਲ ਪਤਾ ਕੀਤੇ ਬਿਨ੍ਹਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) 25600 (ii) 100000000 (iii) 36864

ਉਦਾਹਰਣ 9 : ਵਰਗਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰੋ : (i) 729 (ii) 1296

ਹੱਲ :

(i)

	27
2	$\overline{7}\,\overline{29}$
	−4
47	329
	329
	0

ਇਸ ਲਈ $\sqrt{729} = 27$

(ii)

	36
3	$\overline{12}\,\overline{96}$
	−9
66	396
	396
	0

ਇਸ ਲਈ $\sqrt{1296} = 36$

	74
7	$\overline{56}\,\overline{07}$
	−49
144	707
	−576
	131

ਉਦਾਹਰਣ 10 : ਉਹ ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਨੂੰ 5607 ਵਿੱਚੋਂ ਘਟਾਉਣ ਤੇ ਉਹ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਬਣ ਜਾਵੇ। ਇਸ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਆਉ, ਵੰਡ ਵਿਧੀ ਨਾਲ $\sqrt{5607}$ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੀਏ। ਸਾਨੂੰ 131 ਬਾਕੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ 74^2, 5607 ਨਾਲੋਂ 131 ਘੱਟ ਹੈ।

ਭਾਵ ਕਿ ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚੋਂ ਉਸਦਾ ਬਾਕੀ ਘਟਾ ਦਿੱਤਾ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲੋੜੀਂਦੀ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਹੈ $5607 - 131 = 5476$ ਅਤੇ $\sqrt{5476} = 74$

ਉਦਾਹਰਣ 11 : ਚਾਰ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ ਦੱਸੋ, ਜੋ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਹੋਵੇ।

ਹੱਲ : ਚਾਰ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ = 9999 ਹੈ। ਅਸੀਂ ਵੰਡ ਵਿਧੀ ਨਾਲ $\sqrt{9999}$ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਜਿਸਦਾ ਬਾਕੀ 198 ਹੈ। ਇਹ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ 99^2, 9999 ਨਾਲ 198 ਘੱਟ ਹੈ।

	99
9	$\overline{99}\,\overline{99}$
	−81
189	1899
	−1701
	198

ਇਸ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚੋਂ ਬਾਕੀ ਘਟਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲੋੜੀਂਦੀ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਹੈ $9999 - 198 = 9801$

ਅਤੇ $\sqrt{9801} = 99$

ਉਦਾਹਰਣ 12 : ਉਹ ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਨੂੰ 1300 ਵਿੱਚ ਜੋੜਨ ਤੇ ਉਹ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਬਣ ਜਾਵੇ। ਇਸ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਵੰਡ ਵਿਧੀ ਨਾਲ $\sqrt{1300}$ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇੱਥੇ ਬਾਕੀ 4 ਹੈ। ਇਹ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ $36^2 < 1300$

ਅਗਲੀ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ $37^2 = 1369$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸੰਖਿਆ = $37^2 - 1300 = 1369 - 1300 = 69$

	36
3	$\overline{13}\,\overline{00}$
	−9
66	400
	−396
	4

6.6 ਦਸ਼ਮਲਵ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ

ਸੰਖਿਆ $\sqrt{17.64}$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

ਪਗ 1 ਦਸ਼ਮਲਵ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਤੇ ਸਧਾਰਨ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਾਰ ਲਗਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। (ਜਿਵੇਂ ਕਿ 17) ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਾਲੇ ਹਿੱਸੇ ਤੇ ਪਹਿਲੇ ਦਸ਼ਮਲਵ ਸਥਾਨ ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰ ਕੇ ਬਾਰ ਲਗਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਸਧਾਰਨ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅੱਗੇ ਵਧਦੇ ਜਾਂਦੇ ਹਾਂ।

ਸਾਨੂੰ $\overline{17}.\overline{64}$ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।

ਪਗ 2 ਹੁਣ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਅੱਗੇ ਵਧਦੇ ਹਾਂ। 17 ਤੇ ਬਾਰ ਸਭ ਤੋਂ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਵੱਲ ਹੈ ਅਤੇ $4^2 < 17 < 5^2$, ਇਸ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਦੋਨੋਂ ਭਾਜਕ ਅਤੇ ਭਾਗਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਵੋ ਅਤੇ ਸਭ ਤੋਂ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਬਾਰ ਹੇਠਾਂ ਵਾਲੀ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਭਾਜ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਓ (ਜਿਵੇਂ 17)। ਭਾਗ ਕਰੋ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

	4
4	$\overline{17}.\overline{64}$
	−16
	1

ਪਗ 3 ਬਾਕੀ 1 ਹੈ। ਅਗਲੀ ਬਾਰ ਦੇ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਸੰਖਿਆ ਜਿਵੇਂ 64 ਬਾਕੀ ਦੇ ਸੱਜੇ ਲਿਖੋ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ 164 ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰੋ।

	4
4	$\overline{17}.\overline{64}$
	−16
8_	1 64

ਪਗ 4 ਭਾਗਫਲ ਨੂੰ ਦੁਗਣਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਖਾਲੀ ਥਾਂ ਰੱਖ ਕੇ ਲਿਖੋ। ਕਿਉਂਕਿ 64 ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਾਲੇ ਹਿੱਸੇ ਵਿੱਚ ਸੀ, ਇਸ ਲਈ ਭਾਗਫਲ ਵਿੱਚ ਦਸ਼ਮਲਵ ਲਿਖੋ।

	4.
4	17.64
	−16
82	164

ਪਗ 5 ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $82 \times 2 = 164$, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਵੀਂ ਸੰਖਿਆ 2 ਹੈ। ਭਾਗ ਕਰੋ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

	4.2
4	17.64
	−16
82	164
	−164
	0

ਪਗ 6 ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਾਕੀ 0 ਹੈ। ਹੁਣ ਕੋਈ ਬਾਰ ਬਾਕੀ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\sqrt{17.64} = 4.2$

ਉਦਾਹਰਣ 13 : 12.25 ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ :

	3.5
3	$\overline{12}.\overline{25}$
	−9
65	325
	325
	0

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\sqrt{12.25} = 3.5$

ਕਿਸ ਪਾਸੇ ਵੱਧਣਾ ਹੈ

ਸੰਖਿਆ 176.341 ਤੇ ਧਿਆਨ ਦਿਓ। ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਅਤੇ ਦਸ਼ਮਲਵ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਤੇ ਬਾਰ ਲਗਾਉ। ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਾਲੇ ਹਿੱਸੇ ਵਿੱਚ ਬਾਰ ਲਗਾਉਣ ਦਾ ਢੰਗ, ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਵਾਲੇ ਹਿੱਸੇ ਤੋਂ ਕਿਵੇਂ ਵੱਖਰਾ ਹੈ ? 176 ਤੇ ਧਿਆਨ ਦਿਓ, ਅਸੀਂ ਦਸ਼ਮਲਵ ਦੇ ਕੋਲ ਇਕਾਈ ਸਥਾਨ ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰ ਕੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਜਾਂਦੇ ਹਾਂ। ਪਹਿਲੀ ਬਾਰ 76 ਦੇ ਉੱਪਰ ਅਤੇ ਦੂਸਰੀ ਬਾਰ 1 ਦੇ ਉੱਪਰ ਹੈ। .341 ਦੇ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਦਸ਼ਮਲਵ ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਕੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਜਾਂਦੇ ਹਾਂ। ਪਹਿਲੀ ਬਾਰ 34 ਦੇ ਉੱਪਰ ਅਤੇ ਦੂਸਰੀ ਬਾਰ ਲਗਾਉਣ ਦੇ ਲਈ 1 ਦੇ ਬਾਅਦ 0 ਰੱਖਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $.\overline{34}\overline{10}$ ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

	48
4	$\overline{23}\overline{04}$
	−16
88	704
	704
	0

ਉਦਾਹਰਣ 14 : ਇੱਕ ਵਰਗਾਕਾਰ ਖੇਤ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ 2304 m^2 ਹੈ। ਇਸ ਵਰਗਾਕਾਰ ਖੇਤ ਦੀ ਭੁਜਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਵਰਗਾਕਾਰ ਖੇਤ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = 2304 m^2

ਇਸ ਲਈ, ਵਰਗਾਕਾਰ ਖੇਤ ਦੀ ਭੁਜਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = $\sqrt{2304}$ m^2

ਅਸੀਂ ਦੇਖਿਆ ਕਿ $\sqrt{2304} = 48$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਵਰਗਾਕਾਰ ਖੇਤ ਦੀ ਭੁਜਾ 48 m ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 15 : ਇੱਕ ਸਕੂਲ ਵਿੱਚ 2401 ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਹਨ। ਪੀ.ਟੀ. ਅਧਿਆਪਕ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਲਾਈਨਾਂ ਵਿੱਚ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਖੜੇ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਨ ਕਿ ਕਤਾਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ, ਹਰੇਕ ਕਤਾਰ ਵਿੱਚ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ। ਕਤਾਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਵੋ ਕਤਾਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ x ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਹਰੇਕ ਕਤਾਰ ਵਿੱਚ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = x

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = $x \times x = x^2$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $x^2 = 2401$ ਜਿਵੇਂ ਕਿ $x = \sqrt{2401} = 49$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਕਤਾਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = 49

	49
4	$\overline{24}\overline{01}$
	16
89	801
	801
	0

6.7 ਵਰਗਮੂਲ ਦਾ ਅੰਦਾਜ਼ਾ ਲਗਾਉਣਾ

ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

1. ਦੇਵੇਸ਼ੀ ਦੇ ਕੋਲ ਕੱਪੜੇ ਦਾ ਇੱਕ ਵਰਗਾਕਾਰ ਟੁੱਕੜਾ ਹੈ। ਜਿਸਦਾ ਖੇਤਰਫਲ 125 cm^2 ਹੈ। ਉਹ ਜਾਨਣਾ ਚਾਹੁੰਦੀ ਹੈ ਕਿ ਉਹ 15 cm ਭੁਜਾ ਦਾ ਰੁਮਾਲ ਬਣਾ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਜੇ ਇਹ ਸੰਭਵ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਜਾਨਣਾ ਚਾਹੁੰਦੀ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਟੁੱਕੜੇ ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਕਿੰਨੀ ਲੰਬਾਈ ਦਾ ਰੁਮਾਲ ਬਣਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

2. ਮੀਨਾ ਅਤੇ ਸ਼ੋਭਾ ਨੇ ਇੱਕ ਖੇਡ ਖੇਡੀ। ਪਹਿਲੀ ਸੰਖਿਆ ਦਿੰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਦੂਸਰੀ ਉਸਦਾ ਵਰਗਮੂਲ ਦਿੰਦੀ ਹੈ। ਮੀਨਾ ਨੇ ਪਹਿਲਾਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕੀਤਾ। ਉਸਨੇ 25 ਬੋਲਿਆ ਅਤੇ ਸ਼ੋਭਾ ਨੇ ਜਲਦੀ ਨਾਲ 5 ਉੱਤਰ ਦਿੱਤਾ। ਤਦ ਸ਼ੋਭਾ ਨੇ ਕਿਹਾ 81 ਅਤੇ ਮੀਨਾ ਨੇ 9 ਉੱਤਰ ਦਿੱਤਾ। ਇਹ ਤਦ ਤੱਕ ਚਲਦਾ ਰਿਹਾ ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਮੀਨਾ ਸੰਖਿਆ 250 ਤੱਕ ਨਾ ਪਹੁੰਚ ਗਈ। ਹੁਣ ਸ਼ੋਭਾ ਉੱਤਰ ਨਹੀਂ ਦੇ ਸਕੀ ਤਾਂ ਮੀਨਾ ਨੇ ਕਿਹਾ, ਸ਼ੋਭਾ ਤੂੰ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦੱਸ, ਜਿਸਦਾ ਵਰਗ 250 ਦੇ ਨੇੜੇ ਹੋਵੇ।

ਇਹਨਾਂ ਸਾਰੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਵਰਗਮੂਲ ਦੇ ਅੰਦਾਜ਼ਾ ਲਾਉਣ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $100 < 250 < 400$ ਅਤੇ $\sqrt{100} = 10$ ਅਤੇ $\sqrt{400} = 20$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $10 < \sqrt{250} < 20$

ਪਰ ਫਿਰ ਵੀ ਅਸੀਂ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਨੇੜੇ ਨਹੀਂ ਹਾਂ।

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $15^2 = 225$ ਅਤੇ $16^2 = 256$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $15 < \sqrt{250} < 16$ ਅਤੇ 250, ਜੋ ਕਿ 225 ਦੇ ਮੁਕਾਬਲੇ 256 ਦੇ ਬਹੁਤ ਨੇੜੇ ਹਨ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\sqrt{250}$ ਲਗਭਗ 16 ਹੈ।

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਨੇੜੇ ਤੋਂ ਨੇੜੇ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਅੰਦਾਜ਼ਾ ਲਗਾਓ :

(i) $\sqrt{80}$ (ii) $\sqrt{1000}$ (iii) $\sqrt{350}$ (iv) $\sqrt{500}$

ਅਭਿਆਸ 6.4

1. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ, ਵੰਡ ਵਿਧੀ ਦੁਆਰਾ ਪਤਾ ਕਰੋ :
   (i) 2304 (ii) 4489 (iii) 3481 (iv) 529
   (v) 3249 (vi) 1369 (vii) 5776 (viii) 7921
   (ix) 576 (x) 1024 (xi) 3136 (xii) 900
2. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰੋ : (ਬਿਨ੍ਹਾਂ ਗਣਨਾ ਕੀਤੇ)
   (i) 64 (ii) 144 (iii) 4489 (iv) 27225
   (v) 390625
3. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਦਸ਼ਮਲਵ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :
   (i) 2.56 (ii) 7.29 (iii) 51.84 (iv) 42.25
   (v) 31.36
4. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੀ ਛੋਟੀ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਕਿਹੜੀ ਸੰਖਿਆ ਘਟਾਈ ਜਾਵੇ ਕਿ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਜਾਵੇ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ :
   (i) 402 (ii) 1989 (iii) 3250 (iv) 825
   (v) 4000
5. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਵਿੱਚ ਕਿਹੜੀ ਛੋਟੀ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਕਿਹੜੀ ਸੰਖਿਆ ਜੋੜੀ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਕਿ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਜਾਵੇ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ :
   (i) 525 (ii) 1750 (iii) 252 (iv) 1825
   (v) 6412

6. ਕਿਸੇ ਵਰਗ ਦੀ ਭੁਜਾ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦਾ ਖੇਤਰਫਲ m^2 ਹੈ।
7. ਕਿਸੇ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਵਿੱਚ, $\angle B = 90°$
   (a) ਜੇ AB = 6 cm, BC = 8 cm, ਹੈ ਤਾਂ AC ਪਤਾ ਕਰੋ।
   (b) ਜੇ AC = 13 cm, BC = 5 cm, ਹੈ ਤਾਂ AB ਪਤਾ ਕਰੋ।
8. ਇੱਕ ਮਾਲੀ ਦੇ ਕੋਲ 1000 ਪੌਦੇ ਹਨ। ਉਹ ਇਹਨਾਂ ਪੌਦਿਆਂ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਗਾਉਣਾ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਕਤਾਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਕਤਾਰ ਵਿੱਚ ਪੌਦਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ। ਇਸ ਦੇ ਲਈ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਪੌਦਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੀ ਉਸ ਨੂੰ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ।
9. ਇੱਕ ਸਕੂਲ ਵਿੱਚ 500 ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਹਨ। ਪੀ.ਟੀ. ਦੇ ਅਭਿਆਸ ਦੇ ਲਈ ਇਹ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਖੜ੍ਹੇ ਕੀਤੇ ਗਏ ਹਨ ਕਿ ਕਤਾਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ, ਹਰੇਕ ਕਤਾਰ ਵਿੱਚ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਰਨ ਲਈ ਕਿੰਨੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੂੰ ਬਾਹਰ ਜਾਣਾ ਹੋਵੇਗਾ?

ਅਸੀਂ ਕੀ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀ?

1. ਜੇ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ m ਨੂੰ n^2 ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਇੱਥੇ n ਵੀ ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਤਦ m ਇੱਕ **ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ** ਹੈ।
2. ਸਾਰੀਆਂ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਅੰਤ ਇਕਾਈ ਸਥਾਨ ਤੇ 0, 1, 4, 5, 6 ਜਾਂ 9 ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
3. ਵਰਗ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਕੇਵਲ ਜਿਸਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
4. ਵਰਗਮੂਲ, ਵਰਗ ਦੇ ਉਲਟ ਕਿਰਿਆ ਹੈ।
5. ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਦੋ ਪੂਰਨ ਵਰਗਮੂਲ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

   ਧਨਾਤਮਕ ਵਰਗਮੂਲ ਨੂੰ ਸੰਕੇਤ $\sqrt{\ }$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

   ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ $3^2 = 9$, $\sqrt{9} = 3$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਅਧਿਆਇ 7

ਘਣ ਅਤੇ ਘਣਮੂਲ

7.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਇਹ ਕਹਾਣੀ ਭਾਰਤ ਦੀ ਮਹਾਨ ਪ੍ਰਤਿਭਾਵਾਨ ਹਿਸਾਬਦਾਨਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਰਾਮਾਨੁਜਨ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਹੈ। ਇੱਕ ਵਾਰ ਇੱਕ ਮਸ਼ਹੂਰ ਹਿਸਾਬਦਾਨ ਪ੍ਰੋਫੈਸਰ ਜੀ. ਐਚ. ਹਾਰਡੀ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਮਿਲਣ ਟੈਕਸੀ ਵਿੱਚ ਆਏ ਜਿਸਦਾ ਨੰਬਰ 1729 ਸੀ। ਰਾਮਾਨੁਜਨ ਨਾਲ ਗੱਲ ਕਰਦੇ ਸਮੇਂ ਹਾਰਡੀ ਨੇ ਇਸ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਇੱਕ ਨੀਰਸ (dull) ਸੰਖਿਆ ਦੱਸਿਆ। ਰਾਮਾਨੁਜਨ ਨੇ ਜਲਦੀ ਨਾਲ ਧਿਆਨ ਦਿਵਾਇਆ ਕਿ 1729 ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਰੋਚਕ ਸੰਖਿਆ ਸੀ। ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਕਿਹਾ ਕਿ ਇਸ ਨੂੰ ਦੋ ਘਣਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦੋ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਢੰਗਾਂ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$1729 = 1728 + 1 = 12^3 + 1^3$$

$$1729 = 1000 + 729 = 10^3 + 9^3$$

ਤਦ ਤੋਂ ਇਹ ਸੰਖਿਆ 1729 ਨੂੰ ਹਾਰਡੀ-ਰਾਮਾਨੁਜਨ ਸੰਖਿਆ (Hardy - Ramanujan Number) ਕਿਹਾ ਜਾਣ ਲੱਗਾ। ਜਦੋਂ ਕਿ 1729 ਦੀ ਇਹ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ ਰਾਮਾਨੁਜਨ ਤੋਂ ਲਗਭਗ 300 ਸਾਲ ਪਹਿਲਾਂ ਵੀ ਪਤਾ ਸੀ।

ਹਾਰਡੀ-ਰਾਮਾਨੁਜਨ ਸੰਖਿਆ

1729 ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਹਾਰਡੀ-ਰਾਮਾਨੁਜਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਅਨੇਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ : ਉਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਕੁਝ ਹਨ 4104 (2, 16; 9, 15), 13832 (18, 20; 2, 024)। ਬਰੈਕਟਾਂ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲੈ ਕੇ ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੋ।

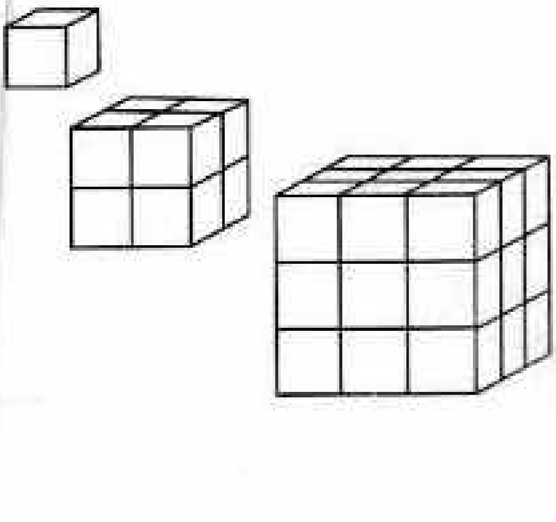
ਰਾਮਾਨੁਜਨ ਨੂੰ ਇਸਦੀ ਜਾਣਕਾਰੀ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸੀ ? ਉਹ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨਾਲ ਪਿਆਰ ਕਰਦੇ ਸਨ। ਆਪਣੇ ਸੰਪੂਰਨ ਜੀਵਨ ਵਿੱਚ, ਉਹ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਨਾਲ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਰਹੇ। ਸੰਭਵ ਤੌਰ ਤੇ ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਉਹ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਤਾ ਕੀਤੀਆਂ ਹੋਣਗੀਆਂ ਜਿਹੜੀਆਂ ਦੋ ਵਰਗਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਅਤੇ ਨਾਲ ਹੀ ਦੋ ਘਣਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਈਆਂ ਜਾ ਸਕਦੀਆਂ ਸਨ।

ਉਹ ਆਕ੍ਰਿਤੀਆਂ ਜਿਸ ਦੇ 3 ਪਸਾਰ (dimensions) ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਠੋਸ ਆਕ੍ਰਿਤੀਆਂ ਆਖਦੇ ਹਾਂ।

ਘਣਾਂ ਦੇ ਅਨੇਕ ਦੂਸਰੇ ਰੋਚਕ ਪੈਟਰਨ (patterns) ਹਨ। ਆਓ ਅਸੀਂ ਘਣਾਂ, ਘਣਮੂਲਾਂ (cube roots) ਅਤੇ ਇਸ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਅਨੇਕ ਰੋਚਕ ਤੱਥਾਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਸਿੱਖੀਏ।

7.2 ਘਣ

ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ ਸ਼ਬਦ 'ਘਣ' ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਰੇਖਾ ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਘਣ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਠੋਸ ਚਿੱਤਰ ਹੈ, ਜਿਸਦੀ ਸਾਰੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। 1 cm ਭੁਜਾ ਵਾਲੇ ਕਿੰਨੇ ਘਣਾਂ ਨਾਲ 2 cm ਭੁਜਾ ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਘਣ ਬਣੇਗਾ ? 1 cm ਭੁਜਾ ਵਾਲੇ ਕਿੰਨੇ ਘਣਾਂ ਨਾਲ 3 cm ਭੁਜਾ ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਘਣ ਬਣੇਗਾ ?



ਸੰਖਿਆਵਾਂ 1, 8, 27, ... 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ, ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ **ਪੂਰਨ ਘਣ (perfect cubes)** ਜਾਂ **ਘਣ ਸੰਖਿਆਵਾਂ (cube numbers)** ਅਖਵਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਦੱਸ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਇਹ ਨਾਂ ਕਿਉਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਨ? ਇਸ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਸੰਖਿਆ ਤਦ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜੇ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਉਸੇ ਨਾਲ ਤਿੰਨ ਵਾਰ ਗੁਣਾ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $1 = 1\times1\times1 = 1^3$, $8 = 2\times2\times2 = 2^3$, $27 = 3\times3\times3 = 3^3$ ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ $5^3 = 5\times5\times5 = 125$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ 125 ਇੱਕ ਘਣ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਕੀ 9 ਇੱਕ ਘਣ ਸੰਖਿਆ ਹੈ? ਨਹੀਂ, ਕਿਉਂਕਿ $9 = 3 \times 3$ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੋਈ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ ਜਿਸ ਨੂੰ ਉਸੇ ਨਾਲ ਤਿੰਨ ਵਾਰ ਗੁਣਾ ਕਰਨ 'ਤੇ 9 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇ। ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $2\times2\times2 = 8$ ਅਤੇ $3\times3\times3 = 27$ ਹੈ। ਇਸ ਨਾਲ ਇਹ ਪਤਾ ਲਗਦਾ ਹੈ ਕਿ 9 ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਘਣ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਹੇਠਾਂ 1 ਤੋਂ 10 ਤੱਕ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਘਣ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਨ :

ਸਾਰਣੀ 1

ਸੰਖਿਆਵਾਂ 729, 1000, 1728 ਵੀ ਪੂਰਨ ਘਣ ਹੈ।

ਸੰਖਿਆ	ਘਣ
1	$1^3 = 1$
2	$2^3 = 8$
3	$3^3 = 27$
4	$4^3 = 64$
5	$5^3 =$ ____
6	$6^3 =$ ____
7	$7^3 =$ ____
8	$8^3 =$ ____
9	$9^3 =$ ____
10	$10^3 =$ ____

ਪੂਰਾ ਕਰੋ।

ਇੱਥੇ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ 1 ਤੋਂ 1000 ਤੱਕ ਸਿਰਫ ਦਸ ਪੂਰਨ ਘਣ ਹਨ। (ਇਸਦੀ ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ) 1 ਤੋਂ 100 ਤੱਕ ਕਿੰਨੇ ਪੂਰਨ ਘਣ ਹਨ? ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਘਣਾਂ ਨੂੰ ਦੇਖੋ। ਕੀ ਇਹ ਸਾਰੇ ਜਿਸਤ ਹਨ? ਤੁਸੀਂ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਘਣਾਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਕੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ? ਹੁਣ 11 ਤੋਂ 20 ਤੱਕ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਘਣ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਨ :

ਸਾਰਣੀ 2

ਅਸੀਂ ਜਿਸਤ ਹਾਂ ਅਤੇ ਸਾਡੇ ਘਣ ਵੀ ਜਿਸਤ ਹਨ।

ਸੰਖਿਆ	ਘਣ
11	1331
12	1728
13	2197
14	2744
15	3375
16	4096
17	4913
18	5832
19	6859
20	8000

ਅਸੀਂ ਟਾਂਕ ਹਾਂ ਅਤੇ ਸਾਡੇ ਘਣ ਵੀ ਟਾਂਕ ਹਨ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੁੱਝ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਇਕਾਈ ਅੰਕ 1 ਹੈ। ਇਸ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਘਣ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਉਹ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਘਣ ਦੇ ਇਕਾਈ ਦੇ ਅੰਕ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ। ਜਿਸਦਾ ਇਕਾਈ ਦਾ ਅੰਕ 1 ਹੈ ?

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ, ਉਹ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਘਣਾਂ ਦੇ ਇਕਾਈ ਦੇ ਅੰਕਾਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਇਕਾਈ ਦੇ ਅੰਕ 2, 3, 4 ਆਦਿ ਹਨ।

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਦੇ ਘਣ ਦੇ ਇਕਾਈ ਦਾ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) 3331 (ii) 8888 (iii) 149 (iv) 1005
(v) 1024 (vi) 77 (vii) 5022 (viii) 53

7.2.1 ਕੁੱਝ ਰੋਚਕ ਪੈਟਰਨ

1. ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਜੋੜਨਾ

ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜਿਆਂ ਦੇ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਪੈਟਰਨ ਦੇਖੋ :

$$1 = 1 = 1^3$$
$$3 + 5 = 8 = 2^3$$
$$7 + 9 + 11 = 27 = 3^3$$
$$13 + 15 + 17 + 19 = 64 = 4^3$$
$$21 + 23 + 25 + 27 + 29 = 125 = 5^3$$

ਕੀ ਇਹ ਰੋਚਕ ਨਹੀਂ ਹੈ ? ਜੋੜ 10^3 ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਕਿੰਨੀਆਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੋਵੇਗੀ ?

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

ਉਪਰੋਕਤ ਪੈਟਰਨ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਓ :

(a) 6^3 (b) 8^3 (c) 7^3

ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਪੈਟਰਨ ਨੂੰ ਦੇਖੋ :

$$2^3 - 1^3 = 1 + 2 \times 1 \times 3$$
$$3^3 - 2^3 = 1 + 3 \times 2 \times 3$$
$$4^3 - 3^3 = 1 + 4 \times 3 \times 3$$

ਉਪਰੋਕਤ ਪੈਟਰਨ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $7^3 - 6^3$ (ii) $12^3 - 11^3$ (iii) $20^3 - 19^3$ (iv) $51^3 - 50^3$

2. ਘਣ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ

ਕੁੱਝ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਘਣਾਂ ਦੇ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ	ਉਸਦੇ ਘਣ ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ
$4 = 2 \times 2$	$4^3 = 64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^3 \times 2^3$
$6 = 2 \times 3$	$6^3 = 216 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^3$
$15 = 3 \times 5$	$15^3 = 3375 = 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 = 3^3 \times 5^3$
$12 = 2 \times 2 \times 3$	$12^3 = 1728 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$ $= 2^3 \times 2^3 \times 3^3$

ਉਸੇ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਘਣ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ, ਤਿੰਨ ਵਾਰ ਆਉਂਦਾ ਹੈ।

2	216
2	108
2	54
3	27
3	9
3	3
	1

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਹਰੇਕ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਉਸ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਘਣ ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਵਾਰ ਆਉਂਦਾ ਹੈ।

> ਕੀ ਤੁਹਾਨੂੰ ਯਾਦ ਹੈ ਕਿ $a^m \times b^m = (a \times b)^m$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ?

ਜੇ ਕਿਸੇ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਗੁਣਨਖੰਡ ਤਿੰਨ ਵਾਰ ਆਉਂਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਕੀ ਉਹ ਸੰਖਿਆ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਘਣ ਹੁੰਦੀ ਹੈ? ਇਸਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਸੋਚੋ। ਕੀ 216 ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਘਣ ਹੈ?

ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਦੁਆਰਾ, $216 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$

ਹਰੇਕ ਗੁਣਨਖੰਡ ਤਿੰਨ ਵਾਰ ਆਉਂਦਾ ਹੈ $216 = 2^3 \times 3^3 = (2 \times 3)^3 = 6^3$ ਜੋ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਘਣ ਹੈ।

ਕੀ 729 ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਘਣ ਹੈ? $729 = \underline{3 \times 3 \times 3} \times \underline{3 \times 3 \times 3}$

ਹਾਂ 729 ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਘਣ ਹੈ।

> ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੇ ਤਿੰਨ-ਤਿੰਨ ਦੇ ਸਮੂਹ ਬਣਾਏ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ।

ਆਉ, ਹੁਣ 500 ਦੇ ਲਈ ਇਸ ਦੀ ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ :

500 ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹਨ : $2 \times 2 \times \underline{5 \times 5 \times 5}$

ਇਸ ਲਈ 500 ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਘਣ ਨਹੀਂ ਹੈ।

> ਇਸ ਗੁਣਨਖੰਡ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਵਾਰ 5 ਹੈ, ਪਰ ਦੋ ਸਿਰਫ 2 ਵਾਰ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਕੀ 243 ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਘਣ ਹੈ?

ਹੱਲ : $243 = \underline{3 \times 3 \times 3} \times 3 \times 3$

ਇੱਥੇ 3 ਦਾ ਤ੍ਰਿਗੁੱਟ ਬਣਾਉਣ ਦੇ ਬਾਅਦ 3 × 3 ਬਾਕੀ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ 243 ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਘਣ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪੂਰਨ ਘਣ ਹਨ?

(i)	400	(ii)	3375
(iii)	8000	(iv)	15625
(v)	9000	(vi)	6859
(vii)	2025	(viii)	10648

7.2.2 ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਗੁਣਜ ਜੋ ਪੂਰਨ ਘਣ ਹੈ

ਰਾਜ ਨੇ ਪਲਾਸਟਿਕ (plastic) ਦਾ ਇੱਕ ਘਣਾਵ (cuboid) ਬਣਾਇਆ। ਇਸ ਘਣਾਵ ਦੀ ਲੰਬਾਈ, ਚੌੜਾਈ ਅਤੇ ਉਚਾਈ ਕ੍ਰਮਵਾਰ: 15 cm, 30 cm ਅਤੇ 15 cm ਹੈ।

ਅਨੂ ਉਸ ਤੋਂ ਪੁੱਛਦੀ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ (ਪੂਰਨ) ਘਣ ਬਣਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਉਸਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਕਿੰਨੇ ਘਣਾਵਾਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੋਵੇਗੀ? ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਦੱਸ ਸਕਦੇ ਹੋ?

ਰਾਜ ਕਹਿੰਦਾ ਹੈ,

ਘਣਾਵ ਦਾ ਆਇਤਨ $= 15 \times 30 \times 15$

$= 3 \times 5 \times 2 \times 3 \times 5 \times 3 \times 5$

$= 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5$

ਕਿਉਂਕਿ ਉਪਰੋਕਤ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਵਿੱਚ 2 ਸਿਰਫ ਇੱਕ ਵਾਰ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਇਸ ਨੂੰ ਪੂਰਨ ਘਣ ਬਣਾਉਣ ਦੇ ਲਈ $2 \times 2 = 4$ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੋਵੇਗੀ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਘਣ ਬਣਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਚਾਰ ਘਣਾਵਾਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੋਵੇਗੀ।

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਕੀ 392 ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਘਣ ਹੈ? ਜੇ ਨਹੀਂ, ਤਾਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਨਾਲ 392 ਨੂੰ ਗੁਣਾ ਕਰਨ 'ਤੇ ਗੁਣਨਫਲ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਘਣ ਬਣ ਜਾਵੇ।

ਹੱਲ : $392 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times 7 \times 7$

ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ 7 ਤਿੰਨ ਦੇ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਆ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ 392 ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਘਣ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਨੂੰ ਪੂਰਨ ਘਣ ਬਣਾਉਣ ਦੇ ਲਈ, ਇੱਕ ਹੋਰ 7 ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, $392 \times 7 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{7 \times 7 \times 7} = 2744$, ਜੋ ਕਿ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਘਣ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਉਹ ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ 7 ਹੈ, ਜਿਸ ਨੂੰ 392 ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ 'ਤੇ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਘਣ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ।

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਕੀ 53240 ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਘਣ ਹੈ? ਜੇ ਨਹੀਂ, ਤਾਂ 53240 ਨੂੰ ਕਿਹੜੀ ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲ ਵੰਡਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਕਿ ਭਾਗਫਲ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਘਣ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇ?

ਹੱਲ : $53240 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{11 \times 11 \times 11} \times 5$

ਇੱਥੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਵਿੱਚ 5 ਤਿੰਨ ਦੇ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਆ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ 53240 ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਘਣ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਉਪਰੋਕਤ ਗੁਣਨਖੰਡ ਵਿੱਚ 5 ਸਿਰਫ਼ ਇੱਕ ਵਾਰ ਆਇਆ ਹੈ। ਜੇ ਅਸੀਂ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ 5 ਨਾਲ ਵੰਡੀਏ, ਤਾਂ ਭਾਗਫਲ ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਵਿੱਚ 5 ਨਹੀਂ ਆਵੇਗਾ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, $53240 \div 5 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{11 \times 11 \times 11}$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਉਹ ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ 5 ਹੈ ਜਿਸ ਨਾਲ 53240 ਨੂੰ ਵੰਡਣ 'ਤੇ ਭਾਗਫਲ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਘਣ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗਾ।
ਉਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਪੂਰਨ ਘਣ 10648 ਹੋਵੇਗਾ।

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਕੀ 1188 ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਘਣ ਹੈ? ਜੇ ਨਹੀਂ ਤਾਂ ਕਿਹੜੀ ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲ 1188 ਨੂੰ ਵੰਡਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਕਿ ਭਾਗਫਲ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਘਣ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਜਾਵੇ।

ਹੱਲ : $1188 = 2 \times 2 \times \underline{3 \times 3 \times 3} \times 11$

ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ 2 ਅਤੇ 11 ਤਿੰਨ-ਤਿੰਨ ਦੇ ਸਮੂਹਾਂ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਆ ਰਹੇ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ 1188 ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਘਣ ਨਹੀਂ ਹੈ। 1188 ਦੇ ਉਪਰੋਕਤ ਗੁਣਨਖੰਡ ਵਿੱਚ, ਅਭਾਜ 2 ਸਿਰਫ਼ ਦੋ ਵਾਰ ਹੀ ਆਉਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਅਭਾਜ 11 ਇੱਕ ਵਾਰ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜੇ ਅਸੀਂ 1188 ਨੂੰ $2 \times 2 \times 11 = 44$ ਨਾਲ ਵੰਡੀਏ, ਤਾਂ ਭਾਗਫਲ ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਨ ਵਿੱਚ 2 ਅਤੇ 11 ਨਹੀਂ ਆਉਣਗੇ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਉਹ ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ 44 ਹੈ, ਜਿਸ ਨਾਲ 1188 ਨੂੰ ਵੰਡਣ 'ਤੇ ਭਾਗਫਲ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਘਣ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗਾ। ਨਾਲ ਹੀ, ਲੋੜੀਂਦਾ ਪੂਰਨ ਘਣ $= 1188 \div 44 = 27\ (=3^3)$

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ਕੀ 68600 ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਘਣ ਹੈ? ਜੇ ਨਹੀਂ, ਤਾਂ ਉਹ ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਨਾਲ 68,600 ਨੂੰ ਗੁਣਾ ਕਰਨ 'ਤੇ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਘਣ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਜਾਵੇ?

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ : $68,600 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 7$

ਇਸ ਗੁਣਨਖੰਡਨ ਵਿੱਚ, 5 ਦਾ ਕੋਈ ਤ੍ਰਿਗੁੱਟ (triplet) ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ 68,600 ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਘਣ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਨੂੰ ਪੂਰਨ ਘਣ ਬਣਾਉਣ ਦੇ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ 5 ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, $68,600 \times 5 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 7$

$= 3,43,000$ ਜੋ ਕਿ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਘਣ ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ 343 ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਘਣ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ 5 ਤੋਂ, ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਲਗਦਾ ਹੈ ਕਿ 3,43,000 ਵੀ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਘਣ ਹੈ।

ਸੋਚੋ, ਚਰਚਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਲਿਖੋ

ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਵਿੱਚ ਕਿਹੜੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪੂਰਨ ਘਣ ਹਨ : (i) 2700 (ii) 16000 (iii) 64000 (iv) 900 (v) 125000 (vi) 36000 (vii) 21600 (viii) 10,000 (ix) 27000000 (x) 1000 ਇਹਨਾਂ ਪੂਰਨ ਘਣਾਂ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਪੈਟਰਨ ਦੇਖਦੇ ਹੋ?

ਅਭਿਆਸ 7.1

1. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪੂਰਨ ਘਣ ਨਹੀਂ ਹਨ ?

   (i) 216 (ii) 128 (iii) 1000 (iv) 100 (v) 46656

2. ਉਹ ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਨਾਲ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਗੁਣਾ ਕਰਨ 'ਤੇ ਪੂਰਨ ਘਣ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਜਾਵੇ :

   (i) 243 (ii) 256 (iii) 72 (iv) 675 (v) 100

3. ਉਹ ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਨਾਲ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਵੰਡਣ 'ਤੇ ਭਾਗਫਲ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਘਣ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਜਾਵੇ :

   (i) 81 (ii) 128 (iii) 135 (iv) 192 (v) 704

4. ਪਰਿਕਸ਼ਤ ਪਲਾਸਟਿਕ ਦਾ ਇੱਕ ਘਣਾਵ ਬਣਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ 5 cm, 2 cm ਅਤੇ 5 cm ਹਨ। ਇੱਕ ਘਣ ਬਣਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਕਿੰਨੇ ਘਣਾਵਾਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੋਵੇਗੀ ?

7.3 ਘਣਮੂਲ

ਜੇ ਕਿਸੇ ਘਣ ਦਾ ਆਇਤਨ 125 cm³ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸਦੀ ਭੁਜਾ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਕੀ ਹੋਵੇਗੀ ? ਇਸ ਘਣ ਦੀ ਭੁਜਾ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰਨੀ ਹੋਵੇਗੀ, ਜਿਸਦਾ ਘਣ 125 ਹੋਵੇ।

ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ 'ਵਰਗਮੂਲ' ਪਤਾ ਕਰਨਾ 'ਵਰਗ ਕਰਨ ਦੀ ਕਿਰਿਆ ਦੀ ਉਲਟ ਕਿਰਿਆ ਹੈ'। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ 'ਘਣਮੂਲ' (cuberoot) ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਕਿਰਿਆ ਘਣ (ਪਤਾ) ਕਰਨ ਦੀ ਕਿਰਿਆ ਦੀ ਉਲਟ ਕਿਰਿਆ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $2^3 = 8$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ 8 ਦਾ ਘਣਮੂਲ (cuberoot) 2 ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ $\sqrt[3]{8} = 2$ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ। ਚਿੰਨ੍ਹ '$\sqrt[3]{\ }$' ਘਣਮੂਲ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

ਕਥਨ	ਸਿੱਟਾ	ਕਥਨ	ਸਿੱਟਾ
$1^3 = 1$	$\sqrt[3]{1} = 1$	$6^3 = 216$	$\sqrt[3]{216} = 6$
$2^3 = 8$	$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$	$7^3 = 343$	$\sqrt[3]{343} = 7$
$3^3 = 27$	$\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$	$8^3 = 512$	$\sqrt[3]{512} = 8$
$4^3 = 64$	$\sqrt[3]{64} = 4$	$9^3 = 729$	$\sqrt[3]{729} = 9$
$5^3 = 125$	$\sqrt[3]{125} = 5$	$10^3 = 1000$	$\sqrt[3]{1000} = 10$

7.3.1 ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਵਿਧੀ ਦੁਆਰਾ ਘਣਮੂਲ

ਸੰਖਿਆ 3375 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਅਸੀਂ ਇਸਦਾ ਘਣਮੂਲ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਨਾਲ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ।

$$3375 = \underline{3 \times 3 \times 3} \times \underline{5 \times 5 \times 5} = 3^3 \times 5^3 = (3 \times 5)^3$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ 3375 ਦਾ ਘਣਮੂਲ = $\sqrt[3]{3375} = 3 \times 5 = 15$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ, $\sqrt[3]{74088}$ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$74088 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{3 \times 3 \times 3} \times \underline{7 \times 7 \times 7} = 2^3 \times 3^3 \times 7^3 = (2 \times 3 \times 7)^3$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\sqrt[3]{74088} = 2 \times 3 \times 7 = 42$

ਉਦਾਹਰਣ 6 : 8,000 ਦਾ ਘਣਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : 8,000 ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ $\underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{5 \times 5 \times 5}$ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\sqrt[3]{8000} = 2 \times 2 \times 5 = 20$

ਉਦਾਹਰਣ 7 : ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਵਿਧੀ ਨਾਲ 13824 ਦਾ ਘਣਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $13824 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 3^3$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\sqrt[3]{13824} = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$

ਸੋਚੋ, ਚਰਚਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਲਿਖੋ

ਦੱਸੋ ਕਿ ਸੱਚ ਹੈ ਜਾਂ ਝੂਠ : ਕਿਸੇ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ m ਦੇ ਲਈ, $m^2 < m^3$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਕਿਉਂ ?

7.3.2 ਕਿਸੇ ਘਣ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਘਣਮੂਲ

ਜੇ ਤੁਹਾਨੂੰ ਇਹ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਸੰਖਿਆ ਇੱਕ ਘਣ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਤਾਂ ਉਸਦਾ ਘਣਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀ ਵਿਧੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

ਪਗ 1 ਕੋਈ ਘਣ ਸੰਖਿਆ, ਮੰਨ ਲਵੋ, 857375 ਲਵੋ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੇ ਅੰਕ ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਤਿੰਨ-ਤਿੰਨ ਅੰਕਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਬਣਾਉ।

857	375
↓	↓
ਦੂਸਰਾ ਸਮੂਹ	ਪਹਿਲਾ ਸਮੂਹ

ਅਸੀਂ ਕੋਈ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਘਣ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਘਣਮੂਲ ਕਦਮ ਦਰ ਕਦਮ ਕਿਰਿਆ ਨਾਲ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇੱਥੇ ਸਾਨੂੰ ਤਿੰਨ ਅੰਕਾਂ ਦੇ ਦੋ ਸਮੂਹ 375 ਅਤੇ 857 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਏ ਹਨ।

ਪਗ 2 ਪਹਿਲਾ ਸਮੂਹ '375' ਤੁਹਾਨੂੰ ਲੋੜੀਂਦੇ ਘਣਮੂਲ ਦੀ ਇਕਾਈ ਦਾ ਅੰਕ ਦੇਵੇਗਾ।

ਸੰਖਿਆ 375 ਦਾ ਆਖਰੀ (ਇਕਾਈ ਦਾ) ਅੰਕ 5 ਹੈ। ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ 5 ਕਿਸੇ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਇਕਾਈ ਦੇ ਸਥਾਨ 'ਤੇ ਉਦੋਂ ਆਉਂਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਉਸਦੇ ਘਣਮੂਲ ਦੇ ਇਕਾਈ ਦਾ ਅੰਕ 5 ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਸਾਨੂੰ ਘਣਮੂਲ ਦੇ ਇਕਾਈ ਦਾ ਅੰਕ 5 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਪਗ 3 ਹੁਣ ਦੂਸਰੇ ਸਮੂਹ 857 ਨੂੰ ਲਵੋ।

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $9^3 = 729$ ਅਤੇ $10^3 = 1,000$ ਨਾਲ ਹੀ, $729 < 857 < 1,000$

ਅਸੀਂ ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ 729 ਦੇ ਇਕਾਈ ਦੇ ਅੰਕ ਨੂੰ ਲੋੜੀਂਦੇ ਘਣਮੂਲ ਦੇ ਦਹਾਈ ਦੇ ਅੰਕ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\sqrt[3]{857375} = 95$ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 8 : 17,576 ਦਾ ਘਣਮੂਲ ਇਕਾਈ ਅੰਕ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਨਾਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਸੰਖਿਆ 17,576 ਹੈ।

ਪਗ 1 17,576 ਦੇ ਸਭ ਤੋਂ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੇ ਅੰਕ ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਤਿੰਨ-ਤਿੰਨ ਅੰਕਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਬਣਾਉ। ਇਹ ਸਮੂਹ 17 ਅਤੇ 576 ਹੈ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਮੂਹ 576 ਹੈ। ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਅੰਕ ਹਨ ਅਤੇ ਦੂਸਰਾ ਸਮੂਹ 17 ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਸਿਰਫ਼ ਦੋ ਅੰਕ ਹਨ।

ਪਗ 2 576 ਨੂੰ ਲਵੋ। ਇਸਦੀ ਇਕਾਈ ਦਾ ਅੰਕ 6 ਹੈ। ਅਸੀਂ ਲੋੜੀਂਦੇ ਘਣਮੂਲ ਦੀ ਇਕਾਈ ਦਾ ਅੰਕ 6 ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ।

ਪਗ 3 ਦੂਸਰੇ ਸਮੂਹ 17 ਨੂੰ ਲਵੋ।
2 ਦਾ ਘਣ 8 ਹੈ ਅਤੇ 3 ਦਾ ਘਣ 27 ਹੈ। ਸੰਖਿਆ 17 ਸੰਖਿਆਵਾਂ 8 ਅਤੇ 27 ਦੇ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਹੈ। ਹੁਣ 2 ਅਤੇ 3 ਵਿੱਚ ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ 2 ਹੈ।
2 ਵਿੱਚ ਇਕਾਈ ਦਾ ਅੰਕ ਆਪ 2 ਹੀ ਹੈ। ਅਸੀਂ 2 ਨੂੰ ਲੋੜੀਂਦੇ ਘਣਮੂਲ ਦੀ ਦਹਾਈ ਦਾ ਅੰਕ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, $\sqrt[3]{17576} = 26$ (ਇਸਦੀ ਪੜਤਾਲ ਕਰ ਲਵੋ)।

ਅਭਿਆਸ 7.2

1. ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਵਿਧੀ ਦੁਆਰਾ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਘਣਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
   (i) 64 (ii) 512 (iii) 10648 (iv) 27000
   (v) 15625 (vi) 13824 (vii) 110592 (viii) 46656
   (ix) 175616 (x) 91125
2. ਦੱਸੋ ਸੱਚ ਹੈ ਜਾਂ ਝੂਠ :
   (i) ਕਿਸੀ ਵੀ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਘਣ ਜਿਸਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
   (ii) ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਘਣ ਦੋ ਸਿਫ਼ਰਾਂ 'ਤੇ ਖਤਮ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
   (iii) ਜੇ ਕਿਸੇ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗ 5 'ਤੇ ਖਤਮ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸਦਾ ਘਣ 25 'ਤੇ ਖਤਮ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
   (iv) ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਕੋਈ ਪੂਰਨ ਘਣ ਨਹੀਂ ਹੈ ਜੋ 8 'ਤੇ ਖਤਮ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
   (v) ਦੋ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਘਣ ਤਿੰਨ ਅੰਕਾਂ ਵਾਲੀ ਸੰਖਿਆ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ।
   (vi) ਦੋ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਘਣ ਵਿੱਚ ਸੱਤ ਜਾਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਅੰਕ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ।
   (vii) ਇੱਕ ਅੰਕ ਵਾਲੀ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਘਣ ਇੱਕ ਅੰਕ ਵਾਲੀ ਸੰਖਿਆ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ।
3. ਤੁਹਾਨੂੰ ਇਹ ਦੱਸਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ 1331 ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਘਣ ਹੈ। ਕੀ ਬਿਨ੍ਹਾਂ ਗੁਣਨਖੰਡ ਕੀਤੇ ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਅਨੁਮਾਨ ਲਗਾ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਇਸਦਾ ਘਣਮੂਲ ਕੀ ਹੈ? ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ 4913, 12167 ਅਤੇ 32768 ਦੇ ਘਣਮੂਲਾਂ ਦੇ ਅਨੁਮਾਨ ਲਗਾਉ।

ਅਸੀਂ ਕੀ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀ ?

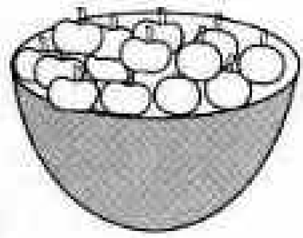
1. ਸੰਖਿਆਵਾਂ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ 1729, 4104, 13832 ਨੂੰ ਹਾਰਡੀ-ਰਾਮਾਨੁਜਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਆਖਦੇ ਹਾਂ। ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਦੋ ਘਣਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਢੰਗ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।
2. ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਉਸੇ ਨਾਲ ਹੀ ਤਿੰਨ ਵਾਰ ਗੁਣਾ ਕਰਨ 'ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਈ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ **ਘਣ ਸੰਖਿਆ** ਆਖਦੇ ਹਾਂ। ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ 1, 8, 27 ਆਦਿ।
3. ਜੇ ਕਿਸੇ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਤਿੰਨ ਵਾਰ ਆਉਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਸੰਖਿਆ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਘਣ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
4. ਸੰਕੇਤ '$\sqrt[3]{\ }$' ਘਣਮੂਲ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ $\sqrt[3]{27} = 3$ ਹੈ।

ਅਧਿਆਇ

8

ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ

8.1 ਅਨੁਪਾਤ ਅਤੇ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਦੀ ਦੁਹਰਾਈ



ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਅਨੁਪਾਤ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਦੋ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰਨਾ।
ਇੱਕ ਟੋਕਰੀ ਵਿੱਚ ਦੋ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਫਲ ਹਨ, ਮੰਨ ਲਓ ਇਸ ਵਿੱਚ 20 ਸੇਬ ਅਤੇ 5 ਸੰਤਰੇ ਹਨ।
ਤਾਂ, ਸੰਤਰਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਸੇਬਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲ ਅਨੁਪਾਤ = 5 : 20 ਹੈ।
ਇਹ ਤੁਲਨਾ ਭਿੰਨਾਂ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵੀ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।

ਸੰਤਰਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ, ਸੇਬਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦਾ $\frac{1}{4}$ ਹੈ। ਅਨੁਪਾਤ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਹ 1 : 4 ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ 4 ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵਿੱਚ 1 ਹੈ। ਪੜ੍ਹਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਿਵੇਂ

ਸੰਤਰਿਆਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵਿੱਚ ਸੇਬਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = $\frac{20}{5} = \frac{4}{1}$ ਹੈ, ਜਿਸਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ਸੰਤਰਿਆਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵਿੱਚ ਸੇਬਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 4 ਗੁਣਾ ਹੈ। ਇਹ ਤੁਲਨਾ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਨਾਲ ਵੀ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।

25 ਫਲਾਂ ਵਿੱਚ 5 ਸੰਤਰੇ ਹਨ।
ਇਸ ਲਈ ਸੰਤਰਿਆਂ ਦਾ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ
$\frac{5}{25} \times \frac{4}{4} = \frac{20}{100} = 20\%$ ਹੈ।
(ਹਰ ਨੂੰ 100 ਬਣਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ)

ਜਾਂ

ਇਕਾਈ ਵਿਧੀ ਤੋਂ :
25 ਫਲਾਂ ਵਿੱਚ ਸੰਤਰਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 5 ਹੈ, ਇਸ ਲਈ 100 ਫਲਾਂ ਵਿੱਚ ਸੰਤਰਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = $\frac{5}{25} \times 100 = 20$ ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ ਵਿੱਚ ਸਿਰਫ ਸੇਬ ਅਤੇ ਸੰਤਰੇ ਹਨ,

ਇਸ ਲਈ, ਸੇਬਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ + ਸੰਤਰਿਆਂ ਦਾ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ = 100
ਜਾਂ ਸੇਬਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ + 20 = 100
ਜਾਂ ਸੇਬਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ = 100 – 20 = 80

ਇਸ ਲਈ ਟੋਕਰੀ ਵਿੱਚ 20% ਸੰਤਰੇ ਅਤੇ 80% ਸੇਬ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਕਿਸੇ ਸਕੂਲ ਵਿੱਚ ਜਮਾਤ VII ਦੇ ਲਈ ਪਿਕਨਿਕ ਦੀ ਯੋਜਨਾ ਬਣਾਈ ਜਾ ਰਹੀ ਹੈ। ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸੰਖਿਆ ਦਾ 60% ਲੜਕੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 18 ਹੈ। ਪਿਕਨਿਕ ਦਾ ਸਥਾਨ ਸਕੂਲ ਤੋਂ 55 km ਦੂਰ ਹੈ ਅਤੇ ਟਰਾਂਸਪੋਰਟ ਕੰਪਨੀ ₹ 12 ਪ੍ਰਤੀ km ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਕਿਰਾਇਆ ਲੈਂਦੀ ਹੈ। ਖਾਣ-ਪੀਣ ਦਾ ਕੁੱਲ ਖਰਚ ₹ 4280 ਹੋਵੇਗਾ।

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਦੱਸ ਸਕਦੇ ਹੋ :

1. ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਲੜਕੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਲੜਕਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲ ਅਨੁਪਾਤ ?
2. ਜੇ ਦੋ ਅਧਿਆਪਕ ਵੀ ਜਮਾਤ ਦੇ ਨਾਲ ਪਿਕਨਿਕ 'ਤੇ ਜਾ ਰਹੇ ਹਨ ਤਾਂ ਪ੍ਰਤੀ ਵਿਅਕਤੀ ਖਰਚ ?
3. ਜੇ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਪਹਿਲਾ ਠਹਿਰਾਅ ਸਕੂਲ ਤੋਂ 22 km ਦੀ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਕੁੱਲ 55 km ਦੀ ਦੂਰੀ ਦਾ ਕਿੰਨੇ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਹੈ ? ਕਿੰਨੇ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਦੂਰੀ ਤੈਅ ਕਰਨਾ ਬਾਕੀ ਹੈ ?

ਹੱਲ :

1. ਲੜਕੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਲੜਕਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲ ਅਨੁਪਾਤ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ, ਆਸ਼ਿਮਾ ਅਤੇ ਜਾੱਨ ਨੇ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਵਿਧੀਆਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਲੜਕਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਅਤੇ ਕੁੱਲ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਪਤਾ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਸੀ।

ਆਸ਼ਿਮਾ ਨੇ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਵਿਧੀ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕੀਤੀ :

ਮੰਨ ਲਓ ਕੁੱਲ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ x ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ 60% ਲੜਕੀਆਂ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ x ਦਾ 60% = 18

ਜਾਂ $\frac{60}{100} \times x = 18$

ਭਾਵ $x = \frac{18 \times 100}{60} = 30$

ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸੰਖਿਆ = 30

ਜਾੱਨ ਨੇ ਇਕਾਈ ਵਿਧੀ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕੀਤੀ :

100 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆ ਵਿੱਚ 60 ਲੜਕੀਆਂ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ $\frac{100}{60}$ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਲੜਕੀ ਹੈ।

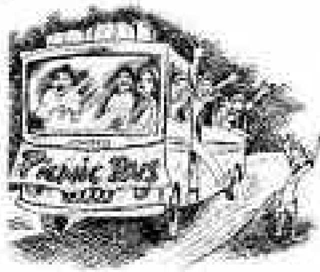
ਇਸ ਲਈ ਕਿੰਨੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਵਿੱਚ 18 ਲੜਕੀਆਂ ਹੋਣਗੀਆਂ ?

ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = $\frac{100}{60} \times 18$

= 30

ਇਸ ਲਈ, ਲੜਕਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = 30 – 18 = 12 ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲੜਕੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਲੜਕਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲ 18 : 12 ਜਾਂ $\frac{18}{12} = \frac{3}{2}$ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ ਹੈ। $\frac{3}{2}$ ਨੂੰ 3 : 2 ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ 2 ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵਿੱਚ 3 ਪੜ੍ਹਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

2. ਪ੍ਰਤੀ ਵਿਅਕਤੀ ਖਰਚ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ :



ਟਰਾਂਸਪੋਰਟ ਖਰਚ = ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦੀ ਦੂਰੀ × ਦਰ

= (55 × 2) × ₹ 12

= 110 × 12 = ₹ 1320

ਕੁੱਲ ਖਰਚ = ਖਾਣ-ਪੀਣ ਦਾ ਖਰਚ + ਟਰਾਂਸਪੋਰਟ ਖਰਚ

= ₹ 4280 + ₹ 1320

= ₹ 5600

ਕੁੱਲ ਵਿਅਕਤੀ = 18 ਲੜਕੀਆਂ + 12 ਲੜਕਿਆਂ + 2 ਅਧਿਆਪਕ

= 32 ਵਿਅਕਤੀ

ਆਸ਼ਿਮਾ ਅਤੇ ਜਾੱਨ ਨੇ ਪ੍ਰਤੀ ਵਿਅਕਤੀ ਖਰਚ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਇਕਾਈ ਵਿਧੀ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕੀਤਾ। 32 ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੇ ਲਈ ਖਰਚ ਕੀਤੇ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਰਾਸ਼ੀ ₹ 5600 ਹੋਵੇਗੀ।

ਇਸ ਲਈ 1 ਵਿਅਕਤੀ ਦੇ ਲਈ ਖਰਚ ਕੀਤੀ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਰਾਸ਼ੀ = ₹ $\frac{5600}{32}$ = ₹ 175

3. ਪਹਿਲੇ ਠਹਿਰਾਅ ਦੀ ਦੂਰੀ = 22 km
ਦੂਰੀ ਦਾ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ :

ਆਸ਼ਿਮਾ ਨੇ ਇਹ ਵਿਧੀ ਵਰਤੀ :

$$\frac{22}{55} = \frac{22}{55} \times \frac{100}{100} = 40\%$$

(ਉਹ ਅਨੁਪਾਤ ਨੂੰ $\frac{100}{100} = 1$ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰ ਰਹੀ ਹੈ ਅਤੇ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਰਹੀ ਹੈ)

ਜੌਨ ਨੇ ਇਕਾਈ ਵਿਧੀ ਵਰਤੀ :

55 km ਵਿੱਚੋਂ 22 km ਦੀ ਦੂਰੀ ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਜਾ ਚੁੱਕੀ ਹੈ।

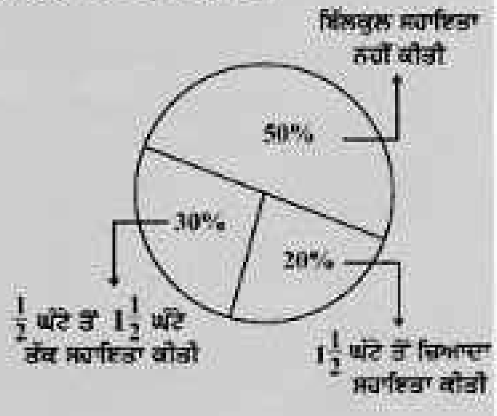
1 km ਵਿੱਚੋਂ $\frac{22}{55}$ km ਦੂਰੀ ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਗਈ ਹੈ

100 km ਵਿੱਚੋਂ $\frac{22}{55} \times 100$ km ਦੂਰੀ ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਗਈ ਹੈ ਭਾਵ 40% ਦੂਰੀ ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਗਈ ਹੈ।

ਦੋਨਾਂ ਦਾ ਉੱਤਰ ਇੱਕ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਹੀ ਪਾਇਆ ਗਿਆ ਅਤੇ ਇਸਦਾ ਉੱਤਰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ :
ਰੁਕਣ ਵਾਲੇ ਸਥਾਨ ਦੀ ਸਕੂਲ ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਕੁੱਲ ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਦੂਰੀ ਦਾ 40% ਸੀ।
ਇਸ ਲਈ, ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਬਾਕੀ ਦੂਰੀ ਦਾ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ = 100% – 40% = 60%

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਇਮਰੀ ਸਕੂਲ ਵਿੱਚ ਮਾਪਿਆਂ ਕੋਲੋਂ ਪੁੱਛਿਆ ਗਿਆ ਕਿ ਉਹ ਆਪਣੇ ਬੱਚਿਆਂ ਦੇ ਘਰ ਦੇ ਕੰਮ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਸਹਾਇਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਪ੍ਰਤੀ ਦਿਨ ਕਿੰਨੇ ਘੰਟੇ ਬਿਤਾਉਂਦੇ ਹਨ। 90 ਮਾਪਿਆਂ ਨੇ $\frac{1}{2}$ ਘੰਟੇ ਤੋਂ $1\frac{1}{2}$ ਘੰਟੇ ਤਕ ਸਹਾਇਤਾ ਕੀਤੀ। ਜਿੰਨੇ ਸਮੇਂ ਦੇ ਲਈ ਮਾਪਿਆਂ ਨੇ ਆਪਣੇ ਬੱਚਿਆਂ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਕਰਨਾ ਦੱਸਿਆ ਉਸਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਮਾਪਿਆਂ ਦੀ ਵੰਡ ਨਾਲ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਈ ਗਈ ਹੈ ਜਿਹੜੀ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ : 20% ਨੇ ਪ੍ਰਤੀ ਦਿਨ $1\frac{1}{2}$ ਘੰਟੇ ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਸਹਾਇਤਾ ਦਿੱਤੀ, 30% ਨੇ $\frac{1}{2}$ ਘੰਟੇ ਤੋਂ $1\frac{1}{2}$ ਘੰਟੇ ਤੱਕ ਸਹਾਇਤਾ ਕੀਤੀ।
50% ਨੇ ਬਿੱਲਕੁਲ ਸਹਾਇਤਾ ਨਹੀਂ ਕੀਤੀ।



ਇਸਦੇ ਅਧਾਰ ਤੇ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਉੱਤਰ ਦਿਉ :

(i) ਕਿੰਨੇ ਮਾਪਿਆਂ ਦਾ ਸਰਵੇ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ?
(ii) ਕਿੰਨੇ ਮਾਪਿਆਂ ਨੇ ਕਿਹਾ ਕਿ ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਸਹਾਇਤਾ ਨਹੀਂ ਕੀਤੀ ?
(iii) ਕਿੰਨੇ ਮਾਪਿਆਂ ਨੇ ਕਿਹਾ ਹੈ ਕਿ ਉਹਨਾਂ $1\frac{1}{2}$ ਘੰਟੇ ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਸਹਾਇਤਾ ਕੀਤੀ ?

ਅਭਿਆਸ 8.1

1. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ ਪਤਾ ਕਰੋ :
   (a) ਇੱਕ ਸਾਇਕਲ ਦੀ 15 km ਪ੍ਰਤੀ ਘੰਟੇ ਦੀ ਗਤੀ ਦਾ ਇੱਕ ਸਕੂਟਰ ਦੀ 30 km ਪ੍ਰਤੀ ਘੰਟੇ ਦੀ ਗਤੀ ਨਾਲ।
   (b) 5 m ਦਾ 10 km ਨਾਲ (c) 50 ਪੈਸੇ ਦਾ ₹ 5 ਨਾਲ
2. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਵਿੱਚ ਬਦਲੋ : (a) 3 : 4 (b) 2 : 3
3. 25 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ 72% ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਚੰਗੇ ਹਨ। ਕਿੰਨੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਚੰਗੇ ਨਹੀਂ ਹਨ ?
4. ਇੱਕ ਫੁੱਟਬਾਲ ਟੀਮ ਨੇ ਕੁੱਲ ਜਿੰਨੇ ਮੈਚ ਖੇਡੇ ਉਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ 10 ਮੈਚਾਂ ਵਿੱਚ ਜਿੱਤ ਹਾਸਿਲ ਕੀਤੀ। ਜੇ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਜਿੱਤ ਦਾ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ 40 ਸੀ ਤਾਂ ਉਸ ਟੀਮ ਨੇ ਕੁੱਲ ਕਿੰਨੇ ਮੈਚ ਖੇਡੇ ?

5. ਜੇ ਚਮੇਲੀ ਦੇ ਕੋਲ ਆਪਣੀ ਰਕਮ ਦਾ 75% ਖਰਚ ਕਰਨ ਦੇ ਬਾਅਦ ₹ 600 ਬਚੇ ਤਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਉਸਦੇ ਕੋਲ ਸ਼ੁਰੂ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੀ ਰਕਮ ਸੀ ?
6. ਜੇ ਕਿਸੇ ਸ਼ਹਿਰ ਵਿੱਚ 60% ਵਿਅਕਤੀ ਕ੍ਰਿਕੇਟ ਪਸੰਦ ਕਰਦੇ ਹਨ, 30% ਫੁੱਟਬਾਲ ਪਸੰਦ ਕਰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਹੋਰ ਖੇਡਾਂ ਪਸੰਦ ਕਰਦੇ ਹਨ, ਤਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਕਿੰਨੇ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਵਿਅਕਤੀ ਹੋਰ ਖੇਡਾਂ ਪਸੰਦ ਕਰਦੇ ਹਨ ? ਜੇ ਕੁੱਲ ਵਿਅਕਤੀ 50 ਲੱਖ ਹਨ ਤਾਂ ਹਰੇਕ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਖੇਡ ਨੂੰ ਪਸੰਦ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੀ ਅਸਲ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ।

8.2 ਲਾਭ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਜਾਂ ਹਾਨੀ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਪਤਾ ਕਰਨਾ

ਸਾਨੂੰ ਆਪਣੇ ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਜੀਵਨ ਵਿੱਚ ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸੂਚਨਾਵਾਂ ਮਿਲਦੀਆਂ ਹਨ :

(i) ਅੰਕਿਤ ਮੁੱਲ 'ਤੇ 25% ਦੀ ਕਮੀ (ii) ਪੈਟਰੋਲ ਦੇ ਮੁੱਲ 'ਤੇ 10% ਵਾਧਾ

ਆਉ, ਕੁੱਝ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਪਿਛਲੇ ਸਾਲ ਇੱਕ ਸਕੂਟਰ ਦਾ ਮੁੱਲ ₹ 34,000 ਸੀ। ਇਸ ਸਾਲ ਇਸਦੇ ਮੁੱਲ ਵਿੱਚ 20% ਵਾਧਾ ਹੋ ਗਿਆ ਹੈ। ਸਕੂਟਰ ਦਾ ਨਵਾਂ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ?

ਹੱਲ :

ਅਨੀਤਾ ਨੇ ਕਿਹਾ ਕਿ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਮੁੱਲ ਵਿੱਚ ਵਾਧਾ ਪਤਾ ਕਰੇਗੀ ਜੋ ਕਿ ₹ 34,000 ਦਾ 20% ਹੈ ਅਤੇ ਫਿਰ ਸਕੂਟਰ ਦਾ ਨਵਾਂ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੇਗੀ

₹ 34,000 ਦਾ 20% = $\frac{20}{100}\times$ ₹ 34,000

= ₹ 6800

ਨਵਾਂ ਮੁੱਲ = ਪੁਰਾਣਾ ਮੁੱਲ + ਵਾਧਾ

= ₹ 34,000 + ₹ 6,800 = ₹ 40,800

ਜਾਂ

ਸੁਨੀਤਾ ਨੇ ਇਕਾਈ ਵਿਧੀ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕੀਤੀ। 20% ਵਾਧੇ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ₹ 100 ਵਾਧੇ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ₹ 120 ਹੋ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ₹ 34000 ਵੱਧ ਕੇ ਕਿੰਨਾ ਹੋ ਜਾਣਗੇ ?

ਵਾਧੇ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਮੁੱਲ = $\frac{120}{100}\times$ ₹ 34,000

= ₹ 40,800

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਮੁੱਲ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਕਮੀ ਨਾਲ ਅਸਲ ਕਮੀ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਇਹ ਅਸਲ ਮੁੱਲ ਵਿੱਚੋਂ ਘਟਾਉਣ 'ਤੇ ਨਵਾਂ ਮੁੱਲ ਹੋਵੇਗਾ।

ਮੰਨ ਲਓ ਵਿਕਰੀ ਵਿੱਚ ਵਾਧਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਸਕੂਟਰ ਦਾ ਮੁੱਲ 5% ਘਟਾ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ, ਤਾਂ ਸਕੂਟਰ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਸਕੂਟਰ ਦਾ ਮੁੱਲ = ₹ 34000

ਮੁੱਲ ਵਿੱਚ ਕਮੀ = ₹ 34000 ਦਾ 5% = $\frac{5}{100}\times$ ₹ 34000 = ₹ 1700

ਨਵਾਂ ਮੁੱਲ = ਪੁਰਾਣਾ ਮੁੱਲ – ਮੁੱਲ ਵਿੱਚ ਕਮੀ

= ₹ 34000 – ₹ 1700 = ₹ 32300

ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਅਧਿਆਇ ਦੇ ਅਗਲੇ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਵੀ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ।

8.3 ਕਟੌਤੀ ਪਤਾ ਕਰਨਾ

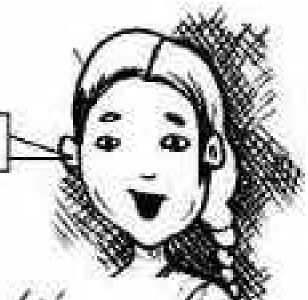
ਕਿਸੇ ਵਸਤੂ ਦੇ ਅੰਕਿਤ ਮੁੱਲ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਕਮੀ ਨੂੰ ਕਟੌਤੀ ਆਖਦੇ ਹਾਂ। ਇਹ ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ ਖਰੀਦਦਾਰ ਨੂੰ ਖਰੀਦਦਾਰੀ ਦੇ ਲਈ ਧਿਆਨ ਖਿੱਚਣ ਲਈ ਜਾਂ ਸਾਮਾਨ ਦੀ

ਵਿਕਰੀ ਵਿੱਚ ਵਾਧਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਦਿੱਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਅੰਕਿਤ ਮੁੱਲ ਵਿੱਚੋਂ ਵੇਚ ਮੁੱਲ ਘਟਾ ਕੇ ਕਟੌਤੀ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ। ਇਸ ਲਈ ਕਟੌਤੀ = ਅੰਕਿਤ ਮੁੱਲ – ਵੇਚ ਮੁੱਲ

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ₹ 840 ਅੰਕਿਤ ਮੁੱਲ ਵਾਲੀ ਇੱਕ ਵਸਤੂ ₹ 714 ਵਿੱਚ ਵੇਚੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਕਟੌਤੀ ਜਾਂ ਕਟੌਤੀ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਕਟੌਤੀ = ਅੰਕਿਤ ਮੁੱਲ – ਵੇਚ ਮੁੱਲ

= ₹ 840 – ₹ 714 = ₹ 126



ਕਿਉਂਕਿ ਕਟੌਤੀ ਅੰਕਿਤ ਮੁੱਲ 'ਤੇ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਅੰਕਿਤ ਮੁੱਲ ਨੂੰ ਆਧਾਰ ਮੰਨਦੇ ਹਾਂ।

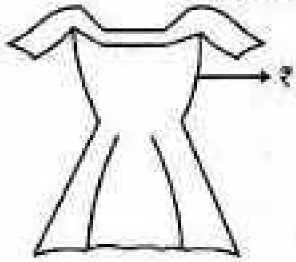
₹ 840 ਅੰਕਿਤ ਮੁੱਲ 'ਤੇ ₹ 126 ਕਟੌਤੀ ਹੈ,
ਤਾਂ ₹ 100 ਅੰਕਿਤ ਮੁੱਲ 'ਤੇ ਕਿੰਨੀ ਕਟੌਤੀ ਹੋਵੇਗੀ ?

ਕਟੌਤੀ = $\frac{126}{840} \times 100 = 15\%$

ਜੇਕਰ ਕਟੌਤੀ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹੈ ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਕਟੌਤੀ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ ?

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਇੱਕ ਫਰਾਕ ਦਾ ਸੂਚੀ ਮੁੱਲ ₹ 220 ਹੈ। ਸੇਲ ਵਿੱਚ 20% ਕਟੌਤੀ ਦੀ ਘੋਸ਼ਣਾ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਫਰਾਕ 'ਤੇ ਕਟੌਤੀ ਦੀ ਰਾਸ਼ੀ ਕੀ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦਾ ਵੇਚ ਮੁੱਲ ਕੀ ਹੈ ?

ਹੱਲ : ਅੰਕਿਤ ਮੁੱਲ ਅਤੇ ਸੂਚੀ ਮੁੱਲ ਸਮਾਨ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।



20% ਕਟੌਤੀ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ₹ 100 ਅੰਕਿਤ ਮੁੱਲ 'ਤੇ ₹ 20 ਕਟੌਤੀ ਹੈ।

ਇਕਾਈ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ₹ 1 'ਤੇ ₹ $\frac{20}{100}$ ਦੀ ਕਟੌਤੀ ਹੋਵੇਗੀ।

₹ 220 'ਤੇ ਕਟੌਤੀ = $\frac{20}{100}$ × ₹ 220 = ₹ 44

ਵੇਚ ਮੁੱਲ = (₹ 220 – ₹ 44) ਜਾਂ ₹ 176

ਰੇਹਾਨਾ ਨੇ ਇਸ ਸਮੱਸਿਆਂ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੱਲ ਕੀਤਾ :

20% ਕਟੌਤੀ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ₹ 100 ਖਰੀਦ ਮੁੱਲ 'ਤੇ ₹ 20 ਦੀ ਕਟੌਤੀ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵੇਚ ਮੁੱਲ ₹ 80 ਹੈ। ਇਕਾਈ ਵਿਧੀ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਨਾਲ,

ਜਦੋਂ ਅੰਕਿਤ ਮੁੱਲ ₹ 100 ਹੈ ਤਾਂ ਵੇਚ ਮੁੱਲ = ₹ 80

ਜਦੋਂ ਅੰਕਿਤ ਮੁੱਲ ₹ 1 ਹੈ ਤਾਂ ਵੇਚ ਮੁੱਲ = ₹ $\frac{80}{100}$

ਕਟੌਤੀ ਪਤਾ ਕੀਤੇ ਬਿਨ੍ਹਾਂ ਹੀ ਮੈਂ ਸਿੱਧੇ ਵੇਚ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੀ ਹਾਂ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜਦੋਂ ਅੰਕਿਤ ਮੁੱਲ ₹ 220 ਹੈ ਤਾਂ ਵੇਚ ਮੁੱਲ = $\frac{80}{100}$ × ₹ 220 = ₹ 176

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

1. ਇੱਕ ਦੁਕਾਨ 20% ਕਟੌਤੀ ਦਿੰਦੀ ਹੈ। ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਦਾ ਵੇਚ ਮੁੱਲ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ ?
   (a) ₹ 120 ਅੰਕਿਤ ਮੁੱਲ ਵਾਲੀ ਇੱਕ ਪੋਸ਼ਾਕ।
   (b) ₹ 750 ਅੰਕਿਤ ਮੁੱਲ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਜੁੱਤੀਆਂ ਦਾ ਜੋੜਾ।
   (c) ₹ 250 ਅੰਕਿਤ ਮੁੱਲ ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਥੈਲਾ।

2. ₹ 15000 ਅੰਕਿਤ ਮੁੱਲ ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਮੇਜ਼ ₹ 14,400 ਵਿੱਚ ਉਪਲੱਬਧ ਹੈ। ਕਟੌਤੀ ਅਤੇ ਕਟੌਤੀ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।
3. ਇੱਕ ਅਲਮਾਰੀ 5% ਕਟੌਤੀ 'ਤੇ ₹ 5225 ਵਿੱਚ ਵੇਚੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਅਲਮਾਰੀ ਦਾ ਅੰਕਿਤ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

8.3.1 ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਵਿੱਚ ਗਣਨਾ

ਇੱਕ ਦੁਕਾਨ 'ਤੇ ਤੁਹਾਡਾ ਬਿੱਲ ₹ 577.80 ਹੈ ਅਤੇ ਦੁਕਾਨਦਾਰ 15% ਕਟੌਤੀ ਵੀ ਦਿੰਦਾ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਭੁਗਤਾਨ ਕੀਤੀ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਰਾਸ਼ੀ ਦਾ ਹਿਸਾਬ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਰੋਗੇ?

(i) ਬਿੱਲ ਨੂੰ ₹ 577.80 ਦੀ ਨੇੜਲੀ ਦਹਾਈ ਵਿੱਚ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਬਣਾਓ ਭਾਵ ₹ 580

(ii) ਇਸਦਾ 10% ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਾਂ $\frac{10}{100} \times ₹\, 580 = ₹\, 58$

(iii) ਇਸਦਾ ਅੱਧ ਲਓ, ਜਾਂ $\frac{1}{2} \times 58 = ₹\, 29$

(iv) (ii) ਅਤੇ (iii) ਦੀਆਂ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਨੂੰ ਜੋੜੋ। ਜੋੜਨ 'ਤੇ ₹ 87 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਿੱਲ ਦੀ ਰਾਸ਼ੀ ਨੂੰ ₹ 87 ਜਾਂ ₹ 85 ਘੱਟ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਿੱਲ ਦੀ ਰਾਸ਼ੀ ਦਾ ਸਭ ਤੋਂ ਨੇੜੇ ਮੁੱਲ ₹ 495 ਹੋਵੇਗਾ।

1. ਇਸੇ ਬਿੱਲ ਰਾਸ਼ੀ ਦਾ 20% ਕਟੌਤੀ ਨਾਲ ਗਣਨਾ ਕਰਨ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰੋ।
2. ₹ 375 ਦਾ 15% ਪਤਾ ਕਰਨ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰੋ।

8.4 ਖਰੀਦ ਅਤੇ ਵੇਚ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਮੁੱਲ (ਲਾਭ ਅਤੇ ਹਾਨੀ)

ਸਕੂਲ ਮੇਲੇ ਦੇ ਲਈ ਮੈਂ ਇੱਕ ਖੁਸ਼ਕਿਸਮਤ ਡਿਪ (ਕੂਪਨ) ਦਾ ਸਟਾਲ ਲਗਾਉਣ ਜਾ ਰਹੀ ਹਾਂ। ਇੱਕ ਖੁਸ਼ਕਿਸਮਤ ਡਿਪ ਦੇ ਲਈ ਮੈਂ ₹ 10 ਵਸੂਲ ਕਰਾਂਗੀ ਪਰ ਮੈਂ ਦੇਣ ਲਈ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਵਸਤੂਆਂ ਖਰੀਦਾਂਗੀ ਜਿਹਨਾਂ ਦੀ ਕੀਮਤ ₹ 5 ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਤੁਸੀਂ 100% ਲਾਭ ਕਮਾ ਰਹੇ ਹੋ।

ਮੈਂ ਉਸ ਤੋਹਫੇ ਨੂੰ ਲਪੇਟ ਕੇ ਸਜਾਉਣ ਲਈ ₹ 3 ਦਾ ਕਾਗਜ਼ ਅਤੇ ਟੇਪ 'ਤੇ ਖਰਚ ਕਰਾਂਗੀ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਮੇਰਾ ਖਰਚ ₹ 8 ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਮੈਨੂੰ ₹ 2 ਦਾ ਲਾਭ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਜੋ ਕਿ $\frac{2}{8} \times 100 = 25\%$ ਹੈ।

ਕਦੇ-ਕਦੇ ਜਦੋਂ ਇੱਕ ਵਸਤੂ ਖਰੀਦੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਖਰੀਦਦੇ ਸਮੇਂ ਜਾਂ ਵੇਚਣ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਕੁੱਝ ਵਾਧੂ ਰਕਮ ਵੀ ਖਰਚੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਇਹ ਖਰਚ ਖਰੀਦ ਮੁੱਲ ਵਿੱਚ ਜੋੜਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
ਇਹਨਾਂ ਖਰਚਿਆਂ ਨੂੰ ਕਦੀ-ਕਦੀ ਉੱਪਰਲੇ ਖਰਚ ਵੀ ਆਖਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਵਿੱਚ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਖਰਚ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਮੁਰੰਮਤ 'ਤੇ, ਮਜ਼ਦੂਰਾਂ 'ਤੇ, ਟਰਾਂਸਪੋਰਟ 'ਤੇ ਖਰਚ ਕੀਤੀ ਗਈ ਰਾਸ਼ੀ ਆਦਿ।

8.4.1 ਖਰੀਦ ਮੁੱਲ/ਵੇਚ ਮੁੱਲ, ਲਾਭ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ/ਹਾਨੀ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਪਤਾ ਕਰੋ

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ਸੋਹਣ ਨੇ ਇੱਕ ਪੁਰਾਣਾ ਫਰਿੱਜ ₹ 2500 ਵਿੱਚ ਖਰੀਦਿਆ। ਉਸਨੇ ₹ 500 ਉਸਦੀ ਮੁਰੰਮਤ 'ਤੇ ਖਰਚ ਕੀਤੇ ਅਤੇ ₹ 3300 ਵਿੱਚ ਵੇਚ ਦਿੱਤਾ। ਉਸਦਾ ਲਾਭ ਜਾਂ ਹਾਨੀ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਖਰੀਦ ਮੁੱਲ (CP) = ₹ 2500 + ₹ 500 = ₹ 3000

(ਖਰੀਦ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਉੱਪਰਲੇ ਖਰਚੇ ਜੋੜੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ)

ਵੇਚ ਮੁੱਲ (SP) = ₹ 3300

ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਵੇਚ ਮੁੱਲ > ਖਰੀਦ ਮੁੱਲ, ਉਸ ਨੂੰ ₹ 3300 – ₹ 3000 = ₹ 300 ਰੁਪਏ ਦਾ ਲਾਭ ਹੋਇਆ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ₹ 3000 'ਤੇ ਉਸ ਨੂੰ ₹ 300 ਦਾ ਲਾਭ ਹੋਇਆ। ₹ 100 'ਤੇ ਉਸਨੂੰ ਕਿੰਨਾ ਲਾਭ ਹੋਵੇਗਾ ?

₹ 100 'ਤੇ ਲਾਭ $= \frac{300}{3000} \times 100\% = \frac{30}{3}\% = 10\%$

ਲਾਭ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ (P%) $= \frac{\text{ਲਾਭ}}{\text{ਖਰੀਦ ਮੁੱਲ}} \times 100$

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

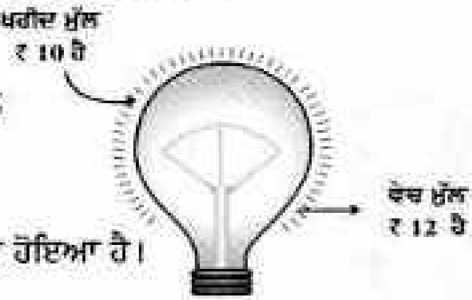
ਜੇ ਲਾਭ ਦੀ ਦਰ 5% ਹੋ ਤਾਂ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਦਾ ਵੇਚ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(a) ₹ 700 ਦੀ ਇੱਕ ਸਾਇਕਲ ਜਿਸ ਦਾ ਉਪਰਲਾ ਖਰਚ ₹ 50 ਹੈ।

(b) ₹ 1150 ਵਿੱਚ ਖਰੀਦੀ ਗਈ ਇੱਕ ਘਾਹ ਕੱਟਣ ਦੀ ਮਸ਼ੀਨ ਜਿਸ 'ਤੇ ₹ 50 ਟਰਾਂਸਪੋਰਟ ਖਰਚ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਖਰਚ ਕੀਤੇ ਗਏ ਹਨ।

(c) ₹ 560 ਵਿੱਚ ਖਰੀਦਿਆ ਗਿਆ ਇੱਕ ਪੱਖਾ ਜਿਸ 'ਤੇ ₹ 40 ਮੁਰੰਮਤ ਦੇ ਲਈ ਖਰਚ ਕੀਤੇ ਗਏ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਇੱਕ ਦੁਕਾਨਦਾਰ ਨੇ 200 ਬਲਬ ₹ 10 ਪ੍ਰਤੀ ਬਲਬ ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਖਰੀਦੇ। ਉਹਨਾਂ ਵਿੱਚ 5 ਬਲਬ ਖਰਾਬ ਹਨ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਸੁੱਟਣਾ ਪਿਆ। ਬਾਕੀ ਬਲਬਾਂ ਨੂੰ ₹ 12 ਪ੍ਰਤੀ ਬਲਬ ਦੀ ਦਰ 'ਤੇ ਵੇਚਿਆ ਗਿਆ। ਲਾਭ ਜਾਂ ਹਾਨੀ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਹੱਲ : 200 ਬਲਬਾਂ ਦਾ ਖਰੀਦ ਮੁੱਲ = 200 × ₹ 10 = ₹ 2000

5 ਬਲਬ ਖਰਾਬ ਸਨ ਇਸ ਲਈ ਬਚੇ ਹੋਏ ਬਲਬਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = 200 – 5 = 195

ਇਸਨੂੰ ₹ 12 ਪ੍ਰਤੀ ਬਲਬ ਦੀ ਦਰ ਵਿੱਚ ਵੇਚਿਆ ਗਿਆ।

195 ਬਲਬਾਂ ਦਾ ਵੇਚ ਮੁੱਲ = 195 × ₹ 12 = ₹ 2340

ਇੱਥੇ 'ਵੇਚ ਮੁੱਲ > ਖਰੀਦ ਮੁੱਲ' (SP > CP) ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਸਪੱਸ਼ਟ ਉਸ ਨੂੰ ਲਾਭ ਹੋਇਆ ਹੈ।

ਲਾਭ = ₹ 2340 – ₹ 2000 = ₹ 340

₹ 2000 'ਤੇ ₹ 340 ਰੁਪਏ ਦਾ ਲਾਭ ਹੋਇਆ, ਤਾਂ ₹ 100 'ਤੇ ਕਿੰਨੇ ਰੁਪਏ ਦਾ ਲਾਭ ਹੋਵੇਗਾ ?

ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਲਾਭ $= \frac{340}{2000} \times 100 = 17\%$

ਉਦਾਹਰਣ 7 : ਮੀਨੂੰ ਨੇ ਦੋ ਪੱਖੇ ₹ 1200 ਪ੍ਰਤੀ ਪੱਖੇ ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਖਰੀਦੇ ਹਨ। ਉਸਨੇ ਇੱਕ ਪੱਖੇ ਨੂੰ 5% ਹਾਨੀ ਨਾਲ ਅਤੇ ਦੂਸਰੇ ਪੱਖੇ ਨੂੰ 10% ਲਾਭ ਨਾਲ ਵੇਚਿਆ ਹੈ। ਹਰੇਕ ਪੱਖੇ ਦਾ ਵੇਚ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਕੁੱਲ ਲਾਭ ਜਾਂ ਹਾਨੀ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਹਰੇਕ ਪੱਖੇ ਦਾ ਖਰੀਦ ਮੁੱਲ = ₹ 1200

ਇੱਕ ਪੱਖਾ 5% ਹਾਨੀ ਨਾਲ ਵੇਚਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਜਦੋਂ ਖਰੀਦ ਮੁੱਲ = ₹ 100 ਹੈ ਤਾਂ ਵੇਚ ਮੁੱਲ ₹ 95 ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਜਦੋਂ ਖਰੀਦ ਮੁੱਲ ₹ 1200 ਹੈ, ਤਦ ਵੇਚ ਮੁੱਲ $= \frac{95}{100} \times$ ₹ 1200 = ₹ 1140

ਦੂਸਰਾ ਪੱਖਾ 10% ਲਾਭ ਨਾਲ ਵੇਚਿਆ ਗਿਆ। ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਜਦੋਂ ਖਰੀਦ ਮੁੱਲ ₹ 100 ਹੈ ਤਾਂ ਵੇਚ ਮੁੱਲ ₹ 110 ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਜਦੋਂ ਖਰੀਦ ਮੁੱਲ ₹ 1200 ਹੈ ਤਦ ਵੇਚ ਮੁੱਲ = $\frac{110}{100} \times$ ₹ 1200 = ₹ 1320

ਕੁੱਲ ਮਿਲਾ ਕੇ ਲਾਭ ਹੋਇਆ ਜਾਂ ਹਾਨੀ

ਇਹ ਜਾਨਣ ਦੇ ਲਈ ਕਿ ਕੁੱਲ ਮਿਲਾ ਕੇ ਲਾਭ ਹੋਇਆ ਜਾਂ ਹਾਨੀ ਸਾਨੂੰ ਕੁੱਲ ਖਰੀਦ ਮੁੱਲ ਅਤੇ ਕੁੱਲ ਵੇਚ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ।

ਕੁੱਲ ਖਰੀਦ ਮੁੱਲ = ₹ 1200 + ₹ 1200 = ₹ 2400
ਕੁੱਲ ਵੇਚ ਮੁੱਲ = ₹ 1140 + ₹ 1320 = ₹ 2460
ਕਿਉਂਕਿ ਕੁੱਲ ਵੇਚ ਮੁੱਲ > ਕੁੱਲ ਖਰੀਦ ਮੁੱਲ
ਇਸ ਲਈ, ₹ (2460 – 2400) ਜਾਂ ₹ 60 ਦਾ ਲਾਭ ਹੋਇਆ

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

ਇੱਕ ਦੁਕਾਨਦਾਰ ਨੇ ਦੋ ਟੈਲੀਵਿਜ਼ਨ ਸੈੱਟ ₹ 10,000 ਪ੍ਰਤੀ ਸੈੱਟ ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਖਰੀਦੇ। ਉਸਨੇ ਇੱਕ ਨੂੰ 10% ਹਾਨੀ ਨਾਲ ਅਤੇ ਦੂਸਰੇ ਨੂੰ 10% ਲਾਭ ਨਾਲ ਵੇਚ ਦਿੱਤਾ। ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਕੁੱਲ ਮਿਲਾ ਕੇ ਉਸ ਨੂੰ ਇਸ ਸੌਦੇ ਵਿੱਚ ਲਾਭ ਹੋਇਆ ਜਾਂ ਹਾਨੀ।

8.5 ਵਿਕਰੀ ਟੈਕਸ / Value Added Tax (ਵੈਟ)

ਅਧਿਆਪਕ ਨੇ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਬਿੱਲ ਦਿਖਾਇਆ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਸਿਰਲੇਖ ਲਿਖੇ ਹੋਏ ਸਨ :

ਬਿੱਲ ਨੰ.		ਦਿਨ		
ਮੀਨੂ				
ਲੜੀ ਨੰ.	ਵਸਤੂ	ਮਾਤਰਾ	ਦਰ	ਰਾਸ਼ੀ
		ਬਿੱਲ ਰਾਸ਼ੀ + ਵਿਕਰੀ ਟੈਕਸ (5%)		
	ਕੁੱਲ ਜੋੜ			

ST ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ Sales Tax ਜਾਂ ਵਿਕਰੀ ਟੈਕਸ। ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ ਖਰੀਦਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਇਸਦਾ ਭੁਗਤਾਨ ਕਰਨਾ ਪੈਂਦਾ ਹੈ।

ਕਿਸੇ ਵਸਤੂ ਦੀ ਵਿਕਰੀ 'ਤੇ ਵਿਕਰੀ ਟੈਕਸ ਸਰਕਾਰ ਦੁਆਰਾ ਵਸੂਲ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਦੁਕਾਨਦਾਰ ਦੁਆਰਾ ਗਾਹਕ ਤੋਂ ਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਸਰਕਾਰ ਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਹਮੇਸ਼ਾ ਵਸਤੂ ਦੇ ਵੇਚ ਮੁੱਲ 'ਤੇ ਲੱਗਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਬਿਲ ਦੀ ਰਾਸ਼ੀ ਵਿੱਚ ਜੋੜ ਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅੱਜ ਕੱਲ੍ਹ ਵਸਤੂ ਦੇ ਮੁੱਲ ਵਿੱਚ ਇਹ ਟੈਕਸ **Value Added Tax (VAT)** ਦੇ ਨਾਮ ਨਾਲ ਜੁੜਦਾ ਹੈ।

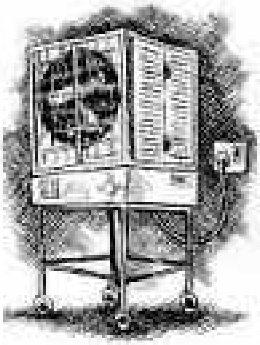
ਉਦਾਹਰਣ 8 : **(ਵਿਕਰੀ ਕਰ ਪਤਾ ਕਰਨਾ)** ਕਿਸੇ ਦੁਕਾਨ 'ਤੇ ਇੱਕ ਜੋੜੀ ਰੋਲਰ ਸਕੇਟਸ (ਪਹੀਏ 'ਤੇ ਘੁੰਮਣ ਵਾਲੇ ਜੁੱਤੇ) ਦਾ ਮੁੱਲ ₹ 450 ਸੀ। ਵਸੂਲੇ ਗਏ ਵਿਕਰੀ ਟੈਕਸ ਦੀ ਦਰ 5% ਸੀ। ਬਿੱਲ ਦੀ ਭੁਗਤਾਨ ਰਾਸ਼ੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ₹ 100 'ਤੇ ਭੁਗਤਾਨ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਟੈਕਸ ₹ 5 ਸੀ।

₹ 450 'ਤੇ ਭੁਗਤਾਨ ਕੀਤੇ ਜਾਣ ਵਾਲਾ ਟੈਕਸ ਹੋਵੇਗਾ = $\frac{5}{100}$ × ₹ 450 = ₹ 22.50

ਬਿਲ ਦੀ ਭੁਗਤਾਨ ਰਾਸ਼ੀ = ਖਰੀਦ ਮੁੱਲ + ਵਿਕਰੀ ਟੈਕਸ

= ₹ 450 + ₹ 22.50 = ₹ 472.50



ਉਦਾਹਰਣ 9 : ਵਹੀਦਾ ਨੇ ਇੱਕ ਕੂਲਰ 10% ਟੈਕਸ ਸਮੇਤ ₹ 3300 ਵਿੱਚ ਖਰੀਦਿਆ ਹੈ। ਵੈਟ ਦੇ ਜੁੜਨ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਕੂਲਰ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ। [ਵੈਟ (VAT) Value Added Tax]

ਹੱਲ : ਮੁੱਲ ਵਿੱਚ ਵੈਟ ਵੀ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ 10% ਵੈਟ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ ਵੈਟ ਰਹਿਤ ਮੁੱਲ ₹ 100 ਹੈ ਤਾਂ ਉਸ ਸਮੇਤ ਮੁੱਲ ₹ 110 ਹੈ। ਹੁਣ ਜੇਕਰ ਵੈਟ ਸਮੇਤ ਮੁੱਲ ₹ 110 ਹੈ ਤਾਂ ਅਸਲ ਮੁੱਲ ₹ 100 ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜਦੋਂ ਕਿ ਟੈਕਸ ਸਮੇਤ ਮੁੱਲ ₹ 3300 ਹੈ ਤਾਂ ਅਸਲ ਮੁੱਲ = $\frac{100}{110}$ × ₹ 3300 = ₹ 3000

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

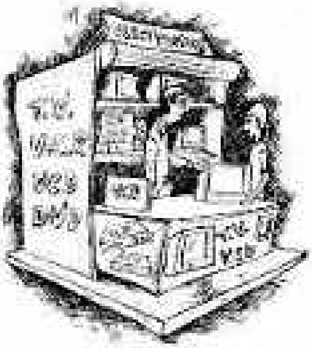
1. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ ਖਰੀਦਣ 'ਤੇ ਜੇਕਰ 5% ਵਿਕਰੀ ਟੈਕਸ ਜੁੜਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਹਰੇਕ ਦਾ ਖਰੀਦ (ਵੇਚ) ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :
   (i) ₹ 50 ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਤੌਲੀਆ।
   (ii) ਸਾਬਣ ਦੀਆਂ ਦੋ ਟਿੱਕੀਆਂ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਦਾ ਮੁੱਲ ₹ 35 ਹੈ।
   (iii) ₹ 15 ਪ੍ਰਤੀ ਕਿਲੋਗ੍ਰਾਮ ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ 5 kg ਆਟਾ।
2. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਵਸਤੂਆਂ ਦੇ ਮੁੱਲ ਵਿੱਚ ਜੇਕਰ 8% ਵੈਟ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸਲ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
   (i) ₹ 14,500 ਵਿੱਚ ਖਰੀਦਿਆ ਗਿਆ ਇੱਕ ਟੈਲੀਵਿਜ਼ਨ
   (ii) ₹180 ਵਿੱਚ ਖਰੀਦੀ ਗਈ ਸ਼ੈਂਪੂ ਦੀ ਇੱਕ ਸ਼ੀਸ਼ੀ।

ਸੋਚੋ, ਚਰਚਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਲਿਖੋ

1. ਕਿਸੇ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਦੁਗਣਾ ਕਰਨ 'ਤੇ ਉਸ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ 100% ਵਾਧਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਜੇ ਅਸੀਂ ਉਸ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਅੱਧਾ ਕਰ ਦਈਏ ਤਾਂ ਕਮੀ ਕਿੰਨੇ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਹੋਵੇਗੀ ?
2. ₹ 2400 ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵਿੱਚ ₹ 2000 ਕਿੰਨਾ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਘੱਟ ਹੈ ? ਕੀ ਇਹ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਉਨ੍ਹਾਂ ਹੀ ਹੈ ਜਿੰਨਾਂ ₹ 2000 ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵਿੱਚ ₹ 2400 ਜ਼ਿਆਦਾ ਹੈ ?

ਅਭਿਆਸ 8.2

1. ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਦੀ ਤਨਖਾਹ ਵਿੱਚ 10% ਵਾਧਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਜੇ ਉਸਦੀ ਨਵੀਂ ਤਨਖਾਹ ₹ 1,54,000 ਹੈ ਤਾਂ ਉਸਦੀ ਮੂਲ ਤਨਖਾਹ ਪਤਾ ਕਰੋ।
2. ਐਤਵਾਰ ਨੂੰ 845 ਵਿਅਕਤੀ ਚਿੜੀਆਘਰ ਗਏ। ਸੋਮਵਾਰ ਨੂੰ ਸਿਰਫ 169 ਵਿਅਕਤੀ ਗਏ। ਚਿੜੀਆਘਰ ਦੀ ਸੈਰ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਸੋਮਵਾਰ ਨੂੰ ਕਿੰਨੇ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਕਮੀ ਹੋਈ ?
3. ਇੱਕ ਦੁਕਾਨਦਾਰ ₹ 2400 ਵਿੱਚ 80 ਵਸਤੂਆਂ ਖਰੀਦਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ 16% ਲਾਭ 'ਤੇ ਵੇਚਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਵਸਤੂ ਦਾ ਵੇਚ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।



4. ਇੱਕ ਵਸਤੂ ਦਾ ਮੁੱਲ ₹ 15,500 ਸੀ। ₹ 450 ਇਸਦੀ ਮੁਰੰਮਤ 'ਤੇ ਖਰਚ ਕੀਤੇ ਗਏ ਸਨ। ਜੇ ਇਸ ਨੂੰ 15% ਲਾਭ 'ਤੇ ਵੇਚਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸਦਾ ਵੇਚ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
5. ਇੱਕ VCR ਅਤੇ TV ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਨੂੰ ₹ 8000 'ਤੇ ਖਰੀਦਿਆ ਗਿਆ। ਦੁਕਾਨਦਾਰ ਨੂੰ VCR 'ਤੇ 4% ਹਾਨੀ ਅਤੇ TV 'ਤੇ 8% ਲਾਭ ਹੋਇਆ। ਇਸ ਪੂਰੇ ਲੈਣ-ਦੇਣ ਵਿੱਚ ਲਾਭ ਜਾਂ ਹਾਨੀ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।
6. ਸੇਲ ਦੇ ਦੌਰਾਨ ਇੱਕ ਦੁਕਾਨ ਸਾਰੀਆਂ ਵਸਤੂਆਂ ਦੇ ਅੰਕਿਤ ਮੁੱਲ 'ਤੇ 10% ਕਟੌਤੀ ਦਿੰਦੀ ਹੈ। ₹ 1450 ਅੰਕਿਤ ਮੁੱਲ ਵਾਲੀ ਇੱਕ ਜੀਨ ਅਤੇ ਦੋ ਕਮੀਜ਼ਾਂ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਦਾ ਅੰਕਿਤ ਮੁੱਲ ₹ 850 ਹੈ, ਨੂੰ ਖਰੀਦਣ ਦੇ ਲਈ ਕਿਸੇ ਗ੍ਰਾਹਕ ਨੂੰ ਕਿੰਨਾ ਭੁਗਤਾਨ ਕਰਨਾ ਪਵੇਗਾ ?

7. ਇੱਕ ਦੁੱਧ ਵਾਲੇ ਨੇ ਆਪਣੀਆਂ ਦੋ ਮੱਝਾਂ ਨੂੰ ₹ 20,000 ਪ੍ਰਤੀ ਮੱਝ ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਵੇਚਿਆ। ਇੱਕ ਮੱਝ 'ਤੇ ਉਸ ਨੇ 5% ਲਾਭ ਹੋਇਆ ਅਤੇ ਦੂਸਰੀ 'ਤੇ ਉਸ ਨੂੰ 10% ਹਾਨੀ ਹੋਈ। ਇਸ ਸੌਦੇ ਵਿੱਚ ਉਸਦਾ ਕੁੱਲ ਲਾਭ ਜਾਂ ਹਾਨੀ ਪਤਾ ਕਰੋ। (ਸੰਕੇਤ : ਪਹਿਲਾਂ ਹਰੇਕ ਦਾ ਖਰੀਦ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।)
8. ਇੱਕ ਟੈਲੀਵਿਜ਼ਨ ਦਾ ਮੁੱਲ ₹ 13,000 ਹੈ। ਇਸ 'ਤੇ 12% ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਵਿਕਰੀ ਟੈਕਸ ਵਸੂਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜੇ ਵਿਨੋਦ ਇਸ ਟੈਲੀਵਿਜ਼ਨ ਨੂੰ ਖਰੀਦਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸਦੇ ਦੁਆਰਾ ਭੁਗਤਾਨ ਕੀਤੀ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਰਾਸ਼ੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।
9. ਅਰੁਣ ਇੱਕ ਜੋੜੀ ਸਕੇਟਸ (ਪਹੀਏ ਵਾਲੇ ਬੂਟ) ਕਿਸੇ ਸੇਲ ਤੋਂ ਖਰੀਦ ਕੇ ਲਿਆਇਆ ਜਿਸ 'ਤੇ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਕਟੌਤੀ ਦੀ ਦਰ 20% ਸੀ। ਜੇ ਉਸ ਦੁਆਰਾ ਭੁਗਤਾਨ ਕੀਤੀ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਰਾਸ਼ੀ ₹ 1600 ਹੈ ਤਾਂ ਅੰਕਿਤ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
10. ਮੈਂ ਇੱਕ ਹੇਅਰ ਡਰਾਇਰ (ਵਾਲ ਸੁਕਾਉਣ ਵਾਲਾ ਯੰਤਰ) 8% ਵੈਟ ਸਮੇਤ ₹ 5400 ਵਿੱਚ ਖਰੀਦਿਆ। ਵੈਟ ਨੂੰ ਜੋੜਨ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਦਾ ਉਸਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

8.6 ਮਿਸ਼ਰਤ ਵਿਆਜ

ਸ਼ਾਇਦ ਤੁਹਾਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਕਥਨ ਮਿਲੇ ਹੋਣਗੇ 'ਬੈਂਕ ਵਿੱਚ FD (ਮਿਆਦੀ ਜਮ੍ਹਾਂ) 'ਤੇ ਇੱਕ ਸਾਲ ਦਾ ਵਿਆਜ 9% ਸਲਾਨਾ ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਜਾਂ ਬਚਤ ਖਾਤੇ ਵਿੱਚ ਵਿਆਜ ਦੀ ਦਰ 5% ਸਲਾਨਾ।

> ਬੈਂਕ ਜਾਂ ਡਾਕਖਾਨੇ ਵਰਗੀਆਂ ਸੰਸਥਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਜਮ੍ਹਾਂ ਕੀਤੀ ਗਈ ਰਕਮ 'ਤੇ ਇਹਨਾਂ ਸੰਸਥਾਵਾਂ ਦੁਆਰਾ ਭੁਗਤਾਨ ਕੀਤੀ ਗਈ ਵਾਧੂ ਰਕਮ ਨੂੰ **ਵਿਆਜ** ਆਖਦੇ ਹਨ। ਜਦੋਂ ਵਿਅਕਤੀ ਰਕਮ ਉਧਾਰ ਲੈਂਦੇ ਹਨ ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦੁਆਰਾ ਵੀ ਵਿਆਜ ਦਾ ਭੁਗਤਾਨ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ **ਸਧਾਰਨ ਵਿਆਜ** ਗਣਨਾ ਕਰਨਾ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਹੀ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 10 : ₹ 10,000 ਦੀ ਰਾਸ਼ੀ 15% ਸਲਾਨਾ ਵਿਆਜ ਦਰ 'ਤੇ 2 ਸਾਲ ਦੇ ਲਈ ਉਧਾਰ ਲਈ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਰਾਸ਼ੀ 'ਤੇ ਸਧਾਰਨ ਵਿਆਜ ਅਤੇ 2 ਸਾਲ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਭੁਗਤਾਨ ਕੀਤੀ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਰਾਸ਼ੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ₹ 100 'ਤੇ 1 ਸਾਲ ਦੇ ਲਈ ਦਿੱਤਾ ਵਿਆਜ ₹ 15 ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ 10,000 ਦਾ 1 ਸਾਲ ਦਾ ਵਿਆਜ $= \frac{15}{100} \times 10000 =$ ₹ 1500

2 ਸਾਲ ਦਾ ਵਿਆਜ $=$ ₹ $1500 \times 2 =$ ₹ 3000

2 ਸਾਲ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਭੁਗਤਾਨ ਕੀਤੀ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਰਾਸ਼ੀ = ਮੂਲਧਨ + ਵਿਆਜ

= ₹ 10000 + ₹ 3000 = ₹ 13000

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

5% ਸਲਾਨਾ ਦਰ ਨਾਲ ₹ 15000 ਦਾ 2 ਸਾਲ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਵਿਆਜ ਅਤੇ ਭੁਗਤਾਨ ਕੀਤੀ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਕੁੱਲ ਰਾਸ਼ੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਮੇਰੇ ਪਿਤਾ ਨੇ ਕੁੱਝ ਰਕਮ 3 ਸਾਲ ਦੇ ਲਈ ਡਾਕਘਰ ਵਿੱਚ ਜਮ੍ਹਾਂ ਕਰ ਰੱਖੀ ਹੈ। ਹਰੇਕ ਸਾਲ ਰਕਮ ਦਾ ਵਾਧਾ ਪਿੱਛਲੇ ਸਾਲ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵਿੱਚ ਜ਼ਿਆਦਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਬੈਂਕ ਵਿੱਚ ਕੁੱਝ ਰਕਮ ਹੈ। ਪ੍ਰਤੀ ਸਾਲ ਕੁੱਝ ਵਿਆਜ ਇਸ ਰਕਮ ਵਿੱਚ ਜੁੜ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਿਸਨੂੰ ਪਾਸ ਬੁੱਕ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜੁੜਨ ਵਾਲਾ ਇਹ ਵਿਆਜ ਹਰ ਸਾਲ ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਹਰੇਕ ਸਾਲ ਇਸ ਵਿੱਚ ਵਾਧਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ ਲਿਆ ਜਾਣ ਵਾਲਾ ਜਾਂ ਭੁਗਤਾਨ ਕੀਤੇ ਜਾਣ ਵਾਲਾ ਵਿਆਜ ਕਦੀ ਸਧਾਰਨ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਵਿਆਜ ਦੀ ਗਣਨਾ ਪਿਛਲੇ ਸਾਲ ਦੀ ਰਾਸ਼ੀ 'ਤੇ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਨੂੰ ਵਿਆਜ ਦਾ ਸੰਯੋਜਨ ਜਾਂ ਮਿਸ਼ਰਤ ਵਿਆਜ (C.I.) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਆਉ, ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ 'ਤੇ ਚਰਚਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਸਾਲ ਦਾ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਵਿਆਜ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਹਰੇਕ ਸਾਲ ਸਾਡੀ ਜਮਾਂ ਰਾਸ਼ੀ ਭਾਵ ਮੂਲਧਨ ਬਦਲਦਾ ਹੈ।

ਮਿਸ਼ਰਤ ਵਿਆਜ ਦੀ ਗਣਨਾ

8% ਵਿਆਜ ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਹਿਨਾ 2 ਸਾਲ ਦੇ ਲਈ ₹ 20,000 ਉਧਾਰ ਲੈਂਦੀ ਹੈ ਜਦਕਿ ਵਿਆਜ ਸਲਾਨਾ ਜੁੜਦਾ ਹੈ। 2 ਸਾਲ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਮਿਸ਼ਰਤ ਵਿਆਜ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਦੁਆਰਾ ਭੁਗਤਾਨ ਕੀਤੇ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਰਾਸ਼ੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਅਸਲਮ ਨੇ ਅਧਿਆਪਕ ਨੂੰ ਪੁੱਛਿਆ ਕਿ ਕੀ ਇਸ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਹਰੇਕ ਸਾਲ ਦਾ ਵਿਆਜ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। ਅਧਿਆਪਕ ਨੇ ਕਿਹਾ 'ਹਾਂ' ਅਤੇ ਉਸਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਪਗਾਂ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਕਿਹਾ :

1. ਇੱਕ ਸਾਲ ਦਾ ਸਧਾਰਨ ਵਿਆਜ ਪਤਾ ਕਰੋ ਮੰਨ ਲਓ ਪਹਿਲੇ ਸਾਲ ਦਾ ਮੂਲਧਨ P_1 ਹੈ

   ਇੱਥੇ, P_1 = ₹ 20,000

   SI_1 = 8% ਸਲਾਨਾ ਦਰ ਨਾਲ ਪਹਿਲੇ ਸਾਲ ਦਾ ਸਧਾਰਨ ਵਿਆਜ

   $$= ₹\ \frac{20000 \times 8}{100} = ₹\ 1600$$

2. ਇਸ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਭੁਗਤਾਨ ਕੀਤੀ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਜਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੀ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਰਾਸ਼ੀ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਇਹ ਦੂਸਰੇ ਸਾਲ ਦੇ ਲਈ ਮੂਲਧਨ ਬਣ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

   ਪਹਿਲਾ ਸਾਲ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਰਾਸ਼ੀ = $P_1 + SI_1$ = ₹ 20000 + ₹ 1600

   = ₹ 21600 = P_2 (ਦੂਸਰੇ ਸਾਲ ਦਾ ਮੂਲਧਨ)

3. ਇਸ ਰਾਸ਼ੀ 'ਤੇ ਦੂਸਰੇ ਸਾਲ ਦਾ ਵਿਆਜ ਪਤਾ ਕਰੋ।

SI_2 = 8% ਸਲਾਨਾ ਦਰ ਨਾਲ ਦੂਸਰੇ ਸਾਲ ਦਾ ਸਧਾਰਨ ਵਿਆਜ

$$= ₹\,\frac{21600 \times 8}{100} = ₹\,1728$$

4. ਦੂਸਰੇ ਸਾਲ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਭੁਗਤਾਨ ਕੀਤੀ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਜਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੀ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਰਾਸ਼ੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਦੂਸਰੇ ਸਾਲ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਰਾਸ਼ੀ $= P_2 + SI_2$

$= ₹\,21600 + ₹\,1728$

$= ₹\,23328$

ਕੁੱਲ ਦੇਣ ਯੋਗ ਵਿਆਜ $= ₹\,1600 + ₹\,1728$

$= ₹\,3328$

ਰੀਤਾ ਨੇ ਪੁਛਿਆ ਕਿ ਕੀ ਵਿਆਜ ਦੀ ਰਾਸ਼ੀ ਸਧਾਰਨ ਵਿਆਜ ਦੇ ਲਈ ਵੱਖ ਹੋਵੇਗੀ। ਅਧਿਆਪਕ ਨੇ ਉਸਨੂੰ 2 ਸਾਲ ਦਾ ਸਧਾਰਨ ਵਿਆਜ ਕੱਢਣ ਲਈ ਕਿਹਾ ਅਤੇ ਆਪਣੇ ਆਪ ਅੰਤਰ ਮਹਿਸੂਸ ਕਰਨ ਲਈ ਸਲਾਹ ਦਿੱਤੀ।

$$2 \text{ ਸਾਲ ਦਾ ਸਧਾਰਨ ਵਿਆਜ} = ₹\,\frac{20000 \times 8 \times 2}{100} = ₹\,3200$$

ਰੀਤਾ ਨੇ ਕਿਹਾ ਕਿ ਮਿਸ਼ਰਤ ਵਿਆਜ ਦੇ ਕਾਰਨ ਹਿਨਾ ਨੂੰ ₹ 128 ਦਾ ਜ਼ਿਆਦਾ ਭੁਗਤਾਨ ਕਰਨਾ ਪਵੇਗਾ।

ਆਉ, ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਸਧਾਰਨ ਵਿਆਜ ਅਤੇ ਮਿਸ਼ਰਤ ਵਿਆਜ ਵਿੱਚ ਅੰਤਰ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ। ₹ 100 ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਸਾਰਣੀ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਯਤਨ ਕਰੋ :

		ਸਧਾਰਨ ਵਿਆਜ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ	ਮਿਸ਼ਰਤ ਵਿਆਜ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ
ਪਹਿਲਾ ਸਾਲ	ਮੂਲਧਨ	₹ 100.00	₹ 100.00
	10% ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਵਿਆਜ	₹ 10.00	₹ 10.00
	ਸਾਲ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਰਾਸ਼ੀ	₹ 110.00	₹ 110.00
ਦੂਸਰਾ ਸਾਲ	ਮੂਲਧਨ	₹ 100.00	₹ 110.00
	10% ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਵਿਆਜ	₹ 10.00	₹ 11.00
	ਸਾਲ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਰਾਸ਼ੀ	₹ (110 + 10) = ₹120.00	₹ 121.00
ਤੀਸਰਾ ਸਾਲ	ਮੂਲਧਨ	₹ 100.00	₹ 121.00
	10% ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਵਿਆਜ	₹ 10.00	₹ 12.10
	ਸਾਲ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਰਾਸ਼ੀ	₹ (120 + 10) = ₹ 130.00	₹ 133.10

ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਇਹ ਹੋਇਆ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਉਸ ਸਮੇਂ ਤੱਕ ਜਮ੍ਹਾਂ ਵਿਆਜ 'ਤੇ ਵਿਆਜ ਦਿੰਦੇ ਹੋ।

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ 3 ਸਾਲ ਵਿੱਚ

ਸਧਾਰਨ ਵਿਆਜ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਵਿਆਜ $= ₹\,(130 - 100) = ₹\,30$

ਮਿਸ਼ਰਤ ਵਿਆਜ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਵਿਆਜ $= ₹\,(133.10 - 100) = ₹\,33.10$

ਇਹ ਵੀ ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਸਧਾਰਨ ਵਿਆਜ ਦੇ ਹੇਠ ਹਰੇਕ ਸਾਲ ਮੂਲਧਨ ਸਮਾਨ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਮਿਸ਼ਰਤ ਵਿਆਜ ਦੇ ਹੇਠ ਇਹ ਹਰੇਕ ਸਾਲ ਦੇ ਬਾਅਦ ਬਦਲਦਾ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ।

8.7 ਮਿਸ਼ਰਤ ਵਿਆਜ ਦੇ ਲਈ ਸੂਤਰ ਦਾ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢਣਾ

ਜ਼ੁਬੈਦਾ ਨੇ ਆਪਣੇ ਅਧਿਆਪਕ ਤੋਂ ਪੁੱਛਿਆ, 'ਕੀ ਮਿਸ਼ਰਤ ਵਿਆਜ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਕੋਈ ਸਰਲ ਵਿਧੀ ਹੈ?' ਅਧਿਆਪਕ ਨੇ ਕਿਹਾ, 'ਮਿਸ਼ਰਤ ਵਿਆਜ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਇੱਕ ਛੋਟੀ ਵਿਧੀ ਹੈ। ਆਓ, ਇਸਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।'

ਮੰਨ ਲਓ R% ਸਲਾਨਾ ਵਿਆਜ ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਮੂਲਧਨ P_1 'ਤੇ ਵਿਆਜ ਜੁੜਦਾ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਓ P_1 = ₹ 5000 ਅਤੇ R = 5% ਸਲਾਨਾ, ਤਦ ਲੋੜੀਂਦੇ ਪਗਾਂ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ :

1. $SI_1 = ₹\ \frac{5000\times5\times1}{100}$ ਜਾਂ $SI_1 = ₹\ \frac{P_1\times R\times1}{100}$

ਇਸ ਲਈ, $A_1 = 5000 + ₹\ \frac{5000\times5\times1}{100}$ ਜਾਂ $A_1 = P_1 + SI_1 = P_1 + \frac{P_1R}{100}$

$= 5000\left(1+\frac{5}{100}\right) = ₹\ P_2$ $= P_1\left(1+\frac{R}{100}\right) = P_2$

2. $SI_2 = 5000\left(1+\frac{5}{100}\right)\times ₹\ \frac{5\times1}{100}$ ਜਾਂ $SI_2 = \frac{P_2\times R\times1}{100}$

$= ₹\ \frac{5000\times5}{100}\left(1+\frac{5}{100}\right)$ $= P_1\left(1+\frac{R}{100}\right)\times\frac{R}{100}$

$= \frac{P_1R}{100}\left(1+\frac{R}{100}\right)$

$$A_2 = 5000\left(1+\frac{5}{100}\right) + ₹\ \frac{5000\times5}{100}\left(1+\frac{5}{100}\right)$$

$$= ₹\ 5000\left(1+\frac{5}{100}\right)\left(1+\frac{5}{100}\right)$$

$$= ₹\ 5000\left(1+\frac{5}{100}\right)^2 = P_3$$

$$A_2 = P_2 + SI_2$$

$$= P_1\left(1+\frac{R}{100}\right) + P_1\frac{R}{100}\left(1+\frac{R}{100}\right)$$

$$= P_1\left(1+\frac{R}{100}\right)\left(1+\frac{R}{100}\right)$$

$$= P_1\left(1+\frac{R}{100}\right)^2 = P_3$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅੱਗੇ ਵੱਧਦੇ ਹੋਏ n ਸਾਲ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਕੁੱਲ ਰਾਸ਼ੀ

$$A_n = P_1\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$$ ਹੋਵੇਗੀ।

ਜਾਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$

ਜ਼ੁਬੈਦਾ ਨੇ ਕਿਹਾ ਪਰ ਇਸਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਅਸੀਂ ਸਿਰਫ n ਸਾਲ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਦੇਣ ਯੋਗ ਕੁੱਲ ਰਾਸ਼ੀ ਦਾ ਸੂਤਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਨਾ ਕਿ ਮਿਸ਼ਰਤ ਵਿਆਜ ਦਾ ਸੂਤਰ। ਅਰੁਣ ਨੇ ਤੁਰੰਤ ਕਿਹਾ ਕਿ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ :

ਮਿਸ਼ਰਤ ਵਿਆਜ = ਕੁੱਲ ਰਾਸ਼ੀ – ਮੂਲਧਨ

ਜਾਂ $CI = A - P$, ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਮਿਸ਼ਰਤ ਵਿਆਜ ਵੀ ਅਸਾਨੀ ਨਾਲ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 11 : ₹ 12,600 ਦਾ 2 ਸਾਲ ਦੇ ਲਈ 10% ਸਲਾਨਾ ਦਰ ਨਾਲ ਮਿਸ਼ਰਤ ਵਿਆਜ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਦੋਂ ਕਿ ਵਿਆਜ ਸਲਾਨਾ ਜੁੜਦਾ ਹੋਵੇ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ, $A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$

ਇੱਥੇ ਮੂਲਧਨ (P) = ₹ 12600, ਦਰ (R) = 10, ਸਾਲਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ (n) = 2

$$A = ₹\ 12600\left(1+\frac{10}{100}\right)^2 = ₹\ 12600\left(\frac{11}{10}\right)^2$$

$$= ₹\ 12600 \times \frac{11}{10} \times \frac{11}{10} = ₹\ 15246$$

ਮਿਸ਼ਰਤ ਵਿਆਜ (CI) = A – P = ₹ 15246 – ₹ 12600 = ₹ 2646

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

₹ 8000 ਦਾ 2 ਸਾਲ ਦੇ ਲਈ 5% ਸਲਾਨਾ ਦਰ ਨਾਲ ਮਿਸ਼ਰਤ ਵਿਆਜ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਦੋਂ ਕਿ ਵਿਆਜ ਸਲਾਨਾ ਜੁੜਦਾ ਹੈ।

8.8 ਦਰ ਦਾ ਸਲਾਨਾ ਜਾਂ ਛਿਮਾਹੀ ਸੰਯੋਜਨ

ਸ਼ਾਇਦ ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹੋ ਕਿ 'ਦਰ' ਦੇ ਬਾਅਦ 'ਸਲਾਨਾ ਸੰਯੋਜਨ ਜਾਂ ਜੋੜਿਆ' ਕਿਉਂ ਲਿਖਿਆ ਹੋਇਆ ਸੀ। ਕੀ ਇਸਦਾ ਕੋਈ ਅਰਥ ਹੈ ?

ਬਿਲਕੁੱਲ ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਅਸੀਂ ਮਿਸ਼ਰਤ ਵਿਆਜ ਦੀ ਦਰ ਛਿਮਾਹੀ ਜਾਂ ਤਿਮਾਹੀ ਵੀ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਆਉ, ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜਦੋਂ ਵਿਆਜ ਸਲਾਨਾ ਜਾਂ ਛਿਮਾਹੀ ਜੋੜਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ₹ 100 ਦੇ ਵਿਆਜ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨਾ ਫਰਕ ਪਵੇਗਾ ?

ਜਦੋਂ ਵਿਆਜ ਸਲਾਨਾ ਜੁੜਦਾ ਨਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸਮੇਂ ਦੀ ਅਵਧੀ ਅਤੇ ਦਰ

ਉਹ ਸਮਾਂ ਅਵਧੀ ਜਿਸਦੇ ਬੀਤਣ 'ਤੇ ਹਰੇਕ ਵਾਰ ਨਵਾਂ ਮੂਲਧਨ ਬਣਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਵਿਆਜ ਜੋੜਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਰੂਪਾਂਤਰਨ ਅਵਧੀ ਅਖਵਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਜਦੋਂ ਵਿਆਜ ਛਿਮਾਹੀ ਜੋੜਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਇੱਕ ਸਾਲ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਛਿਮਾਹੀ ਦੀਆਂ ਦੋ ਰੂਪਾਂਤਰਨ ਅਵਧੀ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਛਿਮਾਹੀ ਦਰ ਸਲਾਨਾ ਦਰ ਦੀ ਅੱਧੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਜਦੋਂ ਵਿਆਜ ਨੂੰ ਤਿਮਾਹੀ ਜੋੜਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ ? ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਾਲ ਦੇ 4 ਰੂਪਾਂਤਰਨ ਅਵਧੀ ਹੋਣਗੀਆਂ ਅਤੇ ਤਿਮਾਹੀ ਦਰ ਸਲਾਨਾ ਦਰ ਦੀ ਇੱਕ ਚੌਥਾਈ ਹੋਵੇਗੀ।

P = ₹ 100 ਅਤੇ 10% ਸਲਾਨਾ ਦਰ 'ਤੇ ਵਿਆਜ ਸਲਾਨਾ ਜੋੜਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਸਮਾਂ ਅਵਧੀ ਇੱਥੇ 1 ਸਾਲ ਹੈ	P = ₹ 100 ਅਤੇ 10% ਸਲਾਨਾ ਦਰ 'ਤੇ ਵਿਆਜ ਛਿਮਾਹੀ ਲੱਗਦਾ ਹੋਵੇ ਇੱਥੇ ਸਮਾਂ ਅਵਧੀ = 6 ਮਹੀਨੇ ਜਾਂ $\frac{1}{2}$ ਸਾਲ ਹੈ
$I = \frac{100 \times 10 \times 1}{100} = ₹ 10$	$I = \frac{100 \times \boxed{10 \times \frac{1}{2}}}{100} = ₹ 5$
A = ₹ 100 + ₹ 10 = ₹ 110	A = ₹ 100 + ₹ 5 = ₹ 105 ਹੁਣ ਅਗਲੇ ਛੇ ਮਹੀਨਿਆਂ ਦੇ ਲਈ P = ₹ 105
	ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $I = ₹ \frac{105 \times 10 \times \frac{1}{2}}{100} = ₹ 5.25$ ਅਤੇ A = ₹ 105 + ₹ 5.25 = ₹ 110.25

ਦਰ ਅੱਧੀ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖਿਆ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ ਵਿਆਜ ਛਿਮਾਹੀ ਜੁੜਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਵਿਆਜ ਦੀ ਗਣਨਾ ਦੋ ਵਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਲਈ ਸਮਾਂ ਅਵਧੀ ਦੁੱਗਣੀ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਦਰ ਅੱਧੀ ਕਰ ਦਿੱਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿੱਚ ਵਿਆਜ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਸਮਾਂ ਅਵਧੀ ਅਤੇ ਦਰ ਪਤਾ ਕਰੋ :

1. $1\frac{1}{2}$ ਸਾਲ ਦੇ ਲਈ, 8% ਸਲਾਨਾ ਦਰ 'ਤੇ ਉਧਾਰ ਲਈ ਗਈ ਇੱਕ ਰਾਸ਼ੀ ਜਿਸ 'ਤੇ ਵਿਆਜ ਛਿਮਾਹੀ ਲੱਗਦਾ ਹੋਵੇ।
2. 2 ਸਾਲ ਦੇ ਲਈ 4% ਸਲਾਨਾ ਦਰ 'ਤੇ ਉਧਾਰ ਲਈ ਗਈ ਇੱਕ ਰਾਸ਼ੀ ਜਿਸ 'ਤੇ ਵਿਆਜ ਛਿਮਾਹੀ ਲੱਗਦਾ ਹੋਵੇ।

ਸੋਚੋ, ਚਰਚਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਲਿਖੋ

ਇੱਕ ਰਾਸ਼ੀ 16% ਸਲਾਨਾ ਦਰ 'ਤੇ 1 ਸਾਲ ਦੇ ਲਈ ਉਧਾਰ ਲਈ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਜੇਕਰ ਵਿਆਜ ਹਰੇਕ ਤਿੰਨ ਮਹੀਨੇ ਬਾਅਦ ਜੋੜਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ 1 ਸਾਲ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੀ ਵਾਰ ਵਿਆਜ ਦੇਣਾ ਹੋਵੇਗਾ।

ਉਦਾਹਰਣ 12 : ਜੇਕਰ ਵਿਆਜ ਛਿਮਾਹੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ $1\frac{1}{2}$ ਸਾਲ ਦੇ ਲਈ 10% ਸਲਾਨਾ ਦਰ 'ਤੇ ਉਧਾਰ ਲਏ ਗਏ ₹ 12,000 ਦੇ ਕਰਜ਼ ਦਾ ਭੁਗਤਾਨ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਕਿੰਨੀ ਰਾਸ਼ੀ ਦੇਣੀ ਪਵੇਗੀ।

ਹੱਲ :

<table>
<tr><th>ਪਹਿਲੇ ਛੇ ਮਹੀਨੇ ਦੇ ਲਈ ਮੂਲਧਨ = ₹ 12,000</th><th>ਪਹਿਲੇ ਛੇ ਮਹੀਨੇ ਦੇ ਲਈ ਮੂਲਧਨ = ₹ 12,000</th></tr>
<tr><td rowspan="2">$1\frac{1}{2}$ ਸਾਲਾਂ ਵਿੱਚ 3 ਛਿਮਾਹੀਆਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।
ਇਸ ਲਈ ਵਿਆਜ ਸੰਯੋਜਨ 3 ਵਾਰ ਹੋਣਾ ਹੈ।
ਵਿਆਜ ਦੀ ਦਰ = 10% ਦਾ ਅੱਧਾ
= 5% ਛਿਮਾਹੀ
$A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$
$= ₹\ 12000\left(1+\frac{5}{100}\right)^3$
$= ₹\ 12000 \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20}$
= ₹ 13891.50</td><td>ਸਮਾਂ = 6 ਮਹੀਨੇ = $\frac{6}{12}$ ਸਾਲ = $\frac{1}{2}$ ਸਾਲ
ਦਰ = 10%
$I = ₹\ \frac{12000 \times 10 \times \frac{1}{2}}{100} = ₹\ 600$
A = P + I = ₹ 12000 + ₹ 600
= ₹ 12600 ਇਹ ਅਗਲੇ 6 ਮਹੀਨਿਆਂ ਦੇ ਲਈ ਮੂਲਧਨ ਹੈ।</td></tr>
<tr><td>$I = ₹\ \frac{12600 \times 10 \times \frac{1}{2}}{100} = ₹\ 630$
ਤੀਸਰੀ ਅਵਧੀ ਦਾ ਮੂਲਧਨ = ₹ 12600 + ₹ 630
= ₹ 13230
$I = ₹\ \frac{13230 \times 10 \times \frac{1}{2}}{100} = ₹\ 661.50$
A = P + I = ₹ 13230 + ₹ 661.50 = ₹ 13891.50</td></tr>
</table>

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਦੇ ਲਈ ਭੁਗਤਾਨ ਕੀਤੀ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਰਾਸ਼ੀ ਪਤਾ ਕਰੋ :

1. ₹ 2400 'ਤੇ 5% ਸਲਾਨਾ ਦਰ ਨਾਲ ਵਿਆਜ ਸਲਾਨਾ ਜੋੜਦੇ ਹੋਏ 2 ਸਾਲ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ।
2. ₹ 1800 'ਤੇ 8% ਸਲਾਨਾ ਦਰ ਨਾਲ ਵਿਆਜ ਤਿਮਾਹੀ ਜੋੜਦੇ ਹੋਏ 1 ਸਾਲ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ।

ਉਦਾਹਰਣ 13 : ₹ 10,000 ਦੀ ਰਾਸ਼ੀ ਦਾ 1 ਸਾਲ ਅਤੇ 3 ਮਹੀਨੇ ਦੇ ਲਈ $8\frac{1}{2}\%$ ਸਲਾਨਾ ਦਰ ਨਾਲ ਨਿਵੇਸ਼ ਕਰਨ 'ਤੇ ਮਿਸ਼ਰਤ ਵਿਆਜ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਵਿਆਜ ਸਲਾਨਾ ਲਗਦਾ ਹੋਵੇ।

ਹੱਲ : ਮਯੂਰੀ ਨੇ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਸਮੇਂ ਨੂੰ ਸਾਲਾਂ ਵਿੱਚ ਬਦਲਿਆ

$$1 \text{ ਸਾਲ } 3 \text{ ਮਹੀਨੇ} = 1\frac{3}{12} \text{ ਸਾਲ} = 1\frac{1}{4} \text{ ਸਾਲ}$$

ਮਯੂਰੀ ਨੇ ਸੂਤਰ ਵਿੱਚ ਮੁੱਲ ਰੱਖਣ ਦਾ ਯਤਨ ਕੀਤਾ ਅਤੇ

$$A = ₹\ 10000\left(1+\frac{17}{200}\right)^{1\frac{1}{4}} \text{ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ।}$$

ਉਹ ਪਰੇਸ਼ਾਨ ਸੀ। ਉਸਨੇ ਆਪਣੇ ਅਧਿਆਪਕ ਨੂੰ ਪੁੱਛਿਆ ਕਿ ਭਿੰਨ ਰੂਪੀ ਘਾਤ ਨੂੰ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਤਾ ਕਰੇਗੀ। ਅਧਿਆਪਕ ਨੇ ਉਸਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆ ਸੰਕੇਤ ਦਿੱਤਾ :

ਪਹਿਲਾਂ ਅਵਧੀ ਦੇ ਇੱਕ ਪੂਰੇ ਹਿੱਸੇ ਜਾਂ 1 ਸਾਲ ਦੇ ਲਈ ਕੁੱਲ ਰਾਸ਼ੀ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਉਸ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਇਸ ਨੂੰ ਮੂਲਧਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਰਤਦੇ ਹੋਏ $\frac{1}{4}$ ਸਾਲ ਦਾ ਸਧਾਰਨ ਵਿਆਜ ਪਤਾ ਕਰੋ

$$A = ₹\ 10000\left(1+\frac{17}{200}\right)$$

$$= ₹\ 10000 \times \frac{217}{200} = ₹\ 10850$$

ਹੁਣ ਇਹ ਰਾਸ਼ੀ ਅਗਲੇ $\frac{1}{4}$ ਸਾਲ ਦੇ ਲਈ ਮੂਲਧਨ ਦਾ ਕੰਮ ਕਰੇਗੀ। ਅਸੀਂ ₹ 10,850 ਦਾ $\frac{1}{4}$ ਸਾਲ ਦੇ ਲਈ ਸਧਾਰਨ ਵਿਆਜ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

$$\text{ਸਧਾਰਨ ਵਿਆਜ (SI)} = ₹\ \frac{10850 \times \frac{1}{4} \times 17}{100 \times 2}$$

$$= ₹\ \frac{10850 \times 1 \times 17}{800} = ₹\ 230.56$$

ਪਹਿਲੇ ਸਾਲ ਦਾ ਵਿਆਜ = ₹ 10850 − ₹ 10000 = ₹ 850

ਅਤੇ ਅਗਲੇ $\frac{1}{4}$ ਸਾਲ ਦਾ ਵਿਆਜ = ₹ 230.56

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੁੱਲ ਮਿਸ਼ਰਤ ਵਿਆਜ = 850 + 230.56 = ₹ 1080.56

8.9 ਮਿਸ਼ਰਤ ਵਿਆਜ ਦੇ ਸੂਤਰ ਦੇ ਹੋਰ ਪ੍ਰਯੋਗ

ਕੁੱਝ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਹਨ ਜਿੱਥੇ ਅਸੀਂ ਮਿਸ਼ਰਤ ਵਿਆਜ ਦੀ ਕੁੱਲ ਰਾਸ਼ੀ ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਸੂਤਰ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਵਿੱਚ ਕੁੱਝ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਹਨ :

(i) ਜਨਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਵਾਧਾ (ਜਾਂ ਕਮੀ)

(ii) ਜੇਕਰ ਬੈਕਟਰੀਆਂ ਦੇ ਵਾਧੇ ਦੀ ਦਰ ਪਤਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਉਸਦਾ ਕੁੱਲ ਵਾਧਾ ਪਤਾ ਕਰਨਾ।

(iii) ਕਿਸੇ ਵਸਤੂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਜੇਕਰ ਵਿਚਲੇ ਸਾਲਾਂ ਵਿੱਚ ਇਸਦੇ ਮੁੱਲ ਵਿੱਚ ਵਾਧਾ ਜਾਂ ਕਮੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 14 : ਸਾਲ 1997 ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਸ਼ਹਿਰ ਦੀ ਜਨਸੰਖਿਆ 20,000 ਸੀ। ਇਸ ਵਿੱਚ 5% ਸਲਾਨਾ ਦਰ ਨਾਲ ਵਾਧਾ ਹੋਇਆ। ਸਾਲ 2000 ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਸ਼ਹਿਰ ਦੀ ਜਨਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ।

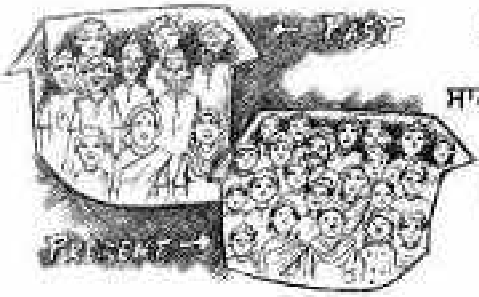
ਹੱਲ : ਹਰੇਕ ਸਾਲ ਜਨਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ 5% ਦਾ ਵਾਧਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਹਰੇਕ ਨਵੇਂ ਸਾਲ ਦੀ ਨਵੀਂ ਜਨਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਹ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵੱਧ ਰਹੀ ਹੈ।

1998 ਦੇ ਸ਼ੁਰੂ ਵਿੱਚ ਜਨਸੰਖਿਆ = 20,000 (ਇਸਨੂੰ ਅਸੀਂ ਸਾਲ ਦੇ ਲਈ ਮੂਲਧਨ ਮੰਨਦੇ ਹਾਂ)

$$\text{5\% ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਵਾਧਾ} = \frac{5}{100} \times 20,000 = 1000$$

ਸਾਲ 1999 ਦੀ ਜਨਸੰਖਿਆ = 20000 + 1000 = 21000

ਇਸ ਨੂੰ ਦੂਸਰੇ ਸਾਲ ਦੇ ਲਈ ਮੂਲਧਨ ਮੰਨ ਲਵੋ।



$$5\% \text{ ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਵਾਧਾ} = \frac{5}{100} \times 21000 = 1050$$

$$\text{ਸਾਲ 2000 ਦੀ ਜਨਸੰਖਿਆ} = 21000 + 1050 = 22050$$

ਇਸ ਨੂੰ ਤੀਸਰੇ ਸਾਲ ਦੇ ਲਈ ਮੂਲਧਨ ਮੰਨ ਲਵੋ।

$$5\% \text{ ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਵਾਧਾ} = \frac{5}{100} \times 22050 = 1102.5$$

$$\text{ਸਾਲ 2000 ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਜਨਸੰਖਿਆ} = 22050 + 1102.5 = 23152.5$$

$$\text{ਜਾਂ ਸੂਤਰ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਸਾਲ 2000 ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਜਨਸੰਖਿਆ} = 20000\left(1+\frac{5}{100}\right)^3$$

$$= 20000 \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20} = 23152.5$$

ਇਸ ਲਈ, ਲਗਭਗ ਜਨਸੰਖਿਆ = 23153

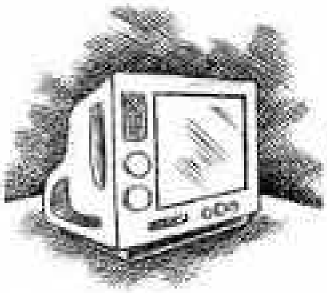
ਅਰੁਣ ਨੇ ਪੁਛਿਆ, ਜੇਕਰ ਜਨਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਕਮੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਕੀ ਕਰਨਾ ਪੈਂਦਾ ਹੈ। ਤਦ ਅਧਿਆਪਕ ਨੇ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਉਦਾਹਰਣ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀ।

ਉਦਾਹਰਣ 15 : ਇੱਕ T.V. ₹ 21,000 ਵਿੱਚ ਖਰੀਦਿਆ ਗਿਆ। ਇੱਕ ਸਾਲ ਬਾਅਦ T.V. ਦਾ ਮੁੱਲ 5% ਘੱਟ ਹੋ ਗਿਆ। (ਇੱਥੇ ਘੱਟਣ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਵਸਤੂ ਦੇ ਉਪਯੋਗ ਅਤੇ ਉਮਰ ਦੇ ਕਾਰਨ ਉਸਦੇ ਮੁੱਲ ਵਿੱਚ ਕਮੀ ਹੋਣੀ)। ਇੱਕ ਸਾਲ ਬਾਅਦ T.V. ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੂਲਧਨ = ₹ 21,000

ਮੁੱਲ ਵਿੱਚ ਕਮੀ = ਪ੍ਰਤੀ ਸਾਲ ₹ 21,000 ਦਾ 5%

$$= ₹\ \frac{21,000 \times 5 \times 1}{100} = ₹\ 1050$$



ਇੱਕ ਸਾਲ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ T.V. ਦਾ ਮੁੱਲ = ₹ 21,000 – ₹ 1050 = ₹ 19,950

ਦੂਜਾ ਢੰਗ : ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਸਿੱਧਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

$$\text{1 ਸਾਲ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ} = ₹\ 21,000\left(1-\frac{5}{100}\right)$$

$$= ₹\ 21,000 \times \frac{19}{20} = ₹\ 19,950$$

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

1. ₹ 10,500 ਦੇ ਮੁੱਲ ਦੀ ਇੱਕ ਮਸ਼ੀਨ ਦਾ 5% ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਮੁੱਲ ਘਟਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਸਾਲ ਬਾਅਦ ਇਸਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
2. ਇੱਕ ਸ਼ਹਿਰ ਦੀ ਵਰਤਮਾਨ ਜਨਸੰਖਿਆ 12 ਲੱਖ ਹੈ ਜੇ ਵਾਧੇ ਦੀ ਦਰ 4% ਹੈ ਤਾਂ 2 ਸਾਲ ਬਾਅਦ ਸ਼ਹਿਰ ਦੀ ਜਨਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਅਭਿਆਸ 8.3

1. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਦੇ ਲਈ ਮਿਸ਼ਰਧਨ (ਕੁੱਲ ਰਾਸ਼ੀ) ਅਤੇ ਮਿਸ਼ਰਤ ਵਿਆਜ ਪਤਾ ਕਰੋ।

   (a) ₹ 10, 800 'ਤੇ 3 ਸਾਲ ਦੇ ਲਈ $12\frac{1}{2}$% ਸਲਾਨਾ ਦਰ 'ਤੇ ਸਲਾਨਾ ਜੋੜਨ 'ਤੇ।

(b) ₹ 18,000 'ਤੇ $2\frac{1}{2}$ ਸਾਲ ਦੇ ਲਈ 10% ਸਲਾਨਾ ਦਰ 'ਤੇ ਸਲਾਨਾ ਜੋੜਨ 'ਤੇ।

(c) ₹ 62,500 'ਤੇ $1\frac{1}{2}$ ਸਾਲ ਦੇ ਲਈ 8% ਸਲਾਨਾ ਦਰ 'ਤੇ ਛਿਮਾਹੀ ਜੋੜਨ 'ਤੇ।

(d) ₹ 8000 'ਤੇ 1 ਸਾਲ ਦੇ ਲਈ 9% ਸਲਾਨਾ ਦਰ 'ਤੇ ਛਿਮਾਹੀ ਜੋੜਨ 'ਤੇ।
(ਤੁਸੀਂ ਪੜਤਾਲ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਸਧਾਰਨ ਵਿਆਜ ਦੇ ਸੂਤਰ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਦੇ ਇੱਕ ਦੇ ਬਾਅਦ ਦੂਸਰੇ ਸਾਲ ਦੇ ਲਈ ਗਣਨਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ)

(e) ₹ 10,000 'ਤੇ 1 ਸਾਲ ਦੇ ਲਈ 8% ਸਲਾਨਾ ਦਰ 'ਤੇ ਛਿਮਾਹੀ ਜੋੜਨ 'ਤੇ।

2. ਕਮਲਾ ਨੇ ਇੱਕ ਸਕੂਟਰ ਖਰੀਦਣ ਦੇ ਲਈ ਕਿਸੇ ਬੈਂਕ ਵਿੱਚ ₹ 26400, 15% ਸਲਾਨਾ ਤੇ ਉਧਾਰ ਲਏ ਜਦੋਂ ਕਿ ਵਿਆਜ ਸਲਾਨਾ ਜੁੜਦਾ ਹੋਵੇ। 2 ਸਾਲ ਅਤੇ 4 ਮਹੀਨੇ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਉਧਾਰ ਖਤਮ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਉਸ ਨੂੰ ਕਿੰਨੀ ਰਾਸ਼ੀ ਦਾ ਭੁਗਤਾਨ ਕਰਨਾ ਪਿਆ ?
(ਸੰਕੇਤ : ਵਿਆਜ ਨੂੰ ਸਲਾਨਾ ਜੋੜਦੇ ਹੋਏ ਪਹਿਲਾਂ 2 ਸਾਲ ਲਈ A ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਦੂਜੇ ਸਾਲ ਲਈ ਕੁੱਲ ਰਾਸ਼ੀ 'ਤੇ $\frac{4}{12}$ ਸਾਲ ਦਾ ਸਧਾਰਨ ਵਿਆਜ ਪਤਾ ਕਰੋ।)

3. ਫੈਬਿਨਾ ਨੇ ₹ 12,500, 3 ਸਾਲ ਦੇ ਲਈ 12% ਸਲਾਨਾ ਦਰ 'ਤੇ ਸਧਾਰਨ ਵਿਆਜ 'ਤੇ ਉਧਾਰ ਲਏ ਅਤੇ ਰਾਧਾ ਨੇ ਉਨ੍ਹੀ ਰਾਸ਼ੀ ਉਨ੍ਹੇ ਸਮੇਂ ਦੇ ਲਈ 10% ਸਲਾਨਾ ਦਰ ਨਾਲ ਮਿਸ਼ਰਤ ਵਿਆਜ 'ਤੇ ਉਧਾਰ ਲਈ। ਜੇਕਰ ਵਿਆਜ ਸਲਾਨਾ ਜੁੜਦਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਕਿਸ ਨੇ ਜ਼ਿਆਦਾ ਵਿਆਜ ਦਾ ਭੁਗਤਾਨ ਕਰਨਾ ਹੈ ਅਤੇ ਕਿੰਨਾ ਵੱਧ ਕਰਨਾ ਹੈ ?

4. ਮੈਂ ਜਮਸ਼ੇਦ ਤੋਂ ₹ 12,000, 2 ਸਾਲ ਦੇ ਲਈ 6% ਸਲਾਨਾ ਦਰ 'ਤੇ ਸਧਾਰਨ ਵਿਆਜ 'ਤੇ ਉਧਾਰ ਲਏ। ਜੇ ਮੈਂ ਇਹ ਰਾਸ਼ੀ 6% ਸਲਾਨਾ ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਮਿਸ਼ਰਤ ਵਿਆਜ 'ਤੇ ਉਧਾਰ ਲਈ ਹੁੰਦੀ ਤਾਂ ਮੈਨੂੰ ਕਿੰਨੀ ਵੱਧ ਰਾਸ਼ੀ ਦਾ ਭੁਗਤਾਨ ਕਰਨਾ ਪੈਂਦਾ ?

5. ਵਾਸੂਦੇਵ ਨੇ 12% ਸਲਾਨਾ ਦਰ 'ਤੇ ₹ 60,000 ਦਾ ਨਿਵੇਸ਼ ਕੀਤਾ। ਜੇਕਰ ਵਿਆਜ ਛਿਮਾਹੀ ਜੁੜਦਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਉਹ (i) 6 ਮਹੀਨੇ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ (ii) ਇੱਕ ਸਾਲ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ, ਕੁੱਲ ਕਿੰਨੀ ਰਾਸ਼ੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰੇਗਾ ?

6. ਆਰਿਫ ਨੇ ਇੱਕ ਬੈਂਕ ਤੋਂ ₹ 80,000 ਦਾ ਕਰਜ਼ਾ ਲਿਆ। ਜੇਕਰ ਵਿਆਜ ਦੀ ਦਰ 10% ਸਲਾਨਾ ਹੈ ਤਾਂ $1\frac{1}{2}$ ਸਾਲ ਬਾਅਦ ਉਸਦੇ ਦੁਆਰਾ ਭੁਗਤਾਨ ਕੀਤੀਆਂ ਜਾਣ ਵਾਲੀਆਂ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਵਿੱਚ ਅੰਤਰ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਜੇਕਰ ਵਿਆਜ (i) ਸਲਾਨਾ ਜੁੜਦਾ ਹੋਵੇ (ii) ਛਿਮਾਹੀ ਜੁੜਦਾ ਹੋਵੇ।

7. ਮਾਰੀਆ ਨੇ ਕਿਸੇ ਵਪਾਰ ਵਿੱਚ ₹ 8000 ਦਾ ਨਿਵੇਸ਼ ਕੀਤਾ। ਉਸ ਨੂੰ 5% ਸਲਾਨਾ ਦਰ 'ਤੇ ਮਿਸ਼ਰਤ ਵਿਆਜ ਦਾ ਭੁਗਤਾਨ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇਗਾ। ਜੇਕਰ ਵਿਆਜ ਸਲਾਨਾ ਜੁੜਦਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ
   (i) ਦੋ ਸਾਲ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਉਸਦੇ ਨਾਂ 'ਤੇ ਜਮ੍ਹਾਂ ਕੀਤੀ ਗਈ ਰਾਸ਼ੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।
   (ii) ਤੀਸਰੇ ਸਾਲ ਦਾ ਵਿਆਜ ਪਤਾ ਕਰੋ।

8. ₹ 10,000 ਤੇ $1\frac{1}{2}$ ਸਾਲ ਦੇ ਲਈ 10% ਸਲਾਨਾ ਦਰ ਨਾਲ ਮਿਸ਼ਰਤ ਵਿਆਜ ਅਤੇ ਕੁੱਲ ਰਾਸ਼ੀ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਦੋਂ ਕਿ ਵਿਆਜ ਛਿਮਾਹੀ ਜੁੜਣਾ ਹੈ। ਕੀ ਇਹ ਵਿਆਜ ਉਸ ਵਿਆਜ ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਹੋਵੇਗਾ ਜਿਹੜਾ ਸਲਾਨਾ ਜੁੜਦਾ ਹੋਵੇ ?

9. ਜੇਕਰ ਰਾਮ ₹ 4096, 18 ਮਹੀਨੇ ਦੇ ਲਈ $12\frac{1}{2}\%$ ਸਲਾਨਾ ਦਰ 'ਤੇ ਉਧਾਰ ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਵਿਆਜ ਛਿਮਾਹੀ ਜੁੜਦਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਰਾਮ ਕੁੱਲ ਕਿੰਨੀ ਰਾਸ਼ੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰੇਗਾ ?

10. 5% ਸਲਾਨਾ ਦਰ ਨਾਲ ਵੱਧਦੇ ਹੋਏ ਸਾਲ 2003 ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਥਾਨ ਦੀ ਜਨਸੰਖਿਆ 54,000 ਹੋ ਗਈ। ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ :
    (i) ਸਾਲ 2001 ਵਿੱਚ ਜਨਸੰਖਿਆ
    (ii) ਸਾਲ 2005 ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੀ ਜਨਸੰਖਿਆ ਹੋਵੇਗੀ ?

11. ਇੱਕ ਪ੍ਰਯੋਗਸ਼ਾਲਾ ਵਿੱਚ, ਕਿਸੇ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ ਬੈਕਟੀਰੀਆ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 2.5% ਪ੍ਰਤੀ ਘੰਟੇ ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਵੱਧ ਰਹੀ ਹੈ। ਜਦੋਂ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਸ਼ੁਰੂ ਵਿੱਚ ਬੈਕਟੀਰੀਆ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 5,06,000 ਸੀ ਤਾਂ 2 ਘੰਟੇ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਬੈਕਟੀਰੀਆ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ।

12. ਇੱਕ ਸਕੂਟਰ ₹ 42,000 ਰੁਪਏ ਵਿੱਚ ਖਰੀਦਿਆ ਗਿਆ। 8% ਸਲਾਨਾ ਦਰ ਨਾਲ ਇਸਦੇ ਮੁੱਲ ਵਿੱਚ ਕਮੀ ਹੋ ਗਈ। 1 ਸਾਲ ਬਾਅਦ ਸਕੂਟਰ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਅਸੀਂ ਕੀ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀ ?

1. ਅੰਕਿਤ ਮੁੱਲ 'ਤੇ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਛੂਟ ਕਟੌਤੀ ਅਖਵਾਉਂਦੀ ਹੈ।
   ਕਟੌਤੀ = ਅੰਕਿਤ ਮੁੱਲ – ਵੇਚ ਮੁੱਲ
2. ਜੇਕਰ ਕਟੌਤੀ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਦਿੱਤੀ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਕਟੌਤੀ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਕਟੌਤੀ = ਅੰਕਿਤ ਮੁੱਲ ਦਾ ਕਟੌਤੀ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ।
3. ਕਿਸੇ ਵਸਤੂ ਖਰੀਦਣ ਦੇ ਬਾਅਦ ਉਸ ਤੇ ਕੀਤੇ ਗਏ ਵਾਧੂ ਖਰਚੇ ਖਰੀਦ ਮੁੱਲ ਵਿੱਚ ਸ਼ਾਮਿਲ ਕਰ ਲਏ ਜਾਂਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਖਰਚਾਂ ਨੂੰ ਉਪਰਲੇ ਖਰਚ ਆਖਦੇ ਹਨ। ਅਸਲ ਖਰੀਦ ਮੁੱਲ = ਖਰੀਦ ਮੁੱਲ + ਉਪਰਲਾ ਖਰਚ।
4. ਕਿਸੇ ਵਸਤੂ ਨੂੰ ਵੇਚਣ 'ਤੇ ਸਰਕਾਰ ਦੁਆਰਾ ਵਿਕਰੀ ਟੈਕਸ ਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ ਬਿੱਲ ਦੀ ਰਾਸ਼ੀ ਵਿੱਚ ਜੋੜ ਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਵਿਕਰੀ ਟੈਕਸ = ਬਿੱਲ ਰਾਸ਼ੀ ਦਾ ਟੈਕਸ %
5. ਪਿਛਲੇ ਸਾਲ ਦੀ ਕੁੱਲ ਰਾਸ਼ੀ (A = P + I) 'ਤੇ ਗਣਨਾ ਕੀਤੇ ਗਏ ਵਿਆਜ ਨੂੰ ਮਿਸ਼ਰਤ ਵਿਆਜ ਆਖਦੇ ਹਨ।
6. (i) ਜਦੋਂ ਵਿਆਜ ਸਲਾਨਾ ਜੁੜਦਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ

   ਕੁੱਲ ਰਾਸ਼ੀ (A) = $P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$, ਇੱਥੇ P ਮੂਲਧਨ, R ਵਿਆਜ ਦੀ ਦਰ ਅਤੇ n ਸਮਾਂ ਹੈ।

   (ii) ਜਦੋਂ ਵਿਆਜ ਛਿਮਾਹੀ ਜੁੜਦਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ

   ਕੁੱਲ ਰਾਸ਼ੀ = $P\left(1+\frac{R}{200}\right)^{2n}$ ਇੱਥੇ $\begin{cases} \frac{R}{2} \text{ ਵਿਆਜ ਦੀ ਛਿਮਾਹੀ ਦਰ} \\ 2n = \text{ਛਿਮਾਹੀਆਂ (ਅੱਧੇ ਸਾਲਾਂ) ਦੀ ਸੰਖਿਆ} \end{cases}$

ਬੀਜਗਣਿਤਿਕ ਵਿਅੰਜਕ ਅਤੇ ਤਤਸਮਕ

ਅਧਿਆਇ **9**

9.1 ਵਿਅੰਜਕ ਕੀ ਹਨ ?

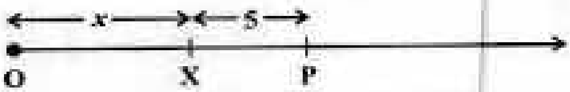
ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਬੀਜਗਣਿਤਿਕ ਵਿਅੰਜਕਾਂ (ਜਾਂ ਸਿਰਫ ਵਿਅੰਜਕਾਂ) ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਜਾਣਕਾਰੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ। $x + 3$, $2y - 5$, $3x^2$, $4xy + 7$ ਆਦਿ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਦੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਹਨ।

ਤੁਸੀਂ ਹੋਰ ਜ਼ਿਆਦਾ ਵਿਅੰਜਕ ਬਣਾ ਸਕਦੇ ਹੋ। ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ ਵਿਅੰਜਕ ਚਲਾਂ ਅਤੇ ਅਚਲਾਂ ਤੋਂ ਬਣਦੇ ਹਨ। ਵਿਅੰਜਕ $2y - 5$ ਨੂੰ ਚਲ y ਅਤੇ ਅਚਲ 2 ਅਤੇ 5 ਨਾਲ ਬਣਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਵਿਅੰਜਕ $4xy + 7$ ਨੂੰ ਚਲਾਂ x ਤੇ y ਅਤੇ ਅਚਲਾਂ 4 ਤੇ 7 ਨਾਲ ਬਣਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।

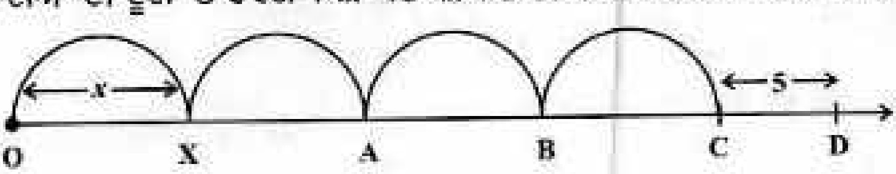
ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਵਿਅੰਜਕ $2y - 5$ ਵਿੱਚ y ਦਾ ਮੁੱਲ ਕੁੱਝ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਹ 2, 5, –3, 0, $\frac{5}{2}$, $\frac{-7}{3}$ ਆਦਿ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ y ਦੇ ਅਣਗਿਣਤ ਵੱਖਰੇ-ਵੱਖਰੇ ਮੁੱਲ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਵਿਅੰਜਕ ਦੇ ਚਲ ਦਾ ਮੁੱਲ ਬਦਲਣ ਨਾਲ ਵਿਅੰਜਕ ਦਾ ਮੁੱਲ ਬਦਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ y ਦੇ ਵੱਖਰੇ ਮੁੱਲ ਭਰਨ ਨਾਲ $2y - 5$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਬਦਲਦਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜਦੋਂ $y = 2$, $2y - 5 = 2(2) - 5 = -1$, ਜਦੋਂ $y = 0$, $2y - 5 = 2 \times 0 - 5 = -5$ ਆਦਿ। y ਦੇ ਕੁੱਝ ਹੋਰ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਮੁੱਲਾਂ ਨਾਲ $2y - 5$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ ਅਤੇ ਵਿਅੰਜਕ

ਵਿਅੰਜਕ $x + 5$ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਆਉ ਮੰਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਚਲ x ਦੀ ਸਥਿਤੀ x ਹੈ।



X, ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ ਦੇ ਕਿਤੇ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਪਰ ਇਹ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਹੈ ਕਿ $x + 5$ ਦਾ ਮੁੱਲ, x ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ 5 ਇਕਾਈਆਂ ਦੀ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਬਿੰਦੂ P ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਵੇਗਾ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ $x - 4$ ਦਾ ਮੁੱਲ X ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ 4 ਇਕਾਈਆਂ ਦੀ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਹੋਵੇਗਾ। $4x$ ਅਤੇ $4x + 5$ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਬਾਰੇ ਕੀ ਕਿਹਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ?



$4x$ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਬਿੰਦੂ C 'ਤੇ ਹੋਵੇਗੀ। ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ C ਦੀ ਦੂਰੀ X ਦੀ ਦੂਰੀ ਦਾ ਚਾਰ ਗੁਣਾ ਹੋਵੇਗੀ। $4x + 5$ ਦੀ ਸਥਿਤੀ D, C ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ 5 ਇਕਾਈ ਦੀ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਹੋਵੇਗੀ।

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

- ਇੱਕ ਚਲ ਵਾਲੇ ਅਤੇ ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਾਲੇ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਦੀਆਂ ਪੰਜ-ਪੰਜ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦਿਓ।
- $x, x-4, 2x+1, 3x-2$ ਨੂੰ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਦਰਸਾਉ।

9.2 ਪਦ, ਗੁਣਨਖੰਡ ਅਤੇ ਗੁਣਾਂਕ

ਵਿਅੰਜਕ $4x + 5$ ਨੂੰ ਲਵੋ। ਇਹ ਵਿਅੰਜਕ $4x$ ਅਤੇ 5 ਦੋ ਪਦਾਂ ਤੋਂ ਬਣਿਆ ਹੈ। ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਜੋੜ ਕੇ ਵਿਅੰਜਕ ਬਣਦਾ ਹੈ। ਪਦ ਆਪ ਵੀ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਣਾਏ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ।

ਪਦ $4x$ ਆਪਣੇ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ 4 ਅਤੇ x ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਹੈ। ਪਦ 5 ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਗੁਣਨਖੰਡ 5 ਤੋਂ ਬਣਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ।

ਵਿਅੰਜਕ $7xy - 5x$ ਦੇ ਦੋ ਪਦ $7xy$ ਅਤੇ $5x$ ਹੈ। ਪਦ $7xy$ ਗੁਣਨਖੰਡ 7, x ਅਤੇ y ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਹੈ। ਕਿਸੇ ਪਦ ਦਾ ਸੰਖਿਆਤਮਕ ਗੁਣਨਖੰਡ ਨੂੰ ਉਸਦਾ **ਸੰਖਿਆਤਮਕ ਗੁਣਾਂਕ (Numerical Coefficient)** ਜਾਂ ਗੁਣਾਂਕ ਆਖਦੇ ਹਨ।

ਪਦ $7xy$ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ 7 ਹੈ ਅਤੇ ਪਦ $-5x$ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ -5 ਹੈ।

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

ਵਿਅੰਜਕ $x^2y^2 - 10x^2y + 5xy^2 - 20$ ਦੇ ਹਰੇਕ ਪਦ ਦੇ ਗੁਣਜ ਨੂੰ ਪਹਿਚਾਣੋ।

9.3 ਇੱਕ ਪਦੀ, ਦੋ ਪਦੀ ਅਤੇ ਬਹੁਪਦ

ਜਿਸ ਵਿਅੰਜਕ ਵਿੱਚ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਪਦ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਉਸਨੂੰ **ਇੱਕ ਪਦੀ** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਦੋ ਪਦਾਂ ਵਾਲੇ ਵਿਅੰਜਕ ਨੂੰ **ਦੋ ਪਦੀ** ਆਖਦੇ ਹਨ ਤਿੰਨ ਪਦਾਂ ਵਾਲੇ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਪਦੀ ਆਖਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੋਰ। ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਇੱਕ ਜਾਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਪਦਾਂ ਵਾਲੇ ਵਿਅੰਜਕ ਜਿਸਦੇ ਗੁਣਾਂਕ ਸਿਰਫ ਨਾ ਹੋਣ ਅਤੇ ਜਿਸਦੇ ਚਲਾਂ ਦੀ ਘਾਤ ਰਿਣ ਨਾ ਹੋਵੇ, **ਬਹੁਪਦ** ਆਖਦੇ ਹਨ। ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਪਦਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਇੱਕ ਜਾਂ ਇੱਕ ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਕੁੱਝ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ।

ਇੱਕ ਪਦੀ ਦੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ : $4x^2, 3xy, -7z, 5xy^2, 10y, -9, 82mnp$ ਆਦਿ।
ਦੋ ਪਦੀ ਦੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ : $a+b, 4l+5m, a+4, 5-3xy, z^2-4y^2$ ਆਦਿ।
ਤਿੰਨ ਪਦੀ ਦੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ : $a+b+c, 2x+3y-5, x^2y-xy^2+y^2$ ਆਦਿ।
ਬਹੁਪਦ ਦੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ : $a+b+c+d, 3xy, 7xyz-10, 2x+3y+7z$ ਆਦਿ।

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

1. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਬਹੁਪਦਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਪਦੀ, ਦੋ ਪਦੀ, ਅਤੇ ਤਿੰਨ ਪਦੀ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਰਗੀਕਰਨ ਕਰੋ :
   $-z+5, x+y+z, y+z+100, ab-ac, 17$
2. ਬਣਾਓ :
   (a) ਤਿੰਨ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਦੋ ਪਦੀ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਚਲ x ਹੋਵੇ।
   (b) ਤਿੰਨ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੋਪਦੀ ਜਿਸ ਵਿੱਚ x ਅਤੇ y ਚਲ ਹੋਣ।
   (c) ਤਿੰਨ ਇੱਕ ਪਦੀ ਜਿਸ ਵਿੱਚ x ਅਤੇ y ਚਲ ਹੋਣ।
   (d) ਚਾਰ ਜਾਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਪਦਾਂ ਵਾਲੇ 2 ਬਹੁਪਦ।

9.4 ਸਮਾਨ ਅਤੇ ਅਸਮਾਨ ਪਦ

ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਨੂੰ ਦੇਖੋ :

$7x, 14x, -13x, 5x^2, 7y, 7xy, -9y^2, -9x^2, -5yx$

ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਸਮਾਨ ਪਦ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ :

(i) $7x$, $14x$, ਅਤੇ $-13x$ (ii) $5x^2$ ਅਤੇ $-9x^2$

(iii) $7xy$ ਅਤੇ $-5yx$

$7x$ ਅਤੇ $7y$ ਸਮਾਨ ਪਦ ਕਿਉਂ ਨਹੀਂ ਹਨ ?

$7x$ ਅਤੇ $7xy$ ਸਮਾਨ ਪਦ ਕਿਉਂ ਨਹੀਂ ਹਨ ?

$7x$ ਅਤੇ $5x^2$ ਸਮਾਨ ਪਦ ਕਿਉਂ ਨਹੀਂ ਹਨ ?

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਦੇ ਦੋ ਸਮਾਨ ਪਦ ਲਿਖੋ:

(i) $7xy$ (ii) $4mn^2$ (iii) $2l$

9.5 ਬੀਜ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਅਤੇ ਘਟਾਉ

ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਸਿੱਖਿਆ ਹੈ ਕਿ ਬੀਜ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਨੂੰ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜੋੜਿਆ ਅਤੇ ਘਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਉਦਹਾਰਣ ਲਈ $7x^2 - 4x + 5$ ਅਤੇ $9x - 10$, ਨੂੰ ਜੋੜਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$\begin{array}{rrrr} & 7x^2 & - 4x & + 5 \\ + & & 9x & - 10 \\ \hline & 7x^2 & + 5x & - 5 \end{array}$$

ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ ਕਿ ਅਸੀਂ ਜੋੜਫਲ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਜੋੜੇ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਹਰੇਕ ਵਿਅੰਜਕ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਕਤਾਰਾਂ ਵਿੱਚ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਰਦੇ ਸਮੇਂ ਅਸੀਂ ਸਮਾਨ ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ-ਦੂਸਰੇ ਦੇ ਉੱਪਰ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਉੱਪਰ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ, ਅਸੀਂ ਉਹ ਸਮਾਨ ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਜੋੜਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $5 + (-10) = 5 - 10 = -5$, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $-4x + 9x = (-4 + 9)x = 5x$. ਆਉ ਕੁੱਝ ਹੋਰ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਹੱਲ ਕਰੀਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 : $7xy + 5yz - 3zx$, $4yz + 9zx - 4y$, $-3xz + 5x - 2xy$ ਦਾ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ: ਸਮਾਨ ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਦੇ ਉੱਪਰ—ਹੇਠਾਂ ਰੱਖ ਕੇ ਤਿੰਨ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਨੂੰ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਕਤਾਰਾਂ ਵਿੱਚ ਲਿਖਦੇ ਹੋਏ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।

$$\begin{array}{rrrrrr} & 7xy & + 5yz & - 3zx & & \\ + & & 4yz & + 9zx & & - 4y \\ + & -2xy & & - 3zx & + 5x & \\ \hline & 5xy & + 9yz & + 3zx & + 5x & - 4y \end{array}$$

(ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ xz ਅਤੇ zx ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਹਨ)

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $5xy + 9yz + 3zx + 5x - 4y$ ਹੈ। ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਦੂਸਰੇ ਵਿਅੰਜਕ ਦੇ ਪਦ $-4y$ ਅਤੇ ਤੀਸਰੇ ਵਿਅੰਜਕ ਦੇ ਪਦ $5x$ ਨੂੰ ਜੋੜਫਲ ਵਿੱਚ ਉਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ ਲਿਖਿਆ ਗਿਆ ਹੈ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਉਹ ਹਨ ਕਿਉਂਕਿ ਦੂਸਰੇ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਵਿੱਚ ਉਸਦਾ ਕੋਈ ਸਮਾਨ ਪਦ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਉਦਹਾਰਣ 2 : $7x^2 - 4xy + 8y^2 + 5x - 3y$ ਵਿੱਚੋਂ $5x^2 - 4y^2 + 6y - 3$ ਨੂੰ ਘਟਾਉ।

ਹੱਲ :

$$\begin{array}{rrrrrr} 7x^2 & - 4xy & + 8y^2 & + 5x & - 3y & \\ 5x^2 & & - 4y^2 & & + 6y & - 3 \\ (-) & & (+) & & (-) & (+) \\ \hline 2x^2 & - 4xy & + 12y^2 & + 5x & - 9y & + 3 \end{array}$$

> ਨੋਟ : ਕਿਸੇ ਵੀ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਘਟਾਉਣਾ ਉਸਦੇ ਜੋੜਾਤਮਕ ਉਲਟ ਨੂੰ ਜੋੜਨ ਵਰਗਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ –3 ਨੂੰ ਘਟਾਉਣਾ, +3 ਨੂੰ ਜੋੜਨ ਦੇ ਸਮਾਨ ਹੈ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $6y$ ਨੂੰ ਘਟਾਉਣਾ, $-6y$ ਨੂੰ ਜੋੜਨ ਦੇ ਸਮਾਨ ਹੈ। $-4y^2$ ਨੂੰ ਘਟਾਉਣਾ $4y^2$ ਨੂੰ ਜੋੜਨ ਦੇ ਸਮਾਨ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੋਰ ਦੂਸਰੀ ਕਿਤਾਬ ਦੇ ਹਰੇਕ ਪਦ ਦੇ ਹੇਠਾਂ ਤੀਸਰੀ ਕਤਾਰ ਵਿੱਚ ਲਿਖੇ ਚਿੰਨ੍ਹ ਤੋਂ ਇਹ ਜਾਨਣ ਵਿੱਚ ਸਹਾਇਤਾ ਮਿਲਦੀ ਹੈ ਕਿ ਕਿਹੜੀ ਕਿਰਿਆ ਕੀਤੀ ਜਾਣੀ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 9.1

1. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦੇ ਪਦਾਂ ਅਤੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਨੂੰ ਪਹਿਚਾਣੋ :

   (i) $5xyz^2 - 3zy$ (ii) $1 + x + x^2$ (iii) $4x^2y^2 - 4x^2y^2z^2 + z^2$

   (iv) $3 - pq + qr - rp$ (v) $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} - xy$ (vi) $0.3a - 0.6ab + 0.5b$

2. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਬਹੁਪਦਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਪਦੀ, ਦੋ ਪਦੀ ਅਤੇ ਤਿੰਨ ਪਦੀ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਰਗੀਕਰਨ ਕਰੋ। ਕਿਹੜਾ ਬਹੁਪਦ ਇਹਨਾਂ ਤਿੰਨ ਸ਼੍ਰੇਣੀਆਂ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਵਿੱਚ ਵੀ ਨਹੀਂ ਹੈ ?

   $x + y$, 1000, $x + x^2 + x^3 + x^4$, $7 + y + 5x$, $2y - 3y^2$, $2y - 3y^2 + 4y^3$, $5x - 4y + 3xy$, $4z - 15z^2$, $ab + bc + cd + da$, pqr, $p^2q + pq^2$, $2p + 2q$

3. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰੋ :

   (i) $ab - bc, bc - ca, ca - ab$ (ii) $a - b + ab, b - c + bc, c - a + ac$

   (iii) $2p^2q^2 - 3pq + 4, 5 + 7pq - 3p^2q^2$ (iv) $l^2 + m^2, m^2 + n^2, n^2 + l^2, 2lm + 2mn + 2nl$

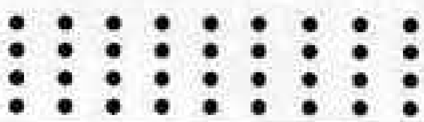
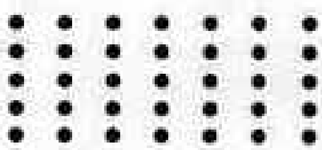
4. (a) $12a - 9ab + 5b - 3$ ਵਿੱਚੋਂ $4a - 7ab + 3b + 12$ ਨੂੰ ਘਟਾਓ।

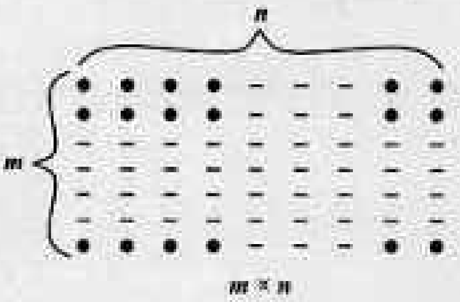
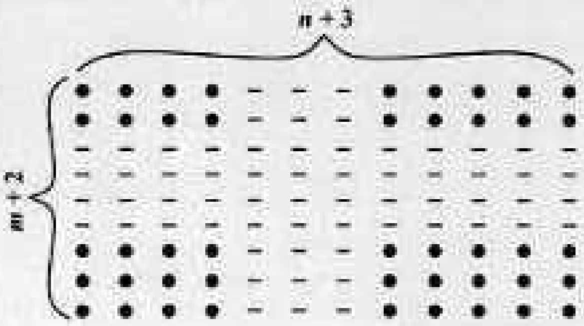
   (b) $5xy - 2yz - 2zx + 10xyz$ ਵਿੱਚੋਂ $3xy + 5yz - 7zx$ ਨੂੰ ਘਟਾਓ।

   (c) $18 - 3p - 11q + 5pq - 2pq^2 + 5p^2q$ ਵਿੱਚੋਂ $4p^2q - 3pq + 5pq^2 - 8p + 7q - 10$ ਨੂੰ ਘਟਾਓ।

9.6 ਬੀਜ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨ

(i) ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਪੈਟਰਨ ਨੂੰ ਦੇਖੋ :

ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਪੈਟਰਨ	ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸੰਖਿਆ
	4×9
	5×7

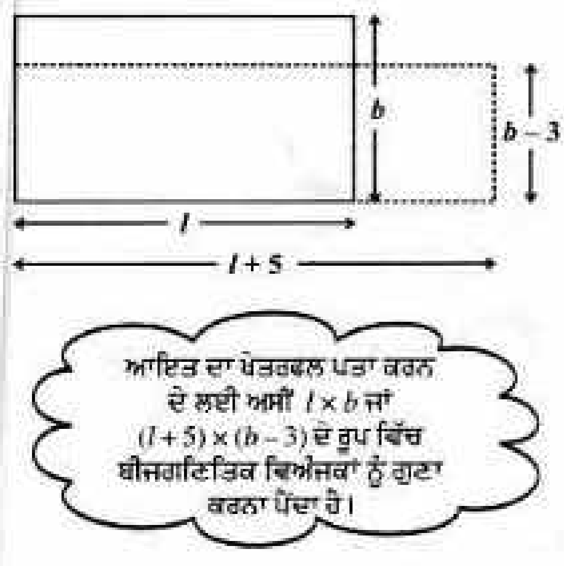
	$m \times n$
	$(m + 2) \times (n + 3)$

ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਕਤਾਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਵਿਅੰਜਕ ਨੂੰ ਕਾਲਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਵਿਅੰਜਕ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨਾ ਹੈ।

ਇੱਥੇ ਕਤਾਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 2 ਵਧਾਈ ਗਈ ਹੈ, ਜਾਂ $m + 2$ ਅਤੇ ਕਾਲਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 3 ਵਧਾਈ ਗਈ ਹੈ, ਜਾਂ $n + 3$

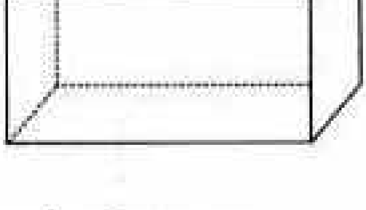
(ii) ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਹੋਰ ਸਥਿਤੀਆਂ ਬਾਰੇ ਸੋਚ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਦੋ ਬੀਜਗਣਿਤਿਕ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਨੂੰ ਗੁਣਾ ਕਰਨੀ ਪੈਂਦੀ ਹੋਵੇ ?

ਅਮੀਨਾ ਉੱਠ ਕੇ ਕਹਿੰਦੀ ਹੈ। "ਅਸੀਂ ਆਇਤ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦੇ ਬਾਰੇ ਸੋਚ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।" ਆਇਤ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $l \times b$ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ l ਲੰਬਾਈ ਹੈ ਅਤੇ b ਚੌੜਾਈ ਹੈ ਜਦੋਂ ਆਇਤ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 5 ਇਕਾਈ ਵਧਾ ਦਿੱਤੀ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਜਿਵੇਂ ਕਿ $(l + 5)$ ਕਰ ਦਿੱਤੀ ਜਾਵੇ ਅਤੇ ਚੌੜਾਈ 3 ਇਕਾਈ ਘੱਟ ਕਰ ਦਿੱਤੀ ਜਾਵੇ ਜਾਂ $(b - 3)$ ਕਰ ਦਿੱਤੀ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਆਇਤ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $(l + 5) \times (b - 3)$ ਹੋਵੇਗਾ।



ਆਇਤ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ $l \times b$ ਜਾਂ $(l + 5) \times (b - 3)$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬੀਜਗਣਿਤਿਕ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਨੂੰ ਗੁਣਾ ਕਰਨਾ ਪੈਂਦਾ ਹੈ।

(iii) ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਆਇਤਨ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਸੋਚ ਸਕਦੇ ਹੋ ? (ਇੱਕ ਆਇਤਾਕਾਰ ਬਕਸੇ ਦਾ ਆਇਤਨ ਉਸਦੀ ਲੰਬਾਈ, ਚੌੜਾਈ ਅਤੇ ਉਚਾਈ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।)



(iv) ਸਰਿਤਾ ਕਹਿੰਦੀ ਹੈ ਕਿ ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਵਸਤੂਆਂ ਖਰੀਦਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਗੁਣਾ ਕਰਨੀ ਪੈਂਦੀ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ, ਜੇ ਪ੍ਰਤੀ ਦਰਜਨ ਕੇਲਿਆਂ ਦਾ ਮੁੱਲ p ਰੁਪਏ ਹੈ ਅਤੇ ਸਕੂਲ ਪਿਕਨਿਕ ਦੇ ਲਈ z ਦਰਜਨ ਕੇਲਿਆਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ $(p \times z)$ ਰੁਪਏ ਦਾ ਭੁਗਤਾਨ ਕਰਨਾ ਪਵੇਗਾ।

ਮੰਨ ਲਵੋ, ਪ੍ਰਤੀ ਦਰਜਨ ਕੇਲਿਆਂ ਦਾ ਮੁੱਲ 2 ਰੁਪਏ ਘੱਟ ਹੁੰਦਾ ਅਤੇ ਪਿਕਨਿਕ ਦੇ ਲਈ 4 ਦਰਜਨ ਘੱਟ ਕੇਲਿਆਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਪ੍ਰਤੀ ਦਰਜਨ ਕੇਲਿਆਂ ਦਾ ਮੁੱਲ $(p - 2)$ ਰੁਪਏ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ $(z - 4)$ ਦਰਜਨ ਕੇਲਿਆਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $(p - 2) \times (z - 4)$ ਰੁਪਏ ਦਾ ਭੁਗਤਾਨ ਕਰਨਾ ਪਵੇਗਾ।

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

ਕੀ ਤੁਸੀ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਹੋਰ ਦੋ ਸਥਿਤੀਆਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਸੋਚ ਸਕਦੇ ਹੋ ਜਿੱਥੇ ਸਾਨੂੰ ਬੀਜ ਗਣਿਤਕ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਨੂੰ ਗੁਣਾ ਕਰਨੀ ਪੈਂਦੀ ਹੈ ?

[ਨੋਟ : • ਚਾਲ ਅਤੇ ਸਮੇਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਸੋਚਣਾ

• ਸਧਾਰਨ ਵਿਆਜ, ਮੂਲਧਨ ਅਤੇ ਸਧਾਰਨ ਵਿਆਜ ਦੀ ਦਰ ਆਦਿ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਸੋਚਣਾ]

ਉਪਰੋਕਤ ਸਾਰੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੋ ਜਾਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਦਾ ਗੁਣਨ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਜੇ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਬੀਜਗਣਿਤਿਕ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਹਨ ਅਤੇ ਅਸੀਂ ਗੁਣਨਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਇਹ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਪਤਾ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਕਿ ਗੁਣਨਫਲ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਆਉ, ਇਸ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਦੋ ਇੱਕ ਪਦੀਆਂ ਨੂੰ ਗੁਣਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

9.7 ਇੱਕ ਪਦੀ ਨੂੰ ਇੱਕ ਪਦੀ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨਾ

9.7.1 ਦੋ ਇੱਕ ਪਦੀਆਂ ਨੂੰ ਗੁਣਾ ਕਰਨਾ

ਅਸੀਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$4 \times x = x + x + x + x = 4x$ ਜੋ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਸਿੱਖ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, $4 \times (3x) = 3x + 3x + 3x + 3x = 12x$

ਹੁਣ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਗੁਣਨਫਲਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ :

(i) $x \times 3y = x \times 3 \times y = 3 \times x \times y = 3xy$

(ii) $5x \times 3y = 5 \times x \times 3 \times y = 5 \times 3 \times x \times y = 15xy$

(iii) $5x \times (-3y) = 5 \times x \times (-3) \times y$

$= 5 \times (-3) \times x \times y = -15xy$

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਇੱਕ ਪਦੀਆਂ ਦੇ ਤਿੰਨ ਗੁਣਨਫਲ $3xy$, $15xy$, $-15xy$ ਵੀ ਇੱਕ ਪਦੀ ਹਨ।

ਕੁੱਝ ਹੋਰ ਉਪਯੋਗੀ ਉਦਾਹਰਣ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ:

(iv) $5x \times 4x^2 = (5 \times 4) \times (x \times x^2)$

$= 20 \times x^3 = 20x^3$

(v) $5x \times (-4xyz) = (5 \times -4) \times (x \times xyz)$

$= -20 \times (x \times x \times yz) = -20x^2yz$

ਨੋਟ ਕਰੋ : $5 \times 4 = 20$ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਗੁਣਨਫਲ ਦਾ ਗੁਣਜ = ਪਹਿਲਾਂ ਇੱਕ ਪਦੀ ਦਾ ਗੁਣਜ × ਦੂਸਰੀ ਇੱਕ ਪਦੀ ਦਾ ਗੁਣਜ ਅਤੇ

$x \times x^2 = x^3$

ਭਾਵ ਕਿ, ਗੁਣਨਫਲ ਦਾ ਬੀਜ ਗਣਿਤਕ ਗੁਣਨਖੰਡ = ਪਹਿਲੇ ਇੱਕ ਪਦੀ ਦਾ ਬੀਜ ਗਣਿਤਕ ਗੁਣਨਖੰਡ × ਦੂਜੇ ਇੱਕ ਪਦੀ ਦਾ ਬੀਜ ਗਣਿਤਕ ਗੁਣਨਖੰਡ

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਅਸੀਂ ਦੋਨਾਂ ਇੱਕ ਪਦੀਆਂ ਦੇ ਬੀਜਗਣਿਤਿਕ ਭਾਗਾਂ ਦੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਚਲਾਂ ਦੀਆਂ ਘਾਤਾਂ ਨੂੰ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇੱਕਠਾ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਘਾਤਾਂ ਦੇ ਨਿਯਮਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਹੈ।

9.7.2 ਤਿੰਨ ਜਾਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਇੱਕ ਪਦੀਆਂ ਨੂੰ ਗੁਣਾ ਕਰਨਾ

ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

(i) $2x \times 5y \times 7z = (2x \times 5y) \times 7z = 10xy \times 7z = 70xyz$

(ii) $4xy \times 5x^2y^2 \times 6x^3y^3 = (4xy \times 5x^2y^2) \times 6x^3y^3 = 20x^3y^3 \times 6x^3y^3 = 120x^3y^3 \times x^3y^3$

$= 120\,(x^3 \times x^3) \times (y^3 \times y^3) = 120x^6 \times y^6 = 120x^6y^6$

ਇਹ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਅਸੀਂ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ, ਪਹਿਲੇ ਦੋ ਇੱਕ ਪਦੀਆਂ ਨੂੰ ਗੁਣਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਪਦੀ ਨੂੰ ਤੀਸਰੀ ਪਦੀ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਜ਼ਿਆਦਾ ਗਿਣਤੀ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਪਦੀ ਨੂੰ ਗੁਣਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਇਸ ਵਿਧੀ ਦਾ ਵਿਸਤਾਰ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

$4x \times 5y \times 7z$ ਪਤਾ ਕਰੋ :

ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ $4x \times 5y$ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਫਿਰ ਉਸ ਨੂੰ $7z$ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰੋ, ਜਾਂ ਪਹਿਲਾਂ $5y \times 7z$ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ $4x$ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰੋ। ਕੀ ਨਤੀਜਾ ਇੱਕੋ ਜਿਹਾ ਹੋਵੇਗਾ ? ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਵਿਚਾਰ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ ? ਕੀ ਗੁਣਾ ਕਰਨ ਸਮੇਂ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਮਹੱਤਵ ਹੈ ?

ਅਸੀਂ ਦੂਸਰੇ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਵੀ ਇਸ ਗੁਣਨਫਲ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ:

$4xy \times 5x^2y^2 \times 6x^3y^3$

$= (4 \times 5 \times 6) \times (x \times x^2 \times x^3) \times (y \times y^2 \times y^3)$

$= 120\,x^6y^6$

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਇੱਕ ਆਇਤ ਦੇ, ਜਿਸਦੀ ਲੰਬਾਈ ਅਤੇ ਚੌੜਾਈ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਹੈ, ਖੇਤਰਫਲ ਦੀ ਸਾਰਣੀ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਕਰੋ :

ਹੱਲ :

ਲੰਬਾਈ	ਚੌੜਾਈ	ਖੇਤਰਫਲ
$3x$	$5y$	$3x \times 5y = 15xy$
$9y$	$4y^2$	....
$4ab$	$5bc$	....
$2l^2m$	$3lm^2$	....

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਆਇਤਾਕਾਰ ਬਕਸਿਆਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ, ਚੌੜਾਈ ਅਤੇ ਉਚਾਈ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਹੈ। ਹਰੇਕ ਦਾ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕਰੋ :

	ਲੰਬਾਈ	ਚੌੜਾਈ	ਉਚਾਈ
(i)	$2ax$	$3by$	$5cz$
(ii)	m^2n	n^2p	p^2m
(iii)	$2q$	$4q^2$	$8q^3$

ਹੱਲ : ਆਇਤਨ = ਲੰਬਾਈ × ਚੌੜਾਈ × ਉਚਾਈ

ਇਸ ਲਈ (i) ਆਇਤਨ $= (2ax) \times (3by) \times (5cz)$

$= 2 \times 3 \times 5 \times (ax) \times (by) \times (cz) = 30abcxyz$

(ii) ਆਇਤਨ $= m^2n \times n^2p \times p^2m$

$= (m^2 \times m) \times (n \times n^2) \times (p \times p^2) = m^3n^3p^3$

(iii) ਆਇਤਨ $= 2q \times 4q^2 \times 8q^3$

$= 2 \times 4 \times 8 \times q \times q^2 \times q^3 = 64q^6$

ਅਭਿਆਸ 9.2

1. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਇੱਕ ਪਦੀ ਜੋੜਿਆਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :
   (i) $4, 7p$ (ii) $-4p, 7p$ (iii) $-4p, 7pq$ (iv) $4p^3, -3p$
   (v) $4p, 0$
2. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਇੱਕ ਪਦੀ ਜੋੜਿਆਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲੰਬਾਈ ਅਤੇ ਚੌੜਾਈ ਰੱਖਣ ਵਾਲੇ ਆਇਤਾਂ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :
   (p, q); $(10m, 5n)$; $(20x^2, 5y^2)$; $(4x, 3x^2)$; $(3mn, 4np)$

3. ਗੁਣਨਫਲਾਂ ਦੀ ਸਾਰਣੀ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਕਰੋ :

ਪਹਿਲੀ ਇੱਕ ਪਦੀ → ਦੂਸਰੀ ਇੱਕ ਪਦੀ↓	$2x$	$-5y$	$3x^2$	$-4xy$	$7x^2y$	$-9x^2y^2$
$2x$	$4x^2$	...	...	...	...	...
$-5y$	...	...	$-15x^2y$	...	...	...
$3x^2$	...	...	...	...	...	...
$-4xy$	...	...	...	...	...	...
$7x^2y$	...	...	...	...	...	...
$-9x^2y^2$	...	...	...	...	...	...

4. ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਆਇਤਾਕਾਰ ਬਕਸਿਆਂ ਦਾ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕਰੋ : ਜਿਹਨਾਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ, ਚੌੜਾਈ ਅਤੇ ਉਚਾਈ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀ ਹੈ :
   (i) $5a, 3a^2, 7a^4$ (ii) $2p, 4q, 8r$ (iii) $xy, 2x^2y, 2xy^2$ (iv) $a, 2b, 3c$
5. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :
   (i) xy, yz, zx (ii) $a, -a^2, a^3$ (iii) $2, 4y, 8y^2, 16y^3$
   (iv) $a, 2b, 3c, 6abc$ (v) $m, -mn, mnp$

9.8 ਇੱਕ ਪਦੀ ਨੂੰ ਬਹੁਪਦ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨਾ

9.8.1 ਇੱਕ ਪਦੀ ਨੂੰ ਦੋ ਪਦੀ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨਾ

ਆਉ, ਇੱਕ ਪਦੀ $3x$ ਨੂੰ ਦੋ ਪਦੀ $5y + 2$ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਭਾਵ $3x \times (5y + 2)$ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ $3x$ ਅਤੇ $(5y + 2)$ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਵੰਡਕਾਰੀ ਦੇ ਨਿਯਮ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ,

$3x \times (5y + 2) = (3x \times 5y) + (3x \times 2) = 15xy + 6x$

ਅਸੀਂ ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਆਪਣੀ ਗਣਨਾ ਵਿੱਚ ਵੰਡਕਾਰੀ ਦੇ ਨਿਯਮ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ

$7 \times 106 = 7 \times (100 + 6)$
$= 7 \times 100 + 7 \times 6$
(ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਵੰਡਕਾਰੀ ਦੇ ਨਿਯਮ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕੀਤਾ ਹੈ।)
$= 700 + 42 = 742$

$7 \times 38 = 7 \times (40 - 2)$
$= 7 \times 40 - 7 \times 2$
(ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਵੰਡਕਾਰੀ ਦੇ ਨਿਯਮ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕੀਤਾ ਹੈ।)
$= 280 - 14 = 266$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $(-3x) \times (-5y + 2) = (-3x) \times (-5y) + (-3x) \times (2) = 15xy - 6x$
ਅਤੇ $5xy \times (y^2 + 3) = (5xy \times y^2) + (5xy \times 3) = 5xy^3 + 15xy.$

ਦੋ ਪਦੀ ਅਤੇ ਇੱਕ ਪਦੀ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਤੁਹਾਡਾ ਕੀ ਵਿਚਾਰ ਹੈ? ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ $(5y + 2) \times 3x = ?$

ਅਸੀਂ $7 \times 3 = 3 \times 7$; ਜਾਂ ਸਧਾਰਨ ਰੂਪ ਵਿੱਚ $a \times b = b \times a$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਨਿਯਮ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $(5y + 2) \times 3x = 3x \times (5y + 2) = 15xy + 6x$ ਹੈ।

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

ਗੁਣਨਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ : (i) $2x(3x + 5xy)$ (ii) $a^2(2ab - 5c)$

9.8.2 ਇੱਕ ਪਦੀ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਪਦੀ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨਾ

$3p \times (4p^2 + 5p + 7)$ ਲਵੋ। ਪਹਿਲਾ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਵੰਡਕਾਰੀ ਦੇ ਨਿਯਮ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

$$3p \times (4p^2 + 5p + 7) = (3p \times 4p^2) + (3p \times 5p) + (3p \times 7)$$
$$= 12p^3 + 15p^2 + 21p$$

ਤਿੰਨ ਪਦੀ ਦੇ ਹਰੇਕ ਪਦ ਨੂੰ ਇੱਕ ਪਦੀ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਗੁਣਨਫਲ ਨੂੰ ਜੋੜ ਕਰੋ।

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

$(4p^2 + 5p + 7) \times 3p$ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ

ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ ਵੰਡਕਾਰੀ ਦੇ ਨਿਯਮ ਦੇ ਉਪਯੋਗ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਪਦ ਨੂੰ ਪਦ ਦੇ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਕਾਬਲ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਨੂੰ ਸਰਲ ਕਰੋ ਅਤੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅਨੁਸਾਰ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $x(x - 3) + 2$, $x = 1$ ਦੇ ਲਈ (ii) $3y(2y - 7) - 3(y - 4) - 63$, $y = -2$ ਦੇ ਲਈ

ਹੱਲ :

(i) $x(x - 3) + 2 = x^2 - 3x + 2$

$x = 1$ ਦੇ ਲਈ $x^2 - 3x + 2 = (1)^2 - 3(1) + 2$
$$= 1 - 3 + 2 = 3 - 3 = 0$$

(ii) $3y(2y - 7) - 3(y - 4) - 63 = 6y^2 - 21y - 3y + 12 - 63$
$$= 6y^2 - 24y - 51$$

$y = -2$ ਦੇ ਲਈ $6y^2 - 24y - 51 = 6(-2)^2 - 24(-2) - 51$
$$= 6 \times 4 + 24 \times 2 - 51$$
$$= 24 + 48 - 51 = 72 - 51 = 21$$

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਜੋੜੋ :

(i) $5m(3 - m)$ ਅਤੇ $6m^2 - 13m$ (ii) $4y(3y^2 + 5y - 7)$ ਅਤੇ $2(y^3 - 4y^2 + 5)$

ਹੱਲ :

(i) ਪਹਿਲਾ ਵਿਅੰਜਕ $= 5m(3 - m) = (5m \times 3) - (5m \times m) = 15m - 5m^2$

ਹੁਣ ਦੂਸਰਾ ਵਿਅੰਜਕ ਜੋੜਨ 'ਤੇ $15m - 5m^2 + 6m^2 - 13m = m^2 + 2m$

(ii) ਪਹਿਲਾ ਵਿਅੰਜਕ $= 4y(3y^2 + 5y - 7) = (4y \times 3y^2) + (4y \times 5y) + (4y \times (-7))$
$$= 12y^3 + 20y^2 - 28y$$

ਦੂਸਰਾ ਵਿਅੰਜਕ $= 2(y^3 - 4y^2 + 5) = 2y^3 + 2 \times (-4y^2) + 2 \times 5$
$$= 2y^3 - 8y^2 + 10$$

ਦੋਨਾਂ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਨੂੰ ਜੋੜਨ 'ਤੇ

$$\begin{array}{rcrr} 12y^3 & + & 20y^2 - 28y & \\ +\ 2y^3 & - & 8y^2 & + 10 \\ \hline 14y^3 & + & 12y^2 - 28y & + 10 \end{array}$$

ਉਦਾਹਰਣ 7 : $2pq\,(p+q)$ ਵਿੱਚੋਂ $3pq\,(p-q)$ ਨੂੰ ਘਟਾਓ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ $3pq\,(p-q) = 3p^2q - 3pq^2$ ਅਤੇ

$$2pq\,(p+q) = 2p^2q + 2pq^2$$

ਘਟਾਉਣ 'ਤੇ

$$\begin{array}{rcr} 2p^2q & + & 2pq^2 \\ 3p^2q & - & 3pq^2 \\ - & & + \\ \hline -p^2q & + & 5pq^2 \end{array}$$

ਅਭਿਆਸ 9.3

1. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਜੋੜਿਆਂ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਦੇ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਨੂੰ ਗੁਣਾ ਕਰੋ।

   (i) $4p,\ q+r$ (ii) $ab,\ a-b$ (iii) $a+b,\ 7a^2b^2$ (iv) $a^2-9,\ 4a$

   (v) $pq+qr+rp,\ 0$

2. ਸਾਰਣੀ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਕਰੋ :

	ਪਹਿਲਾ ਵਿਅੰਜਕ	ਦੂਸਰਾ ਵਿਅੰਜਕ	ਗੁਣਨਫਲ
(i)	a	$b+c+d$	—
(ii)	$x+y-5$	$5xy$	—
(iii)	p	$6p^2-7p+5$	—
(iv)	$4p^2q^2$	p^2-q^2	—
(v)	$a+b+c$	abc	—

3. ਗੁਣਨਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

   (i) $(a^2)\times(2a^{22})\times(4a^{26})$ (ii) $\left(\frac{2}{3}xy\right)\times\left(\frac{-9}{10}x^2y^2\right)$

   (iii) $\left(-\frac{10}{3}pq^3\right)\times\left(\frac{6}{5}p^3q\right)$ (iv) $x\times x^2\times x^3\times x^4$

4. (a) $3x(4x-5)+3$ ਨੂੰ ਸਰਲ ਕਰੋ ਅਤੇ (i) $x=3$ ਅਤੇ (ii) $x=\frac{1}{2}$ ਦੇ ਲਈ ਇਸਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

   (b) $a(a^2+a+1)+5$ ਸਰਲ ਕਰੋ ਅਤੇ (i) $a=0$, (ii) $a=1$ ਅਤੇ (iii) $a=-1$ ਦੇ ਲਈ ਇਸਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

5. (a) $p(p-q),\ q(q-r)$ ਅਤੇ $r(r-p)$ ਨੂੰ ਜੋੜੋ।

   (b) $2x(z-x-y)$ ਅਤੇ $2y(z-y-x)$ ਨੂੰ ਜੋੜੋ।

   (c) $4l(10n-3m+2l)$ ਵਿੱਚੋਂ $3l(l-4m+5n)$ ਨੂੰ ਘਟਾਓ।

   (d) $4c(-a+b+c)$ ਵਿੱਚੋਂ $3a(a+b+c)-2b(a-b+c)$ ਨੂੰ ਘਟਾਓ।

9.9 ਬਹੁਪਦ ਨੂੰ ਬਹੁਪਦ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨਾ

9.9.1 ਦੋ ਪਦੀ ਨੂੰ ਦੋ ਪਦੀ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨਾ

ਆਉ, ਇੱਕ ਦੋ ਪਦੀ $(2a + 3b)$ ਨੂੰ ਦੂਸਰੇ ਦੋ ਪਦੀ $(3a + 4b)$ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਕੀਤਾ ਹੈ, ਉਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ ਗੁਣਨ ਦੇ ਵੰਡਕਾਰੀ ਦੇ ਨਿਯਮ ਨੂੰ ਯਾਦ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਵੀ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ;

$$(3a + 4b) \times (2a + 3b) = 3a \times (2a + 3b) + 4b \times (2a + 3b)$$

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਪਹਿਲੇ ਦੋ ਪਦੀ ਦਾ ਹਰੇਕ ਪਦ ਦੂਸਰੇ ਦੋ ਪਦੀ ਦੇ ਹਰੇਕ ਪਦ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$$= (3a \times 2a) + (3a \times 3b) + (4b \times 2a) + (4b \times 3b)$$

$$= 6a^2 + 9ab + 8ba + 12b^2$$

$$= 6a^2 + 17ab + 12b^2 \qquad \text{(ਕਿਉਂਕਿ } ba = ab \text{ ਹੈ)}$$

ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਪਦ ਨੂੰ ਇੱਕ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਤਾਂ ਆਸ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇੱਥੇ $2 \times 2 = 4$ ਪਦ ਹੋਣੇ ਚਾਹੀਦੇ ਹਨ ਪਰੰਤੂ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਦੋ ਪਦ ਸਮਾਨ ਹਨ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕਠਾ ਕਰ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਾਨੂੰ 3 ਪਦ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਬਹੁਪਦ ਨੂੰ ਬਹੁਪਦਾਂ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਦੇ ਸਮੇਂ ਸਾਨੂੰ ਸਮਾਨ ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਲੱਭ ਲੈਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾ ਲੈਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 8 : ਗੁਣਾ ਕਰੋ :

(i) $(x - 4)$ ਅਤੇ $(2x + 3)$ ਨੂੰ (ii) $(x - y)$ ਅਤੇ $(3x + 5y)$ ਨੂੰ

ਹੱਲ :

(i) $(x - 4) \times (2x + 3) = x \times (2x + 3) - 4 \times (2x + 3)$

$= (x \times 2x) + (x \times 3) - (4 \times 2x) - (4 \times 3) = 2x^2 + 3x - 8x - 12$

$= 2x^2 - 5x - 12$ (ਸਮਾਨ ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਜੋੜਨ 'ਤੇ)

(ii) $(x - y) \times (3x + 5y) = x \times (3x + 5y) - y \times (3x + 5y)$

$= (x \times 3x) + (x \times 5y) - (y \times 3x) - (y \times 5y)$

$= 3x^2 + 5xy - 3yx - 5y^2 = 3x^2 + 2xy - 5y^2$ (ਸਮਾਨ ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਜੋੜਨ 'ਤੇ)

ਉਦਾਹਰਣ 9 : ਗੁਣਾ ਕਰੋ :

(i) $(a + 7)$ ਅਤੇ $(b - 5)$ ਨੂੰ (ii) $(a^2 + 2b^2)$ ਅਤੇ $(5a - 3b)$ ਨੂੰ

ਹੱਲ :

(i) $(a + 7) \times (b - 5) = a \times (b - 5) + 7 \times (b - 5)$

$= ab - 5a + 7b - 35$

ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ ਇਸ ਗੁਣਨਫਲ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਵੀ ਸਮਾਨ ਪਦ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(ii) $(a^2 + 2b^2) \times (5a - 3b) = a^2 (5a - 3b) + 2b^2 \times (5a - 3b)$

$= 5a^3 - 3a^2b + 10ab^2 - 6b^3$

9.9.2 ਦੋ ਪਦੀ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਪਦੀ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨਾ

ਇਸ ਗੁਣਨ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਪਦੀ ਦੇ ਹਰੇਕ ਪਦ ਨੂੰ ਦੋ ਪਦੀ ਦੇ ਹਰੇਕ ਪਦ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨਾ ਪਵੇਗਾ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ $3 \times 2 = 6$ ਪਦ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਾਂਗੇ। ਜੇ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਪਦ ਨੂੰ ਇੱਕ ਪਦ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਮਾਨ ਪਦ ਬਣਦੇ ਹਨ ਤਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਪਦਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆਂ ਘੱਟ ਕੇ ਪੰਜ ਜਾਂ ਇਸ ਤੋਂ ਵੀ ਘੱਟ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ।

$\underbrace{(a+7)}_{\text{ਦੋ ਪਦੀ}} \times \underbrace{(a^2+3a+5)}_{\text{ਤਿੰਨ ਪਦੀ}} = a \times (a^2+3a+5) + 7 \times (a^2+3a+5)$ ਵੰਡਕਾਰੀ ਦੇ ਨਿਯਮ ਦੇ ਉਪਯੋਗ ਨਾਲ

$= a^3 + 3a^2 + 5a + 7a^2 + 21a + 35$

$= a^3 + (3a^2 + 7a^2) + (5a + 21a) + 35$

$= a^3 + 10a^2 + 26a + 35$ (ਅੰਤਿਮ ਨਤੀਜੇ ਵਿੱਚ ਸਿਰਫ 4 ਪਦ ਹੀ ਕਿਉਂ ਹਨ ?)

ਉਦਾਹਰਣ 10 : ਸਰਲ ਕਰੋ : $(a+b)(2a-3b+c)-(2a-3b)c$

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$(a+b)(2a-3b+c) = a(2a-3b+c) + b(2a-3b+c)$$
$$= 2a^2 - 3ab + ac + 2ab - 3b^2 + bc$$
$$= 2a^2 - ab - 3b^2 + bc + ac$$

(ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ $-3ab$ ਅਤੇ $2ab$ ਸਮਾਨ ਪਦ ਹਨ।)

ਅਤੇ $(2a-3b)c = 2ac - 3bc$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, $(a+b)(2a-3b+c)-(2a-3b)c = 2a^2 - ab - 3b^2 + bc + ac - (2ac - 3bc)$

$= 2a^2 - ab - 3b^2 + bc + ac - 2ac + 3bc$

$= 2a^2 - ab - 3b^2 + (bc + 3bc) + (ac - 2ac)$

$= 2a^2 - 3b^2 - ab + 4bc - ac$

ਅਭਿਆਸ 9.4

1. ਦੋ ਪਦੀਆਂ ਨੂੰ ਗੁਣਾ ਕਰੋ :
   (i) $(2x+5)$ ਅਤੇ $(4x-3)$ (ii) $(y-8)$ ਅਤੇ $(3y-4)$
   (iii) $(2.5l-0.5m)$ ਅਤੇ $(2.5l+0.5m)$ (iv) $(a+3b)$ ਅਤੇ $(x+5)$
   (v) $(2pq+3q^2)$ ਅਤੇ $(3pq-2q^2)$
   (vi) $\left(\frac{3}{4}a^2+3b^2\right)$ ਅਤੇ $4\left(a^2-\frac{2}{3}b^2\right)$
2. ਗੁਣਨਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :
   (i) $(5-2x)(3+x)$ (ii) $(x+7y)(7x-y)$
   (iii) $(a^2+b)(a+b^2)$ (iv) $(p^2-q^2)(2p+q)$
3. ਸਰਲ ਕਰੋ :
   (i) $(x^2-5)(x+5)+25$ (ii) $(a^2+5)(b^3+3)+5$
   (iii) $(t+s^2)(t^2-s)$
   (iv) $(a+b)(c-d)+(a-b)(c+d)+2(ac+bd)$
   (v) $(x+y)(2x+y)+(x+2y)(x-y)$ (vi) $(x+y)(x^2-xy+y^2)$
   (vii) $(1.5x-4y)(1.5x+4y+3)-4.5x+12y$
   (viii) $(a+b+c)(a+b-c)$

9.10 ਤਤਸਮਕ ਕੀ ਹੈ ?

ਤਤਸਮਕ $(a+1)(a+2) = a^2 + 3a + 2$ ਨੂੰ ਲਵੋ। a ਦੇ ਕਿਸੇ ਮੁੱਲ $a = 10$ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਸ ਸਮਤਾ ਦੇ ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ।

$a = 10$ ਦੇ ਲਈ ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ LHS $= (a+1)(a+2) = (10+1)(10+2) = 11 \times 12 = 132$

ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ RHS $= a^2 + 3a + 2 = 10^2 + 3 \times 10 + 2 = 100 + 30 + 2 = 132$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $a = 10$ ਦੇ ਲਈ ਸਮਤਾ ਦੇ ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆ ਦੇ ਮੁੱਲ ਸਮਾਨ ਹਨ।

ਆਉ $a = -5$ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ।

$$\text{LHS} = (a+1)(a+2) = (-5+1)(-5+2) = (-4) \times (-3) = 12$$

$$\text{RHS} = a^2 + 3a + 2 = (-5)^2 + 3(-5) + 2$$

$$= 25 - 15 + 2 = 10 + 2 = 12$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $a = -5$ ਦੇ ਲਈ, ਵੀ LHS = RHS ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ a ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਮੁੱਲ ਦੇ ਲਈ, ਇਸ ਸਮਤਾ ਦਾ LHS = RHS ਹੈ। ਉਹ ਸਮਤਾ ਜੋ ਚਲ ਦੇ ਸਾਰੇ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ, ਨੂੰ ਤਤਸਮਕ ਆਖਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $(a+1)(a+2) = a^2 + 3a + 2$ ਇੱਕ ਤਤਸਮਕ ਹੈ।

ਇੱਕ ਸਮੀਕਰਨ ਆਪਣੇ ਚਲ ਦੇ ਲਈ ਕੇਵਲ ਕੁੱਝ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਲਈ ਸੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਇਹ ਚਲ ਦੇ ਸਾਰੇ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਲਈ ਸੱਚ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ ਸਮੀਕਰਨ $a^2 + 3a + 2 = 132$ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰੋ। ਇਹ ਸਮੀਕਰਨ $a = 10$ ਦੇ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਉੱਪਰ ਦੇਖ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ। ਪਰ ਇਹ $a = -5$ ਜਾਂ $a = 0$ ਆਦਿ ਦੇ ਲਈ ਸੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਦਰਸਾਉ ਕਿ $a^2 + 3a + 2 = 132$, $a = -5$ ਅਤੇ $a = 0$ ਦੇ ਲਈ ਸੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ।

9.11 ਮਿਆਰੀ ਤਤਸਮਕ

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਤਿੰਨ ਤਤਸਮਕਾਂ ਬਾਰੇ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ ਜੋ ਬਹੁਤ ਉਪਯੋਗੀ ਹਨ। ਇੱਕ ਦੋ ਪਦੀ ਨੂੰ ਦੂਸਰੀ ਦੋ ਪਦੀ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਇਹਨਾਂ ਤਤਸਮਕਾਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਗੁਣਨਫਲ $(a+b)(a+b)$ ਜਾਂ $(a+b)^2$ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਚਰਚਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$$

$$= a(a+b) + b(a+b)$$

$$= a^2 + ab + ba + b^2$$

$$= a^2 + 2ab + b^2 \qquad \text{(ਕਿਉਂਕਿ } ab = ba)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$ (I)

ਸਪੱਸ਼ਟ ਤੌਰ 'ਤੇ ਇਹ ਇੱਕ ਤਤਸਮਕ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਅਸਲ ਗੁਣਾ ਕਰਕੇ LHS ਤੋਂ RHS ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਸਥਾਪਿਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ a ਅਤੇ b ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਮੁੱਲ ਦੇ ਲਈ, ਤਤਸਮਕ ਦੇ ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦੇ ਮੁੱਲ ਸਮਾਨ ਹਨ।

- ਇਸਦੇ ਬਾਅਦ ਅਸੀਂ ਗੁਣਨਫਲ $(a-b)(a-b)$ ਜਾਂ $(a-b)^2$ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਚਰਚਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a(a-b) - b(a-b)$$

$$= a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

ਜਾਂ $\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$ (II)

- ਅਖੀਰ ਵਿੱਚ $(a + b)(a - b)$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ : $(a + b)(a - b) = a(a - b) + b(a - b)$

$$= a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2 \text{ (ਕਿਉਂਕਿ } ab = ba)$$

ਜਾਂ $$\boxed{(a + b)(a - b) = a^2 - b^2} \qquad \text{(III)}$$

ਤਤਸਮਕ (I), (II) ਅਤੇ (III) ਨੂੰ **ਮਿਆਰੀ ਤਤਸਮਕ** ਆਖਦੇ ਹਨ।

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

1. ਤਤਸਮਕ (I) ਵਿੱਚ b ਦੇ ਸਥਾਨ 'ਤੇ $-b$ ਰੱਖੋ। ਕੀ ਤਹਾਨੂੰ (II) ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ?

- ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਹੋਰ ਜ਼ਿਆਦਾ ਉਪਯੋਗੀ ਤਤਸਮਕ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

$$(x + a)(x + b) = x(x + b) + a(x + b)$$

$$= x^2 + bx + ax + ab$$

ਜਾਂ $$\boxed{(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab} \qquad \text{(IV)}$$

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

1. $a = 2, b = 3, x = 5$ ਦੇ ਲਈ ਤਤਸਮਕ (IV) ਦੀ ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ।
2. ਤਤਸਮਕ (IV) ਵਿੱਚ $a = b$ ਲੈਣ 'ਤੇ, ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹੋ ? ਕੀ ਇਹ ਤਤਸਮਕ (I) ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੈ ?
3. ਤਤਸਮਕ (IV) ਵਿੱਚ $a = -c$ ਅਤੇ $b = -c$ ਲੈਣ 'ਤੇ, ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹੋ ? ਕੀ ਇਹ ਤਤਸਮਕ (II) ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੈ ?
4. ਤਤਸਮਕ (IV) ਵਿੱਚ $b = -a$ ਲਵੋ। ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹੋ ? ਕੀ ਇਹ ਤਤਸਮਕ (III) ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੈ ?

ਅਸੀ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਤਤਸਮਕ (IV) ਬਾਕੀ ਤਿੰਨਾਂ ਤਤਮਸਕਾਂ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਹੈ।

9.12 ਤਤਸਮਕ ਦੇ ਉਪਯੋਗ

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਦੇਖਾਂਗੇ ਕਿ ਤਤਸਮਕਾਂ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਦੋ ਪਦੀ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾ ਅਤੇ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾ ਦੇ ਲਈ ਵੀ ਸਧਾਰਨ ਬਦਲਵੀਂ ਵਿਧੀ ਦਿੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 11 : ਤਤਸਮਕ (I) ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ (i) $(2x + 3y)^2$ (ii) 103^2 ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ :

(i) $$(2x + 3y)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2 \qquad \text{[ਤਤਸਮਕ (I) ਦੇ ਉਪਯੋਗ ਨਾਲ]}$$

$$= 4x^2 + 12xy + 9y^2$$

ਅਸੀਂ $(2x + 3y)^2$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਸਿੱਧੇ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :

$$(2x + 3y)^2 = (2x + 3y)(2x + 3y)$$

$$= (2x)(2x) + (2x)(3y) + (3y)(2x) + (3y)(3y)$$

$= 4x^2 + 6xy + 6yx + 9y^2$ (ਕਿਉਂਕਿ $xy = yx$)

$= 4x^2 + 12xy + 9y^2$

ਤਤਸਮਕ (I) ਦੇ ਉਪਯੋਗ ਨਾਲ ਅਸੀਂ $(2x + 3y)$ ਦਾ ਵਰਗ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਬਦਲਵੀਂ ਵਿਧੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਧਿਆਨ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ ਉਪਰੋਕਤ ਵਰਤੀ ਸਿੱਧੀ ਵਿਧੀ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵਿੱਚ ਤਤਸਮਕ ਵਿਧੀ ਦੇ ਪਗਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਘੱਟ ਹੈ? ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਵਿਧੀ ਦੀ ਸਰਲਤਾ ਤਦ ਜ਼ਿਆਦਾ ਮਹਿਸੂਸ ਕਰੋਗੇ ਜਦੋਂ ਤੁਸੀਂ $(2x + 3y)$ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵਿੱਚ ਜ਼ਿਆਦਾ ਗੁੰਝਲਦਾਰ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਦਾ ਵਰਗ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰੋਗੇ।

(ii) $(103)^2 = (100 + 3)^2$

$= 100^2 + 2 \times 100 \times 3 + 3^2$ [ਤਤਸਮਕ (I) ਦੇ ਉਪਯੋਗ ਨਾਲ]

$= 10000 + 600 + 9 = 10609$

ਅਸੀਂ 103 ਨੂੰ 103 ਨਾਲ ਸਿੱਧਾ ਹੀ ਗੁਣਾ ਕਰਕੇ ਲੋੜੀਂਦਾ ਉੱਤਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਧਿਆਨ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ 103 ਦਾ ਸਿੱਧੀ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਵਰਗ ਕਰਨ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵਿੱਚ ਤਤਸਮਕ (I) ਨੇ ਸਾਨੂੰ ਸਰਲ ਵਿਧੀ ਦੇ ਦਿੱਤੀ ਹੈ? 1013 ਦਾ ਵਰਗ ਕਰਨ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰੋ। ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਵੀ ਸਿੱਧੀ ਗੁਣਾ ਵਿਧੀ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵਿੱਚ ਤਤਸਮਕ ਦੇ ਉਪਯੋਗ ਦੀ ਵਿਧੀ ਨੂੰ ਜ਼ਿਆਦਾ ਸੌਖਾ ਪਾਓਗੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 12 : ਤਤਸਮਕ (II) ਦੇ ਉਪਯੋਗ ਨਾਲ (i) $(4p - 3q)^2$ (ii) $(4.9)^2$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ :

(i) $(4p - 3q)^2 = (4p)^2 - 2\,(4p)\,(3q) + (3q)^2$ [ਤਤਸਮਕ (II) ਦੇ ਉਪਯੋਗ ਨਾਲ]

$= 16p^2 - 24pq + 9q^2$

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਸਹਿਮਤ ਹੋ ਕਿ $(4p - 3q)^2$ ਦਾ ਵਰਗ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਸਿੱਧੀ ਵਿਧੀ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵਿੱਚ ਤਤਸਮਕ ਦੀ ਵਿਧੀ ਜ਼ਿਆਦਾ ਜਲਦੀ ਉੱਤਰ ਦੇ ਦਿੰਦੀ ਹੈ?

(ii) $(4.9)^2 = (5.0 - 0.1)^2 = (5.0)^2 - 2\,(5.0)\,(0.1) + (0.1)^2$

$= 25.00 - 1.00 + 0.01 = 24.01$

ਕੀ 4.9 ਦਾ ਵਰਗ ਕਰਨਾ, ਸਿੱਧੀ ਗੁਣਾ ਵਿਧੀ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵਿੱਚ ਤਤਸਮਕ (II) ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਸੌਖਾ ਨਹੀਂ ਹੈ?

ਉਦਾਹਰਣ 13 : ਤਤਸਮਕ (III) ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ,

(i) $\left(\frac{3}{2}m + \frac{2}{3}n\right)\left(\frac{3}{2}m - \frac{2}{3}n\right)$ (ii) $983^2 - 17^2$ (iii) 194×206 ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ :

(i) $\left(\frac{3}{2}m + \frac{2}{3}n\right)\left(\frac{3}{2}m - \frac{2}{3}n\right) = \left(\frac{3}{2}m\right)^2 - \left(\frac{2}{3}n\right)^2$

$= \frac{9}{4}m^2 - \frac{4}{9}n^2$

(ii) $983^2 - 17^2 = (983 + 17)\,(983 - 17)$

[ਇੱਥੇ $a = 983$, $b = 17$, $a^2 - b^2 = (a + b)\,(a - b)$]

ਇਸ ਲਈ, $983^2 - 17^2 = 1000 \times 966 = 966000$

(iii) $194 \times 206 = (200 - 6) \times (200 + 6) = 200^2 - 6^2$

$= 40000 - 36 = 39964$

ਉਦਾਹਰਣ 14 : ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ, $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ ਤਤਸਮਕ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰੋ।

(i) 501×502 (ii) 95×103

ਹੱਲ :

(i) $501 \times 502 = (500 + 1) \times (500 + 2) = 500^2 + (1 + 2) \times 500 + 1 \times 2$
$= 250000 + 1500 + 2 = 251502$

(ii) $95 \times 103 = (100 - 5) \times (100 + 3) = 100^2 + (-5 + 3)\,100 + (-5) \times 3$
$= 10000 - 200 - 15 = 9785$

ਅਭਿਆਸ 9.5

1. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਗੁਣਨਫਲਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਢੁਕਵੇਂ ਤਤਸਮਕ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰੋ :

(i) $(x + 3)(x + 3)$ (ii) $(2y + 5)(2y + 5)$ (iii) $(2a - 7)(2a - 7)$

(iv) $(3a - \frac{1}{2})(3a - \frac{1}{2})$ (v) $(1.1m - 0.4)(1.1m + 0.4)$

(vi) $(a^2 + b^2)(-a^2 + b^2)$ (vii) $(6x - 7)(6x + 7)$ (viii) $(-a + c)(-a + c)$

(ix) $\left(\frac{x}{2} + \frac{3y}{4}\right)\left(\frac{x}{2} + \frac{3y}{4}\right)$ (x) $(7a - 9b)(7a - 9b)$

2. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਗੁਣਨਫਲਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ, ਤਤਸਮਕ $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰੋ।

(i) $(x + 3)(x + 7)$ (ii) $(4x + 5)(4x + 1)$

(iii) $(4x - 5)(4x - 1)$ (iv) $(4x + 5)(4x - 1)$

(v) $(2x + 5y)(2x + 3y)$ (vi) $(2a^2 + 9)(2a^2 + 5)$

(vii) $(xyz - 4)(xyz - 2)$

3. ਤਤਸਮਕਾਂ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਵਰਗਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $(b - 7)^2$ (ii) $(xy + 3z)^2$ (iii) $(6x^2 - 5y)^2$

(iv) $\left(\frac{2}{3}m + \frac{3}{2}n\right)^2$ (v) $(0.4p - 0.5q)^2$ (vi) $(2xy + 5y)^2$

4. ਸਰਲ ਕਰੋ।

(i) $(a^2 - b^2)^2$ (ii) $(2x + 5)^2 - (2x - 5)^2$

(iii) $(7m - 8n)^2 + (7m + 8n)^2$ (iv) $(4m + 5n)^2 + (5m + 4n)^2$

(v) $(2.5p - 1.5q)^2 - (1.5p - 2.5q)^2$

(vi) $(ab + bc)^2 - 2ab^2c$ (vii) $(m^2 - n^2m)^2 + 2m^3n^2$

5. ਦਰਸਾਉ ਕਿ :

(i) $(3x + 7)^2 - 84x = (3x - 7)^2$ (ii) $(9p - 5q)^2 + 180pq = (9p + 5q)^2$

(iii) $\left(\frac{4}{3}m - \frac{3}{4}n\right)^2 + 2mn = \frac{16}{9}m^2 + \frac{9}{16}n^2$

(iv) $(4pq + 3q)^2 - (4pq - 3q)^2 = 48pq^2$

(v) $(a - b)(a + b) + (b - c)(b + c) + (c - a)(c + a) = 0$

6. ਤਤਸਮਕਾਂ ਦੇ ਉਪਯੋਗ ਨਾਲ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) 71^2 (ii) 99^2 (iii) 102^2 (iv) 998^2

(v) 5.2^2 (vi) 297×303 (vii) 78×82 (viii) 8.9^2

(ix) 1.05×9.5

7. $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $51^2 - 49^2$ (ii) $(1.02)^2 - (9.8)^2$ (iii) $153^2 - 147^2$

(iv) $12.1^2 - 7.9^2$

8. $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ:

(i) 103×104 (ii) 5.1×5.2 (iii) 103×98 (iv) 9.7×9.8

ਅਸੀਂ ਕੀ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀ

1. **ਚਲ** ਅਤੇ **ਅਚਲ** ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਵਿਅੰਜਕ ਬਣਦੇ ਹਨ।
2. **ਵਿਅੰਜਕ** ਬਣਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਜੋੜਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਪਦ ਆਪ **ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ** ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਣਦੇ ਹਨ।
3. ਵਿਅੰਜਕ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਇੱਕ, ਦੋ ਅਤੇ ਤਿੰਨ ਪਦ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ **ਇੱਕ ਪਦੀ**, **ਦੋ ਪਦੀ** ਅਤੇ **ਤਿੰਨ ਪਦੀ** ਆਖਦੇ ਹਨ। ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਇੱਕ ਜਾਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਪਦਾਂ ਵਾਲੇ ਵਿਅੰਜਕ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਪਦਾਂ ਦੇ ਗੁਣਜ ਸਿਰਫ ਨਾ ਹੋਣ ਅਤੇ ਚਲਾਂ ਦੀ ਘਾਤ ਰਿਣ ਨਾ ਹੋਵੇ, ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ **ਬਹੁਪਦ** ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
4. ਸਮਾਨ ਚਲਾਂ ਦੇ **ਸਮਾਨ** ਪਦ ਬਣਦੇ ਹਨ, ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਚਲਾਂ ਦੀ ਘਾਤ ਸਮਾਨ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਸਮਾਨ ਪਦਾਂ ਦੇ ਗੁਣਜ ਸਮਾਨ ਹੋਣੇ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਹਨ।
5. ਬਹੁਪਦਾਂ ਨੂੰ ਜੋੜਨ (ਜਾਂ ਘਟਾਉਣ) ਦੇ ਲਈ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾ ਸਮਾਨ ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਲੱਭੋ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਅਤੇ ਘਟਾਉ ਕਰੋ। ਉਸਦੇ ਬਾਅਦ ਅਸਮਾਨ ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਵਰਤੋਂ ਵਿੱਚ ਲਿਆਉ।
6. ਬਹੁਤ ਸਾਰੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਸਾਨੂੰ ਬੀਜ ਗਣਿਤਕ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਨੂੰ ਗੁਣਾ ਕਰਨ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ ਆਇਤ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ, ਜਿਸਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬੀਜ ਗਣਿਤਕ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਹਨ।
7. ਇੱਕ ਪਦੀ ਨੂੰ ਇੱਕ ਪਦੀ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ 'ਤੇ ਹਮੇਸ਼ਾ ਇੱਕ ਪਦੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
8. ਬਹੁਪਦ ਨੂੰ ਇੱਕ ਪਦੀ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਬਹੁਪਦ ਦਾ ਹਰੇਕ ਪਦ ਹਮੇਸ਼ਾ ਇੱਕ ਪਦੀ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
9. ਬਹੁਪਦ ਦਾ ਦੋ ਪਦੀ (ਜਾਂ ਤਿੰਨ ਪਦੀ) ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਹਰੇਕ ਪਦ ਨੂੰ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਪਦ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜਾਂ ਬਹੁਪਦ ਦਾ ਹਰੇਕ ਪਦ ਦੋ ਪਦੀ (ਜਾਂ ਤਿੰਨ ਪਦੀ) ਦੇ ਹਰੇਕ ਪਦ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਧਿਆਨ ਰੱਖੋ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਹੁਪਦ ਦੀ ਗੁਣਾ ਵਿੱਚ, ਸਾਨੂੰ ਗੁਣਨਫਲ ਵਿੱਚ ਸਮਾਨ ਪਦ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣਾ ਪੈ ਸਕਦਾ ਹੈ।

10. **ਤਤਸਮਕ** ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਸਮਤਾ ਹੈ ਜੋ ਚਲ ਦੇ ਸਾਰੇ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਸਮੀਕਰਨ ਚਲਾਂ ਦੇ ਕੁੱਝ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਲਈ ਸੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਸਮੀਕਰਨ ਤਤਸਮਕ ਨਹੀਂ ਹੈ।

11. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਮਿਆਰੀ ਤਤਸਮਕ ਹਨ :

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (I)

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (II)

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ (III)

12. $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$ (IV) ਇੱਕ ਹੋਰ ਉਪਯੋਗੀ ਤਤਸਮਕ ਹੈ।

13. ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੀਆਂ ਚਾਰ ਤਤਸਮਕ ਬੀਜਗਣਿਤਿਕ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਅਤੇ ਵਰਗ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਸਹਾਇਕ ਹਨ। ਇਹ ਤਤਸਮਕ ਸਾਨੂੰ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਸਰਲ ਬਦਲਵੀਆਂ ਵਿਧੀਆਂ ਦਿੰਦੀਆਂ ਹਨ।

ਅਧਿਆਇ 10

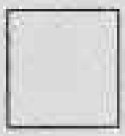
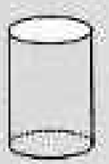
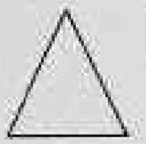
ਠੋਸ ਅਕਾਰਾਂ ਦਾ ਚਿਤਰਨ

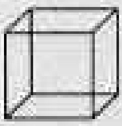
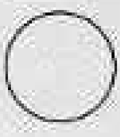
10.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਜਮਾਤ VII ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਸਮਤਲ ਅਕਾਰਾਂ ਅਤੇ ਠੋਸ ਅਕਾਰਾਂ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹੋ। ਸਮਤਲ ਅਕਾਰਾਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਅਤੇ ਚੌੜਾਈ, ਭਾਵ ਦੋ ਮਾਪ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਦੋ-ਪਸਾਰੀ (two dimensional) ਅਕਾਰ ਆਖਦੇ ਹਾਂ। ਜਦੋਂ ਕਿ ਠੋਸ ਅਕਾਰਾਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ, ਚੌੜਾਈ ਅਤੇ ਉਚਾਈ ਜਾਂ ਡੂੰਘਾਈ ਜਿਹੇ ਤਿੰਨ ਮਾਪ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ, ਇਹਨਾਂ ਅਕਾਰਾਂ ਨੂੰ ਤਿੰਨ-ਪਸਾਰੀ (three dimensional) ਅਕਾਰ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਨਾਲ ਹੀ, ਇੱਕ ਠੋਸ ਵਸਤੂ ਕੁੱਝ ਥਾਂ ਘੇਰਦੀ ਹੈ। ਦੋ ਪਸਾਰੀ ਅਤੇ ਤਿੰਨ ਪਸਾਰੀ ਚਿੱਤਰਾਂ ਨੂੰ ਸੰਖੇਪ ਵਿੱਚ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 2-D ਅਤੇ 3-D ਚਿੱਤਰ ਵੀ ਕਿਹਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਤੁਹਾਨੂੰ ਯਾਦ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਤ੍ਰਿਭੁਜ, ਆਇਤ, ਚੱਕਰ ਆਦਿ 2-D ਚਿੱਤਰ ਹਨ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਘਣ, ਵੇਲਣ, ਸ਼ੰਕੂ, ਗੋਲਾ ਆਦਿ 3-D ਚਿੱਤਰ ਹਨ।

ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਕਰੋ

ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਓ (ਤੁਹਾਡੇ ਲਈ, ਪਹਿਲਾ ਮੇਲ ਕੀਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ) :

ਅਕਾਰ	ਅਕਾਰ ਦਾ ਪ੍ਰਕਾਰ	ਅਕਾਰ ਦਾ ਨਾਮ
	ਤਿੰਨ-ਪਸਾਰੀ	ਗੋਲਾ
	ਦੋ-ਪਸਾਰੀ	ਵੇਲਣ
	ਤਿੰਨ-ਪਸਾਰੀ	ਵਰਗ
	ਦੋ-ਪਸਾਰੀ	ਚੱਕਰ

	ਤਿੰਨ-ਪਸਾਰੀ	ਘਣਾਵ
	ਤਿੰਨ-ਪਸਾਰੀ	ਘਣ
	ਦੋ-ਪਸਾਰੀ	ਸ਼ੰਕੂ
	ਤਿੰਨ-ਪਸਾਰੀ	ਤ੍ਰਿਭੁਜ

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਉਪਰੋਕਤ ਵਿੱਚੋਂ ਸਾਰੇ ਅਕਾਰ ਇੱਕਲੇ-ਇੱਕਲੇ ਹਨ ? ਪਰ ਸਾਡੇ ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਵਿਹਾਰਕ ਜੀਵਨ ਵਿੱਚ, ਅਨੇਕ ਵਾਰ ਸਾਡੇ ਸਾਹਮਣੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਅਕਾਰਾਂ ਵਿੱਚ ਸੰਯੋਜਨ (combinations) ਆਉਂਦੇ ਹਨ। ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ, ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ ਦੇਖੋ :

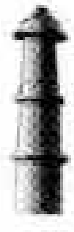
ਇੱਕ ਤੰਬੂ
ਵੇਲਣ ਦੇ ਸਿਰ 'ਤੇ ਇੱਕ ਸ਼ੰਕੂ

ਇੱਕ ਡੱਬਾ
ਇੱਕ ਵੇਲਣਾਕਾਰ ਖੋਲ

ਆਇਸ ਕ੍ਰੀਮ
ਸ਼ੰਕੂ ਉੱਤੇ ਇੱਕ ਅਰਧ ਗੋਲਾ

ਇੱਕ ਫੋਟੋ ਫਰੇਮ
ਇੱਕ ਆਇਤਾਕਾਰ ਰਸਤਾ

ਇੱਕ ਕਟੋਰਾ
ਇੱਕ ਅਰਧ ਗੋਲਾਕਾਰ ਖੋਲ



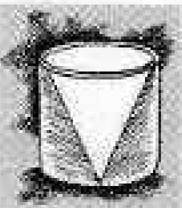
ਮੀਨਾਰ ਉੱਤੇ ਗੁੰਬਦ
ਵੇਲਣ ਉੱਤੇ ਅਰਧ ਗੋਲਾ

ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਕਰੋ

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਚਿੱਤਰਾਂ (ਵਸਤੂਆਂ) ਦਾ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਅਕਾਰਾਂ ਨਾਲ ਮਿਲਾਣ ਕਰੋ :

ਚਿੱਤਰ (ਵਸਤੂ)		ਅਕਾਰ
(i) ਇੱਕ ਖੇਤੀ ਯੋਗ ਖੇਤ		ਇੱਕ ਆਇਤਾਕਾਰ ਪਾਰਕ ਦੇ ਅੰਦਰ ਦੋ ਲੰਬ ਆਇਤਾਕਾਰ ਰਸਤੇ

(ii) ਇੱਕ ਡੂੰਘਾ ਟੋਆ ਜਾਂ ਨਾਲੀ



ਇੱਕ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਮੈਦਾਨ ਦੇ ਘੇਰੇ 'ਤੇ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਰਸਤਾ

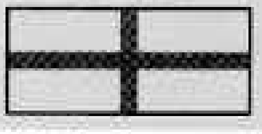
(iii) ਇੱਕ ਖਿਡੌਣਾ

ਇੱਕ ਵਰਗਾਕਾਰ ਖੇਤ ਦੇ ਨਾਲ ਜੁੜਿਆ ਤਿਕੋਣਾਕਾਰ ਖੇਤ

(iv) ਇੱਕ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਪਾਰਕ

ਇੱਕ ਵੇਲਣ ਵਿੱਚੋਂ ਸ਼ੰਕੂ ਖੁਰਚ ਕੇ ਕੱਢਣਾ

(v) ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਲੰਬ ਕਾਟਵੇਂ ਰਸਤੇ

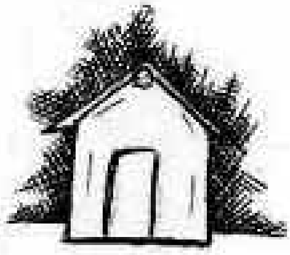


ਇੱਕ ਸ਼ੰਕੂ ਉੱਤੇ ਅਰਧ ਗੋਲਾ

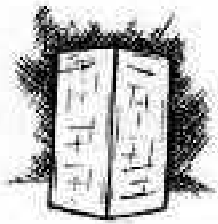
10.2 3-D ਅਕਾਰਾਂ ਦੇ ਦ੍ਰਿਸ਼

ਤੁਸੀਂ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹੋ ਕਿ ਤਿੰਨ ਪਸਾਰੀ ਵਸਤੂਆਂ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਥਾਂਵਾ ਤੋਂ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਈ ਦੇ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਪਰਿਪੇਖਾਂ ਤੋਂ ਖਿੱਚਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, ਇੱਕ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਝੌਂਪੜੀ ਦੇ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਦ੍ਰਿਸ਼ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ :

ਇੱਕ ਝੌਂਪੜੀ

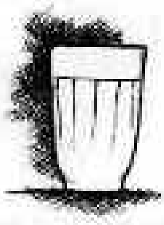

ਸਾਹਮਣੇ ਵਲੋਂ ਦ੍ਰਿਸ਼

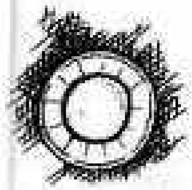
ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਤੋਂ ਦ੍ਰਿਸ਼


ਉੱਪਰ ਦਾ ਦ੍ਰਿਸ਼

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ, ਇੱਕ ਗਿਲਾਸ ਦੇ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਦ੍ਰਿਸ਼ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ :

ਇੱਕ ਗਿਲਾਸ


ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਤੋਂ ਦ੍ਰਿਸ਼

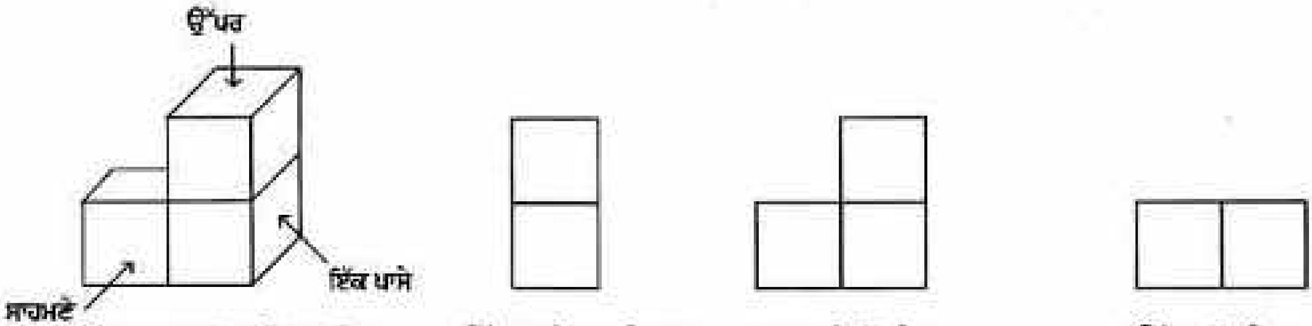

ਉੱਪਰ ਦਾ ਦ੍ਰਿਸ਼

ਇੱਕ ਗਿਲਾਸ ਦਾ ਉੱਪਰ ਦਾ ਦ੍ਰਿਸ਼ (top view) ਦੋ ਸਮ ਕੇਂਦਰੀ ਚੱਕਰਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਜੋੜਾ ਕਿਉਂ ਹੈ ? ਜੇ ਇਸ ਨੂੰ ਵੱਖ ਦਿਸ਼ਾ ਤੋਂ ਦੇਖਿਆ ਜਾਵੇ, ਤਾਂ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਦਾ ਦ੍ਰਿਸ਼ ਕੁੱਝ ਹੋਰ ਅਕਾਰ ਦਾ ਪ੍ਰਤੀਤ ਹੋਵੇਗਾ ? ਇਸ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਸੋਚੋ।

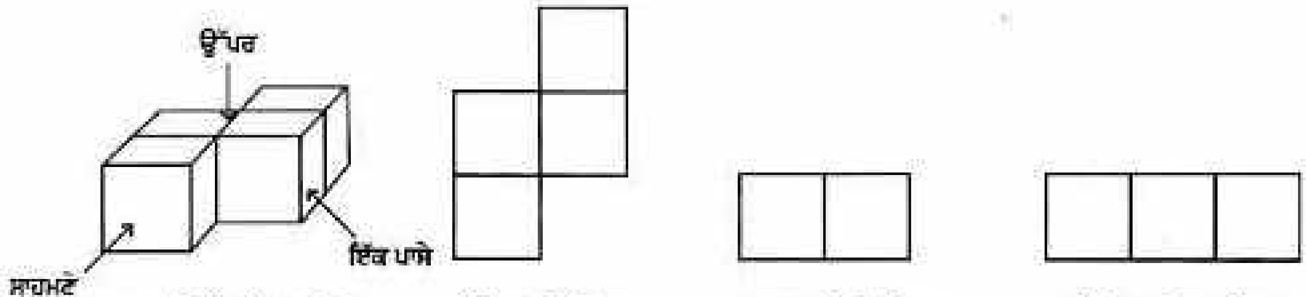
ਹੁਣ ਇੱਕ ਇੱਟ ਦੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਦ੍ਰਿਸ਼ਾਂ ਨੂੰ ਦੇਖੋ।

ਇੱਕ ਇੱਟ | ਸਾਹਮਣੇ ਤੋਂ ਦ੍ਰਿਸ਼ | ਇਕ ਪਾਸੇ ਦਾ ਦ੍ਰਿਸ਼ | ਉੱਪਰ ਤੋਂ ਦ੍ਰਿਸ਼

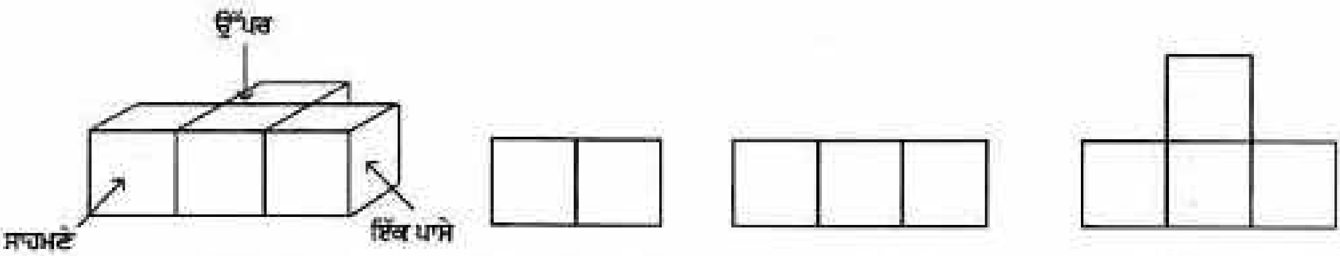
ਅਸੀਂ ਘਣਾਂ ਨੂੰ ਜੋੜ ਕੇ ਬਣਾਏ ਗਏ ਚਿੱਤਰਾਂ ਦੇ ਵੀ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਦ੍ਰਿਸ਼ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।



ਤਿੰਨ ਘਣਾਂ ਤੋਂ ਬਣਿਆ ਠੋਸ | ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਦਾ ਦ੍ਰਿਸ਼ | ਸਾਹਮਣੇ ਤੋਂ ਦ੍ਰਿਸ਼ | ਉੱਪਰ ਤੋਂ ਦ੍ਰਿਸ਼



ਚਾਰ ਘਣਾਂ ਤੋਂ ਬਣਿਆ ਠੋਸ | ਉੱਪਰ ਤੋਂ ਦ੍ਰਿਸ਼ | ਸਾਹਮਣੇ ਤੋਂ ਦ੍ਰਿਸ਼ | ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਦਾ ਦ੍ਰਿਸ਼



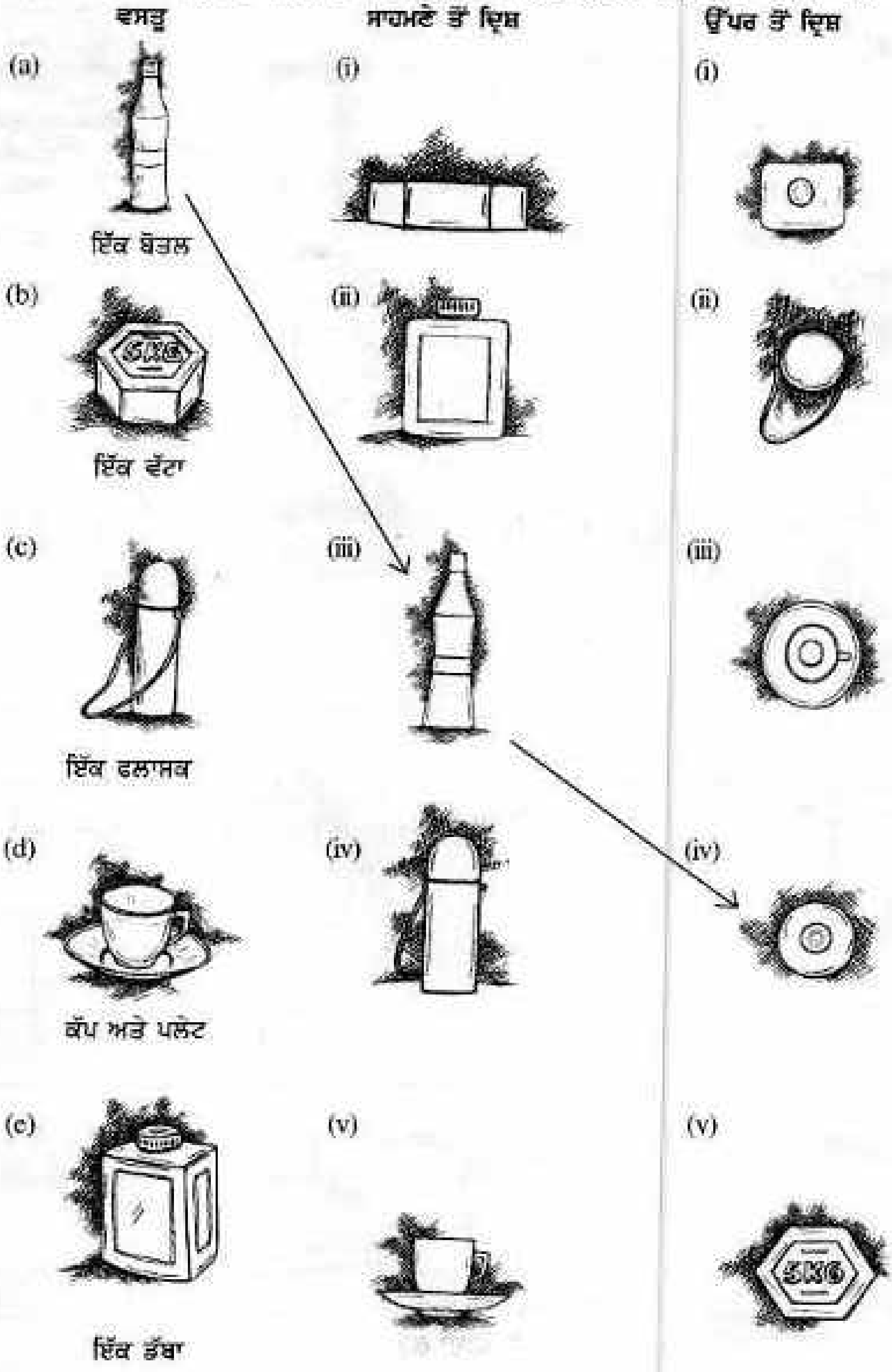
ਚਾਰ ਘਣਾਂ ਤੋਂ ਬਣਿਆ ਠੋਸ | ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਦਾ ਦ੍ਰਿਸ਼ | ਸਾਹਮਣੇ ਤੋਂ ਦ੍ਰਿਸ਼ | ਉੱਪਰ ਤੋਂ ਦ੍ਰਿਸ਼

ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਕਰੋ

ਆਪਣੇ ਆਲੇ-ਦੁਆਲੇ ਦੀਆਂ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਸਥਾਨਾਂ (ਥਾਵਾਂ) ਤੋਂ ਦੇਖੋ। ਆਪਣੇ ਮਿੱਤਰਾਂ ਦੇ ਨਾਲ ਉਸਦੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਦ੍ਰਿਸ਼ਾਂ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰੋ।

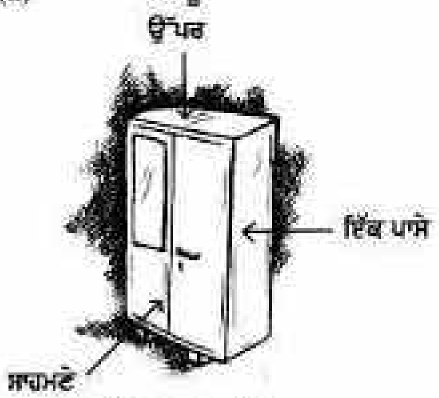
ਅਭਿਆਸ 10.1

1. ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਹਰੇਕ ਠੋਸ ਦੇ ਲਈ, ਦੋ ਦ੍ਰਿਸ਼ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਨ। ਹਰੇਕ ਠੋਸ ਦੇ ਲਈ ਸੰਗਤ, ਉੱਪਰ ਤੋਂ ਦ੍ਰਿਸ਼ ਅਤੇ ਸਾਹਮਣੇ ਤੋਂ ਦ੍ਰਿਸ਼ ਦਾ ਮਿਲਾਣ ਕਰੋ। ਇਸ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਤੁਹਾਡੇ ਲਈ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।



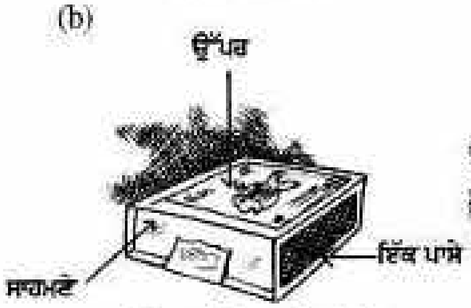
2. ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਹਰੇਕ ਠੋਸ ਦੇ ਲਈ, ਤਿੰਨ ਦ੍ਰਿਸ਼ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਨ। ਹਰੇਕ ਠੋਸ ਦੇ ਲਈ ਸੰਗਤ, ਉੱਪਰ ਤੋਂ ਦ੍ਰਿਸ਼, ਸਾਹਮਣੇ ਤੋਂ ਦ੍ਰਿਸ਼ ਅਤੇ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਦੇ ਦ੍ਰਿਸ਼ ਦੀ ਪਹਿਚਾਣ ਕਰੋ।

(a) (i) (ii) (iii)



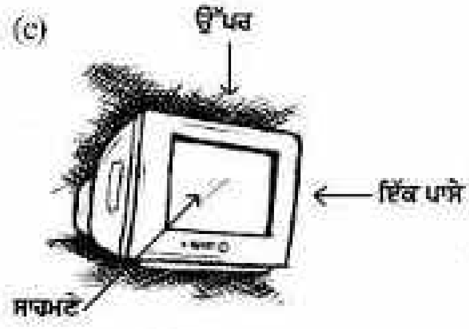
ਇੱਕ ਅਲਮਾਰੀ

(b)



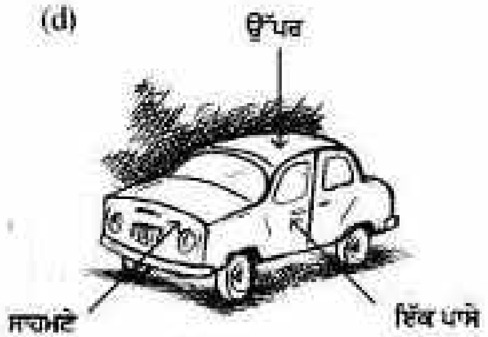
ਇੱਕ ਮਾਚਿਸ ਦੀ ਡੱਬੀ

(c)



ਇੱਕ ਟੈਲੀਵਿਜ਼ਨ

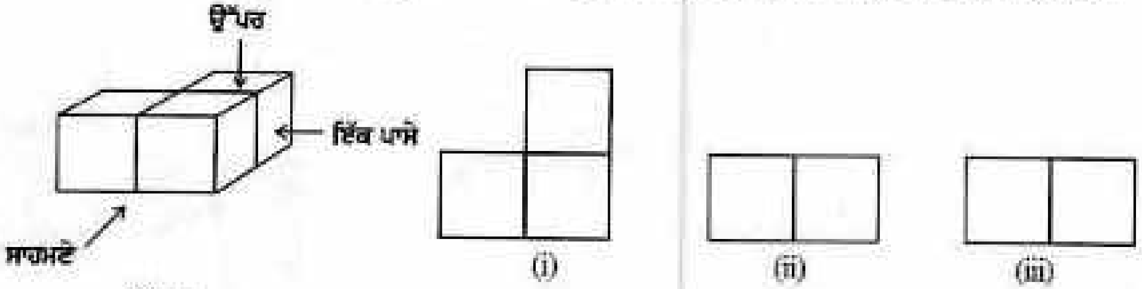
(d)



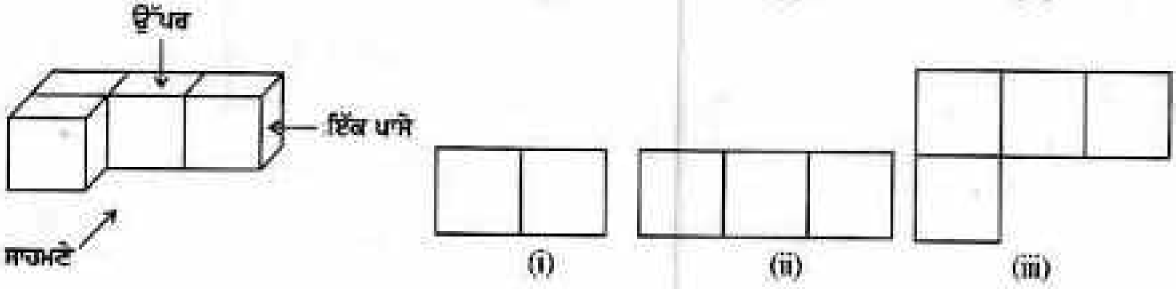
ਇੱਕ ਕਾਰ

3. ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਹਰੇਕ ਠੋਸ ਦੇ ਲਈ ਉੱਪਰ ਤੋਂ ਦ੍ਰਿਸ਼, ਸਾਹਮਣੇ ਤੋਂ ਦ੍ਰਿਸ਼ ਅਤੇ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਦੇ ਦ੍ਰਿਸ਼ ਦੀ ਪਹਿਚਾਣ ਕਰੋ :

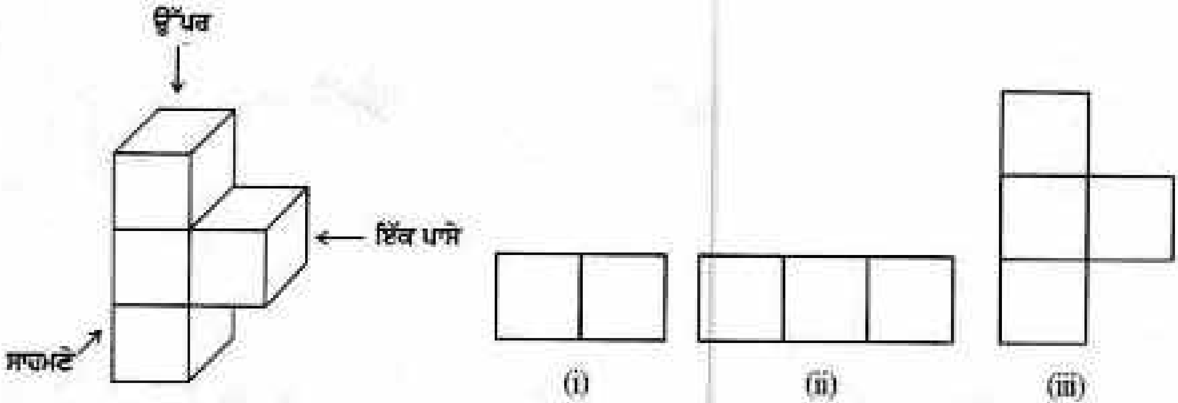
(a)



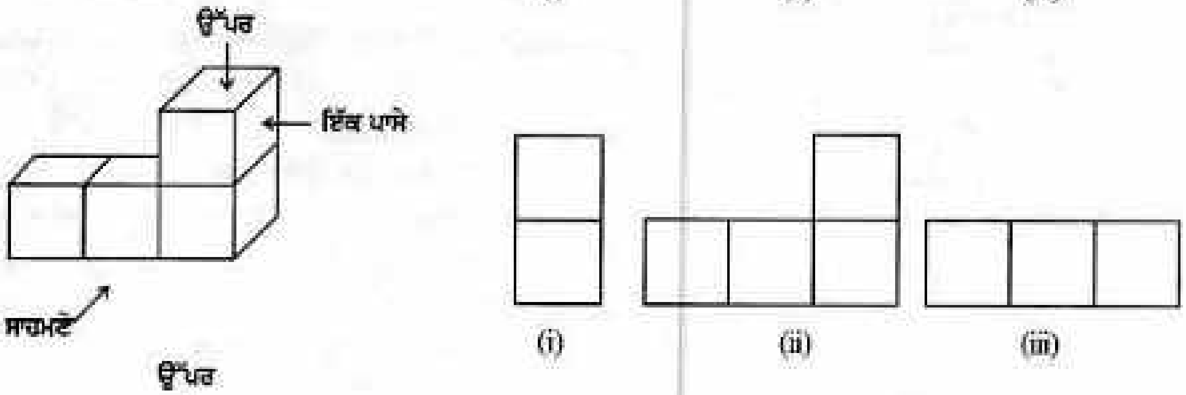
(b)



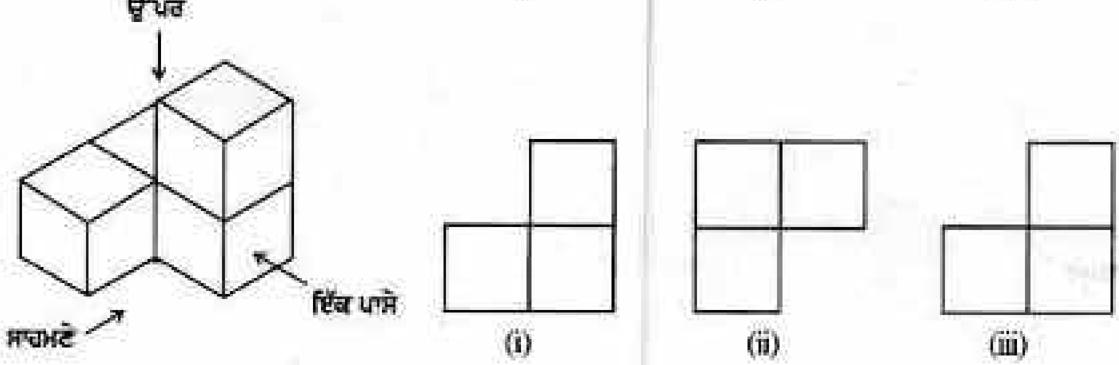
(c)



(d)

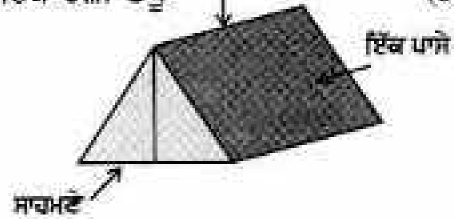


(e)

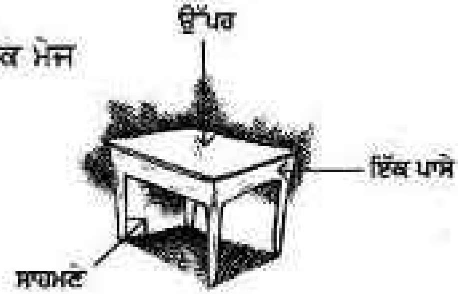


4. ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਵਸਤੂਆਂ ਦੇ, ਸਾਹਮਣੇ ਤੋਂ ਦ੍ਰਿਸ਼, ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਦੇ ਦ੍ਰਿਸ਼ ਅਤੇ ਉੱਪਰ ਦੇ ਦ੍ਰਿਸ਼ ਖਿੱਚੋ :

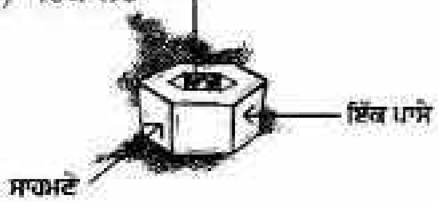
(a) ਇੱਕ ਫੌਜੀ ਤੰਬੂ



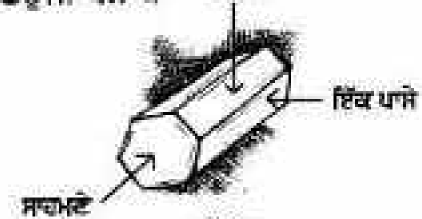
(b) ਇੱਕ ਮੇਜ



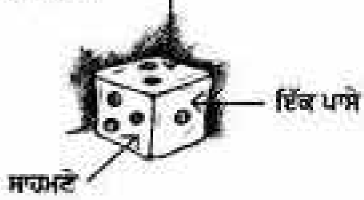
(c) ਇੱਕ ਨਟ



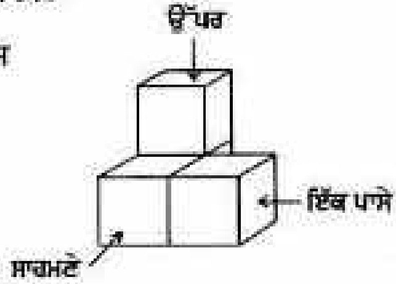
(d) ਇੱਕ ਛੇਭੁਜੀ ਬਲਾੱਕ



(e) ਇੱਕ ਪਾਸਾ



(f) ਇੱਕ ਠੋਸ

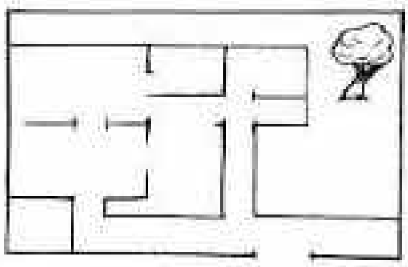


10.3 ਆਪਣੇ ਆਲੇ-ਦੁਆਲੇ ਦੇ ਸਥਾਨ ਦਾ ਨਕਸ਼ਾ

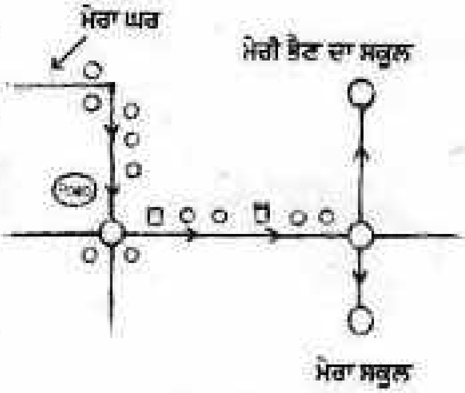
ਤੁਸੀਂ ਆਪਣੀਆਂ ਪ੍ਰਾਇਮਰੀ ਜਮਾਤਾਂ ਤੋਂ ਹੀ ਨਕਸ਼ਿਆਂ (maps) ਦੇ ਨਾਲ ਕੰਮ ਕਰਦੇ ਆ ਰਹੇ ਹੋ। ਭੂਗੋਲ (geography) ਵਿੱਚ, ਤੁਹਾਨੂੰ ਨਕਸ਼ੇ 'ਤੇ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰਾਜ, ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਨਦੀ, ਪਰਬਤ ਆਦਿ ਦੇ ਸਥਾਨ ਨੂੰ ਦੱਸਣ ਲਈ ਕਿਹਾ ਗਿਆ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਤਿਹਾਸ ਵਿੱਚ, ਤੁਹਾਡੇ ਤੋਂ ਬਹੁਤ ਪਹਿਲਾਂ ਹੋਈ ਘਟਨਾ ਦੇ ਸਥਾਨ ਨੂੰ ਦੱਸਣ ਲਈ ਸੰਭਵ ਤੌਰ 'ਤੇ ਕਿਹਾ ਗਿਆ ਹੋਵੇਗਾ। ਤੁਸੀਂ ਨਦੀਆਂ, ਸੜਕਾਂ, ਰੇਲ ਲਾਈਨਾਂ, ਵਪਾਰਕ ਅਤੇ ਹੋਰ ਬਹੁਤ ਸਾਰੇ ਰਸਤਿਆਂ ਨੂੰ ਖਿੱਚਿਆ (ਜਾਂ ਉਸਦਾ ਚਿਤਰਨ ਕੀਤਾ) ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਨਕਸ਼ਿਆਂ ਨੂੰ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪੜ੍ਹਦੇ ਹਾਂ ? ਇੱਕ ਨਕਸ਼ੇ ਨੂੰ ਪੜ੍ਹਦੇ ਸਮੇਂ ਅਸੀਂ ਕੀ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਕੀ ਸਮਝ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ? ਇੱਕ ਨਕਸ਼ੇ ਵਿੱਚ ਕਿਹੜੀਆਂ ਸੂਚਨਾਵਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ ਕਿਹੜੀਆਂ ਸੂਚਨਾਵਾਂ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ? ਕੀ ਇਹ ਇੱਕ ਚਿੱਤਰ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵਿੱਚ ਵੱਖਰਾ ਹੈ ? ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਉੱਤਰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰਾਂਗੇ। ਕਿਸੇ ਘਰ ਦੇ ਨਕਸ਼ੇ ਨੂੰ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਸਦਾ ਚਿੱਤਰ ਨਾਲ ਹੀ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 10.1)।

ਚਿੱਤਰ 10.1



ਇਸ ਚਿੱਤਰ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਕੀ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ? ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਕੋਈ ਚਿੱਤਰ ਖਿੱਚਦੇ ਹਾਂ, ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਉਸ ਦੀਆਂ ਸਪੱਸ਼ਟ ਦਿਖਾਈ ਦੇਣ ਵਾਲੀਆਂ ਜਾਣਕਾਰੀਆਂ ਦੀ ਅਸਲੀਅਤ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਇੱਕ ਨਕਸ਼ਾ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਵਸਤੂ ਦਾ ਹੋਰ ਵਸਤੂਆਂ ਦੇ ਪਰਿਪੇਖ ਵਿੱਚ ਸਿਰਫ ਸਥਾਨ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਦੂਸਰੀ ਗੱਲ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਵਿਅਕਤੀ ਚਿੱਤਰਾਂ ਦਾ ਇੱਕ-ਦੂਸਰੇ ਨਾਲੋਂ ਬਿਲਕੁੱਲ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਵਰਨਣ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਨ, ਜੋ ਇਸ 'ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰੇਗਾ ਕਿ ਉਹ ਘਰ ਨੂੰ ਕਿਸ ਸਥਾਨ ਤੋਂ ਦੇਖ ਰਹੇ ਹਨ। ਪਰ ਇਹ ਇੱਕ ਨਕਸ਼ੇ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਸੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਨਿਰੀਖਕ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਕਿਤੇ ਵੀ ਹੋਵੇ, ਘਰ ਦਾ ਨਕਸ਼ਾ ਉਹੀ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ। ਦੂਸਰੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ, **ਇੱਕ ਚਿੱਤਰ ਖਿੱਚਣ ਦੇ ਲਈ, ਪਰਿਪੇਖ ਬਹੁਤ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਹੈ, ਪਰ ਇਹ ਇੱਕ ਨਕਸ਼ੇ ਦੇ ਲਈ ਅਨੁਕੂਲ ਨਹੀਂ ਹੈ।**



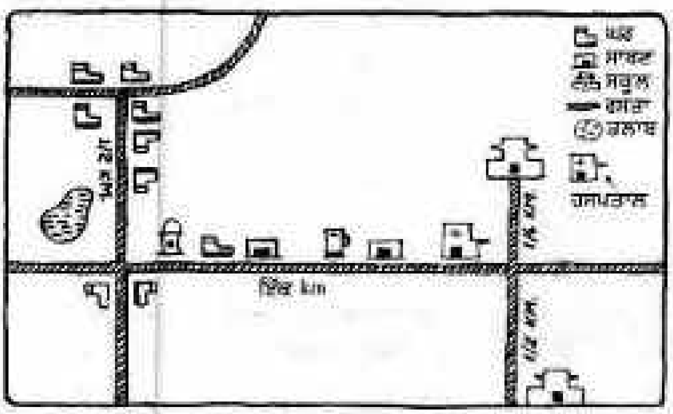
ਚਿੱਤਰ 10.2

ਹੁਣ ਇੱਕ ਨਕਸ਼ੇ (ਚਿੱਤਰ 10.2) ਨੂੰ ਦੇਖੋ ਜੋ ਇੱਕ ਸੱਤ ਸਾਲ ਦੇ ਬੱਚੇ ਰਾਘਵ ਨੇ ਆਪਣੇ ਘਰ ਤੋਂ ਆਪਣੇ ਸਕੂਲ ਤੱਕ ਦੇ ਰਸਤੇ ਦੇ ਲਈ ਖਿੱਚਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਨਕਸ਼ੇ ਤੋਂ ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਦੱਸ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ

(i) ਰਾਘਵ ਦਾ ਸਕੂਲ ਉਸਦੇ ਘਰ ਤੋਂ ਕਿੰਨੀ ਦੂਰ ਹੈ ?
(ii) ਨਕਸ਼ੇ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਚੱਕਰ ਕੀ ਇੱਕ ਗੋਲ ਚੌਂਕ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ?
(iii) ਘਰ ਤੋਂ ਕਿਸ ਦਾ ਸਕੂਲ ਜਿਆਦਾ ਨੇੜੇ ਹੈ – ਰਾਘਵ ਦਾ ਜਾਂ ਉਸਦੀ ਭੈਣ ਦਾ ?

ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਨਕਸ਼ੇ ਨੂੰ ਦੇਖ ਕੇ, ਉਪਰੋਕਤ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਉੱਤਰ ਦੇਣਾ ਬਹੁਤ ਔਖਾ ਹੈ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਦੱਸ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਕਿਉਂ ?

ਇਸਦਾ ਕਾਰਨ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਅਸੀਂ ਨਹੀਂ ਜਾਣਦੇ ਕਿ ਇਸ ਵਿੱਚ ਦੂਰੀਆਂ ਸਹੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਖਿੱਚੀਆਂ ਗਈਆਂ ਹਨ ਜਾਂ ਖਿੱਚੇ ਗਏ ਚੱਕਰ, ਚੌਂਕ ਹਨ ਜਾਂ ਕੁੱਝ ਹੋਰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ।



ਚਿੱਤਰ 10.3

ਹੁਣ ਇੱਕ ਹੋਰ ਨਕਸ਼ੇ ਨੂੰ ਦੇਖੋ, ਜੋ ਉਸਦੀ 10 ਸਾਲ ਦੀ ਭੈਣ ਮੀਨਾ ਨੇ ਆਪਣੇ ਘਰ ਤੋਂ ਆਪਣੇ ਸਕੂਲ ਦਾ ਰਸਤਾ ਦਰਸਾਉਣ ਲਈ ਖਿੱਚਿਆ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 10.3)।

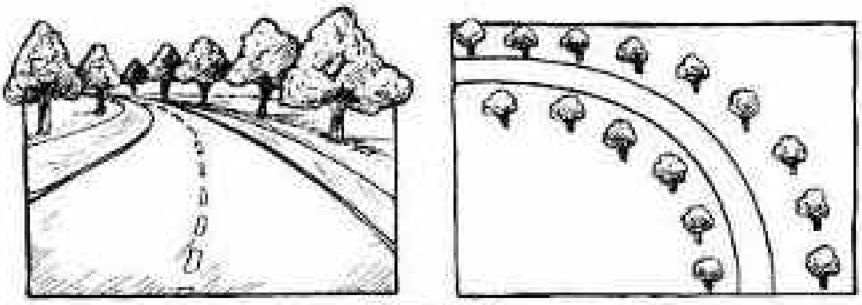
ਇਹ ਨਕਸ਼ਾ ਪਿਛਲੇ ਨਕਸ਼ੇ ਤੋਂ ਭਿੰਨ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਮੀਨਾ ਨੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਸੀਮਾ-ਚਿੰਨ੍ਹਾਂ (landmarks) ਦੇ ਲਈ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਸੰਕੇਤਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕੀਤੀ ਹੈ। ਦੂਸਰੀ ਗੱਲ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਲੰਬੀ ਦੂਰੀ ਦੇ ਲਈ ਲੰਬੇ ਰੇਖਾਖੰਡ ਖਿੱਚੇ ਗਏ ਹਨ ਅਤੇ ਛੋਟੀ ਦੂਰੀ ਲਈ ਛੋਟੇ ਰੇਖਾਖੰਡ ਖਿੱਚੇ ਗਏ ਹਨ। ਭਾਵ ਉਸਨੇ ਇਹ ਨਕਸ਼ਾ ਇੱਕ ਪੈਮਾਨੇ (scale) ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਖਿੱਚਿਆ ਹੈ। ਹੁਣ, ਤੁਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਉੱਤਰ ਦੇ ਸਕਦੇ ਹੋ।

- ਰਾਘਵ ਦਾ ਸਕੂਲ ਉਸਦੇ ਘਰ ਤੋਂ ਕਿੰਨੀ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਹੈ ?
- ਕਿਸ ਦਾ ਸਕੂਲ ਉਸਦੇ ਘਰ ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਨੇੜੇ ਹੈ – ਰਾਘਵ ਦਾ ਜਾਂ ਮੀਨਾ ਦਾ ?
- ਰਸਤੇ ਵਿੱਚ ਕਿਹੜੇ-ਕਿਹੜੇ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਸੀਮਾ-ਚਿੰਨ੍ਹ ਹਨ ?

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਅਸੀਂ ਇਹ ਅਨੁਭਵ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕੁੱਝ ਸੰਕੇਤਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਨਾਲ ਅਤੇ ਦੂਰੀਆਂ ਦਾ ਵਰਣਨ ਕਰਨ (ਜਾਣਕਾਰੀ ਦੇਣ) ਨਾਲ ਸਾਨੂੰ ਨਕਸ਼ੇ ਨੂੰ ਪੜ੍ਹਨ ਵਿੱਚ ਸਹਾਇਤਾ ਮਿਲਦੀ ਹੈ। ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਨਕਸ਼ੇ 'ਤੇ ਦਰਸਾਈਆਂ ਗਈਆਂ ਦੂਰੀਆਂ, ਜ਼ਮੀਨ 'ਤੇ ਅਸਲ ਦੂਰੀਆਂ ਦੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤੀ (proportional) ਹਨ। ਇਹ ਇੱਕ ਢੁੱਕਵਾਂ ਪੈਮਾਨਾ ਮੰਨ ਕੇ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਨਕਸ਼ੇ ਨੂੰ ਖਿੱਚਦੇ (ਜਾਂ ਪੜ੍ਹਦੇ) ਸਮੇਂ ਇਹ ਧਿਆਨ ਰੱਖਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਉਸ ਨੂੰ ਕਿਸ ਪੈਮਾਨੇ ਵਿੱਚ ਖਿੱਚਣਾ ਹੈ (ਜਾਂ ਉਹ ਕਿਸ ਪੈਮਾਨੇ ਵਿੱਚ ਖਿੱਚਿਆ ਗਿਆ ਹੈ), ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਕਿੰਨੀ ਅਸਲ ਦੂਰੀ ਨੂੰ ਨਕਸ਼ੇ ਤੇ 1 mm ਜਾਂ 1 cm ਦੂਰੀ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ਜਦੋਂ ਕੋਈ ਵਿਅਕਤੀ ਇੱਕ ਨਕਸ਼ਾ ਖਿੱਚਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ

ਉਸਨੂੰ ਇਹ ਨਿਰਣਾ ਕਰਨਾ ਪੈਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਉਸ ਨਕਸ਼ੇ ਵਿੱਚ 1 cm ਸਥਾਨ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਦੂਰੀ ਜਿਵੇਂ ਕਿ 1 km ਜਾਂ 10 km ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਪੈਮਾਨਾ ਇੱਕ ਨਕਸ਼ੇ ਤੋਂ ਦੂਸਰੇ ਨਕਸ਼ੇ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਪਰ ਇੱਕ ਹੀ ਨਕਸ਼ੇ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਬਦਲਦਾ। ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ, ਭਾਰਤ ਦੇ ਨਕਸ਼ੇ ਨੂੰ ਦਿੱਲੀ ਦੇ ਨਕਸ਼ੇ ਦੇ ਨਾਲ ਰੱਖ ਕੇ ਦੇਖੋ।

ਤੁਸੀਂ ਦੇਖੋਗੇ ਕਿ ਜਦੋਂ ਨਕਸ਼ੇ ਨੂੰ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਪੈਮਾਨਿਆਂ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਖਿੱਚਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਦੋ ਨਕਸ਼ਿਆਂ ਵਿੱਚ ਦੂਰੀਆਂ ਬਦਲ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ। ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਦਿੱਲੀ ਦੇ ਨਕਸ਼ੇ ਵਿੱਚ 1 cm ਸਥਾਨ ਭਾਰਤ ਦੇ ਨਕਸ਼ੇ ਦੀਆਂ ਦੂਰੀਆਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵਿੱਚ ਛੋਟੀ ਦੂਰੀਆਂ ਦਰਸਾਏਗਾ। ਸਥਾਨ ਜਿੰਨਾ ਵੱਡਾ ਹੋਵੇਗਾ ਅਤੇ ਖਿੱਚੇ ਗਏ ਨਕਸ਼ੇ ਦਾ ਅਕਾਰ ਜਿੰਨਾ ਛੋਟਾ ਹੋਵੇਗਾ ਉਨੀ ਹੀ ਜ਼ਿਆਦਾ ਦੂਰੀ 1 cm ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਈ ਜਾਵੇਗੀ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸੰਖੇਪ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

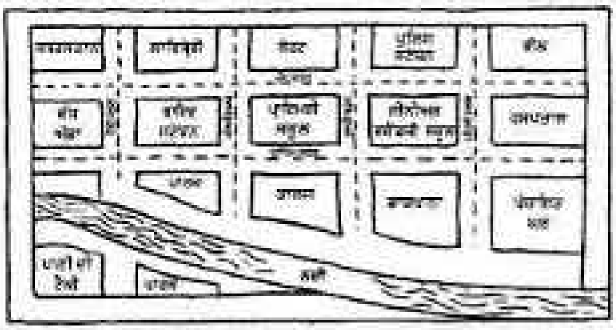


ਚਿੱਤਰ 10.4

1. ਇੱਕ ਨਕਸ਼ਾ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਵਸਤੂ/ਸਥਾਨ ਦੀ ਹੋਰ ਵਸਤੂਆਂ/ਸਥਾਨਾਂ ਦੇ ਪਰਿਪੇਖ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤੀ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।
2. ਵੱਖ-ਵੱਖ ਵਸਤੂਆਂ/ਸਥਾਨਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਢੁੱਕਵੇਂ ਸੰਕੇਤਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
3. ਇੱਕ ਨਕਸ਼ੇ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਪਰਿਪੇਖ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਭਾਵ ਨਿਰੀਖਕ ਦੇ ਨੇੜੇ ਵਾਲੀਆਂ ਵਸਤੂਆਂ ਉਸੇ ਅਕਾਰ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਈਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ ਜਿੰਨੀਆਂ ਦੂਰ ਵਾਲੀਆਂ। ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ, ਚਿੱਤਰ 10.4 ਨੂੰ ਦੇਖੋ।
4. ਹਰੇਕ ਨਕਸ਼ੇ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਪੈਮਾਨਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜੋ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਨਕਸ਼ੇ ਦੇ ਲਈ ਸਥਿਰ (fixed) ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਅਸਲ ਦੂਰੀਆਂ ਨੂੰ ਕਾਗਜ਼ ਉੱਤੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਛੋਟਾ (ਘੱਟ) ਕਰ ਦਿੰਦਾ ਹੈ।

ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਕਰੋ

1. ਇੱਕ ਨਗਰ ਦੇ ਨਾਲ ਦਿੱਤੇ ਨਕਸ਼ੇ ਨੂੰ ਦੇਖੋ (ਚਿੱਤਰ 10.5) :



ਚਿੱਤਰ 10.5

(a) ਨਕਸ਼ੇ ਵਿੱਚ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਰੰਗ ਭਰੋ : ਨੀਲਾ - ਪਾਣੀ, ਲਾਲ - ਫਾਇਰ ਸਟੇਸ਼ਨ, ਸੰਤਰੀ - ਲਾਇਬਰੇਰੀ, ਪੀਲਾ - ਸਕੂਲ, ਹਰਾ - ਪਾਰਕ, ਗੁਲਾਬੀ - ਪੰਚਾਇਤ ਘਰ, ਬੈਂਗਣੀ - ਹਸਪਤਾਲ, ਭੂਰਾ - ਕਬਰਸਤਾਨ।

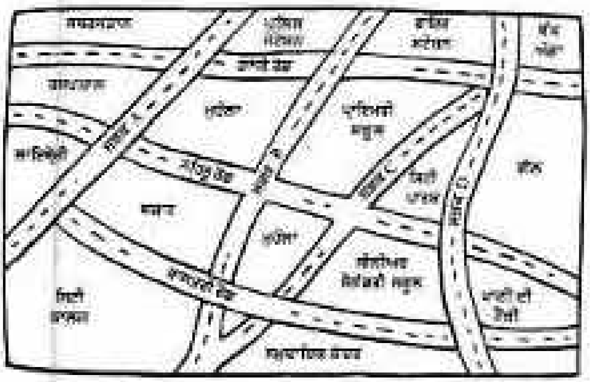
(b) ਦੂਸਰੀ ਸੜਕ ਅਤੇ ਦਾਨਿਮ (Danim) ਸੜਕ ਦੇ ਕੱਟਣ ਵਾਲੀ ਥਾਂ (intersection) 'ਤੇ ਇੱਕ ਹਰਾ 'X' ਅੰਕਿਤ ਕਰੋ। ਜਿੱਥੇ ਨਦੀ, ਤੀਜੀ ਸੜਕ ਨੂੰ ਮਿਲਦੀ ਹੈ, ਉੱਥੇ ਇੱਕ ਕਾਲਾ 'Y' ਅੰਕਿਤ ਕਰੋ ਅਤੇ ਮੁੱਖ ਸੜਕ ਅਤੇ ਪਹਿਲੀ ਸੜਕ ਦੇ ਕੱਟਣ ਵਾਲੀ ਥਾਂ 'ਤੇ ਇੱਕ ਲਾਲ 'Z' ਅੰਕਿਤ ਕਰੋ।

(c) ਕਾਲਜ ਤੋਂ ਝੀਲ ਤੱਕ ਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਛੋਟਾ ਸੜਕ ਦਾ ਮਾਰਗ ਗੂੜ੍ਹੇ ਗੁਲਾਬੀ ਰੰਗ ਵਿੱਚ ਖਿੱਚੋ।

2. ਆਪਣੇ ਘਰ ਤੋਂ ਆਪਣੇ ਸਕੂਲ ਤੱਕ ਦੇ ਮਾਰਗ ਦਾ ਉਸ ਤੇ ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਸੀਮਾ-ਚਿੰਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹੋਏ ਇੱਕ ਨਕਸ਼ਾ ਖਿੱਚੋ।

ਅਭਿਆਸ 10.2

1. ਇੱਕ ਨਗਰ ਦੇ ਲਈ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਨਕਸ਼ੇ ਨੂੰ ਦੇਖੋ। ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਉੱਤਰ ਦਿਓ :



   (a) ਇਸ ਨਕਸ਼ੇ ਵਿੱਚ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਰੰਗ ਭਰੋ : ਨੀਲਾ – ਪਾਣੀ, ਲਾਲ – ਫਾਇਰ ਸਟੇਸ਼ਨ, ਸੰਤਰੀ – ਲਾਇਬ੍ਰੇਰੀ, ਪੀਲਾ – ਸਕੂਲ, ਹਰਾ – ਪਾਰਕ, ਗੁਲਾਬੀ – ਕਾਲਜ, ਬੈਂਗਣੀ – ਹਸਪਤਾਲ, ਭੂਰਾ – ਕਬਰਸਤਾਨ।

   (b) ਸੜਕ C ਅਤੇ ਨਹਿਰੂ ਰੋਡ ਦੇ ਕੱਟਣ ਵਾਲੀ ਥਾਂ 'ਤੇ ਇੱਕ ਹਰਾ 'X' ਅਤੇ ਗਾਂਧੀ ਰੋਡ ਅਤੇ ਸੜਕ A ਦੇ ਕੱਟਣ ਵਾਲੀ ਥਾਂ 'ਤੇ ਇੱਕ ਹਰਾ 'Y' ਖਿੱਚੋ।

   (c) ਲਾਇਬ੍ਰੇਰੀ ਤੋਂ ਬੱਸ ਅੱਡੇ ਤੱਕ ਇੱਕ ਛੋਟਾ ਸੜਕ ਮਾਰਗ ਲਾਲ ਰੰਗ ਨਾਲ ਖਿੱਚੋ।

   (d) ਕਿਹੜਾ ਜ਼ਿਆਦਾ ਪੂਰਬ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਹੈ - ਸਿਟੀ ਪਾਰਕ ਜਾਂ ਬਜ਼ਾਰ ?

   (e) ਕਿਹੜਾ ਜ਼ਿਆਦਾ ਦੱਖਣ ਵਿੱਚ ਹੈ – ਪ੍ਰਾਇਮਰੀ ਸਕੂਲ ਜਾਂ ਸੀਨੀਅਰ ਸੈਕੰਡਰੀ ਸਕੂਲ ?

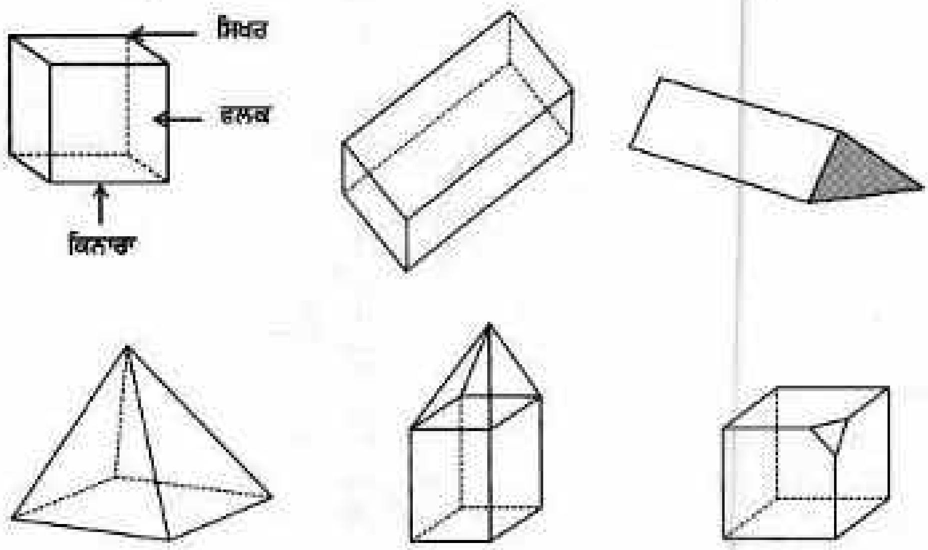
2. ਢੁੱਕਵੇਂ ਪੈਮਾਨੇ ਅਤੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਵਸਤੂਆਂ ਦੇ ਲਈ ਸੰਕੇਤਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਆਪਣੀ ਜਮਾਤ ਦੇ ਕਮਰੇ ਦਾ ਇੱਕ ਨਕਸ਼ਾ ਖਿੱਚੋ।

3. ਢੁੱਕਵੇਂ ਪੈਮਾਨੇ ਅਤੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ (ਵਸਤੂਆਂ) ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਖੇਡ ਦਾ ਮੈਦਾਨ, ਮੁੱਖ ਭਵਨ, ਬਗੀਚਾ ਆਦਿ ਦੇ ਲਈ ਸੰਕੇਤਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਆਪਣੇ ਸਕੂਲ ਦੇ ਵਿਹੜੇ (compound) ਦਾ ਇੱਕ ਨਕਸ਼ਾ ਖਿੱਚੋ।

4. ਆਪਣੇ ਮਿੱਤਰ ਦੇ ਮਾਰਗ ਦਰਸ਼ਨ ਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਨਕਸ਼ਾ ਖਿੱਚੋ ਜਿਸ ਨਾਲ ਉਹ ਤੁਹਾਡੇ ਘਰ ਬਿਨ੍ਹਾਂ ਕਿਸੇ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਨਾਲ ਪਹੁੰਚ ਜਾਵੇ।

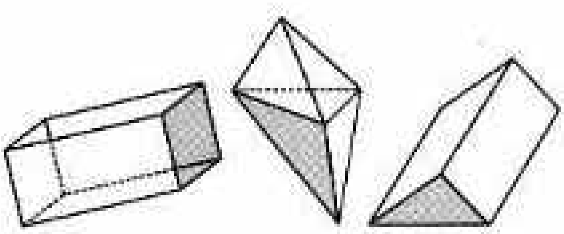
10.4 ਫਲਕ, ਕਿਨਾਰੇ ਅਤੇ ਸਿਖਰ

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਠੋਸਾਂ ਨੂੰ ਦੇਖੋ :

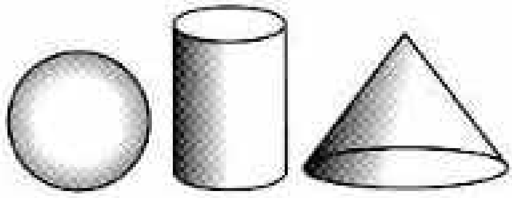


ਪਹੇਲੀ : ਮੇਰਾ ਕੋਈ ਸਿਖਰ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਮੇਰਾ ਕੋਈ ਸਮਤਲ ਫਲਕ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਮੈਂ ਕੌਣ ਹਾਂ ?

ਉਪਰੋਕਤ ਠੋਸਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਠੋਸ ਬਹੁਭੁਜੀ ਖੇਤਰਾਂ (polygonal regions) ਨੂੰ ਮਿਲਾ ਕੇ ਬਣਿਆ ਹੈ, ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਉਸਦੇ **ਫਲਕ** (faces) ਆਖਦੇ ਹਨ। ਇਹ ਫਲਕ **ਕਿਨਾਰਿਆਂ ਜਾਂ ਕੋਰਾਂ** (edges) 'ਤੇ ਮਿਲਦੇ ਹਨ, ਜੋ ਰੇਖਾਖੰਡ ਹਨ ਅਤੇ ਇਹ ਕਿਨਾਰੇ ਸਿਖਰਾਂ 'ਤੇ ਮਿਲਦੇ ਹਨ, ਜੋ ਬਿੰਦੂ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਠੋਸਾਂ ਨੂੰ **ਬਹੁਫਲਕ ਜਾਂ ਬਹੁਫਲਕੀ (polyhedral)** ਆਖਦੇ ਹਨ।

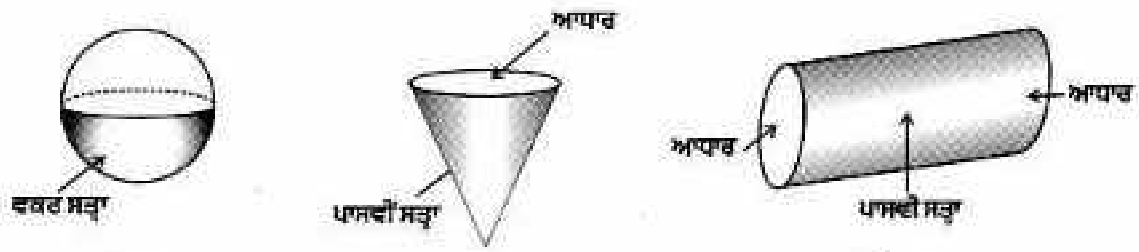


ਇਹ ਬਹੁਫਲਕ ਹਨ



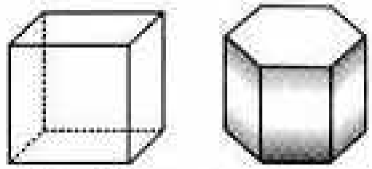
ਇਹ ਬਹੁਫਲਕ ਨਹੀਂ ਹਨ

ਬਹੁਫਲਕ ਉਹਨਾਂ ਠੋਸਾਂ ਨਾਲੋਂ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵੱਖਰੇ ਹਨ ਜਿਹੜੇ ਬਹੁਫਲਕ ਨਹੀਂ ਹਨ? ਹੇਠਾਂ ਚਿੱਤਰਾਂ ਦਾ ਧਿਆਨ ਨਾਲ ਅਧਿਐਨ ਕਰੋ। ਤੁਸੀਂ ਤਿੰਨ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਆਮ ਠੋਸਾਂ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਜਾਣਦੇ ਹੋ।

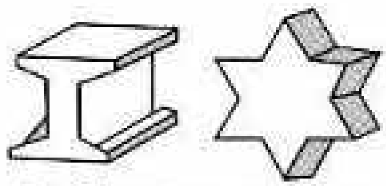


ਗੋਲਾ ਸ਼ੰਕੂ ਵੇਲਣ

ਉੱਤਲ ਬਹੁਫਲਕ : ਤੁਹਾਨੂੰ ਉੱਤਲ (convex) ਬਹੁਭੁਜ ਦੇ ਸੰਕਲਪ ਬਾਰੇ ਯਾਦ ਹੋਵੇਗਾ। ਉੱਤਲ ਬਹੁਫਲਕ ਦਾ ਸੰਕਲਪ ਵੀ ਉਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਹੈ।

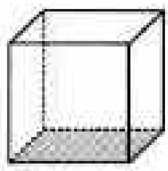


ਇਹ ਉੱਤਲ ਬਹੁਫਲਕ ਹਨ।

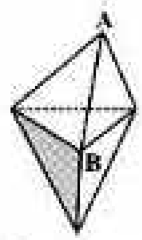


ਇਹ ਉੱਤਲ ਬਹੁਫਲਕ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਸਮ ਬਹੁਫਲਕ : ਇੱਕ ਬਹੁਫਲਕ ਨੂੰ ਤਦ **ਸਮ ਬਹੁਫਲਕ (regular polyhedron)** ਆਖਦੇ ਹਨ ਜਦੋਂ ਉਸਦੇ ਸਾਰੇ ਫਲਕ ਸਰਬੰਗਸਮ ਸਮ ਬਹੁਭੁਜਾਂ (regular polygons) ਤੋਂ ਬਣੇ ਹੋਣ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਸਿਖਰ 'ਤੇ ਮਿਲਣ ਵਾਲੇ ਫਲਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਸਮਾਨ ਹੋਵੇ।

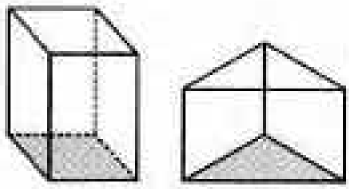


ਇਹ ਇੱਕ ਸਮ ਬਹੁਫਲਕ ਹੈ। ਇਸਦੇ ਸਾਰੇ ਫਲਕ ਸਰਬੰਗਸਮ ਸਮ ਬਹੁਭੁਜ ਹਨ। ਫਲਕਾਂ ਦੀ ਸਮਾਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਤੋਂ ਸਿਖਰ ਬਣਦੇ ਹਨ।

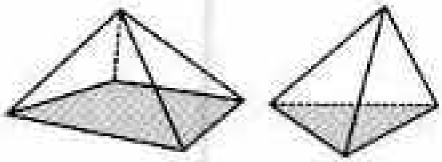


ਇਹ ਇੱਕ ਸਮ ਬਹੁਫਲਕ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਸਾਰੇ ਫਲਕ ਸਰਬੰਗਸਮ ਨਹੀਂ ਹਨ, ਪਰ ਸਿਖਰ ਫਲਕਾਂ ਦੀ ਸਮਾਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਤੋਂ ਨਹੀਂ ਬਣਦੇ ਹਨ। A 'ਤੇ 3 ਫਲਕ ਮਿਲਦੇ ਹਨ ਪਰੰਤੂ B 'ਤੇ 4 ਫਲਕ ਮਿਲਦੇ ਹਨ।

ਸਾਡੇ ਆਲੇ-ਦੁਆਲੇ ਬਹੁਫਲਕ ਪਰਿਵਾਰ (ਕੁੱਲ ਜਾਂ family) ਵਿੱਚ ਮਿਲਣ ਵਾਲੇ ਦੋ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਮੈਂਬਰ ਪ੍ਰਿਜ਼ਮ (prisms) ਅਤੇ ਪਿਰਾਮਿਡ (pyramids) ਹਨ।



ਇਹ ਪ੍ਰਿਜ਼ਮ ਹੈ।



ਇਹ ਪਿਰਾਮਿਡ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਆਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇੱਕ ਬਹੁਫਲਕ **ਪ੍ਰਿਜ਼ਮ** ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਦੋਂ ਉਸਦਾ ਆਧਾਰ (base) ਅਤੇ ਉੱਪਰਲਾ ਸਿਰਾ (top) ਸਰਬੰਗਸਮ ਬਹੁਭੁਜ ਹੋਣ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਹੋਰ ਫਲਕ ਜਾਂ ਪਾਸਵੇਂ ਫਲਕ (lateral faces) ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜਾਂ ਦੇ ਅਕਾਰ ਦੇ ਹੋਣ।

ਉਸਦੇ ਦੂਸਰੇ ਪਾਸੇ, ਇੱਕ **ਪਿਰਾਮਿਡ** ਉਹ ਬਹੁਫਲਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਆਧਾਰ (ਕਿੰਨੀ ਵੀ ਭੁਜਾਵਾਂ ਵਾਲਾ) ਇੱਕ ਬਹੁਭੁਜ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਦੇ ਪਾਸਵੇਂ ਫਲਕ ਇੱਕ ਸਿਖਰ ਵਾਲੇ ਤਿਕੋਣ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। (ਜੇ ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਬਹੁਭੁਜ ਦੇ ਸਾਰੇ ਕੋਨੇ ਜਾਂ ਸਿਖਰਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਬਿੰਦੂ ਨਾਲ ਮਿਲਾ ਦਿਓ ਜੋ ਉਸਦੇ ਤਲ (plane) ਵਿੱਚ ਨਾ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਤੁਹਾਨੂੰ ਪਿਰਾਮਿਡ ਦਾ ਇੱਕ ਮਾਡਲ (model) ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ।

ਇੱਕ ਪ੍ਰਿਜ਼ਮ ਜਾਂ ਪਿਰਾਮਿਡ ਨੂੰ ਉਸਦੇ ਆਧਾਰ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਨਾਂ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਇੱਕ ਛੇਭੁਜੀ (hexagonal) ਪ੍ਰਿਜ਼ਮ ਦਾ ਆਧਾਰ ਇੱਕ ਛੇਭੁਜ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਤਿਕੋਣਾਕਾਰ ਪਿਰਾਮਿਡ ਦਾ ਆਧਾਰ ਇੱਕ ਤਿਕੋਣ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਤਦ, ਇੱਕ ਆਇਤਾਕਾਰ ਪ੍ਰਿਜ਼ਮ ਕੀ ਹੈ? ਇੱਕ ਵਰਗ ਪਿਰਾਮਿਡ ਕੀ ਹੈ? ਸਪੱਸ਼ਟ ਤੌਰ ਤੇ ਇਸਦੇ ਆਧਾਰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : ਆਇਤ ਅਤੇ ਵਰਗ ਹਨ।

ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਕਰੋ

ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਬਹੁਫਲਕਾਂ ਦੇ ਲਈ ਫਲਕਾਂ (faces), ਕਿਨਾਰਿਆਂ (edges) ਅਤੇ ਸਿਖਰਾਂ (vertices) ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਨੂੰ ਸਾਰਣੀਬੱਧ ਕਰੋ : (ਇੱਥੇ V ਸਿਖਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ, F ਫਲਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਅਤੇ E ਕਿਨਾਰਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।)

ਠੋਸ	F	V	E	F+V	E+2
ਘਣਾਵ					
ਤ੍ਰਿਭੁਜਕਾਰ					
ਤ੍ਰਿਭੁਜਕਾਰ ਪ੍ਰਿਜ਼ਮ					
ਵਰਗ ਆਧਾਰ ਵਾਲਾ ਪਿਰਾਮਿਡ					
ਵਰਗ ਆਧਾਰ ਵਾਲਾ ਪ੍ਰਿਜ਼ਮ					

ਤੁਸੀਂ ਆਖਰੀ ਦੋ ਕਾਲਮਾਂ ਤੋਂ ਕੀ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢਦੇ ਹੋ? ਕੀ ਹਰੇਕ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਤੁਹਾਨੂੰ $F+V=E+2$, ਭਾਵ $F+V-E=2$ ਮਿਲਦਾ ਹੈ? ਇਸ ਸੰਬੰਧ ਨੂੰ **ਇਉਲਰ ਸੂਤਰ (Euler's Formula)** ਆਖਦੇ ਹਨ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ, ਇਹ ਸੂਤਰ ਹਰੇਕ ਬਹੁਫਲਕ ਦੇ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ।

ਸੋਚੋ, ਚਰਚਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਲਿਖੋ

ਜਦੋਂ ਕਿਸੀ ਠੋਸ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਟੁੱਕੜਾ ਕੱਟ ਦਿੱਤਾ ਜਾਵੇ, ਤਾਂ F, V ਅਤੇ E ਵਿੱਚ ਕੀ ਬਦਲਾਓ ਹੁੰਦਾ ਹੈ? (ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ, ਇੱਕ ਪਲਾਸਟਿਕ ਦਾ ਘਣ ਲਵੋ ਅਤੇ ਇੱਕ ਕੋਨਾ ਕੱਟਕੇ ਇਸਦਾ ਨਿਰੀਖਣ ਕਰੋ।)

ਅਭਿਆਸ 10.3

1. ਕੀ ਕਿਸੇ ਬਹੁਫਲਕ ਦੇ ਫਲਕ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਅਨੁਸਾਰ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ ?
   (i) 3 ਤ੍ਰਿਭੁਜ (ii) 4 ਤ੍ਰਿਭੁਜ (iii) ਇੱਕ ਵਰਗ ਅਤੇ ਚਾਰ ਤ੍ਰਿਭੁਜ
2. ਕੀ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਬਹੁਫਲਕ ਸੰਭਵ ਹੈ ਜਿਸਦੇ ਫਲਕਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਕੋਈ ਵੀ ਸੰਖਿਆ ਹੋਵੇ ?
   (ਸੰਕੇਤ : ਇੱਕ ਪਿਰਾਮਿਡ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਸੋਚੋ।)
3. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੇ-ਕਿਹੜੇ ਪ੍ਰਿਜ਼ਮ ਹਨ ?

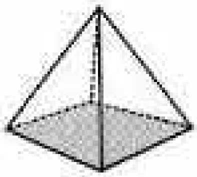
(i)

ਇੱਕ ਕਿੱਲ

(ii)

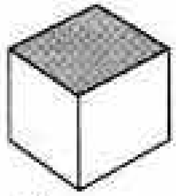
ਬਿਨ੍ਹਾਂ ਛਿੱਲੀ ਹੋਈ ਪੈਨਸਿਲ

(iii)



ਕਾਗਜ਼ਾਂ ਉੱਤੇ ਰੱਖਣ ਵਾਲਾ ਭਾਰ

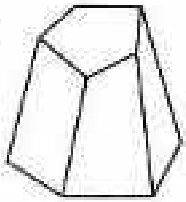
(iv)



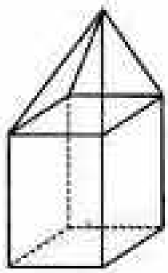
ਇੱਕ ਬਾਕਸ

4. (i) ਪ੍ਰਿਜ਼ਮ ਅਤੇ ਵੇਲਣ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇੱਕੋ ਜਿਹੇ ਹਨ ?
   (ii) ਪਿਰਾਮਿਡ ਅਤੇ ਸ਼ੰਕੂ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇੱਕੋ ਜਿਹੇ ਹਨ ?
5. ਕੀ ਇੱਕ ਵਰਗ, ਪ੍ਰਿਜ਼ਮ ਅਤੇ ਇੱਕ ਘਣ ਇੱਕ ਹੀ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ? ਸਪੱਸ਼ਟ ਕਰੋ।
6. ਇਹਨਾਂ ਠੋਸਾਂ ਦੇ ਲਈ ਇਯੂਲਰ ਸੂਤਰ ਦੀ ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ :

(i)



(ii)



7. ਇਯੂਲਰ ਸੂਤਰ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਅਗਿਆਤ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ :

ਫਲਕ	?	5	20
ਸਿਖਰ	6	?	12
ਕਿਨਾਰੇ	12	9	?

8. ਕੀ ਕਿਸੇ ਬਹੁਫਲਕ ਦੇ 10 ਫਲਕ, 20 ਕਿਨਾਰੇ ਅਤੇ 15 ਸਿਖਰ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ ?

ਅਸੀਂ ਕੀ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀ ?

1. 2D ਅਤੇ 3D ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ ਪਹਿਚਾਣਨਾ।
2. ਸੰਯੋਜਿਤ ਜਾਂ ਵਸਤੂਆਂ ਦੇ ਮੇਲ ਵਿੱਚ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਅਕਾਰਾਂ ਨੂੰ ਪਹਿਚਾਣਨਾ।
3. ਵੱਖ-ਵੱਖ ਸਥਾਨਾਂ ਤੋਂ 3D ਵਸਤੂਆਂ ਦੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਦ੍ਰਿਸ਼ ਮਿਲਦੇ ਹਨ।
4. ਇੱਕ ਨਕਸ਼ਾ ਇੱਕ ਚਿੱਤਰ ਤੋਂ ਵੱਖਰਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
5. ਇੱਕ ਨਕਸ਼ਾ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਵਸਤੂ/ਸਥਾਨ ਅਤੇ ਹੋਰ ਵਸਤੂਆਂ/ਸਥਾਨਾਂ ਦੇ ਪਰਿਪੇਖ ਵਿੱਚ ਸਹੀ-ਸਹੀ ਸਥਿਤੀਆਂ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।
6. ਵੱਖ-ਵੱਖ ਵਸਤੂਆਂ/ਸਥਾਨਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਦੇ ਲਈ, ਨਕਸ਼ੇ ਵਿੱਚ ਸੰਕੇਤਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।
7. ਇੱਕ ਨਕਸ਼ੇ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਪਰਿਪੇਖ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
8. ਹਰੇਕ ਨਕਸ਼ੇ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਪੈਮਾਨਾ ਸੰਬੰਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜੋ ਕਿ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਨਕਸ਼ੇ ਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਹੀ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ।
9. ਕਿਸੇ ਵੀ ਬਹੁਫਲਕ ਦੇ ਲਈ $F + V - E = 2$ ਸੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਇੱਥੇ F ਫਲਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ, V ਸਿਖਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਅਤੇ E ਕਿਨਾਰਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਇਸ ਸੰਬੰਧ ਨੂੰ ਇਯੂਲਰ ਸੂਤਰ ਆਖਦੇ ਹਾਂ।

ਅਧਿਆਇ 11

ਖੇਤਰਮਿਤੀ

11.1 ਭੂਮਿਕਾ

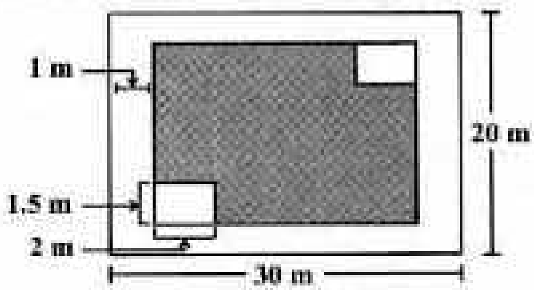
ਅਸੀਂ ਅਧਿਐਨ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕਿਸੇ ਬੰਦ ਸਮਤਲ ਚਿੱਤਰ ਦੀ ਸੀਮਾਂ ਦੇ ਚਾਰੇ ਪਾਸਿਆਂ ਦੀ ਦੂਰੀ ਨੂੰ ਉਸਦਾ ਪਰਿਮਾਪ ਆਖਦੇ ਹਨ। ਅਤੇ ਉਸ ਚਿੱਤਰ ਦੁਆਰਾ ਘਿਰੇ ਹੋਏ ਖੇਤਰ ਨੂੰ ਉਸਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਆਖਦੇ ਹਨ। ਅਸੀਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜ, ਆਇਤ, ਚੱਕਰ ਆਦਿ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਸਮਤਲ ਚਿੱਤਰਾਂ ਦਾ ਪਰਿਮਾਪ ਅਤੇ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਸਿੱਖ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਆਇਤਾਕਾਰ ਆਕਾਰ ਦੇ ਕਿਨਾਰੇ ਜਾਂ ਵਿਚਲੇ ਰਸਤਿਆਂ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਵੀ ਸਿੱਖ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ।

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਚਤੁਰਭੁਜ ਵਰਗੀਆਂ ਦੂਸਰੀਆਂ ਬੰਦ ਚਿੱਤਰਾਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਅਤੇ ਪਰਿਮਾਪ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰਾਂਗੇ। ਅਸੀਂ ਘਣ ਤੇ ਘਣਾਵ ਅਤੇ ਵੇਲਣ ਵਰਗੇ ਠੋਸਾਂ ਦੇ ਸਤ੍ਹਈ ਖੇਤਰਫਲ ਅਤੇ ਆਇਤਨ ਦਾ ਵੀ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ।

11.2 ਆਉ ਦੁਹਰਾਈ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

ਆਪਣੇ ਪਹਿਲਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਗਿਆਨ ਦੇ ਸਰਵੇਖਣ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਹ ਇੱਕ ਆਇਤਾਕਾਰ ਬਗੀਚੇ ਦਾ ਚਿੱਤਰ ਹੈ ਜਿਸਦੀ ਲੰਬਾਈ 30 ਮੀਟਰ ਅਤੇ ਚੌੜਾਈ 20 ਮੀਟਰ ਹੈ।

(i) ਇਸ ਬਗੀਚੇ ਨੂੰ ਚਾਰੇ ਪਾਸਿਆਂ ਤੋਂ ਘੇਰਨ ਵਾਲੀ ਵਾੜ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਕੀ ਹੈ? ਵਾੜ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਬਗੀਚੇ ਦਾ ਪਰਿਮਾਪ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ ਜੋ ਕਿ 100 ਮੀਟਰ ਹੈ (ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ)।



ਚਿੱਤਰ 11.1

(ii) ਕਿੰਨੀ ਜ਼ਮੀਨ ਬਗੀਚੇ ਨੇ ਘੇਰੀ ਹੈ? ਇਸ ਬਗੀਚੇ ਦੁਆਰਾ ਘੇਰੀ ਗਈ ਜ਼ਮੀਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਇਸਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ ਜੋ ਕਿ 600 ਵਰਗ ਮੀਟਰ (m^2) ਹੈ (ਕਿਵੇਂ)?

(iii) ਬਗੀਚੇ ਦੇ ਪਰਿਮਾਪ ਦੇ ਨਾਲ-ਨਾਲ ਅੰਦਰਲੇ ਪਾਸੇ ਇੱਕ ਮੀਟਰ ਚੌੜਾ ਰਸਤਾ ਹੈ ਜਿਸ ਤੇ ਸੀਮੈਂਟ ਲਗਾਉਣਾ ਹੈ। ਜੇ 4 ਵਰਗ ਮੀਟਰ (m^2) ਖੇਤਰਫਲ 'ਤੇ ਸੀਮੈਂਟ ਲਗਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਬੋਰੀ ਸੀਮੈਂਟ ਚਾਹੀਦਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਇਸ ਪੂਰੇ ਰਸਤੇ 'ਤੇ ਸੀਮੈਂਟ ਲਾਉਣ ਲਈ ਸੀਮੈਂਟ ਦੀਆਂ ਕਿੰਨੀਆਂ ਬੋਰੀਆਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ?

ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਉਪਯੋਗ ਕੀਤੀ ਗਈ ਸੀਮੈਂਟ ਦੀਆਂ ਬੋਰੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ

$$= \frac{\text{ਰਸਤੇ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ}}{\text{1 ਬੋਰੀ ਦੁਆਰਾ ਸੀਮੈਂਟ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਖੇਤਰਫਲ}}$$

ਸੀਮੈਂਟ ਨਾਲ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਰਸਤੇ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = ਬਗੀਚੇ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ – ਬਗੀਚੇ ਦਾ ਉਹ ਖੇਤਰਫਲ ਜਿਸ ਤੇ ਸੀਮੈਂਟ ਨਹੀਂ ਲਗਾਉਣਾ ਹੈ।

ਰਸਤੇ ਦੀ ਚੌੜਾਈ 1 ਮੀਟਰ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਸੀਮੇਂਟ ਨਹੀਂ ਕੀਤੇ ਜਾਣ ਵਾਲਾ ਆਇਤਾਕਾਰ ਖੇਤਰਫਲ $(30-2) \times (20-2)\ m^2$ ਹੈ। ਇਹ $28 \times 18\ m^2$ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਉਪਯੋਗ ਕੀਤੇ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਸੀਮੇਂਟ ਦੀਆਂ ਬੋਰੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = ...

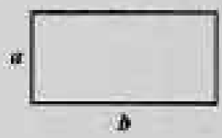
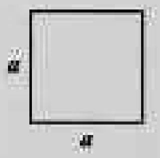
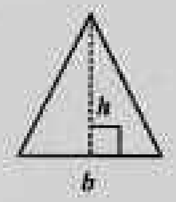
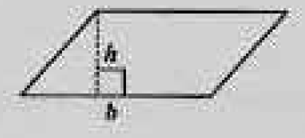
(iv) ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 11.1 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਬਗੀਚੇ ਵਿੱਚ ਫੁੱਲਾਂ ਦੀਆਂ ਦੋ ਆਇਤਾਕਾਰ ਕਿਆਰੀਆਂ ਹਨ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਦਾ ਆਕਾਰ $1.5\ m \times 2\ m$ ਹੈ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਬਗੀਚੇ ਦੇ ਉੱਤੇ ਘਾਹ ਹੈ। ਘਾਹ ਦੁਆਰਾ ਘਿਰਿਆ ਹੋਇਆ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ;

ਆਇਤਾਕਾਰ ਕਿਆਰੀਆਂ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = ...

ਰਸਤੇ 'ਤੇ ਸੀਮੇਂਟ ਲਗਾਉਣ ਦੇ ਬਾਅਦ ਬਗੀਚੇ ਦਾ ਬਚਿਆ ਹੋਇਆ ਖੇਤਰਫਲ = ...

ਘਾਹ ਦੁਆਰਾ ਘਿਰਿਆ ਹੋਇਆ ਖੇਤਰਫਲ = ...

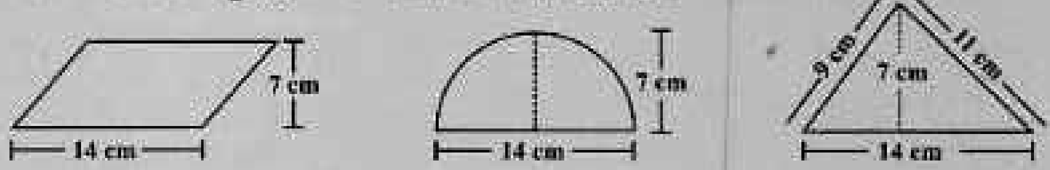
ਜੇਕਰ ਸਾਨੂੰ ਕੁੱਝ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਮਾਪ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਹਨ, ਤਾਂ ਆਇਤਾਂ ਦੇ ਇਲਾਵਾ ਅਸੀਂ ਕੁੱਝ ਹੋਰ ਜਿਆਮਿਤੀ ਅਕਾਰਾਂ ਦਾ ਵੀ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਨੂੰ ਯਾਦ ਕਰਕੇ ਮਿਲਾਣ ਕਰਨ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰੋ।

ਚਿੱਤਰ	ਆਕਾਰ	ਖੇਤਰਫਲ
	ਆਇਤ	$a \times a$
	ਵਰਗ	$b \times h$
	ਤ੍ਰਿਭੁਜ	πb^2
	ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ	$\frac{1}{2} b \times h$
	ਚੱਕਰ	$a \times b$

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਉਪਰੋਕਤ ਆਕਾਰਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦੇ ਪਰਿਮਾਪ ਦਾ ਸੂਤਰ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ?

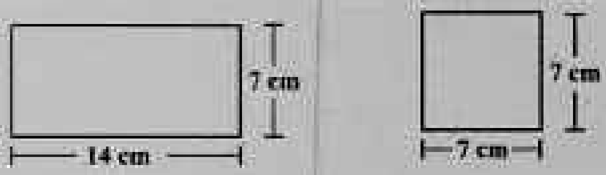
ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

(a) ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਚਿੱਤਰਾਂ ਨੂੰ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਨਾਲ ਮਿਲਾਉ।



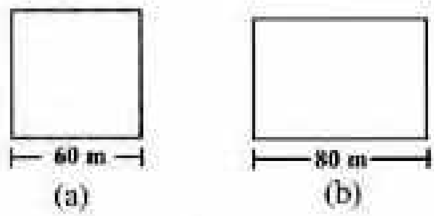
49 cm^2
77 cm^2
98 cm^2

(b) ਹਰੇਕ ਆਕਾਰ ਦਾ ਪਰਿਮਾਪ ਲਿਖੋ।

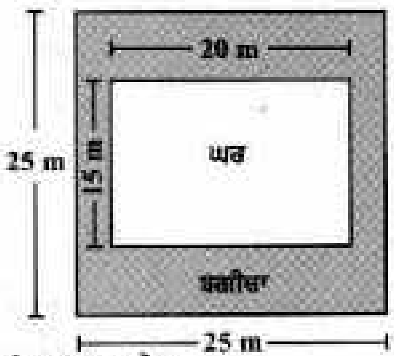


ਅਭਿਆਸ 11.1

1. ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਨਾਲ ਦਿੱਤੇ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ, ਇੱਕ ਆਇਤਾਕਾਰ ਅਤੇ ਇੱਕ ਵਰਗਾਕਾਰ ਖੇਤ ਦੇ ਮਾਪ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਨ। ਜੇ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਪਰਿਮਾਪ ਸਮਾਨ ਹੋਣ, ਤਾਂ ਕਿਸ ਖੇਤ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਜਿਆਦਾ ਹੋਵੇਗਾ?



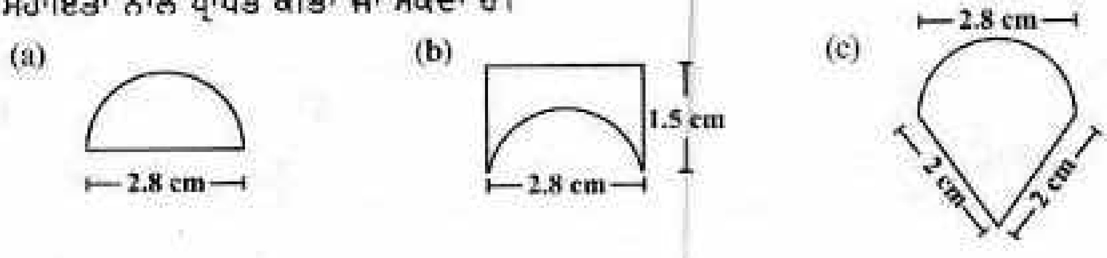
2. ਸ਼੍ਰੀਮਤੀ ਕੌਸ਼ਿਕ ਦੇ ਕੋਲ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਏ ਗਏ ਮਾਪ ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਵਰਗਾਕਾਰ ਪਲਾਟ ਹੈ। ਉਹ ਪਲਾਟ ਦੇ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਘਰ ਬਣਾਉਣਾ ਚਾਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਘਰ ਦੇ ਚਾਰੇ ਪਾਸੇ ਇੱਕ ਬਗੀਚੇ ਨੂੰ ਤਿਆਰ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ₹ 55 ਪ੍ਰਤੀ ਵਰਗ ਮੀਟਰ ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਇਸ ਬਗੀਚੇ ਨੂੰ ਤਿਆਰ ਕਰਨ ਦਾ ਖਰਚ ਪਤਾ ਕਰੋ।

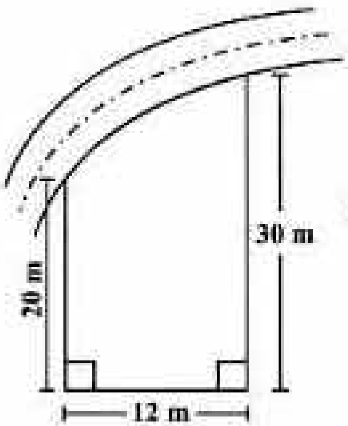


3. ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ, ਇੱਕ ਬਗੀਚੇ ਦਾ ਆਕਾਰ ਮੱਧ ਵਿੱਚ ਆਇਤਾਕਾਰ ਹੈ ਅਤੇ ਕਿਨਾਰਿਆਂ ਤੋਂ ਅਰਧ ਚੱਕਰ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੈ। ਇਸ ਬਗੀਚੇ ਦਾ ਪਰਿਮਾਪ ਅਤੇ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ। (ਆਇਤ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 20 – (3.5 + 3.5) ਮੀਟਰ ਹੈ।)

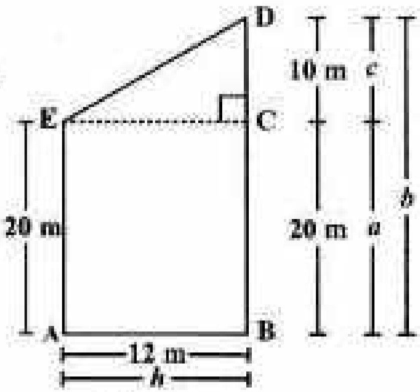
4. ਫਰਸ਼ ਬਣਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਉਪਯੋਗ ਕੀਤੀ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਇੱਕ ਟਾਈਲ ਦਾ ਆਕਾਰ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਅਧਾਰ 24 cm ਅਤੇ ਇਸ ਦੀ ਸੰਗਤ ਉਚਾਈ 10 cm ਹੈ। 1080 ਵਰਗ ਮੀਟਰ ਖੇਤਰਫਲ ਦੇ ਇੱਕ ਫਰਸ਼ ਨੂੰ ਢਕਣ ਦੇ ਲਈ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਕਿੰਨੀਆਂ ਟਾਈਲਾਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ? (ਫਰਸ਼ ਦੀਆਂ ਨੁੱਕਰਾਂ ਨੂੰ ਢਕਣ ਦੇ ਲਈ ਤੁਸੀਂ ਟਾਈਲਾਂ ਨੂੰ ਲੋੜ ਅਨੁਸਾਰ ਕਿਸੇ ਵੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਤੋੜ ਸਕਦੇ ਹੋ)

5. ਇੱਕ ਕੀੜੀ ਕਿਸੇ ਫਰਸ਼ 'ਤੇ ਖਿਲਰੇ ਹੋਏ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਅਕਾਰਾਂ ਦੇ ਭੋਜਨ ਪਦਾਰਥ ਦੇ ਟੁਕੜਿਆਂ ਦੇ ਚਾਰੇ ਪਾਸੇ ਘੁੰਮ ਰਹੀ ਹੈ। ਭੋਜਨ ਪਦਾਰਥ ਦੇ ਕਿਸ ਟੁੱਕੜੇ ਲਈ ਕੀੜੀ ਨੂੰ ਲੰਬਾ ਚੱਕਰ ਲਗਾਉਣਾ ਪਵੇਗਾ? ਯਾਦ ਰੱਖੋ, ਚੱਕਰ ਦਾ ਘੇਰਾ, ਸੂਤਰ $c = 2\pi r$, ਇੱਥੇ r ਚੱਕਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਹੈ, ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।





ਚਿੱਤਰ 11.2



ਚਿੱਤਰ 11.3

$(b = c + a = 30 \text{ m})$

11.3 ਸਮਲੰਬ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

ਨਜਮਾ ਦੇ ਕੋਲ ਮੁੱਖ ਮਾਰਗ ਦੇ ਨਜ਼ਦੀਕ ਇੱਕ ਪਲਾਟ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 11.2)। ਉਸਦਾ ਪਲਾਟ ਗੁਆਂਢ ਦੇ ਦੂਸਰੇ ਆਇਤਾਕਾਰ ਪਲਾਟਾਂ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦਾ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਪਲਾਟ ਵਿੱਚ ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਹੀ ਜੋੜਾ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਲਗਭਗ ਸਮਲੰਬ ਦੇ ਅਕਾਰ ਦਾ ਹੈ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇਸਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ ?

ਆਉ, ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 11.3 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ ਅਸੀਂ ਇਸ ਪਲਾਟ ਦੇ ਸਿਖਰਾਂ ਨੂੰ ਨਾਂ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ।

$EC \parallel AB$, ਖਿੱਚ ਕੇ ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਦੋ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਆਇਤਾਕਾਰ ਦਾ ਅਕਾਰ ਹੈ ਅਤੇ ਦੂਸਰਾ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਅਕਾਰ ਹੈ (ਇਹ C 'ਤੇ ਸਮਕੋਣ ਹੈ) ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 11.3 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।)

Δ ECD ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \frac{1}{2} h \times c = \frac{1}{2} \times 12 \times 10 = 60 \text{ m}^2$.

ਆਇਤ ABCE ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ$= h \times a = 12 \times 20 = 240 \text{ m}^2$.

ਸਮਲੰਬ ਚਤੁਰਭੁਜ ABDE ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = Δ ECD ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ + ਆਇਤ ABCE ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$= 60 + 240 = 300 \text{ m}^2$$

ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਦੋਨਾਂ ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਨੂੰ ਸੰਯੁਕਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ

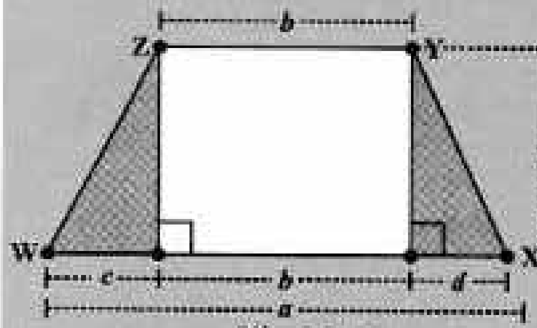
ਸਮਲੰਬ ABDE ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \frac{1}{2} h \times c + h \times a = h\left(\frac{c}{2} + a\right)$

$$= h\left(\frac{c+2a}{2}\right) = h\left(\frac{c+a+a}{2}\right)$$

$$= h\frac{(b+a)}{2} = \text{ਉਚਾਈ} \times \frac{\text{ਸਮਾਂਤਰ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ}}{2}$$

ਇਸ ਵਿਅੰਜਕ ਵਿੱਚ h, b ਅਤੇ a ਦੇ ਮੁੱਲ ਰੱਖਣ 'ਤੇ ਅਸੀਂ $h\frac{(b+a)}{2} = 300 \text{ m}^2$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

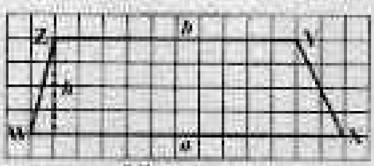


ਚਿੱਤਰ 11.4

1. ਨਜਮਾ ਦੀ ਭੈਣ ਦੇ ਕੋਲ ਵੀ ਇੱਕ ਸਮਲੰਬ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦਾ ਪਲਾਟ ਹੈ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 11.4 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ ਇਸ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡੋ। ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਸਮਲੰਬ WXYZ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= h\frac{(a+b)}{2}$
2. ਜੇਕਰ $h = 10$ cm, $c = 6$ cm, $b = 12$ cm, $d = 4$ cm, ਤਾਂ ਇਸਦੇ ਹਰੇਕ ਭਾਗ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ। h, a ਅਤੇ b ਦੇ ਮੁੱਲ ਸੂਤਰ $\frac{h(a+b)}{2}$ ਵਿੱਚ ਰੱਖਦੇ ਹੋਏ ਇਸਦੀ ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ।

ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਕਰੋ

1. ਗਰਾਫ ਪੇਪਰ 'ਤੇ ਕੋਈ ਵੀ ਸਮਲੰਬ WXYZ ਖਿੱਚੋ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 11.5 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ ਕੱਟਕੇ ਬਾਹਰ ਕੱਢੋ।

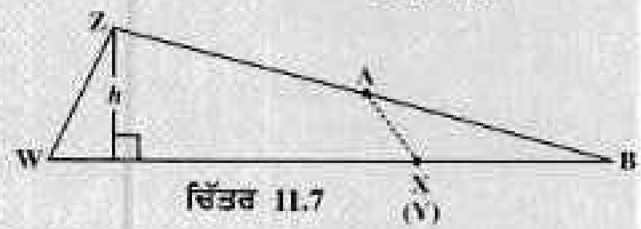


ਚਿੱਤਰ 11.5

2. ਭੁਜਾ XY ਨੂੰ ਮੋੜ ਕੇ ਇਸਦਾ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ A ਨਾਂ ਦਿਓ। (ਚਿੱਤਰ 11.6)

ਚਿੱਤਰ 11.6

3. ਭੁਜਾ ZA ਦੇ ਨਾਲ-ਨਾਲ ਕੱਟਦੇ ਹੋਏ ਸਮਲੰਬ WXYZ ਨੂੰ ਦੋ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਕੱਟੋ। Δ ZYA ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਰੱਖੋ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 11.7 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ AY ਨੂੰ AX 'ਤੇ ਰੱਖਿਆ ਗਿਆ ਹੈ।
ਵੱਡੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਅਧਾਰ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਕੀ ਹੈ? ਇਸ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦਾ ਸੂਤਰ ਲਿਖੋ। (ਚਿੱਤਰ 11.7)।



ਚਿੱਤਰ 11.7

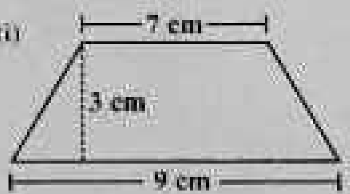
4. ਇਸ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਅਤੇ ਸਮਲੰਬ WXYZ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਸਮਾਨ ਹੈ। (ਕਿਵੇਂ ?) ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦੇ ਸੂਤਰ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਸਮਲੰਬ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦਾ ਸੂਤਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰੋ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਮਲੰਬ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਸਮਾਂਤਰ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਦੋਨਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚਕਾਰਲੀ ਲੰਬ ਦੂਰੀ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ। ਸਮਾਂਤਰ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੀਆਂ ਲੰਬਾਈਆਂ ਦਾ ਜੋੜ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੀ ਲੰਬ ਦੂਰੀ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਅੱਧ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਸਮਲੰਬ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

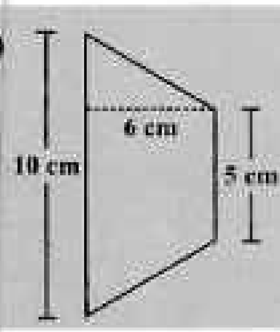
ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਸਮਲੰਬਾਂ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ (ਚਿੱਤਰ 11.8)।

(i)



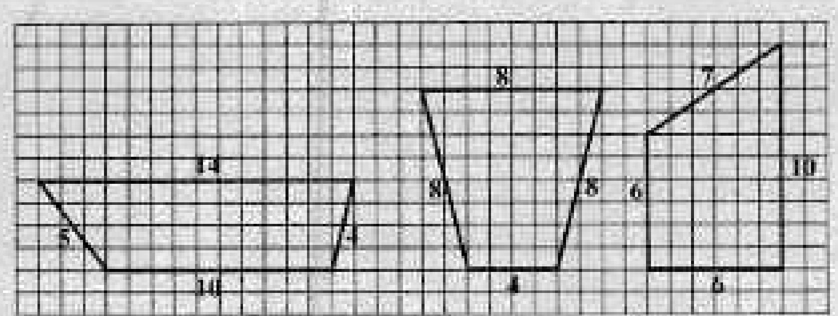
(ii)



ਚਿੱਤਰ 11.8

ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਕਰੋ

ਜਮਾਤ VII ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਪਰਿਮਾਪਾਂ ਪਰ ਸਮਾਨ ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਵਾਲੇ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜਾਂ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰਨਾ ਸਿੱਖੀ ਹੈ। ਕੀ ਇਹ ਸਮਲੰਬਾ ਦੇ ਲਈ ਵੀ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ? ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ ਕੀ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਪਰਿਮਾਪਾਂ ਵਾਲੇ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਸਮਲੰਬ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਸਮਾਨ ਹਨ : (ਚਿੱਤਰ 11.9)



ਚਿੱਤਰ 11.9

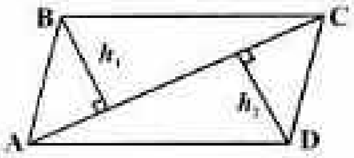
ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਾਰੇ ਸਰਬੰਗਸਮ ਚਿੱਤਰਾਂ ਖੇਤਰਫਲ ਵਿੱਚ ਸਮਾਨ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਕੀ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਮਾਨ ਖੇਤਰਫਲ ਵਾਲੇ ਚਿੱਤਰ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹੀ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ? ਕੀ ਇਹ ਚਿੱਤਰ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹਨ ?

ਇੱਕ ਵਰਗਕਾਰ ਸ਼ੀਟ ਤੇ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਤਿੰਨ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਮਲੰਬ ਖਿੱਚੋ ਜਿਸਦੇ ਪਰਿਮਾਪ ਸਮਾਨ ਹੋਣ ਪਰ ਖੇਤਰਫਲ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਹੋਣ।

11.4 ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

ਕਿਸੇ ਆਮ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਇੱਕ ਵਿਕਰਨ ਖਿੱਚ ਕੇ ਉਸ ਨੂੰ ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਹ 'ਵੰਡਣ ਦੀ ਕਿਰਿਆ' ਆਮ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਲਈ ਸੂਤਰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਸਹਾਇਤਾ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਚਿੱਤਰ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰੋ (ਚਿੱਤਰ 11.10)।

ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਖੇਤਰਫਲ



ਚਿੱਤਰ 11.10

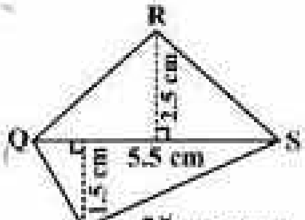
= (Δ ABC ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ) + (Δ ADC ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ)

$= (\frac{1}{2} AC \times h_1) + (\frac{1}{2} AC \times h_2) = \frac{1}{2} AC \times (h_1 + h_2)$

$= \frac{1}{2} d(h_1 + h_2)$ ਇੱਥੇ AC ਦੀ ਲੰਬਾਈ d ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਚਿੱਤਰ 11.11 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਏ ਗਏ ਚਤੁਰਭੁਜ PQRS ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ, $d = 5.5$ cm, $h_1 = 2.5$ cm, $h_2 = 1.5$ cm,



ਚਿੱਤਰ 11.11

ਖੇਤਰਫਲ $= \frac{1}{2} d(h_1 + h_2) = \frac{1}{2} \times 5.5 \times (2.5 + 1.5)\ cm^2$

$= \frac{1}{2} \times 5.5 \times 4\ cm^2 = 11\ cm^2$

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਵੀ ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ। ਆਉ, ਇਸ ਨੂੰ ਵੀ ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਦੋਨਾਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਕੀ ਇਹ ਸੂਤਰ ਤੁਹਾਨੂੰ ਪਹਿਲਾਂ ਪਤਾ ਸੂਤਰ ਨਾਲ ਮੇਲ ਖਾਂਦਾ ਹੈ ? (ਚਿੱਤਰ 11.12)

ਚਿੱਤਰ 11.12

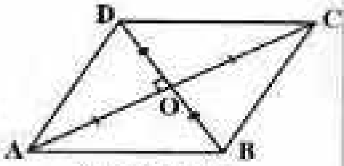
11.4.1 ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਚਤੁਰਭੁਜਾਂ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡ ਕਰਨ ਵਾਲੀ ਇਸ ਵਿਧੀ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦਾ ਸੂਤਰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਉਪਯੋਗ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਚਿੱਤਰ 11.13 ਵਿੱਚ ABCD ਇੱਕ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਇਸਦੇ ਵਿਕਰਨ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਦੇ ਲੰਬ ਸਮਦੁਭਾਜਿਕ ਹੈ।

ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = (Δ ACD ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ) + (Δ ABC ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ)

$$= \left(\frac{1}{2} \times AC \times OD\right) + \left(\frac{1}{2} \times AC \times OB\right) = \frac{1}{2} AC \times (OD + OB)$$

$$= \frac{1}{2} AC \times BD = \frac{1}{2} d_1 \times d_2$$ ਇੱਥੇ $AC = d_1$ ਅਤੇ $BD = d_2$



ਚਿੱਤਰ 11.13

ਦੂਸਰੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ, ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਇਸਦੇ ਵਿਕਰਨਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦਾ ਅੱਧਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦੇ ਵਿਕਰਨਾਂ ਦੀਆਂ ਲੰਬਾਈਆਂ 10 cm ਅਤੇ 8.2 cm ਹਨ।

ਹੱਲ : ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \frac{1}{2} d_1 d_2$, ਇੱਥੇ d_1, d_2 ਵਿਕਰਨਾਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਹਨ।

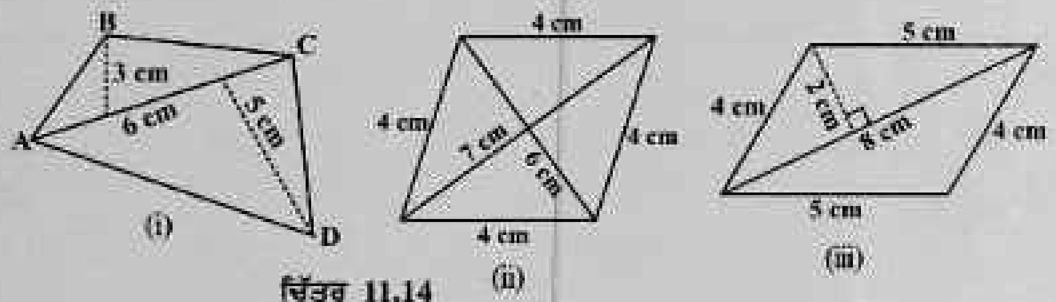
$$= \frac{1}{2} \times 10 \times 8.2 \text{ cm}^2 = 41 \text{ cm}^2.$$

ਸੋਚੋ, ਚਰਚਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਲਿਖੋ

ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਵਿਕਰਨ ਖਿੱਚ ਕੇ ਇਸ ਨੂੰ ਦੋ ਸਰਬੰਗਸਮ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਕੀ ਸਮਲੰਬ ਨੂੰ ਵੀ ਦੋ ਸਰਬੰਗਸਮ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ?

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

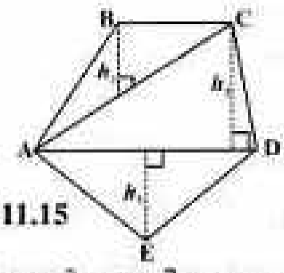
ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਚਤੁਰਭੁਜਾਂ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 11.14

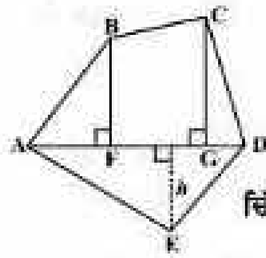
11.5 ਬਹੁਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਨੂੰ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦੇ ਹੋਏ ਇਸਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਵਿਧੀ ਬਹੁਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਉਪਯੋਗ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਇੱਕ ਪੰਜਭੁਜ ਦੇ ਲਈ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ (ਚਿੱਤਰ 11.15, 11.16)।



ਚਿੱਤਰ 11.15

ਵਿਕਰਨ AC ਅਤੇ AD ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਪੰਜਭੁਜ ABCDE ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਿਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ABCDE ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = ΔABC ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ + ΔADC ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ + ΔAED ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ।

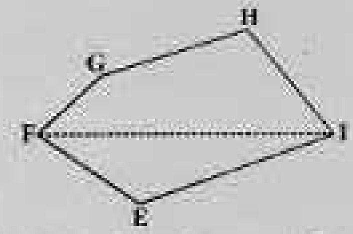


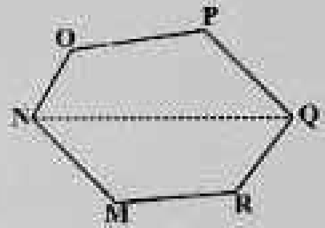
ਚਿੱਤਰ 11.16

ਇੱਕ ਵਿਕਰਨ AD ਅਤੇ ਇਸ 'ਤੇ ਦੋ ਲੰਬ BF ਅਤੇ CG ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਪੰਜਭੁਜ ABCDE ਨੂੰ ਚਾਰ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਿਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ABCDE ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ AFB ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ + ਸਮਲੰਬ BFGC ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ + ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ CGD ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ + Δ AED ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ (ਸਮਲੰਬ BFGC ਦੀਆਂ ਸਮਾਂਤਰ ਭੁਜਾਵਾਂ ਨੂੰ ਪਹਿਚਾਣੋ)

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

(i) ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਬਹੁਭੁਜਾਂ (ਚਿੱਤਰ 11.17) ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਇਸ ਨੂੰ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਭਾਗਾਂ (ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਅਤੇ ਸਮਲੰਬਾਂ) ਵਿੱਚ ਵੰਡੋ।



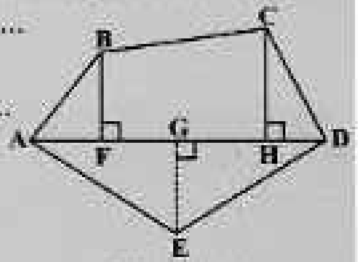


ਚਿੱਤਰ 11.17

ਬਹੁਭੁਜ EFGHI ਦਾ ਇੱਕ ਵਿਕਰਨ FI ਹੈ। ਬਹੁਭੁਜ MNOPQR ਦਾ ਇੱਕ ਵਿਕਰਨ NQ ਹੈ।

(ii) ਬਹੁਭੁਜ ABCDE ਨੂੰ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਿਆ ਗਿਆ ਹੈ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 11.18 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ ਜੇ AD = 8 cm, AH = 6 cm, AG = 4 cm, AF = 3 cm ਅਤੇ ਲੰਬ BF = 2 cm, CH = 3 cm, EG = 2.5 cm ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਇਸਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਬਹੁਭੁਜ ABCDE ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = Δ AFB ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ + ...



ਚਿੱਤਰ 11.18

Δ AFB ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = $\frac{1}{2} \times AF \times BF = \frac{1}{2} \times 3 \times 2 =$ ....

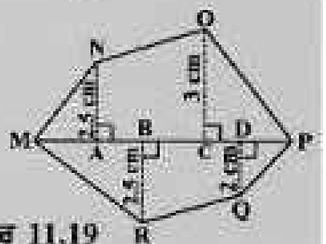
ਸਮਲੰਬ FBCH ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = $FH \times \frac{(BF+CH)}{2}$

$= 3 \times \frac{(2+3)}{2}$ [FH = AH − AF]

ΔCHD ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = $\frac{1}{2} \times HD \times CH =$ ....; ΔADE ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = $\frac{1}{2} \times AD \times GE =$ ....

ਇਸ ਲਈ ਬਹੁਭੁਜ ABCDE ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = ...

(iii) ਜੇਕਰ MP = 9 cm, MD = 7 cm, MC = 6 cm, MB = 4 cm, MA = 2 cm ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਬਹੁਭੁਜ MNOPQR (ਚਿੱਤਰ 11.19) ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ। NA, OC, QD ਅਤੇ RB ਵਿਕਰਨ MP 'ਤੇ ਖਿੱਚੇ ਗਏ ਲੰਬ ਹਨ।



ਚਿੱਤਰ 11.19

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਸਮਲੰਬ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦੇ ਇੱਕ ਖੇਤ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ 480 m^2 ਹੈ; ਦੋ ਸਮਾਂਤਰ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦੀ ਦੂਰੀ 15 m ਹੈ ਅਤੇ ਉਸ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਭੁਜਾ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 20 m ਹੈ। ਦੂਸਰੀ ਸਮਾਂਤਰ ਭੁਜਾ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਮਲੰਬ ਦੀ ਸਮਾਂਤਰ ਭੁਜਾਵਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਦੀ ਲੰਬਾਈ $a = 20$ m, ਮੰਨ ਲਵੋ ਦੂਸਰੀ ਸਮਾਂਤਰ ਭੁਜਾ b ਹੈ, ਉਚਾਈ $h = 15$ m

ਸਮਲੰਬ ਦਾ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਖੇਤਰਫਲ = 480 m^2

$$\text{ਸਮਲੰਬ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ} = \frac{1}{2} h (a + b)$$

ਇਸ ਲਈ $480 = \frac{1}{2} \times 15 \times (20 + b)$ ਜਿਵੇਂ ਕਿ $\frac{480 \times 2}{15} = 20 + b$

ਜਾਂ $64 = 20 + b$ ਜਾਂ $b = 44$ m

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਮਲੰਬ ਦੀ ਦੂਸਰੀ ਸਮਾਂਤਰ ਭੁਜਾ 44 m ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਇੱਕ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ 240 cm² ਹੈ ਅਤੇ ਵਿਕਰਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 16 cm ਹੈ। ਦੂਸਰਾ ਵਿਕਰਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਵੋ ਇੱਕ ਵਿਕਰਨ ਦੀ ਲੰਬਾਈ $d_1 = 16$ cm

ਅਤੇ ਦੂਸਰੇ ਵਿਕਰਨ ਦੀ ਲੰਬਾਈ $= d_2$

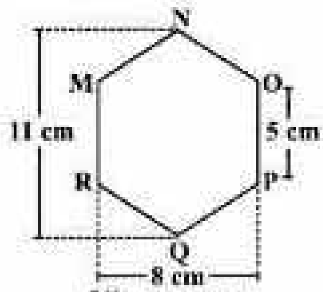
ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 = 240$

ਇਸ ਲਈ, $\frac{1}{2} 16 \cdot d_2 = 240$

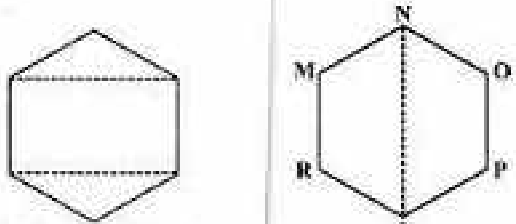
ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, $d_2 = 30$ cm

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੂਸਰੇ ਵਿਕਰਨ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 30 cm ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 5 : MNOPQR (ਚਿੱਤਰ 11.20) ਇੱਕ ਛੇਭੁਜ ਹੈ ਜਿਸਦੀ ਹਰੇਕ ਭੁਜਾ 5 cm ਹੈ। ਅਮਨ ਅਤੇ ਰਿਧਿਮਾ ਨੇ ਇਸ ਨੂੰ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਵੰਡਿਆ (ਚਿੱਤਰ 11.21)। ਦੋਨਾਂ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਵੰਡ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਇਸ ਛੇਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 11.20



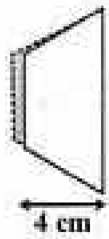
ਰਿਧਿਮਾ ਦੀ ਵਿਧੀ

ਅਮਨ ਦੀ ਵਿਧੀ

ਚਿੱਤਰ 11.21

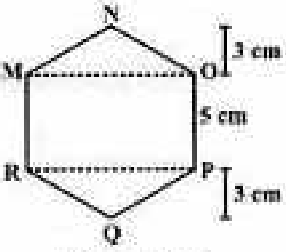
ਹੱਲ : **ਅਮਨ ਦੀ ਵਿਧੀ :**

ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਇੱਕ ਛੇਭੁਜ ਹੈ ਇਸ ਲਈ NQ ਇਸ ਛੇਭੁਜ ਨੂੰ ਦੋ ਸਰਬੰਗਸਮ ਸਮਲੰਬਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਦੀ ਕਾਗਜ਼ ਮੋੜਨ ਦੀ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਪੜਤਾਲ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ। (ਚਿੱਤਰ 11.22)



ਚਿੱਤਰ 11.22

ਹੁਣ ਸਮਲੰਬ MNQR ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= 4 \times \frac{(11 + 5)}{2} = 2 \times 16 = 32$ cm²



ਚਿੱਤਰ 11.23

ਇਸ ਲਈ ਛੇਭੁਜ MNOPQR ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = 2 × 32 = 64 cm²

ਰਿਧਿਮਾ ਦੀ ਵਿਧੀ :

Δ MNO ਅਤੇ Δ RPQ ਸਰਬੰਗਸਮ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹਨ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਦਾ ਸਿਖਰਲੰਬ 3 cm ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 11.23) (1)

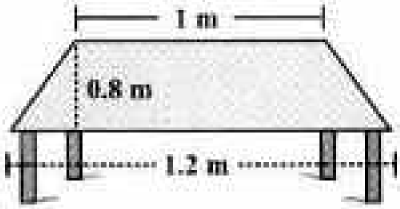
ਤੁਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਨੂੰ ਕੱਟਕੇ ਅਤੇ ਇੱਕ-ਦੂਸਰੇ ਦੇ ਉੱਪਰ ਰੱਖ ਕੇ ਇਸਦੀ ਪੜਤਾਲ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ।

Δ MNO ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \frac{1}{2} \times 8 \times 3 = 12\ cm^2 = \Delta$ RPQ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

ਆਇਤ MOPR ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= 8 \times 5 = 40\ cm^2$.

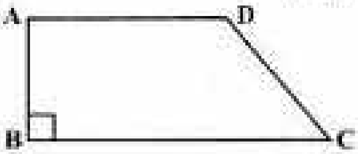
ਹੁਣ, ਛੇਭੁਜ MNOPQR ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= 40 + 12 + 12 = 64\ cm^2$

ਅਭਿਆਸ 11.2



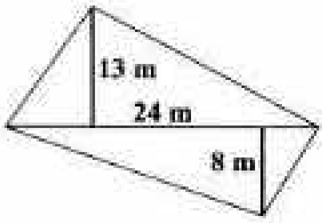
1. ਇੱਕ ਮੇਜ਼ ਦੇ ਉਪਰੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਆਕਾਰ ਸਮਲੰਬ ਵਰਗਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਸਮਾਂਤਰ ਭੁਜਾਵਾਂ 1 m ਅਤੇ 1.2 m ਹੈ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦੂਰੀ 0.8 m ਹੈ, ਤਾਂ ਇਸਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

2. ਇੱਕ ਸਮਲੰਬ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ 34 cm^2 ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦੀ ਉਚਾਈ 4 cm ਹੈ। ਸਮਾਂਤਰ ਭੁਜਾਵਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 10 cm ਹੈ। ਦੂਸਰੀ ਸਮਾਂਤਰ ਭੁਜਾ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।



3. ਇੱਕ ਸਮਲੰਬ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦੇ ਖੇਤ ABCD ਦੀ ਵਾੜ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 120 m ਹੈ। ਜੇ BC = 48 m, CD = 17 m ਅਤੇ AD = 40 m ਹਨ, ਤਾਂ ਇਸ ਖੇਤ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਭੁਜਾ AB ਸਮਾਂਤਰ ਭੁਜਾਵਾਂ AD ਅਤੇ BC 'ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ।

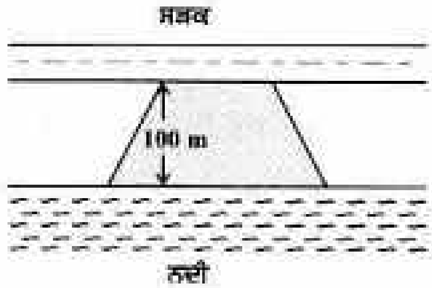
4. ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਆਕਾਰ ਦੇ ਖੇਤ ਦਾ ਵਿਕਰਨ 24 m ਹੈ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਸਨਮੁੱਖ ਸਿਖਰਾਂ ਤੋਂ ਇਸ ਦੇ ਵਿਕਰਨ 'ਤੇ ਖਿੱਚੇ ਗਏ ਲੰਬ 8 m ਅਤੇ 13 m ਹਨ। ਖੇਤ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।



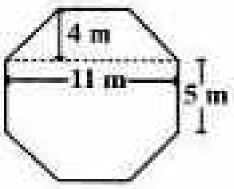
5. ਕਿਸੇ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਵਿਕਰਨ 7.5 cm ਅਤੇ 12 cm ਹੈ। ਇਸਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

6. ਇੱਕ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦੀ ਭੁਜਾ 6 cm ਅਤੇ ਸਿਖਰਲੰਬ 4 cm ਹੈ। ਜੇ ਇੱਕ ਵਿਕਰਨ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 8 cm ਹੈ ਤਾਂ ਦੂਸਰੇ ਵਿਕਰਨ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।

7. ਕਿਸੇ ਭਵਨ ਦੇ ਫਰਸ਼ ਤੇ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਅਕਾਰ ਦੀਆਂ 3000 ਟਾਈਲਾਂ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਵਿਕਰਨ 45 cm ਅਤੇ 30 cm ਲੰਬਾਈ ਦੇ ਹਨ। 4 ਰੁਪਏ ਪ੍ਰਤੀ ਵਰਗ ਮੀਟਰ ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਇਸ ਫਰਸ਼ ਨੂੰ ਪਾਲਿਸ਼ ਕਰਨ ਦਾ ਖਰਚ ਪਤਾ ਕਰੋ ?



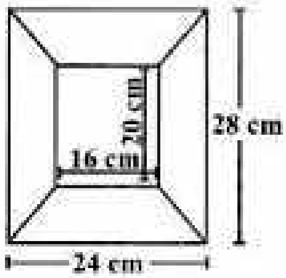
8. ਮੋਹਨ ਇੱਕ ਸਮਲੰਬ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦਾ ਖੇਤ ਖਰੀਦਣਾ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਖੇਤ ਦੀ ਨਦੀ ਦੇ ਨਾਲ ਵਾਲੀ ਭੁਜਾ ਸੜਕ ਦੇ ਨਾਲ ਵਾਲੀ ਭੁਜਾ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ ਅਤੇ ਲੰਬਾਈ ਵਿੱਚ ਦੁੱਗਣੀ ਹੈ। ਜੇ ਇਸ ਖੇਤ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ 10,500 m^2 ਹੈ ਅਤੇ ਦੋ ਸਮਾਂਤਰ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰਲੀ ਲੰਬ ਦੂਰੀ 100 m ਹੈ ਤਾਂ ਨਦੀ ਦੇ ਨਾਲ ਵਾਲੀ ਭੁਜਾ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।



9. ਇੱਕ ਉੱਪਰ ਉੱਠੇ ਹੋਏ ਚਬੂਤਰੇ ਦੀ ਉਪਰਲੀ ਸਤ੍ਹਾ ਅੱਠਭੁਜੀ ਆਕਾਰ ਦੀ ਹੈ ? ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਅੱਠਭੁਜੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

10. ਇੱਕ ਪੰਜਭੁਜ ਆਕਾਰ ਦਾ ਬਗੀਚਾ ਹੈ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਸਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਜੋਤੀ ਅਤੇ ਕਵਿਤਾ ਨੇ ਇਸ ਨੂੰ ਦੋ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਵੰਡਿਆ। ਦੋਨੋਂ ਤਰੀਕਿਆਂ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਇਸ ਬਗੀਚੇ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇਸਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਕੋਈ ਹੋਰ ਵਿਧੀ ਦੱਸ ਸਕਦੇ ਹੋ ?

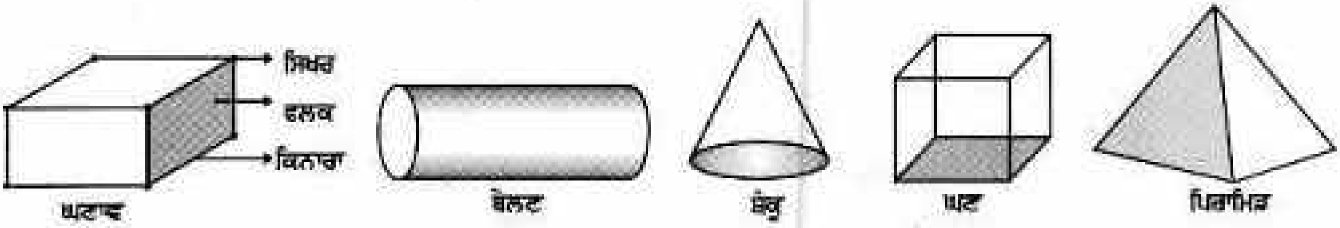
11. ਨਾਲ ਦਿੱਤੇ ਫੋਟੋ ਫਰੇਮ ਦੇ ਚਿੱਤਰ ਦਾ ਬਾਹਰੀ ਅਤੇ ਅੰਦਰੂਨੀ ਮਾਪ 24 cm × 28 cm ਅਤੇ 16 cm × 20 cm ਹੈ। ਜੇਕਰ ਫਰੇਮ ਦੇ ਹਰੇਕ ਹਿੱਸੇ ਦੀ ਚੌੜਾਈ ਸਮਾਨ ਹੈ ਤਾਂ ਹਰੇਕ ਹਿੱਸੇ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।



11.6 ਠੋਸ ਆਕਾਰ

ਤੁਸੀਂ ਆਪਣੀ ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਅਧਿਐਨ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹੋ ਕਿ ਦੋ ਪਸਾਰੀ ਚਿੱਤਰਾਂ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਪਸਾਰੀ ਆਕਾਰਾਂ ਦੇ ਫਲਕਾਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਹਿਚਾਣਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਹੁਣ ਤੱਕ ਅਸੀਂ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਠੋਸਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ ਉਹਨਾਂ 'ਤੇ ਧਿਆਨ ਦਿਓ (ਚਿੱਤਰ 11.24)।

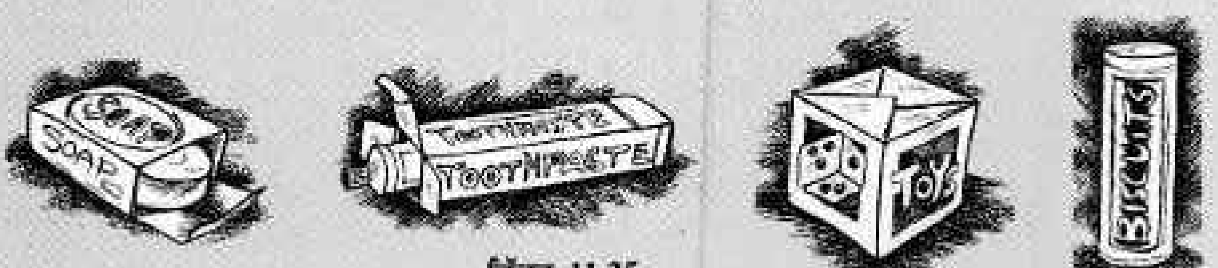
ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਕੁੱਝ ਆਕਾਰਾਂ ਵਿੱਚ ਦੋ ਜਾਂ ਦੋ ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਸਮਰੂਪ (ਸਰਬੰਗਸਮ) ਫਲਕ ਹਨ। ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਨਾਂ ਦਿਓ। ਕਿਹੜੇ ਠੋਸਾਂ ਵਿੱਚ ਸਾਰੇ ਫਲਕ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹਨ ?



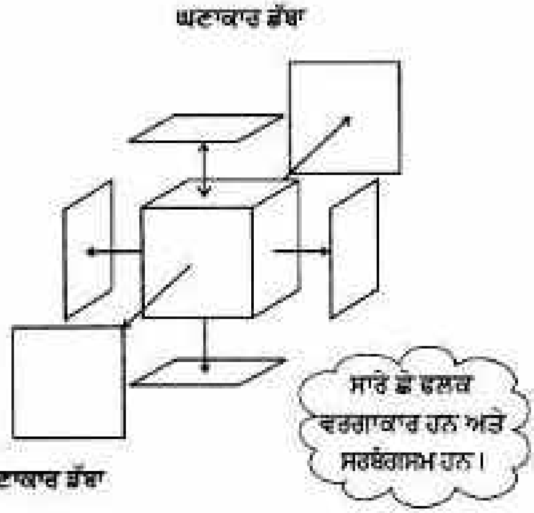
ਚਿੱਤਰ 11.24

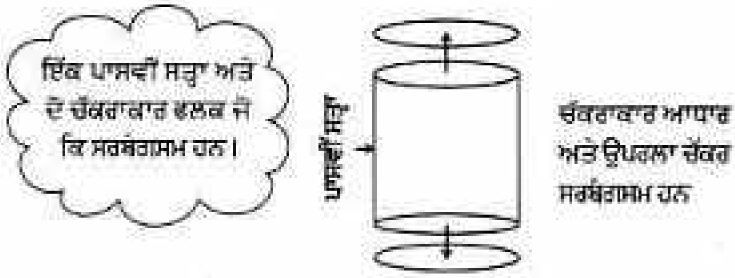
ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਕਰੋ

ਸਾਬਣ, ਖਿਡੌਣੇ, ਮੰਜਨ, ਬਿਸਕੁਟ ਆਦਿ ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਘਣਾਵਕਾਰ, ਘਣਾਕਾਰ ਅਤੇ ਵੇਲਣਾਕਾਰ ਡੱਬਿਆਂ ਵਿੱਚ ਬੰਦ ਆਉਂਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਡੱਬਿਆਂ ਨੂੰ ਇਕੱਠੇ ਕਰੋ। (ਚਿੱਤਰ 11.25)



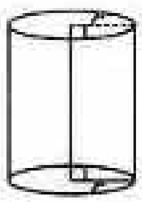
ਚਿੱਤਰ 11.25





ਹੁਣ ਇੱਕ ਸਮੇਂ ਤੇ ਇੱਕੋ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਡੱਬੇ ਨੂੰ ਲਵੋ। ਇਸਦੇ ਸਾਰੇ ਫਲਕਾਂ ਨੂੰ ਕੱਟੋ। ਹਰੇਕ ਫਲਕ ਦੇ ਆਕਾਰ ਨੂੰ ਦੇਖੋ ਅਤੇ ਸਮਾਨ ਫਲਕਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ-ਦੂਸਰੇ ਦੇ ਉੱਪਰ ਰੱਖ ਕੇ ਡੱਬੇ ਵਿੱਚ ਫਲਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਆਪਣੇ ਨਿਰੀਖਣਾਂ ਨੂੰ ਲਿਖੋ।



ਚਿੱਤਰ 11.26
(ਇਹ ਇੱਕ ਲੰਬ ਚੱਕਰੀ ਵੇਲਣ ਹੈ।)

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ 'ਤੇ ਧਿਆਨ ਦਿੱਤਾ-ਵੇਲਣ ਦੇ ਸਰਬੰਗਸਮ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਫਲਕ ਇੱਕ–ਦੂਸਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ (ਚਿੱਤਰ 11.26)। ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਫਲਕਾਂ ਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲਾ ਰੇਖਾਖੰਡ, ਆਧਾਰ 'ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ। ਇਸ ਵੇਲਣ ਨੂੰ ਲੰਬ ਚੱਕਰੀ ਵੇਲਣ ਆਖਦੇ ਹਨ। ਅਸੀਂ ਕੇਵਲ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਵੇਲਣਾਂ ਦਾ ਹੀ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ, ਭਾਵੇਂ ਦੂਸਰੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਵੇਲਣ ਵੀ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। (ਚਿੱਤਰ 11.27)।

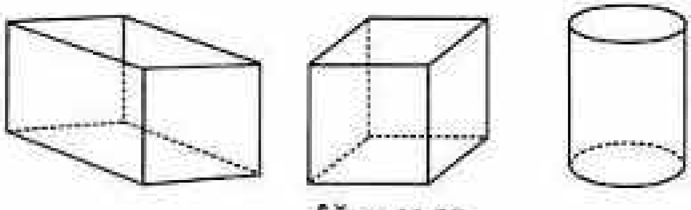
ਚਿੱਤਰ 11.27
(ਇਹ ਇੱਕ ਲੰਬ ਚੱਕਰੀ ਵੇਲਣ ਨਹੀਂ ਹੈ)

ਸੋਚੋ, ਚਰਚਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਲਿਖੋ

ਨਾਲ ਦਿੱਤੇ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਏ ਗਏ ਠੋਸ ਨੂੰ ਵੇਲਣ ਕਹਿਣਾ ਕਿਉਂ ਗਲਤ ਹੈ?

11.7 ਘਣ, ਘਣਾਵ ਅਤੇ ਵੇਲਣ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

ਇਮਰਾਨ, ਮੋਨਿਕਾ ਅਤੇ ਜਸਪਾਲ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਸਮਾਨ ਉਚਾਈ ਵਾਲੇ ਘਣਾਵਕਾਰ, ਘਣਾਕਾਰ ਅਤੇ ਵੇਲਣਾਕਾਰ ਡੱਬਿਆਂ ਨੂੰ ਰੰਗ ਕਰ ਰਹੇ ਹਨ (ਚਿੱਤਰ 11.28)।



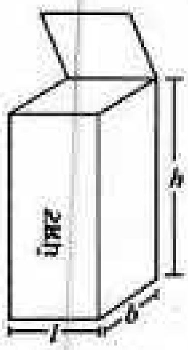
ਚਿੱਤਰ 11.28

ਉਹ ਇਹ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰਦੇ ਹਨ ਕਿ ਕਿਸਨੇ ਜ਼ਿਆਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਨੂੰ ਰੰਗ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਹਰੀ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਸਲਾਹ ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਹਰੇਕ ਡੱਬੇ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਮਦਦ ਕਰੇਗਾ।

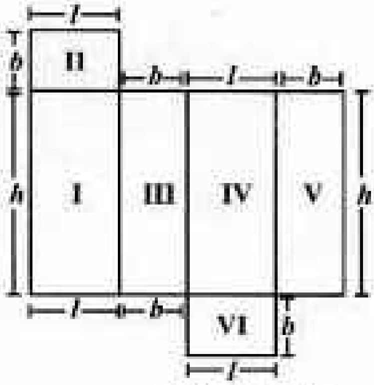
ਕੁੱਲ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਹਰੇਕ ਫਲਕ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਕਰੋ। ਕਿਸੇ ਠੋਸ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਉਸਦੇ ਫਲਕਾਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਜ਼ਿਆਦਾ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਹਰੇਕ ਆਕਾਰ ਨੂੰ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਕਰਕੇ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ।

11.7.1 ਘਣਾਵ

ਮੰਨ ਲਵੋ, ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਘਣਾਵਕਾਰ ਡੱਬੇ (ਚਿੱਤਰ 11.29) ਨੂੰ ਕੱਟ ਕੇ ਖੋਲ ਕੇ ਸਮਤਲ ਫੈਲਾ ਦਿੰਦੇ ਹੋ (ਚਿੱਤਰ 11.30), ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਜਾਲ (ਨੈੱਟ) ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 11.29



ਚਿੱਤਰ 11.30

ਹਰੇਕ ਭੁਜਾ ਦਾ ਮਾਪ ਲਿਖੋ। ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ ਘਣਾਵ ਵਿੱਚ ਸਰਬੰਗਸਮ ਫਲਕਾਂ ਦੇ ਤਿੰਨ ਜੋੜੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਹਰੇਕ ਫਲਕ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਤੁਸੀਂ ਕਿਹੜੇ ਵਿਅੰਜਕ (ਸੂਤਰ) ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ?

ਡੱਬੇ ਦੇ ਸਾਰੇ ਫਲਕਾਂ ਦਾ ਕੁੱਲ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਘਣਾਵ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = ਖੇਤਰਫਲ I + ਖੇਤਰਫਲ II + ਖੇਤਰਫਲ III + ਖੇਤਰਫਲ IV + ਖੇਤਰਫਲ V + ਖੇਤਰਫਲ VI

$= h \times l + b \times l + b \times h + l \times h + b \times h + l \times b$

ਇਸ ਲਈ ਕੁੱਲ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= 2\,(h \times l + b \times h + b \times l) = 2(lb + bh + hl)$

ਜਿਸ ਵਿੱਚ h, l ਅਤੇ b ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਘਣਾਵ ਦੀ ਉਚਾਈ, ਲੰਬਾਈ ਅਤੇ ਚੌੜਾਈ ਹੈ।

ਜੇ ਉਪਰੋਕਤ ਦਰਸਾਏ ਗਏ ਡੱਬੇ ਦੀ ਉਚਾਈ, ਲੰਬਾਈ ਅਤੇ ਚੌੜਾਈ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 20 cm, 15 cm ਅਤੇ 10 cm ਹੈ ਤਾਂ ਕੁੱਲ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= 2\,(20 \times 15 + 20 \times 10 + 10 \times 15)$

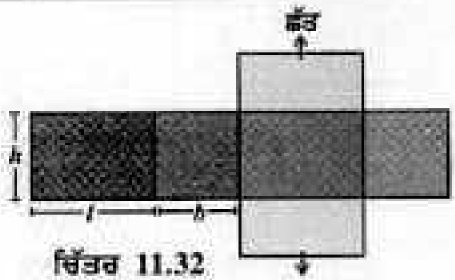
$= 2\,(300 + 200 + 150) = 1300 \text{ cm}^2$

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਘਣਾਵ (ਚਿੱਤਰ 11.31) ਦੀ ਕੁੱਲ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਚਿੱਤਰ 11.31

- ਘਣਾਵ ਦੀਆਂ ਦੀਵਾਰਾਂ (ਤਲ ਅਤੇ ਛੱਤ ਦੇ ਇਲਾਵਾ ਫਲਕ) ਪਾਸਵੀਂ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਦਰਸਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ। ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ ਜਿਸ ਘਣਾਵਕਾਰ ਕਮਰੇ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਬੈਠੇ ਹੋਏ ਹੋ ਉਸ ਕਮਰੇ ਦੀ ਚਾਰ ਦੀਵਾਰੀ ਦਾ ਕੁੱਲ ਖੇਤਰਫਲ, ਕਮਰੇ ਦੀ ਪਾਸਵੀਂ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਘਣਾਵ ਦੀ ਪਾਸਵੀਂ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $2(h \times l + b \times h)$ ਜਾਂ $2h(l + b)$ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 11.32

ਇਹਨਾ ਨੂੰ ਕਰੋ

(i) ਇੱਕ ਘਣਾਵਕਾਰ ਡਸਟਰ (ਜਿਸ ਨੂੰ ਤੁਹਾਡੇ ਅਧਿਆਪਕ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਉਪਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਨ) ਦੇ ਪਾਸਵੇਂ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਭੂਰੇ ਰੰਗ ਦੇ ਕਾਗਜ਼ ਦੀ ਪੱਟੀ ਨਾਲ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਢੱਕੋ ਕਿ ਇਹ ਡਸਟਰ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦੇ ਚਾਰੇ ਪਾਸੇ ਬਿਲਕੁਲ ਠੀਕ ਬੈਠੇ। ਕਾਗਜ਼ ਨੂੰ ਹਟਾਉ। ਕਾਗਜ਼ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਮਾਪੋ। ਕੀ ਇਹ ਡਸਟਰ ਦੀ ਪਾਸਵੀਂ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਹੈ ?

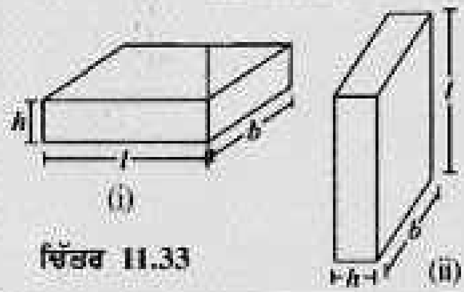
(ii) ਆਪਣੀ ਜਮਾਤ ਦੇ ਕਮਰੇ ਦੀ ਲੰਬਾਈ, ਚੌੜਾਈ ਅਤੇ ਉਚਾਈ ਮਾਪੋ ਅਤੇ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(a) ਖਿੜਕੀਆਂ ਅਤੇ ਦਰਵਾਜ਼ਿਆਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਨੂੰ ਛੱਡ ਕੇ ਕਮਰੇ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ।

(b) ਇਸ ਕਮਰੇ ਦੀ ਪਾਸਵੀਂ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

(c) ਕਲੀ ਕੀਤੇ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਕਮਰੇ ਦਾ ਕੁੱਲ ਖੇਤਰਫਲ।

ਸੋਚੋ, ਚਰਚਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਲਿਖੋ



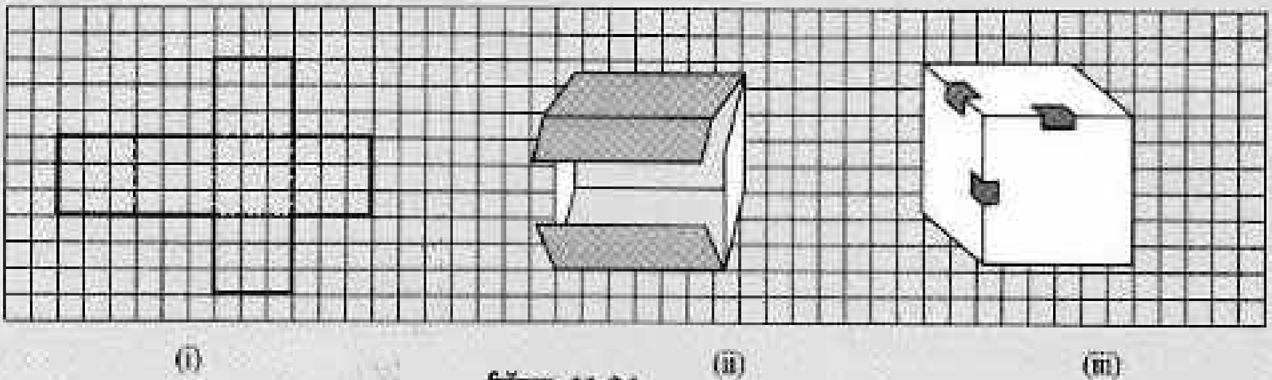
ਚਿੱਤਰ 11.33

1. ਕੀ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਘਣਾਵ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = ਪਾਸਵੀਂ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ + 2 × ਆਧਾਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ?
2. ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਘਣਾਵ (ਚਿੱਤਰ 11.33(i)) ਦੀ ਉਚਾਈ ਅਤੇ ਆਧਾਰ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਨੂੰ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਕੇ ਇੱਕ ਦੂਸਰਾ ਘਣਾਵ (ਚਿੱਤਰ 11.33 (ii)), ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਲਈਏ ਤਾਂ ਕੀ ਪਾਸਵੀਂ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਬਦਲ ਜਾਵੇਗਾ ?

11.7.2 ਘਣ

ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਕਰੋ

ਇੱਕ ਵਰਗਾਕਾਰ ਕਾਗਜ਼ 'ਤੇ ਦਰਸਾਏ ਗਏ ਪੈਟਰਨ ਨੂੰ ਖਿੱਚੋ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਕੱਟੋ। (ਚਿੱਤਰ 11.34(i))। ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ ਇਹ ਪੈਟਰਨ ਘਣ ਦਾ ਜਾਲ (ਨੈੱਟ) ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਮੋੜੋ (ਚਿੱਤਰ 11.34 (ii) ਅਤੇ ਘਣ ਬਣਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਕਿਨਾਰਿਆਂ 'ਤੇ ਟੇਪ ਲਗਾਉ। (ਚਿੱਤਰ 11.34 (iii))



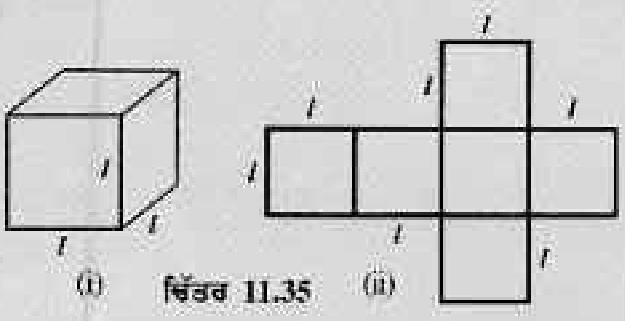
ਚਿੱਤਰ 11.34

(a) ਇਸ ਘਣ ਦੀ ਲੰਬਾਈ, ਚੌੜਾਈ ਅਤੇ ਉਚਾਈ ਕੀ ਹੈ ? ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਘਣ ਦੇ ਸਾਰੇ ਫਲਕ ਵਰਗਾਕਾਰ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਘਣ ਦੀ ਲੰਬਾਈ, ਚੌੜਾਈ ਅਤੇ ਉਚਾਈ ਸਮਾਨ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। (ਚਿੱਤਰ 11.35(i))।

(b) ਹਰੇਕ ਫਲਕ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਲਿਖੋ। ਕੀ ਸਾਰੇ ਫਲਕਾਂ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਸਮਾਨ ਹੈ ?

(c) ਇਸ ਘਣ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਲਿਖੋ।

(d) ਜੇਕਰ ਘਣ ਦੀ ਹਰੇਕ ਭੁਜਾ l ਹੈ ਤਾਂ ਹਰੇਕ ਫਲਕ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ (ਚਿੱਤਰ 11.35 (ii))।

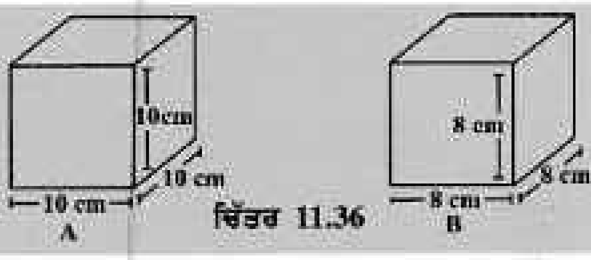


ਚਿੱਤਰ 11.35

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ l ਭੁਜਾ ਵਾਲੇ ਘਣ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $6l^2$ ਹੈ ?

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

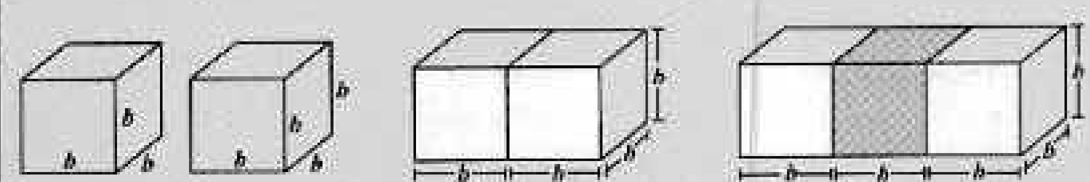
ਘਣ A ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਅਤੇ ਘਣ B ਦੀ ਪਾਸਵੀਂ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ (ਚਿੱਤਰ 11.36)।



ਚਿੱਤਰ 11.36

ਸੋਚੋ, ਚਰਚਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਲਿਖੋ

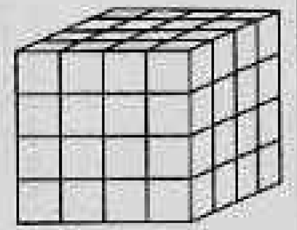
(i) b ਭੁਜਾ ਵਾਲੇ ਦੋ ਘਣਾਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾ ਕੇ ਇੱਕ ਘਣਾਵ ਬਣਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 11.37)। ਇਸ ਘਣਾਵ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਕੀ ਹੈ ? ਕੀ ਇਹ $12b^2$ ਹੈ ? ਕੀ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਤਿੰਨ ਘਣਾਵਾਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾ ਕੇ ਬਣਾਏ ਗਏ ਘਣਾਵ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $18b^2$ ਹੈ ? ਕਿਉਂ ?



ਚਿੱਤਰ 11.37

(ii) ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਸਤ੍ਹਾ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦਾ ਘਣਾਵ ਬਣਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਸਮਾਨ ਭੁਜਾ ਵਾਲੇ 12 ਘਣਾਂ ਨੂੰ ਕਿਸ ਤਰਤੀਬ ਵਿੱਚ ਜੋੜਾਂਗੇ ?

(iii) ਕਿਸੇ ਘਣ ਦੀ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ 'ਤੇ ਪੇਂਟ ਕਰਨ ਦੇ ਬਾਅਦ ਉਸ ਘਣ ਨੂੰ ਸਮਾਨ ਭੁਜਾ ਵਾਲੇ 64 ਘਣਾਂ ਵਿੱਚ ਕੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 11.38)। ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੇ ਘਣਾਂ ਦਾ ਕੋਈ ਫਲਕ ਪੇਂਟ ਨਹੀਂ ਹੋਇਆ ਹੈ ? ਕਿੰਨੇ ਘਣਾਂ ਦਾ 1 ਫਲਕ ਪੇਂਟ ਹੋਇਆ ਹੈ ? ਕਿੰਨੇ ਘਣਾਂ ਦੇ 2 ਫਲਕ ਪੇਂਟ ਹੋਏ ਹਨ ? ਕਿੰਨੇ ਘਣਾਂ ਦੇ ਤਿੰਨ ਫਲਕ ਪੇਂਟ ਹੋਏ ਹਨ ?

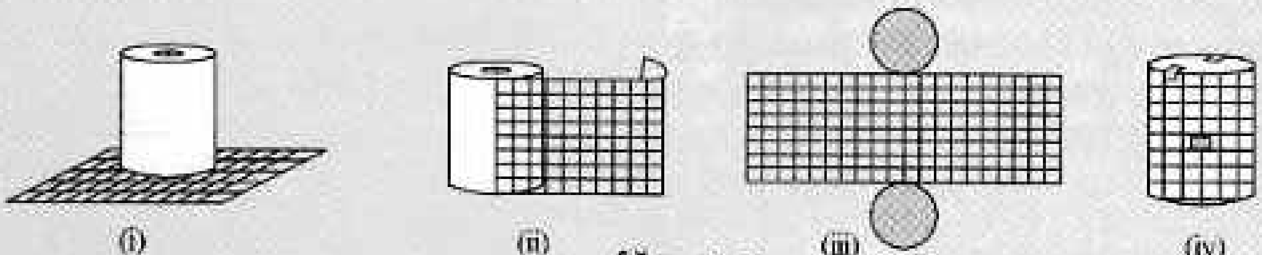

ਚਿੱਤਰ 11.38

11.7.3 ਵੇਲਨ

ਜਿੰਨੇ ਵੀ ਵੇਲਣ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਉਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਜਿਆਦਾਤਰ ਲੰਬ ਚੱਕਰੀ ਵੇਲਣ ਹਨ। ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ ਇੱਕ ਟੀਨ, ਇੱਕ ਗੋਲ ਖੰਬਾ, ਟਿਊਬ ਲਾਈਟ, ਪਾਣੀ ਦਾ ਪਾਈਪ ਆਦਿ :

ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਕਰੋ

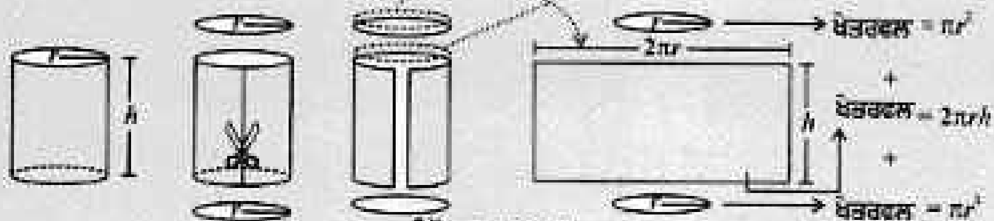
(i) ਇੱਕ ਵੇਲਣਾਕਾਰ ਕੈਨ ਜਾਂ ਡੱਬਾ ਲਵੋ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਆਧਾਰ ਨੂੰ ਗ੍ਰਾਫ ਪੇਪਰ 'ਤੇ ਬਣਾਉ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ ਕੱਟ ਕੇ ਬਾਹਰ ਕੱਢ ਲਵੋ (ਚਿੱਤਰ 11.39(i)) । ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਗ੍ਰਾਫ ਪੇਪਰ ਲਵੋ ਜਿਸਦੀ ਚੌੜਾਈ ਡੱਬੇ ਦੀ ਉਚਾਈ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ। ਇਸ ਪੱਟੀ ਨੂੰ ਕੈਨ ਦੇ ਚਾਰੋਂ ਪਾਸੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਪੇਟੋ ਤਾਂ ਕਿ ਡੱਬੇ ਦੇ ਚਾਰੇ ਪਾਸੇ ਬਿਲਕੁਲ ਠੀਕ ਲੱਗ ਜਾਵੇ (ਵਾਧੂ ਕਾਗਜ਼ ਨੂੰ ਹਟਾ ਦਿਓ) (ਚਿੱਤਰ 11.39(ii) ਟੁਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਇੱਕ-ਦੂਸਰੇ ਨਾਲ ਮਿਲਾ ਕੇ ਟੇਪ ਲਗਾਓ (ਚਿੱਤਰ 11.39 (iii)) ਤਾਂ ਕਿ ਇੱਕ ਵੇਲਣ ਬਣ ਜਾਵੇ (ਚਿੱਤਰ 11.39(iv)) ਡੱਬੇ ਦੇ ਚਾਰੇ ਪਾਸੇ ਲਪੇਟੇ ਗਏ ਕਾਗਜ਼ ਦਾ ਆਕਾਰ ਕੀ ਹੈ?



ਚਿੱਤਰ 11.39

ਬਿਨਾਂ ਸ਼ੱਕ ਇਹ ਆਕਾਰ ਵਿੱਚ ਆਇਤਾਕਾਰ ਹੈ। ਜਦੋਂ ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਵੇਲਣ ਦੇ ਭਾਗਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ-ਦੂਸਰੇ ਨਾਲ ਮਿਲਾ ਕੇ ਟੇਪ ਲਗਾ ਦਿੰਦੇ ਹੋ ਤਾਂ ਆਇਤਾਕਾਰ ਪੱਟੀ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਚੱਕਰ ਦੇ ਘੇਰੇ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਆਧਾਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ (r) ਅਤੇ ਆਇਤਾਕਾਰ ਪੱਟੀ ਦੀ ਲੰਬਾਈ (l) ਜਾਂ ਚੌੜਾਈ (h) ਨੂੰ ਨੋਟ ਕਰੋ। ਕੀ $2\pi r$ = ਪੱਟੀ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ? ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ ਕਿ ਆਇਤਾਕਾਰ ਪੱਟੀ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $2\pi rh$ ਹੈ ? ਗਿਣਤੀ ਕਰੋ ਕਿ ਗਰਾਫ ਪੇਪਰ ਦੀਆਂ ਕਿੰਨੀਆਂ ਵਰਗ ਇਕਾਈਆਂ ਵੇਲਣ ਨੂੰ ਬਣਾਉਣ ਵਿੱਚ ਵਰਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਹਨ। ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ ਕਿ ਇਹ ਗਿਣਤੀ $2\pi r (r + h)$ ਦੇ ਮੁੱਲ ਦੇ ਲਗਭਗ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

(ii) ਅਸੀਂ ਵੇਲਣ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸੰਬੰਧ $2\pi r (r + h)$ ਦਾ ਨਿਗਮਨ ਦੂਸਰੀ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਵੀ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ ਉਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ ਇੱਕ ਵੇਲਣ ਨੂੰ ਕੱਟਣ ਦੀ ਕਲਪਨਾ ਕਰੋ (ਚਿੱਤਰ 11.40)



ਚਿੱਤਰ 11.40

ਇਸ ਲਈ ਵੇਲਣ ਦੀ ਪਾਸਵੀਂ ਸਤ੍ਹਾ (ਲੇਟਵੀਂ ਸਤ੍ਹਾ) ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $2\pi rh$ ਹੈ।

ਵੇਲਣ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \pi r^2 + 2\pi rh + \pi r^2$

$= 2\pi r^2 + 2\pi rh$ ਜਾਂ $2\pi r (r + h)$

ਨੋਟ : ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਕੁੱਝ ਕਿਹਾ ਨਾ ਗਿਆ ਹੋਵੇ ਅਸੀਂ π ਦਾ ਮੁੱਲ $\frac{22}{7}$ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ।

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

ਨਾਲ ਦਿੱਤੇ ਵੇਲਣਾਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ (ਚਿੱਤਰ 11.41)

ਚਿੱਤਰ 11.41

ਸੋਚੋ, ਚਰਚਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਲਿਖੋ

ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ ਕਿਸੇ ਵੇਲਣ ਦੀ ਪਾਸਵੀਂ ਸਤ੍ਹਾ (ਲੇਟਵੀਂ ਸਤ੍ਹਾ) ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ, ਆਧਾਰ ਦਾ ਘੇਰਾ × ਵੇਲਣ ਦੀ ਉਚਾਈ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਕੀ ਅਸੀਂ ਘਣਾਵ ਦੀ ਪਾਸਵੀਂ ਸਤ੍ਹਾ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਨੂੰ ਆਧਾਰ ਦਾ ਪਰਿਮਾਪ × ਘਣਾਵ ਦੀ ਉਚਾਈ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ?

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਇੱਕ ਮੱਛੀ ਘਰ ਘਣਾਵ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦਾ ਹੈ ਜਿਸਦੀਆਂ ਬਾਹਰੀ ਭੁਜਾਵਾਂ 80 cm × 30 cm × 40 cm ਹਨ। ਇਸਦੇ ਤਲ, ਸਾਹਮਣੇ ਵਾਲੇ ਫਲਕ ਅਤੇ ਪਿੱਛੇ ਵਾਲੇ ਫਲਕ ਨੂੰ ਰੰਗੀਨ ਕਾਗਜ਼ ਨਾਲ ਢਕਣਾ ਹੈ। ਜ਼ਰੂਰੀ ਕਾਗਜ਼ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ :
ਮੱਛੀ ਘਰ ਦੀ ਲੰਬਾਈ $= l = 80$ cm
ਮੱਛੀ ਘਰ ਦੀ ਚੌੜਾਈ $= b = 30$ cm
ਮੱਛੀ ਘਰ ਦੀ ਉਚਾਈ $= h = 40$ cm
ਆਧਾਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= l \times b = 80 \times 30 = 2400$ cm^2
ਸਾਹਮਣੇ ਵਾਲੇ ਫਲਕ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= b \times h = 30 \times 40 = 1200$ cm^2
ਪਿੱਛੇ ਵਾਲੇ ਫਲਕ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= l \times h = 80 \times 40 = 3200$ cm^2
ਲੋੜੀਂਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = ਆਧਾਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ + ਪਿੱਛੇ ਵਾਲੇ ਫਲਕ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ + (2 × ਸਾਹਮਣੇ ਵਾਲੇ ਫਲਕ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ)
$= 2400 + 3200 + (2 \times 1200) = 8000$ cm^2

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲੋੜੀਂਦੇ ਰੰਗੀਨ ਕਾਗਜ਼ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ 8000 cm^2 ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 7 : ਇੱਕ ਘਣਾਵਕਾਰ ਕਮਰੇ ਦਾ ਅੰਦਰਲਾ ਮਾਪ 12 m × 8 m × 4 m ਹੈ। ਜੇ ਸਫੇਦੀ ਕਰਾਉਣ ਦਾ ਖਰਚ ₹ 5 ਪ੍ਰਤੀ ਵਰਗ ਮੀਟਰ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸ ਕਮਰੇ ਦੀਆਂ ਚਾਰ ਦੀਵਾਰਾਂ 'ਤੇ ਸਫੇਦੀ ਕਰਾਉਣ ਦਾ ਖਰਚ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਜੇ ਉਸ ਕਮਰੇ ਦੀ ਛੱਤ ਦੀ ਵੀ ਸਫੇਦੀ ਕਰਵਾਈ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਸਫੇਦੀ ਕਰਾਉਣ ਦਾ ਖਰਚ ਕਿੰਨਾ ਹੋਵੇਗਾ?

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ, ਕਮਰੇ ਦੀ ਲੰਬਾਈ $= l = 12$ m
ਕਮਰੇ ਦੀ ਚੌੜਾਈ $= b = 8$ m, ਕਮਰੇ ਦੀ ਉਚਾਈ $= h = 4$ m
ਕਮਰੇ ਦੀਆਂ ਚਾਰ ਦੀਵਾਰਾਂ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = ਆਧਾਰ ਦਾ ਪਰਿਮਾਪ × ਕਮਰੇ ਦੀ ਉਚਾਈ
$= 2(l + b) \times h = 2(12 + 8) \times 4$
$= 2 \times 20 \times 4 = 160$ m^2

ਸਫੇਦੀ ਕਰਾਉਣ ਦਾ ਪ੍ਰਤੀ ਵਰਗ ਮੀਟਰ ਖਰਚ = ₹ 5
ਇਸ ਲਈ ਕਮਰੇ ਦੀਆਂ ਚਾਰ ਦੀਵਾਰਾਂ 'ਤੇ ਸਫੇਦੀ ਕਰਾਉਣ ਦਾ ਕੁੱਲ ਖਰਚ = 160 × ₹ 5 = ₹ 800
ਛੱਤ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= 12 \times 8 = 96$ m^2
ਛੱਤ 'ਤੇ ਸਫੇਦੀ ਕਰਾਉਣ ਦਾ ਖਰਚ = ₹ (96 × 5) = ₹ 480
ਸਫੇਦੀ ਕਰਾਉਣ ਦਾ ਕੁੱਲ ਖਰਚ = ₹ (800 + 480) = ₹ 1280

ਉਦਾਹਰਣ 8 : ਇੱਕ ਭਵਨ ਵਿੱਚ 24 ਵੇਲਣਾਕਾਰ ਖੰਬੇ ਹਨ। ਹਰੇਕ ਖੰਬੇ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 28 ਸੈਂਟੀਮੀਟਰ ਅਤੇ ਉਚਾਈ 4 ਮੀਟਰ ਹੈ। 8 ਰੁਪਏ ਪ੍ਰਤੀ ਵਰਗ ਮੀਟਰ ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਸਾਰੇ ਖੰਬੇ ਦੀ ਪਾਸਵੀਂ ਸਤ੍ਹਾ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ 'ਤੇ ਪੇਂਟ ਕਰਾਉਣ ਦਾ ਖਰਚ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਵੇਲਣਾਕਾਰ ਖੰਬੇ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ $r = 28\ \text{cm} = 0.28\ \text{m}$

ਉਚਾਈ $h = 4\,\text{m}$

ਵੇਲਣ ਦੀ ਪਾਸਵੀਂ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= 2\pi rh$

[ਖੰਬੇ ਦਾ ਪਾਸਵੀਂ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= 2 \times \frac{22}{7} \times 0.28 \times 4 = 7.04\ \text{m}^2$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ 24 ਖੰਬਿਆਂ ਦੀ ਪਾਸਵੀਂ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= 7.04 \times 24 = 168.96\ \text{m}^2$

$1\ \text{m}^2$ 'ਤੇ ਪੇਂਟ ਕਰਾਉਣ ਦਾ ਖਰਚ = ₹ 8

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $168.96\ \text{m}^2$ ਖੇਤਰਫਲ 'ਤੇ ਪੇਂਟ ਕਰਾਉਣ ਦਾ ਖਰਚ = 168.96 × ₹ 8 = ₹ 1351.68

ਉਦਾਹਰਣ 9 : ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾ ਦੇ ਵੇਲਣ ਦੀ ਉਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 7 cm ਅਤੇ ਕੁੱਲ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $968\ \text{cm}^2$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਵੋ, ਵੇਲਣ ਦੀ ਉਚਾਈ $= h$, ਅਰਧ ਵਿਆਸ $= r = 7\text{cm}$

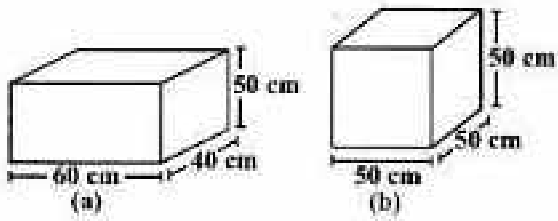
ਕੁੱਲ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= 2\pi r\,(h + r)$

ਜਾਂ $2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times (7 + h) = 968$ ਜਾਂ $h = 15\ \text{cm}$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵੇਲਣ ਦੀ ਉਚਾਈ 15 cm ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 11.3

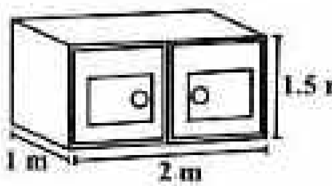
1. ਦੋ ਘਣਾਵਕਾਰ ਡੱਬੇ ਹਨ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਨਾਲ ਦਿੱਤੇ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਕਿਸ ਡੱਬੇ ਨੂੰ ਬਣਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਘੱਟ ਸਮੱਗਰੀ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ?



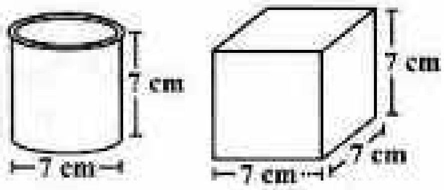
2. 80 cm × 48 cm × 24 cm ਮਾਪ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਸੂਟਕੇਸ ਨੂੰ ਤਰਪਾਲ ਦੇ ਕੱਪੜੇ ਨਾਲ ਢਕਣਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ 100 ਸੂਟਕੇਸਾਂ ਨੂੰ ਢਕਣ ਦੇ ਲਈ 96 cm ਚੌੜਾਈ ਵਾਲੇ ਕਿੰਨੇ ਮੀਟਰ ਤਰਪਾਲ ਦੇ ਕੱਪੜੇ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ?

3. ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਘਣ ਦੀ ਭੁਜਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦੀ ਕੁੱਲ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $600\ \text{cm}^2$ ਹੈ।

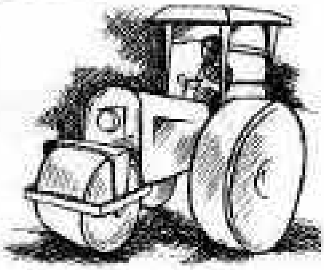
4. ਰੁਖਸਾਰ ਨੇ 1m × 2 m × 1.5 m ਮਾਪ ਵਾਲੀ ਇੱਕ ਪੇਟੀ ਨੂੰ ਬਾਹਰ ਤੋਂ ਪੇਂਟ ਕੀਤਾ। ਜੇ ਉਸਨੇ ਪੇਟੀ ਦੇ ਤਲ ਨੂੰ ਛੱਡ ਕੇ ਉਸਨੂੰ ਸਾਰੀ ਜਗ੍ਹਾ ਤੋਂ ਪੇਂਟ ਕੀਤਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਉਸਨੇ ਕਿੰਨੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਨੂੰ ਪੇਂਟ ਕੀਤਾ।



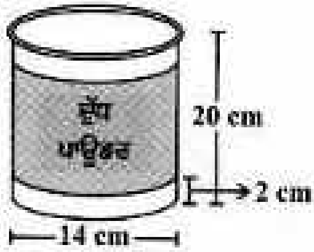
5. ਡੇਨੀਅਲ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਘਣਾਵਕਾਰ ਕਮਰੇ ਦੀਆਂ ਦੀਵਾਰਾਂ ਅਤੇ ਛੱਤ ਨੂੰ ਪੇਂਟ ਕਰ ਰਿਹਾ ਹੈ ਜਿਸਦੀ ਲੰਬਾਈ, ਚੌੜਾਈ ਅਤੇ ਉਚਾਈ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 15 m, 10 m ਅਤੇ 7 m ਹੈ। ਪੇਂਟ ਦੇ ਹਰੇਕ ਡੱਬੇ ਨਾਲ $100\ \text{m}^2$ ਖੇਤਰਫਲ ਨੂੰ ਪੇਂਟ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸ ਕਮਰੇ ਦੇ ਲਈ ਉਸ ਨੂੰ ਪੇਂਟ ਦੇ ਕਿੰਨੇ ਡੱਬਿਆਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੋਵੇਗੀ?



6. ਵਰਣਨ ਕਰੋ ਕਿ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਚਿੱਤਰ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਮਾਨ ਹਨ ਅਤੇ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਤੋਂ ਵੱਖਰੇ ਹਨ ? ਕਿਸ ਡੱਬੇ ਦਾ ਪਾਸਵੀਂ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਜ਼ਿਆਦਾ ਹੈ ?
7. 7 m ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਅਤੇ 3 m ਉਚਾਈ ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਬੰਦ ਵੇਲਣਾਕਾਰ ਟੈਂਕ ਕਿਸੇ ਧਾਤੂ ਦੀ ਇੱਕ ਚਾਦਰ ਨਾਲ ਬਣਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਉਸਨੂੰ ਬਣਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੀ ਧਾਤੂ ਦੀ ਚਾਦਰ ਦੀ ਮਾਤਰਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।
8. ਇੱਕ ਖੋਖਲੇ ਵੇਲਣ ਦੀ ਪਾਸਵੀਂ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ 4224 cm^2 ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਸਦੀ ਉੱਚਾਈ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਕੱਟਕੇ 33 cm ਚੋੜਾਈ ਦੀ ਇੱਕ ਆਇਤਾਕਾਰ ਚਾਦਰ ਬਣਾਈ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਆਇਤਾਕਾਰ ਚਾਦਰ ਦਾ ਪਰਿਮਾਪ ਪਤਾ ਕਰੋ।

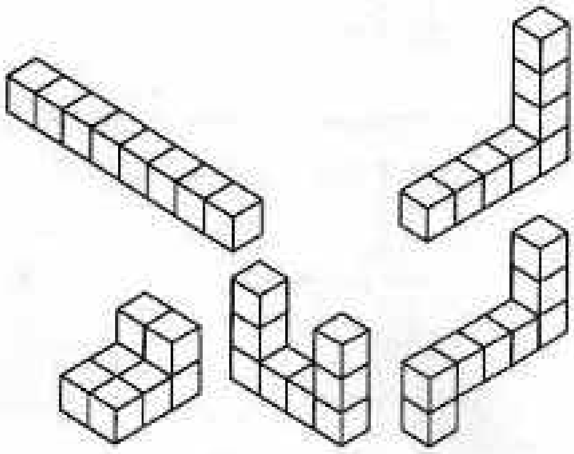


9. ਕਿਸੇ ਸੜਕ ਨੂੰ ਪੱਧਰਾ ਕਰਨ ਲਈ ਇੱਕ ਰੋਡਰੋਲਰ ਨੂੰ ਸੜਕ ਦੇ ਉੱਪਰ ਇੱਕ ਵਾਰ ਘੁੰਮਣ ਲਈ 750 ਚੱਕਰ ਲਗਾਉਣੇ ਪੈਂਦੇ ਹਨ। ਜੇ ਰੋਡਰੋਲਰ ਦਾ ਵਿਆਸ 84 cm ਅਤੇ 1 m ਲੰਬਾਈ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸੜਕ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
10. ਇੱਕ ਕੰਪਨੀ ਆਪਣੇ ਦੁੱਧ ਪਾਊਡਰ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਵੇਲਣਾਕਾਰ ਬਰਤਨਾਂ ਵਿੱਚ ਪੈਕ ਕਰਦੀ ਹੈ ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਵਿਆਸ 14 cm ਅਤੇ ਉਚਾਈ 20 cm ਹੈ। ਕੰਪਨੀ ਬਰਤਨ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦੇ ਚਾਰੇ ਪਾਸੇ ਇੱਕ ਲੇਬਲ ਲਗਾਉਂਦੀ ਹੈ (ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ)। ਜੇ ਇਹ ਲੇਬਲ ਬਰਤਨ ਦੇ ਤਲ ਅਤੇ ਸਿਖਰ ਦੋਨਾਂ ਤੋਂ 2 cm ਦੀ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਚਿਪਕਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਲੇਬਲ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਕੀ ਹੈ ?



11.8 ਘਣ, ਘਣਾਵ ਅਤੇ ਵੇਲਣ ਦਾ ਆਇਤਨ

ਇੱਕ ਤਿੰਨ ਪਸਾਰੀ ਵਸਤੂ ਦੁਆਰਾ ਘੇਰੀ ਹੋਈ ਜਗ੍ਹਾ ਨੂੰ ਉਸਦਾ ਆਇਤਨ ਆਖਦੇ ਹਨ। ਆਪਣੇ ਆਲੇ-ਦੁਆਲੇ ਦੀਆਂ ਵਸਤੂਆਂ ਦੇ ਆਇਤਨ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰਨ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰੋ। ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ ਕਿਸੇ ਕਮਰੇ ਦੇ ਅੰਦਰ ਰੱਖੀ ਹੋਈ ਅਲਮਾਰੀ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵਿੱਚ ਕਮਰੇ ਦਾ ਆਇਤਨ ਜ਼ਿਆਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਤੁਹਾਡੀ ਪੈਂਨਸਿਲ ਬਾਕਸ ਦਾ ਆਇਤਨ ਇਸਦੇ ਅੰਦਰ ਰੱਖੇ ਪੈਨ ਅਤੇ ਮਿਟਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰਬੜ ਦੇ ਆਇਤਨ ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਹੈ। ਕੀ ਤੁਸੀ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਵੀ ਵਸਤੂ ਦਾ ਆਇਤਨ ਮਾਪ ਸਕਦੇ ਹੋ ?



ਚਿੱਤਰ 11.42

ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ, ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਵਰਗ ਇਕਾਈਆਂ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਠੋਸ ਦਾ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਘਣ ਇਕਾਈਆਂ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿਉਂਕਿ ਘਣ ਸਭ ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਉੱਚਿਤ ਠੋਸ ਆਕਾਰ ਹੈ (ਠੀਕ ਉਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜਿਵੇਂ ਕਿਸੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਮਾਪਣ ਦੇ ਲਈ ਵਰਗ ਸਭ ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਉੱਚਿਤ ਆਕਾਰ ਹੈ)।

ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਖੇਤਰ ਨੂੰ ਵਰਗ ਇਕਾਈਆਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦੇ ਹਾਂ, ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿਸੇ ਠੋਸ ਦਾ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਉਸ ਠੋਸ ਨੂੰ ਘਣ ਇਕਾਈਆਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਣ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ।

ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਠੋਸਾਂ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਦਾ ਆਇਤਨ 8 ਘਣ ਇਕਾਈ ਹਨ। (ਚਿੱਤਰ 11.42)।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਠੋਸ ਦਾ ਆਇਤਨ ਮਾਪਣ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਉਸ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਘਣ ਇਕਾਈਆਂ ਨੂੰ ਗਿਣਦੇ ਹਾਂ।

1 ਘਣ ਸੈਂਟੀਮੀਟਰ $= 1\text{ cm} \times 1\text{ cm} \times 1\text{ cm} = 1\text{ cm}^3$

$= 10\text{ mm} \times 10\text{ mm} \times 10\text{ mm} =$ .... mm^3

1 ਘਣ ਮੀਟਰ $= 1\text{ m} \times 1\text{ m} \times 1\text{ m} = 1\text{ m}^3$

$=$ .... cm^3

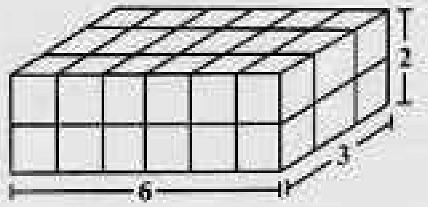
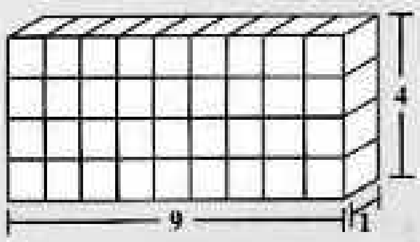
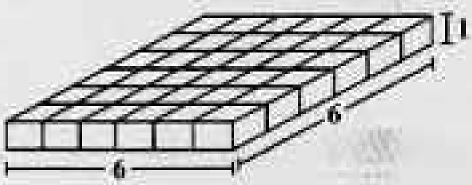
1 ਘਣ ਮਿਲੀਮੀਟਰ $= 1\text{ mm} \times 1\text{ mm} \times 1\text{ mm} = 1\text{ mm}^3$

$= 0.1\text{ cm} \times 0.1\text{ cm} \times 0.1\text{ cm} =$ .... cm^3

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਘਣਾਵ, ਘਣ ਅਤੇ ਵੇਲਣ ਦਾ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਕੁੱਝ ਵਿਅੰਜਕ (ਸੂਤਰ) ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਆਉ, ਹਰੇਕ ਠੋਸ ਤੇ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਕਰਕੇ ਚਰਚਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

11.8.1 ਘਣਾਵ

ਬਰਾਬਰ ਆਕਾਰ (ਹਰੇਕ ਘਣ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਬਰਾਬਰ) ਵਾਲੇ 36 ਘਣ ਲਵੋ ਇੱਕ ਘਣਾਵ ਬਣਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਉਨਾਂ ਨੂੰ ਤਰਤੀਬਵਾਰ ਜੋੜੋ। ਤੁਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਕਈ ਢੰਗ ਨਾਲ ਤਰਤੀਬ ਦੇ ਸਕਦੇ ਹੋ। ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ ਅਤੇ ਖਾਲੀ ਥਾਂਵਾਂ ਭਰੋ :

	ਘਣਾਵ	ਲੰਬਾਈ	ਚੌੜਾਈ	ਉਚਾਈ	$l \times b \times h = V$
(i)		12	3	1	$12 \times 3 \times 1 = 36$
(ii)		...	...	...	...
(iii)		...	...	...	...
(iv)		...	...	...	...

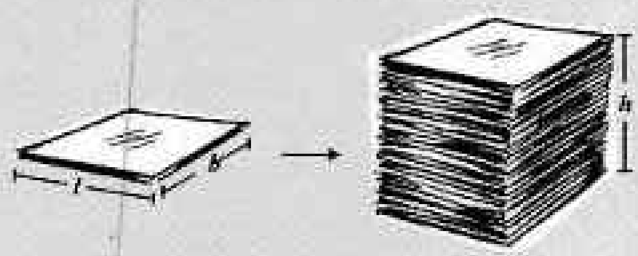
ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਦੇਖਦੇ ਹੋ?

ਕਿਉਂਕਿ ਇਹਨਾਂ ਘਣਾਵਾਂ ਨੂੰ ਬਣਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ 36 ਘਣਾਂ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕੀਤਾ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਹਰੇਕ ਘਣਾਵ ਦਾ ਆਇਤਨ 36 ਘਣ ਇਕਾਈਆਂ ਹੈ। ਇਸਦੇ ਇਲਾਵਾ ਹਰੇਕ ਘਣਾਵ ਦਾ ਆਇਤਨ ਉਸਦੀ ਲੰਬਾਈ, ਚੌੜਾਈ ਅਤੇ ਉਚਾਈ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੀ ਉਦਾਹਰਣ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਘਣਾਵ ਦਾ ਆਇਤਨ = $l \times b \times h$ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ $l \times b$ ਆਧਾਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਘਣਾਵ ਦਾ ਆਇਤਨ = ਆਧਾਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ × ਉਚਾਈ।

ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਕਰੋ

ਇੱਕ ਕਾਗਜ਼ ਦੀ ਸ਼ੀਟ ਲਵੋ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਨੂੰ ਮਾਪੋ। ਇਸਦੇ ਬਰਾਬਰ ਆਕਾਰ ਵਾਲੀਆਂ ਕਾਗਜ਼ ਦੀਆਂ ਸ਼ੀਟਾਂ ਦਾ ਢੇਰ ਲਗਾ ਕੇ ਇੱਕ ਘਣਾਵ ਬਣਾਓ (ਚਿੱਤਰ 11.43)। ਇਸ ਢੇਰ ਦੀ ਉਚਾਈ ਮਾਪੋ। ਸ਼ੀਟ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਅਤੇ ਸ਼ੀਟਾਂ ਦੀ ਉਚਾਈ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਘਣਾਵ ਦਾ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਇਹ ਕਿਰਿਆ ਇਸ ਵਿਚਾਰ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ ਕਿ ਠੋਸ ਦੇ ਆਇਤਨ ਦਾ ਨਿਗਮਨ ਇਸ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ ਵੀ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ (ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਠੋਸ ਦਾ ਆਧਾਰ ਅਤੇ ਸਿਖਰ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹਨ ਅਤੇ ਇੱਕ-ਦੂਸਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਕਿਨਾਰੇ ਆਧਾਰ 'ਤੇ ਲੰਬ ਹਨ) ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਵਸਤੂਆਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਸੋਚ ਸਕਦੇ ਹੋ ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਆਇਤਨ ਇਸ ਵਿਧੀ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ?



ਚਿੱਤਰ 11.43

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

ਨਾਲ ਦਿੱਤੇ ਘਣਾਵਾਂ (ਚਿੱਤਰ 11.44) ਦਾ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕਰੋ :

ਚਿੱਤਰ 11.44

11.8.2 ਘਣ

ਘਣ, ਘਣਾਵ ਦਾ ਇੱਕ ਅਨੋਖਾ (ਵਿਸ਼ੇਸ਼) ਉਦਾਹਰਣ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ $l = b = h$. ਘਣ ਦਾ ਅਇਤਨ = $l \times l \times l = l^3$

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਘਣਾਂ ਦਾ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(a) 4 cm ਭੁਜਾ ਵਾਲਾ (b) 1.5 m ਭੁਜਾ ਵਾਲਾ

ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਕਰੋ

ਸਮਾਨ ਆਕਾਰ ਵਾਲੇ 64 ਘਣਾਂ ਨੂੰ ਜਿੰਨੇ ਰੂਪਾਂ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਤਰਤੀਬ ਦੇ ਸਕਦੇ ਹੋ ਉਨੇ ਰੂਪਾਂ ਵਿੱਚ ਤਰਤੀਬ ਦੇ ਕੇ ਘਣਾਵ ਬਣਾਉ। ਹਰੇਕ ਰੂਪ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਕੀ ਸਮਾਨ ਆਇਤਨ ਵਾਲੀ ਠੋਸ ਆਕ੍ਰਿਤੀਆਂ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਸਮਾਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ?

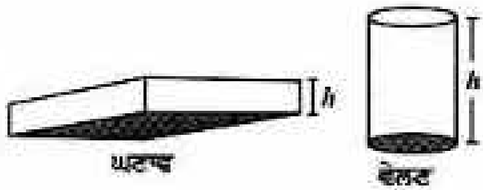
ਸੋਚੋ, ਚਰਚਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਲਿਖੋ

ਇੱਕ ਕੰਪਨੀ ਬਿਸਕੁੱਟ ਵੇਚਦੀ ਹੈ। ਬਿਸਕੁਟਾਂ ਨੂੰ ਪੈਕ ਕਰਨ ਲਈ ਘਣਾਵਕਾਰ ਡੱਬੇ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕੀਤੀ ਜਾ ਰਹੀ ਹੈ। ਡੱਬਾ A → 3 cm × 8 cm × 20 cm, ਡੱਬਾ B → 4 cm × 12 cm × 10 cm

ਡੱਬੇ ਦਾ ਕਿਹੜਾ ਆਕਾਰ ਕੰਪਨੀ ਦੇ ਲਈ ਸਸਤਾ ਰਹੇਗਾ ? ਕਿਉਂ ? ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੋਰ ਆਕਾਰ (ਮਾਪ) ਦੇ ਡੱਬੇ ਦਾ ਸੁਝਾਓ ਦੇ ਸਕਦੇ ਹੋ ਜਿਸਦਾ ਆਇਤਨ ਇਸਦੇ ਸਮਾਨ ਹੋਵੇ ਪਰ ਇਸਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵਿੱਚ ਜ਼ਿਆਦਾ ਸਸਤਾ ਹੋਵੇ ?

11.8. 3 ਵੇਲਣ

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਘਣਾਵ ਦਾ ਆਇਤਨ ਉਸਦੇ ਆਧਾਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਅਤੇ ਉਚਾਈ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਕੀ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਵੇਲਣ ਦਾ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ?



ਘਣਾਵ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵੇਲਣ ਵਿੱਚ ਵੀ ਇੱਕ ਆਧਾਰ ਅਤੇ ਸਿਖਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਇੱਕ-ਦੂਸਰੇ ਦੇ ਸਰਬੰਗਸਮ ਅਤੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਘਣਾਵ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਸ ਦਾ ਪਾਸਵੀਂ ਸਤ੍ਹਾ ਆਧਾਰ ਤੇ ਲੰਬ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਘਣਾਵ ਦਾ ਆਇਤਨ = ਆਧਾਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ × ਉਚਾਈ

$= l \times b \times h = lbh$

ਵੇਲਣ ਦਾ ਆਇਤਨ = ਆਧਾਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ × ਉਚਾਈ

$= \pi r^2 \times h = \pi r^2 h$

11.9 ਆਇਤਨ ਅਤੇ ਸਮਾਈ (ਸਮਰੱਥਾ)

ਇਹਨਾਂ ਦੋ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ ਜ਼ਿਆਦਾ ਅੰਤਰ ਨਹੀਂ ਹੈ।

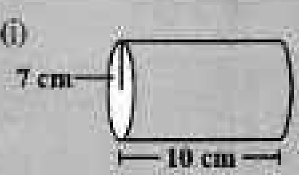
(a) ਕਿਸੇ ਵਸਤੂ ਦੁਆਰਾ ਘੇਰੀ ਗਈ ਜਗ੍ਹਾ ਦੀ ਮਾਤਰਾ ਨੂੰ ਉਸਦਾ ਆਇਤਨ ਆਖਦੇ ਹਾਂ।

(b) ਕਿਸੇ ਬਰਤਨ ਵਿੱਚ ਭਰੀ ਗਈ ਵਸਤੂ ਦੀ ਮਾਤਰਾ ਨੂੰ ਉਸਦੀ ਸਮਾਈ (ਸਮਰੱਥਾ) ਆਖਦੇ ਹਾਂ।

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

ਨਾਲ ਦਿੱਤੇ ਵੇਲਣਾਂ ਦਾ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i)



(ii)

ਨੋਟ : ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਪਾਣੀ ਰੱਖੇ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਟੀਨ ਦੇ ਬਰਤਨ ਵਿੱਚ 100 cm^3 ਪਾਣੀ ਭਰਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸ ਟੀਨ ਦੇ ਬਰਤਨ ਦੀ ਸਮਾਈ (ਸਮਰੱਥਾ) 100 cm^3 ਹੈ।

ਸਮਾਈ (ਸਮਰੱਥਾ) ਨੂੰ ਲਿਟਰਾਂ ਵਿੱਚ ਵੀ ਮਾਪਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਲਿਟਰ ਅਤੇ cm^3 ਵਿੱਚ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸੰਬੰਧ ਹਨ। 1 mL = 1 cm^3, 1 L = 1000 cm^3, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ 1 m^3 = 1000000 cm^3 = 1000 L.

ਉਦਾਹਰਣ 10 : ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਘਣਾਵ ਦੀ ਉਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦਾ ਆਇਤਨ 275 cm^3 ਅਤੇ ਆਧਾਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ 25 cm^2 ਹੈ।

ਹੱਲ : ਘਣਾਵ ਦਾ ਆਇਤਨ = ਆਧਾਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ × ਉਚਾਈ

$$\text{ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਘਣਾਵ ਦੀ ਉਚਾਈ} = \frac{\text{ਘਣਾਵ ਦਾ ਆਇਤਨ}}{\text{ਆਧਾਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ}} = \frac{275}{25} = 11 \text{ cm}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਘਣਾਵ ਦੀ ਉਚਾਈ 11 cm ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 11 : ਇੱਕ ਘਣਾਵਕਾਰ ਗੋਦਾਮ, ਜਿਸਦਾ ਮਾਪ 60 m × 40 m × 30 m ਹੈ, ਦੇ ਅੰਦਰ ਕਿੰਨੇ ਘਣਾਵਕਾਰ ਡੱਬੇ ਰੱਖੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ, ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਡੱਬੇ ਦਾ ਆਇਤਨ 0.8 m^3 ਹੈ ?

ਹੱਲ : ਇੱਕ ਡੱਬੇ ਦਾ ਆਇਤਨ = 0.8 m^3

ਗੋਦਾਮ ਦਾ ਆਇਤਨ = 60 × 40 × 30 = 72000 m^3

$$\text{ਗੋਦਾਮ ਦੇ ਅੰਦਰ ਰੱਖੇ ਜਾ ਸਕਣ ਵਾਲੇ ਡੱਬਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ} = \frac{\text{ਗੋਦਾਮ ਦਾ ਆਇਤਨ}}{\text{1ਡੱਬੇ ਦਾ ਆਇਤਨ}}$$

$$= \frac{60 \times 40 \times 30}{0.8} = 90{,}000$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਗੋਦਾਮ ਦੇ ਅੰਦਰ ਰੱਖੇ ਜਾ ਸਕਣ ਵਾਲੇ ਡੱਬਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 90,000 ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 12 : 14 cm ਚੌੜਾਈ ਵਾਲੀ ਇੱਕ ਆਇਤਕਾਰ ਕਾਗਜ਼ ਨੂੰ ਚੌੜਾਈ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਮੋੜ ਕੇ 20 cm ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਵੇਲਣ ਬਣਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਵੇਲਣ ਦਾ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕਰੋ। (ਚਿੱਤਰ 11.45)। (π ਦੇ ਲਈ $\frac{22}{7}$ ਲਵੋ)

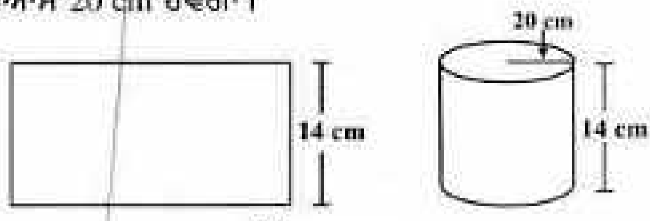
ਹੱਲ : ਕਾਗਜ਼ ਨੂੰ ਚੌੜਾਈ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਮੋੜ ਕੇ ਵੇਲਣ ਬਣਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਕਾਗਜ਼ ਦੀ ਚੌੜਾਈ ਵੇਲਣ ਦੀ ਉਚਾਈ ਹੋਵੇਗੀ ਅਤੇ ਵੇਲਣ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 20 cm ਹੋਵੇਗਾ।

ਵੇਲਣ ਦੀ ਉਚਾਈ = h = 14 cm

ਅਰਧ ਵਿਆਸ = r = 20 cm

ਵੇਲਣ ਦਾ ਆਇਤਨ = V = $\pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times 20 \times 20 \times 14 = 17600 \text{ cm}^3$$



ਚਿੱਤਰ 11.45

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵੇਲਣ ਦਾ ਆਇਤਨ 17600 cm³ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 13 : 11 cm × 4 cm ਮਾਪਣ ਵਾਲੇ ਆਇਤਾਕਾਰ ਕਾਗਜ਼ ਦੇ ਟੁਕੜੇ ਤੋਂ ਇਕ ਦੂਜੇ ਉੱਤੇ ਢੱਕੇ ਬਿਨਾਂ, ਮੋੜ ਕੇ ਇੱਕ 4 cm ਉਚਾਈ ਦਾ ਵੇਲਣ ਬਣਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਵੇਲਣ ਦਾ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਕਾਗਜ਼ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਵੇਲਣ ਦੇ ਆਧਾਰ ਦਾ ਘੇਰਾ ਬਣ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਚੌੜਾਈ, ਉਚਾਈ ਬਣ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਵੋ ਵੇਲਣ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ = r ਅਤੇ ਉਚਾਈ = h

ਵੇਲਣ ਦੇ ਆਧਾਰ ਦਾ ਘੇਰਾ = $2\pi r = 11$

ਜਾਂ $2 \times \frac{22}{7} \times r = 11$

ਇਸ ਲਈ $r = \frac{7}{4}$ cm

ਵੇਲਣ ਦਾ ਆਇਤਨ = V = $\pi r^2 h$

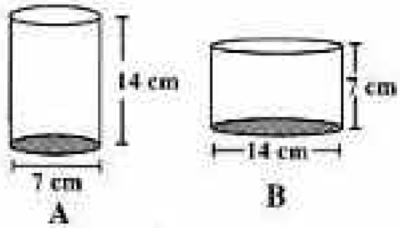
$$= \frac{22}{7} \times \frac{7}{4} \times \frac{7}{4} \times 4 \text{ cm}^3 = 38.5 \text{ cm}^3$$

ਇਸ ਲਈ ਵੇਲਣ ਦਾ ਆਇਤਨ 38.5 cm³ ਹੈ।

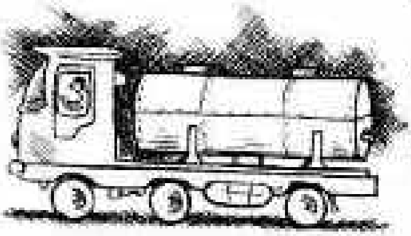
ਅਭਿਆਸ 11.4

1. ਤੁਹਾਨੂੰ ਇੱਕ ਵੇਲਣਾਕਾਰ ਟੈਂਕ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ, ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਵਿੱਚ ਕਿਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਉਸਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋਗੇ ਅਤੇ ਕਿਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਆਇਤਨ :
   (a) ਇਹ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਇਸ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨਾ ਪਾਣੀ ਰੱਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।
   (b) ਇਸਦਾ ਪਲੱਸਤਰ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸੀਮੇਂਟ ਬੋਰੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ।
   (c) ਇਸ ਵਿਚਲੇ ਪਾਣੀ ਨਾਲ ਭਰੇ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਛੋਟੇ ਟੈਂਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ।

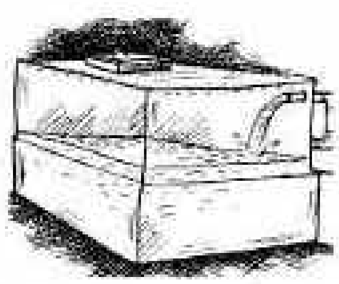
2. ਵੇਲਣ A ਦਾ ਵਿਆਸ 7 cm ਅਤੇ ਉਚਾਈ 14 cm ਹੈ। ਵੇਲਣ B ਦਾ ਵਿਆਸ 14 cm ਅਤੇ ਉਚਾਈ 7cm ਹੈ। ਗਣਨਾ ਕੀਤੇ ਬਿਨ੍ਹਾਂ ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਦੱਸ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਇਹਨਾਂ ਦੋਨਾਂ ਵਿੱਚ ਕਿਸਦਾ ਆਇਤਨ ਜ਼ਿਆਦਾ ਹੈ ? ਦੋਨਾਂ ਵੇਲਣਾਂ ਦਾ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਇਸਦੀ ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ। ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ ਕੀ ਜਿਆਦਾ ਆਇਤਨ ਵਾਲੇ ਵੇਲਣ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਵੀ ਜ਼ਿਆਦਾ ਹੈ ?



3. ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਘਣਾਵ ਦੀ ਉਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੇ ਆਧਾਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ 180 cm^2 ਅਤੇ ਆਇਤਨ 900 cm^3 ਹੈ।

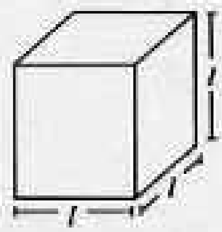


4. ਇੱਕ ਘਣਾਵ ਦਾ ਮਾਪ 60 cm × 54 cm × 30 cm ਹੈ। ਇਸ ਘਣਾਵ ਦੇ ਅੰਦਰ 6 cm ਭੁਜਾ ਵਾਲੇ ਕਿੰਨੇ ਛੋਟੇ ਘਣ ਰੱਖੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ।
5. ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਵੇਲਣ ਦੀ ਉਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦਾ ਆਇਤਨ 1.54 m^3 ਅਤੇ ਜਿਸਦਾ ਆਧਾਰ ਦਾ ਵਿਆਸ 140 cm ਹੈ ?
6. ਇੱਕ ਦੁੱਧ ਦਾ ਟੈਂਕ ਵੇਲਣ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 1.5 m ਅਤੇ ਲੰਬਾਈ 7 m ਹੈ। ਇਸ ਟੈਂਕ ਵਿੱਚ ਭਰੇ ਜਾ ਸਕਣ ਵਾਲੇ ਦੁੱਧ ਦੀ ਮਾਤਰਾ ਲਿਟਰ ਵਿੱਚ ਪਤਾ ਕਰੋ।
7. ਜੇਕਰ ਘਣ ਦੇ ਹਰੇਕ ਕਿਨਾਰੇ ਨੂੰ ਦੁੱਗਣਾ ਕਰ ਦਿੱਤਾ ਜਾਵੇ, ਤਾਂ
   (i) ਇਸਦੇ ਸਤ੍ਹਾ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੇ ਗੁਣਾ ਵਾਧਾ ਹੋਵੇਗਾ ?
   (ii) ਇਸਦੇ ਆਇਤਨ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੇ ਗੁਣਾ ਵਾਧਾ ਹੋਵੇਗਾ ?
8. ਇੱਕ ਟੈਂਕ ਅੰਦਰ 60 ਲਿਟਰ ਪ੍ਰਤੀ ਮਿੰਟ ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਪਾਣੀ ਡਿੱਗ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਟੈਂਕ ਦਾ ਆਇਤਨ 108 m^3 ਹੈ, ਤਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਇਸ ਟੈਂਕ ਨੂੰ ਭਰਨ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੇ ਘੰਟੇ ਲੱਗਣਗੇ।

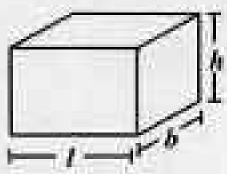


ਅਸੀਂ ਕੀ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀ ?

1. ਸਮਲੰਬ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ
   (i) ਸਮਲੰਬ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = ਸਮਾਂਤਰ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈਆਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦਾ ਅੱਧ × ਉਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਲੰਬਿਕ ਦੂਰੀ।
   (ii) ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = ਵਿਕਰਨਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦਾ ਅੱਧ
2. ਇੱਕ ਠੋਸ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਇਸਦੇ ਫਲਕਾਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਸਮਾਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।



3. ਘਣਾਵ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = $2(lb + bh + hl)$
   ਘਣ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = $6l^2$
   ਵੇਲਣ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = $2\pi r(r + h)$
4. ਕਿਸੇ ਠੋਸ ਦੁਆਰਾ ਘੇਰੀ ਗਈ ਜਗ੍ਹਾ ਦੀ ਮਾਤਰਾ ਨੂੰ ਇਸਦਾ ਆਇਤਨ ਆਖਦੇ ਹਾਂ।
5. ਘਣਾਵ ਦਾ ਆਇਤਨ = $l \times b \times h$
   ਘਣ ਦਾ ਆਇਤਨ = l^3
   ਵੇਲਣ ਦਾ ਆਇਤਨ = $\pi r^2 h$



6. (i) 1 cm^3 = 1 mL
   (ii) 1L = 1000 cm^3
   (iii) 1 m^3 = 1000000 cm^3 = 1000L

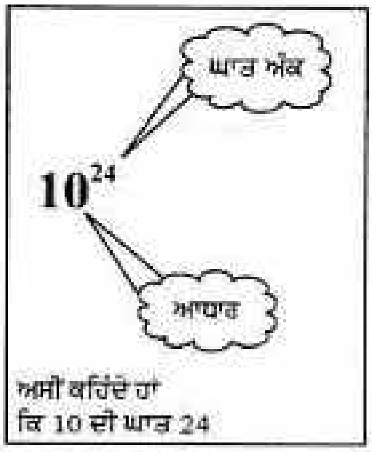
ਅਧਿਆਇ

12 ਘਾਤ ਅੰਕ ਅਤੇ ਘਾਤ

12.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ?

ਪ੍ਰਿਥਵੀ ਦਾ ਪੁੰਜ 5,970,000,000,000, 000, 000, 000, 000 kg ਹੈ। ਅਸੀਂ ਪਿਛਲੀ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲਾਂ ਹੀ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਵੱਡੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ (ਜ਼ਿਆਦਾ ਸੌਖਾ) ਘਾਤਾਂ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਿਵੇਂ ਕਿ 5.97×10^{24} kg .



ਅਸੀਂ 10^{24} ਨੂੰ 10 ਦੀ ਘਾਤ 24 ਪੜ੍ਹਦੇ ਹਾਂ।

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

ਅਤੇ $\qquad 2^m = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times \ldots \times 2 \times 2$ (m ਵਾਰ)

2^{-2} ਕਿਸਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ?

ਇੱਥੇ ਘਾਤ ਅੰਕ ਰਿਣਾਤਮਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

12.2 ਰਿਣਾਤਮਕ ਘਾਤ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਘਾਤ

ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $10^2 = 10 \times 10 = 100$

$$10^1 = 10 = \frac{100}{10}$$

$$10^0 = 1 = \frac{10}{10}$$

$$10^{-1} = ?$$

ਜਦ ਘਾਤ ਅੰਕ 1 ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਦ ਮੁੱਲ ਪਿਛਲੇ ਮੁੱਲ ਦਾ $\frac{1}{10}$ ਵਾਂ ਭਾਗ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਉੱਪਰਲੇ ਪੈਟਰਨ ਨੂੰ ਅੱਗੇ ਵਧਾਉਂਦੇ ਹੋਏ,

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ $10^{-1} = \frac{1}{10}$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $\qquad 10^{-2} = \frac{1}{10} \div 10 = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2}$

$10^{-3} = \frac{1}{100} \div 10 = \frac{1}{100} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3}$ । 10^{-10} ਕਿਸ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ?

ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਨੂੰ ਜਾਣੋ।

$$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$$

$$3^2 = 3 \times 3 = 9 = \frac{27}{3}$$

$$3^1 = 3 = \frac{9}{3}$$

$$3^0 = 1 = \frac{3}{3}$$

ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਆਧਾਰ 3 ਨਾਲ ਵੰਡਿਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਉਪਰੋਕਤ ਪੈਟਰਨ ਨੂੰ ਦੇਖਣ ਤੇ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ

$$3^{-1} = 1 \div 3 = \frac{1}{3}$$

$$3^{-2} = \frac{1}{3} \div 3 = \frac{1}{3 \times 3} = \frac{1}{3^2}$$

$$3^{-3} = \frac{1}{3^2} \div 3 = \frac{1}{3^2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3^3}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ 2^{-2} ਨਾਲ ਦੁਬਾਰਾ ਤੁਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ,

$$10^{-2} = \frac{1}{10^2} \quad \text{ਜਾਂ} \quad 10^2 = \frac{1}{10^{-2}}$$

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} \quad \text{ਜਾਂ} \quad 10^3 = \frac{1}{10^{-3}}$$

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} \quad \text{ਜਾਂ} \quad 3^2 = \frac{1}{3^{-2}}$$ ਆਦਿ।

ਸਧਾਰਨ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕਿਸੇ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ, a (ਸਿਫਰ ਨਹੀਂ), ਦੇ ਲਈ $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$, ਇੱਥੇ m, ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। a^{-m}, a^m ਦਾ ਗੁਣਾਤਮਕ ਉਲਟ ਹੈ।

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

ਗੁਣਾਤਮਕ ਉਲਟ ਲਿਖੋ :

(i) 2^{-4} (ii) 10^{-5} (iii) 7^{-2} (iv) 5^{-3} (v) 10^{-100}

$10^{-1} = \frac{1}{10}$, $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$

ਅਸੀਂ ਸਿੱਖਿਆ ਹੈ ਕਿ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਵਿਸਤ੍ਰਿਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕਿਵੇਂ ਲਿੱਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਵੇਂ

$$1425 = 1 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 5 \times 10^0$$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਦੇਖਣਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ 1425.36 ਨੂੰ ਵਿਸਤ੍ਰਿਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕਿਵੇਂ ਦਰਸਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $1425.36 = 1 \times 1000 + 4 \times 100 + 2 \times 10 + 5 \times 1 + \frac{3}{10} + \frac{6}{100}$

$$= 1 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 2 \times 10 + 5 \times 1 + 3 \times 10^{-1} + 6 \times 10^{-2}$$

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

ਘਾਤ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਨੂੰ ਵਿਸਤ੍ਰਿਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ।

(i) 1025.63 (ii) 1256.249

12.3 ਘਾਤ ਅੰਕਾਂ ਦੇ ਨਿਯਮ

ਅਸੀਂ ਸਿੱਖ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕੋਈ ਵੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ a (ਸਿਫਰ ਨਹੀਂ) ਦੇ ਲਈ $a^m \times a^n = a^{m+n}$, ਇੱਥੇ m ਅਤੇ n ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ। ਜਦ ਘਾਤ ਅੰਕ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੋਣ ਤਾਂ ਵੀ ਕੀ ਇਹ ਨਿਯਮ ਸੱਚ ਹੈ? ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

(i) ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$ ਅਤੇ $2^{-2} = \frac{1}{2^2}$

$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ ਕੋਈ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ a (ਸਿਫਰ ਨਹੀਂ) ਦੇ ਲਈ

ਜਿਵੇਂ, $2^{-3} \times 2^{-2} = \frac{1}{2^3} \times \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2^3 \times 2^2} = \frac{1}{2^{3+2}} = 2^{-5}$

-5 ਦੋ ਘਾਤ ਅੰਕਾਂ -3 ਅਤੇ -2 ਦਾ ਜੋੜ ਹੈ।

(ii) $(-3)^{-4} \times (-3)^{-3}$ ਲੈਣ ਤੇ

$$(-3)^{-4} \times (-3)^{-3} = \frac{1}{(-3)^4} \times \frac{1}{(-3)^3}$$

$$= \frac{1}{(-3)^4 \times (-3)^3} = \frac{1}{(-3)^{4+3}} = (-3)^{-7}$$

$(-4) + (-3) = -7$

(iii) ਹੁਣ $5^{-2} \times 5^4$ ਨੂੰ ਲਿਖੋ।

$(-2) + 4 = 2$

$$5^{-2} \times 5^4 = \frac{1}{5^2} \times 5^4 = \frac{5^4}{5^2} = 5^{4-2} = 5^{(2)}$$

ਜਮਾਤ VII ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸਿੱਖ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕੋਈ ਵੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ (ਸਿਫਰ ਨਹੀਂ) ਦੇ ਲਈ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, ਇੱਥੇ m ਅਤੇ n ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ $m > n$.

(iv) ਹੁਣ $(-5)^{-4} \times (-5)^2$ ਨੂੰ ਲਿਖੋ।

$$(-5)^{-4} \times (-5)^2 = \frac{1}{(-5)^4} \times (-5)^2 = \frac{(-5)^2}{(-5)^4} = \frac{1}{(-5)^4 \times (-5)^{-2}}$$

$$= \frac{1}{(-5)^{4-2}} = (-5)^{-(2)}$$

$(-4) + 2 = -2$

ਸਾਧਾਰਨ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕਿਸੇ (ਸਿਫਰ ਨਹੀਂ) ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ a ਦੇ ਲਈ $a^m \times a^n = a^{m+n}$, ਇੱਥੇ m ਅਤੇ n ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ।

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

ਘਾਤ ਅੰਕ ਰੂਪ ਨੂੰ ਸਰਲ ਕਰੋ ਅਤੇ ਲਿਖੋ :

(i) $(-2)^{-3} \times (-2)^{-4}$ (ii) $p^3 \times p^{-10}$ (iii) $3^2 \times 3^{-5} \times 3^6$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਤੁਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਘਾਤ ਅੰਕਾਂ ਦੇ ਨਿਯਮਾਂ ਦੀ ਪੜਤਾਲ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ ਇੱਥੇ a ਅਤੇ b (ਸਿਫਰ ਨਹੀਂ) ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਤੇ m, n ਕੋਈ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ।

(i) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (ii) $(a^m)^n = a^{mn}$ (iii) $a^m \times b^m = (ab)^m$

(iv) $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$ (v) $a^0 = 1$

ਇਹਨਾਂ ਨਿਯਮਾਂ ਨੂੰ ਤੁਸੀਂ ਜਮਾਤ VII ਵਿੱਚ ਧਨਾਤਮਕ ਘਾਤ ਅੰਕ ਵਿੱਚ ਵੀ ਸਿੱਖ ਚੁੱਕੇ ਹੋ।

ਆਉ, ਉਪਰੋਕਤ ਘਾਤ ਅੰਕਾਂ ਦੇ ਨਿਯਮਾਂ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਕੁੱਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) 2^{-3} (ii) $\dfrac{1}{3^{-2}}$

ਹੱਲ :

(i) $2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$ (ii) $\dfrac{1}{3^{-2}} = 3^2 = 3 \times 3 = 9$

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਸਰਲ ਕਰੋ :

(i) $(-4)^5 \times (-4)^{-10}$ (ii) $2^5 \div 2^{-6}$

ਹੱਲ :

(i) $(-4)^5 \times (-4)^{-10} = (-4)^{(5-10)} = (-4)^{-5} = \dfrac{1}{(-4)^5}$ ($a^m \times a^n = a^{m+n}$ ਅਤੇ $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$)

(ii) $2^5 \div 2^{-6} = 2^{5-(-6)} = 2^{11}$ ($a^m \div a^n = a^{m-n}$)

ਉਦਾਹਰਣ 3 : 4^{-3} ਨੂੰ ਘਾਤ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਆਧਾਰ 2 ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੈ, $4 = 2 \times 2 = 2^2$

ਜਿਵੇਂ $(4)^{-3} = (2 \times 2)^{-3} = (2^2)^{-3} = 2^{2\times(-3)} = 2^{-6}$ $[(a^m)^n = a^{mn}]$

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਸਰਲ ਕਰੋ ਅਤੇ ਉੱਤਰ ਘਾਤ ਅੰਕ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ।

(i) $(2^5 \div 2^8)^5 \times 2^{-5}$ (ii) $(-4)^{-3} \times (5)^{-3} \times (-5)^{-3}$

(iii) $\dfrac{1}{8} \times (3)^{-3}$ (iv) $(-3)^4 \times \left(\dfrac{5}{3}\right)^4$

ਹੱਲ :

(i) $(2^5 \div 2^8)^5 \times 2^{-5} = (2^{5-8})^5 \times 2^{-5} = (2^{-3})^5 \times 2^{-5} = 2^{-15-5} = 2^{-20} = \dfrac{1}{2^{20}}$

(ii) $(-4)^{-3} \times (5)^{-3} \times (-5)^{-3} = [(-4) \times 5 \times (-5)]^{-3} = [100]^{-3} = \dfrac{1}{100^3}$

[ਨਿਯਮ $a^m \times b^m = (ab)^m$, $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$]

(iii) $\dfrac{1}{8} \times (3)^{-3} = \dfrac{1}{2^3} \times (3)^{-3} = 2^{-3} \times 3^{-3} = (2 \times 3)^{-3} = 6^{-3} = \dfrac{1}{6^3}$

(iv) $(-3)^4 \times \left(\dfrac{5}{3}\right)^4 = (-1 \times 3)^4 \times \dfrac{5^4}{3^4} = (-1)^4 \times 3^4 \times \dfrac{5^4}{3^4}$

$= (-1)^4 \times 5^4 = 5^4$ $[(-1)^4 = 1]$

ਉਦਾਹਰਣ 5 : m ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਤਾਂ ਕਿ $(-3)^{m+1} \times (-3)^5 = (-3)^7$

ਹੱਲ : $(-3)^{m+1} \times (-3)^5 = (-3)^7$

$(-3)^{m+1+5} = (-3)^7$

$(-3)^{m+6} = (-3)^7$

ਦੋਨਾਂ ਪਾਸੇ ਦੀਆਂ ਘਾਤਾਂ ਦੇ ਆਧਾਰ ਸਮਾਨ ਹਨ ਜੋ 1 ਅਤੇ −1 ਤੋਂ ਭਿੰਨ ਹੈ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਉਸਦੇ ਘਾਤ ਅੰਕ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣੇ ਚਾਹੀਦੇ ਹਨ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $m + 6 = 7$ ਜਾਂ $m = 7 - 6 = 1$

> $a^n = 1$ ਜੇਕਰ $n = 0$ ਹੈ। $a = 1$ ਜਾਂ $a = -1$ ਦੇ ਇਲਾਵਾ ਕੋਈ ਵੀ a ਦੇ ਲਈ ਇਹ ਹੋਵੇਗਾ। $a = 1$ ਦੇ ਲਈ $1^1 = 1^2 = 1^3 = 1^{-2} = \ldots = 1$ ਜਾਂ $(1)^n = 1$ ਅਣਗਿਣਤ n ਦੇ ਲਈ। $a = -1$ ਦੇ ਲਈ, $(-1)^0 = (-1)^2 = (-1)^4 = (-1)^{-2} = \ldots = 1$ ਜਾਂ $(-1)^p = 1$, p ਕੋਈ ਜਿਸਤ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ।

ਉਦਾਹਰਣ 6 : $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{2^{-2}}{3^{-2}} = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$

> $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{2^{-2}}{3^{-2}} = \frac{3^2}{2^2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$
>
> ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ, $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$

ਉਦਾਹਰਣ 7 : ਸਰਲ ਕਰੋ।

(i) $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\right\} \div \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$ (ii) $\left(\frac{5}{8}\right)^{-7} \times \left(\frac{8}{5}\right)^{-5}$

ਹੱਲ :

(i) $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\right\} \div \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = \left\{\frac{1^{-2}}{3^{-2}} - \frac{1^{-3}}{2^{-3}}\right\} \div \frac{1^{-2}}{4^{-2}}$

$$= \left\{\frac{3^2}{1^2} - \frac{2^3}{1^3}\right\} \div \frac{4^2}{1^2} = \{9-8\} \div 16 = \frac{1}{16}$$

(ii) $\left(\frac{5}{8}\right)^{-7} \times \left(\frac{8}{5}\right)^{-5} = \frac{5^{-7}}{8^{-7}} \times \frac{8^{-5}}{5^{-5}} = \frac{5^{-7}}{5^{-5}} \times \frac{8^{-5}}{8^{-7}} = 5^{(-7)-(-5)} \times 8^{(-5)-(-7)}$

$$= 5^{-2} \times 8^2 = \frac{8^2}{5^2} = \frac{64}{25}$$

ਅਭਿਆਸ 12.1

1. ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) 3^{-2} (ii) $(-4)^{-2}$ (iii) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$

2. ਸਰਲ ਕਰੋ ਅਤੇ ਉੱਤਰ ਨੂੰ ਧਨਾਤਮਕ ਘਾਤ ਅੰਕਾਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਓ :

(i) $(-4)^5 \div (-4)^8$ (ii) $\left(\frac{1}{2^3}\right)^2$

(iii) $(-3)^4 \times \left(\frac{5}{3}\right)^4$ (iv) $(3^{-7} \div 3^{-10}) \times 3^{-5}$ (v) $2^{-3} \times (-7)^{-3}$

3. ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $(3^0 + 4^{-1}) \times 2^2$ (ii) $(2^{-1} \times 4^{-1}) \div 2^{-2}$ (iii) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$

(iv) $(3^{-1} + 4^{-1} + 5^{-1})^0$ (v) $\left\{\left(\frac{-2}{3}\right)^{-2}\right\}^2$

4. ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ : (i) $\frac{8^{-1} \times 5^3}{2^{-4}}$ (ii) $(5^{-1} \times 2^{-1}) \times 6^{-1}$

5. m ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦੇ ਲਈ $5^m \div 5^{-3} = 5^5$

6. ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ : (i) $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} - \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}\right\}^{-1}$ (ii) $\left(\frac{5}{8}\right)^{-7} \times \left(\frac{8}{5}\right)^{-4}$

7. ਸਰਲ ਕਰੋ :

(i) $\frac{25 \times t^{-4}}{5^{-3} \times 10 \times t^{-8}}$ $(t \neq 0)$ (ii) $\frac{3^{-5} \times 10^{-5} \times 125}{5^{-7} \times 6^{-5}}$

12.4 ਛੋਟੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਘਾਤ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਮਿਆਰੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉਣਾ।

ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਤੱਥਾਂ ਵੱਲ ਧਿਆਨ ਦਿਓ :

1. ਪ੍ਰਿਥਵੀ ਤੋਂ ਸੂਰਜ ਦੀ ਦੂਰੀ 149,600,000,000 m ਹੈ।
2. ਪ੍ਰਕਾਸ਼ ਦੀ ਗਤੀ 300,000,000 m/s ਹੈ।
3. ਜਮਾਤ VII ਦੀ ਗਣਿਤ ਦੀ ਕਿਤਾਬ ਦੀ ਮੋਟਾਈ 20 mm ਹੈ।
4. ਲਾਲ ਖੂਨ ਕੋਸ਼ਿਕਾਵਾਂ ਦਾ ਔਸਤ ਵਿਆਸ 0.000007 mm ਹੈ।
5. ਮਨੁੱਖ ਦੇ ਵਾਲ ਦੀ ਮੋਟਾਈ ਦੀ ਸੀਮਾ 0.005 cm ਤੋਂ 0.01 cm ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
6. ਪ੍ਰਿਥਵੀ ਤੋਂ ਚੰਦਰਮਾ ਦੀ ਦੂਰੀ ਲਗਭਗ 384,467,000 m ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
7. ਪੌਦਿਆਂ ਦੀਆਂ ਕੋਸ਼ਿਕਾਵਾਂ ਦਾ ਆਕਾਰ 0.00001275 m ਹੈ।
8. ਸੂਰਜ ਦਾ ਔਸਤ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 695000 km ਹੈ।
9. ਸਪੇਸ ਸ਼ਟਲ ਵਿੱਚ ਠੋਸ ਰੌਕਟ ਬੂਸਟਰ ਨੂੰ ਧੱਕਣ ਲਈ ਬਾਲਣ ਦਾ ਪੁੰਜ 503600 kg ਹੈ।
10. ਇੱਕ ਕਾਗਜ਼ ਦੀ ਮੋਟਾਈ 0.0016 cm ਹੈ।
11. ਕੰਪਿਊਟਰ ਚਿਪ ਦੇ ਇੱਕ ਤਾਰ ਦਾ ਵਿਆਸ 0.000003 m ਹੈ।
12. ਮਾਊਂਟ ਐਵਰਸਟ ਦੀ ਉਚਾਈ 8848 m ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਇੱਥੇ ਕੁਝ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਸੀਂ ਪੜ੍ਹ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਿਵੇਂ ਕਿ 2 cm, 8848 m, 6,95,000 km ; ਇੱਥੇ ਕੁੱਝ ਵੱਡੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ। ਜਿਵੇਂ ਕਿ 150,000,000,000 m ਅਤੇ ਕੁੱਝ ਬਹੁਤ ਛੋਟੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਜਿਵੇਂ 0.000007 m ।

ਉਪਰੋਕਤ ਤੱਥਾਂ ਦੇ ਆਧਾਰ ਤੇ ਬਹੁਤ ਵੱਡੀਆਂ ਅਤੇ ਛੋਟੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਪਹਿਚਾਣ ਕਰੋ ਅਤੇ ਨਾਲ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ।

ਬਹੁਤ ਵੱਡੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ	ਬਹੁਤ ਛੋਟੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ
150,000,000,000 m	0.000007 m
---------------	---------------
---------------	---------------
---------------	---------------
---------------	---------------

ਪਿਛਲੀ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸਿੱਖਿਆ ਕਿ ਕਿਸੇ ਬਹੁਤ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਮਿਆਰੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ $150,000,000,000 = 1.5 \times 10^{11}$ ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ 0.000007 ਨੂੰ ਮਿਆਰੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

$$0.000007 = \frac{7}{1000000} = \frac{7}{10^6} = 7 \times 10^{-6}$$

$$0.000007 \text{ m} = 7 \times 10^{-6} \text{ m}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇੱਕ ਕਾਗਜ਼ ਦੀ ਮੋਟਾਈ 0.0016 cm ਹੈ, ਲਿਖੋ।

$$0.0016 = \frac{16}{10000} = \frac{1.6 \times 10}{10^4} = 1.6 \times 10 \times 10^{-4}$$

$$= 1.6 \times 10^{-3} \text{ cm}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਇਹ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕਾਗਜ਼ ਦੀ ਮੋਟਾਈ 1.6×10^{-3} cm ਹੈ।

150000000000. ਦਸ਼ਮਲਵ 11 ਸਥਾਨ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਖਿਸਕ ਗਿਆ ਹੈ।
11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

0.000007 ਦਸ਼ਮਲਵ ਛੇ ਸਥਾਨ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਖਿਸਕ ਗਿਆ ਹੈ।
1 2 3 4 5 6

ਦੁਬਾਰਾ ਧਿਆਨ ਦਿਓ :
0.0016 ਦਸ਼ਮਲਵ ਤਿੰਨ ਸਥਾਨ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਖਿਸਕ ਗਿਆ ਹੈ।
1 2 3

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

1. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਮਿਆਰੀ ਰੂਪ ਲਿਖੋ।
   (i) 0.000000564 (ii) 0.0000021 (iii) 21600000 (iv) 15240000
2. ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਤੱਥਾਂ ਨੂੰ ਮਿਆਰੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ।

12.4.1 ਬਹੁਤ ਵੱਡੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਤੇ ਬਹੁਤ ਛੋਟੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ

ਸੂਰਜ ਦਾ ਵਿਆਸ 1.4×10^9 m ਅਤੇ ਪ੍ਰਿਥਵੀ ਦਾ ਵਿਆਸ 1.2756×10^7 m ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਵਿਆਸਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ। ਸੂਰਜ ਦਾ ਵਿਆਸ $= 1.4 \times 10^9$ m; ਪ੍ਰਿਥਵੀ ਦਾ ਵਿਆਸ $= 1.2756 \times 10^7$ m

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\frac{1.4 \times 10^9}{1.2756 \times 10^7} = \frac{1.4 \times 10^{9-7}}{1.2756} = \frac{1.4 \times 100}{1.2756}$ ਜੋ ਕਿ ਲਗਭਗ 100 ਗੁਣਾ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਸੂਰਜ ਦਾ ਵਿਆਸ, ਪ੍ਰਿਥਵੀ ਦੇ ਵਿਆਸ ਦਾ ਲਗਭਗ 100 ਗੁਣਾ ਹੈ। ਲਾਲ ਖ਼ੂਨ ਕੋਸ਼ਿਕਾਵਾਂ ਜੋ ਕਿ 0.000007 m ਮਾਪ ਦੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ ਪੌਦਿਆਂ ਦੀਆਂ ਕੋਸ਼ਿਕਾਵਾਂ ਜੋ ਕਿ 0.00001275 m ਮਾਪ ਦੀਆਂ ਹਨ, ਇਸਦੇ ਮਾਪਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰੋ।

ਲਾਲ ਖ਼ੂਨ ਕੋਸ਼ਿਕਾਵਾਂ ਦਾ ਆਕਾਰ $= 0.000007 \text{ m} = 7 \times 10^{-6}$ m

ਪੌਦਿਆਂ ਦੀਆਂ ਕੋਸ਼ਿਕਾਵਾਂ ਦਾ ਆਕਾਰ $= 0.00001275 \text{ m} = 1.275 \times 10^{-5}$ m

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, $\frac{7 \times 10^{-6}}{1.275 \times 10^{-5}} = \frac{7 \times 10^{-6-(-5)}}{1.275} = \frac{7 \times 10^{-1}}{1.275} = \frac{0.7}{1.275} = \frac{0.7}{1.3} = \frac{1}{2}$ (ਲਗਭਗ)

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਾਲ ਖ਼ੂਨ ਕੋਸ਼ਿਕਾਵਾਂ ਆਕਾਰ ਵਿੱਚ, ਪੌਦਿਆਂ ਦੀਆਂ ਕੋਸ਼ਿਕਾਵਾਂ ਦੀਆਂ ਲਗਭਗ ਅੱਧੀਆਂ ਹਨ।

ਪ੍ਰਿਥਵੀ ਦਾ ਪੁੰਜ 5.97×10^{24} kg ਅਤੇ ਚੰਦਰਮਾ ਦਾ ਪੁੰਜ 7.35×10^{22} kg ਹੈ। ਦੋਨਾਂ ਦਾ ਕੁੱਲ ਪੁੰਜ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ ?

ਕੁੱਲ ਪੁੰਜ $= 5.97 \times 10^{24} \text{ kg} + 7.35 \times 10^{22}$ kg

$= 5.97 \times 100 \times 10^{22} + 7.35 \times 10^{22}$

$= 597 \times 10^{22} + 7.35 \times 10^{22}$

$= (597 + 7.35) \times 10^{22} = 604.35 \times 10^{22}$ kg

ਜਦ ਅਸੀਂ ਮਿਆਰੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਜੋੜਦੇ ਹਾਂ ਤਦ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ 10 ਦੀਆਂ ਸਮਾਨ ਘਾਤ ਵਿੱਚ ਬਦਲਦੇ ਹਾਂ।

ਸੂਰਜ ਅਤੇ ਪ੍ਰਿਥਵੀ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦੀ ਦੂਰੀ 1.496×10^{11} m ਅਤੇ ਪ੍ਰਿਥਵੀ ਅਤੇ ਚੰਦਰਮਾ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦੀ ਦੂਰੀ 3.84×10^8 m ਹੈ। ਸੂਰਜ ਗ੍ਰਹਿਣ ਦੇ ਦੌਰਾਨ ਚੰਦਰਮਾ ਪ੍ਰਿਥਵੀ ਅਤੇ ਸੂਰਜ ਦੇ ਵਿੱਚ ਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਸਮੇਂ ਚੰਦਰਮਾ ਅਤੇ ਸੂਰਜ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦੂਰੀ ਕਿੰਨੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ?

ਸੂਰਜ ਅਤੇ ਪ੍ਰਿਥਵੀ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦੀ ਦੂਰੀ $= 1.496 \times 10^{11}$ m

ਪ੍ਰਿਥਵੀ ਅਤੇ ਚੰਦਰਮਾ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦੀ ਦੂਰੀ $= 3.84 \times 10^8$ m

ਸੂਰਜ ਅਤੇ ਚੰਦਰਮਾ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦੀ ਦੂਰੀ $= 1.496 \times 10^{11} - 3.84 \times 10^{8}$

$= 1.496 \times 1000 \times 10^{8} - 3.84 \times 10^{8}$

$= (1496 - 3.84) \times 10^{8}$ m $= 1492.16 \times 10^{8}$ m

ਉਦਾਹਰਣ 8 : ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਨੂੰ ਮਿਆਰੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਓ :

(i) 0.000035 (ii) 4050000

ਹੱਲ : (i) $0.000035 = 3.5 \times 10^{-5}$ (ii) $4050000 = 4.05 \times 10^{6}$

ਉਦਾਹਰਣ 9 : ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਸਧਾਰਨ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਓ :

(i) 3.52×10^{5} (ii) 7.54×10^{-4} (iii) 3×10^{-5}

ਹੱਲ :

(i) $3.52 \times 10^{5} = 3.52 \times 100000 = 352000$

(ii) $7.54 \times 10^{-4} = \frac{7.54}{10^{4}} = \frac{7.54}{10000} = 0.000754$

(iii) $3 \times 10^{-5} = \frac{3}{10^{5}} = \frac{3}{100000} = 0.00003$

ਇੱਕ ਵਾਰ ਦੁਬਾਰਾ ਸਾਨੂੰ ਮਿਆਰੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਸਮਾਨ ਘਾਤ ਅੰਕ ਵਾਲੀ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਬਦਲਣਾ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 12.2

1. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਮਿਆਰੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉ।
   (i) 0.0000000000085 (ii) 0.00000000000942
   (iii) 6020000000000000 (iv) 0.00000000837
   (v) 31860000000
2. ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਸਧਾਰਨ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਓ :
   (i) 3.02×10^{-6} (ii) 4.5×10^{4} (iii) 3×10^{-8}
   (iv) 1.0001×10^{9} (v) 5.8×10^{12} (vi) 3.61492×10^{6}
3. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਵਿੱਚ ਜੋ ਸੰਖਿਆ ਦਿਖਾਈ ਦੇ ਰਹੀ ਹੈ ਉਸ ਨੂੰ ਮਿਆਰੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਓ:
   (i) 1 ਮਾਈਕਰੱਨ $\frac{1}{1000000}$ m ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
   (ii) ਇੱਕ ਇਲੈਕਟਰੱਨ ਦਾ ਚਾਰਜ 0.000,000,000,000,000,000,16 ਕੂਲੰਬ (Coulomb) ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
   (iii) ਜੀਵਾਣੂ ਦਾ ਮਾਪ 0.0000005 m ਹੈ।
   (iv) ਪੌਦਿਆਂ ਦੀਆਂ ਕੋਸ਼ਿਕਾਵਾਂ ਦਾ ਮਾਪ 0.00001275 m ਹੈ।
   (v) ਮੋਟੇ ਕਾਗਜ਼ ਦੀ ਮੋਟਾਈ 0.07 mm ਹੈ।
4. ਇੱਕ ਢੇਰ ਵਿੱਚ ਪੰਜ ਕਿਤਾਬਾਂ ਹਨ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਦੀ ਮੋਟਾਈ 20 mm ਅਤੇ ਪੰਜ ਕਾਗਜ਼ਾਂ ਦੀਆਂ ਸ਼ੀਟਾਂ ਹਨ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਦੀ ਮੋਟਾਈ 0.016 mm ਹੈ। ਇਸ ਢੇਰ ਦੀ ਕੁੱਲ ਮੋਟਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਅਸੀਂ ਕੀ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀ ?

1. ਰਿਣਾਤਮਕ ਘਾਤ ਅੰਕਾਂ ਵਾਲੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਨਿਯਮਾਂ ਦਾ ਪਾਲਣ ਕਰਦੀਆਂ ਹਨ।
   (a) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ (b) $a^m \div a^n = a^{m-n}$ (c) $(a^m)^n = a^{mn}$
   (d) $a^m \times b^m = (ab)^m$ (e) $a^0 = 1$ (f) $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$
2. ਰਿਣਾਤਮਕ ਘਾਤ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਅਸੀਂ ਬਹੁਤ ਛੋਟੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਮਿਆਰੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਅਧਿਆਇ

13

ਸਿੱਧਾ ਅਤੇ ਉਲਟ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ

13.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਮੋਹਨ ਸਵੇਰੇ ਆਪਣੇ ਅਤੇ ਆਪਣੀ ਭੈਣ ਲਈ ਚਾਹ ਬਣਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਉਹ 300 mL ਪਾਣੀ, 2 ਚਮਚ ਖੰਡ, 1 ਚਮਚ ਚਾਹ - ਪੱਤੀ ਅਤੇ 50 mL ਦੁੱਧ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਉਹ ਪੰਜ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੇ ਲਈ ਚਾਹ ਬਣਾਵੇ, ਤਾਂ ਹਰੇਕ ਵਸਤੂ ਦੀ ਕਿੰਨੀ ਮਾਤਰਾ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੋਵੇਗੀ?

ਜੇਕਰ ਦੋ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਕਿਸੇ ਸਭਾ ਦੇ ਲਈ ਕੁਰਸੀਆਂ ਨੂੰ ਤਰਤੀਬ ਵਿੱਚ ਕਰਨ ਲਈ 20 ਮਿੰਟ ਦਾ ਸਮਾਂ ਲਗਾਉਂਦੇ ਹਨ, ਤਾਂ ਇਸ ਕੰਮ ਨੂੰ ਕਰਨ ਵਿੱਚ 5 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੂੰ ਕਿੰਨਾ ਸਮਾਂ ਲੱਗੇਗਾ?

ਸਾਨੂੰ ਆਪਣੇ ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਜੀਵਨ ਵਿੱਚ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਅਨੇਕ ਸਥਿਤੀਆਂ ਦਾ ਸਾਹਮਣਾ ਕਰਨਾ ਪੈਂਦਾ ਹੈ, ਇੱਥੇ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਦੇਖਣਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਰਾਸ਼ੀ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਨ ਹੋਣ ਨਾਲ ਦੂਸਰੀ ਰਾਸ਼ੀ ਵਿੱਚ ਵੀ ਪਰਿਵਰਤਨ ਹੋ ਰਿਹਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ :

(i) ਜੇਕਰ ਖਰੀਦੀਆਂ ਗਈਆਂ ਵਸਤੂਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਵਾਧਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਉਸ ਦੇ ਮੁੱਲ ਵਿੱਚ ਵੀ ਵਾਧਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(ii) ਬੈਂਕ ਵਿੱਚ ਜਿੰਨੀ ਧਨ ਰਾਸ਼ੀ ਜ਼ਿਆਦਾ ਜਮ੍ਹਾਂ ਕੀਤੀ ਜਾਵੇਗੀ, ਓਨਾ ਹੀ ਜ਼ਿਆਦਾ ਵਿਆਜ ਮਿਲੇਗਾ।

(iii) ਜੇ ਕਿਸੇ ਵਾਹਨ ਦੀ ਚਾਲ ਵਿੱਚ ਵਾਧਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਉਸਦੇ ਦੁਆਰਾ ਉਹੀ ਦੂਰੀ ਤੈਅ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਲਏ ਗਏ ਸਮੇਂ ਵਿੱਚ ਕਮੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

(iv) ਇੱਕ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਕੰਮ ਦੇ ਲਈ, ਜਿੰਨੇ ਜ਼ਿਆਦਾ ਆਦਮੀ ਕੰਮ ਤੇ ਲਗਾਏ ਜਾਣਗੇ, ਓਨਾ ਹੀ ਉਸ ਕੰਮ ਨੂੰ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਘੱਟ ਸਮਾਂ ਲੱਗੇਗਾ।

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਇੱਕ ਰਾਸ਼ੀ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਨ ਹੋਣ ਨਾਲ ਦੂਸਰੀ ਰਾਸ਼ੀ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਨ ਹੋ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਪੰਜ ਹੋਰ ਸਥਿਤੀਆਂ ਲਿਖੋ, ਜਿੱਥੇ ਇੱਕ ਰਾਸ਼ੀ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਨ ਹੋਣ ਤੇ ਦੂਸਰੀ ਰਾਸ਼ੀ ਵਿੱਚ ਵੀ ਪਰਿਵਰਤਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਮੋਹਨ ਦੁਆਰਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹਰੇਕ ਲੋੜੀਂਦੀ ਵਸਤੂ ਦੀ ਮਾਤਰਾ ਅਸੀਂ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ? ਜਾਂ ਪੰਜ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਕੰਮ ਪੂਰਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਸਮੇਂ ਦਾ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋਗੇ? ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਉੱਤਰ ਦੇਣ ਦੇ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਹੁਣ ਕੁੱਝ ਪਰਿਵਰਤਨ (variation) ਦੇ ਸੰਕਲਪਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ।

13.2 ਸਿੱਧਾ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ

ਜੇਕਰ 1 kg ਖੰਡ ਦਾ ਮੁੱਲ ₹ 18 ਹੈ, ਤਾਂ 3 kg ਖੰਡ ਦਾ ਮੁੱਲ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ? ਇਹ ₹ 54 ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਅਸੀਂ 5 kg ਜਾਂ 8 kg ਖੰਡ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰੋ :

ਖੰਡ ਦਾ ਭਾਰ (km ਵਿੱਚ)	1	3	5	6	8	10
ਮੁੱਲ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ)	18	54	90	...	...	...

(×3, ×5, ×6, ×8, ×10)

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਜਿਵੇਂ - ਜਿਵੇਂ ਖੰਡ ਦੇ ਭਾਰ ਵਿੱਚ ਵਾਧਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਤਿਵੇਂ-ਤਿਵੇਂ ਉਸਦੇ ਮੁੱਲ ਵਿੱਚ ਵੀ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵਾਧਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇਸਦਾ ਅਨੁਪਾਤ (ratio) ਅਚਲ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ।

ਇੱਕ ਹੋਰ ਉਦਾਹਰਣ ਲਓ। ਮੰਨ ਲਵੋ ਇੱਕ ਕਾਰ 60 km ਦੀ ਦੂਰੀ ਤੈਅ ਕਰਨ ਤੇ 4 ਲਿਟਰ ਪੈਟਰੋਲ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ 12 ਲਿਟਰ ਪੈਟਰੋਲ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੀ ਦੂਰੀ ਤੈਅ ਕਰੇਗੀ ? ਇਸਦਾ ਉੱਤਰ 180 km ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇਸ ਦੀ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਗਣਨਾ ਕੀਤੀ ? ਕਿਉਂਕਿ ਦੂਸਰੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ 12 ਲਿਟਰ, ਭਾਵ 4 ਲਿਟਰ ਦਾ ਤਿੰਨ ਗੁਣਾ ਪੈਟਰੋਲ ਉਪਯੋਗ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਗਈ ਦੂਰੀ ਵੀ 60 km ਦੀ ਤਿੰਨ ਗੁਣਾ ਹੋਵੇਗੀ। ਦੂਸਰੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ, ਜੇ ਪੈਟਰੋਲ ਦੀ ਖਪਤ ਤਿੰਨ ਗੁਣਾ ਹੋਵੇਗੀ, ਤਾਂ ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਗਈ ਦੂਰੀ ਵੀ ਪਹਿਲੀ ਦੂਰੀ ਤੋਂ ਤਿੰਨ ਗੁਣਾ ਹੋਵੇਗੀ। ਮੰਨ ਲਵੋ ਕਿ ਪੈਟਰੋਲ ਦੀ ਖਪਤ x ਲਿਟਰ ਹੈ ਅਤੇ ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਗਈ ਅਨੁਸਾਰੀ ਦੂਰੀ y km ਹੈ। ਹੁਣ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਕਰੋ :

ਪੈਟਰੋਲ (x) ਲਿਟਰ ਵਿੱਚ	4	8	12	15	20	25
ਦੂਰੀ (y) km ਵਿੱਚ	60	...	180	...	...	...

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜੇ x ਦੇ ਮੁੱਲ ਵਿੱਚ ਵਾਧਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ y ਦੇ ਮੁੱਲ ਵਿੱਚ ਵੀ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵਾਧਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਅਨੁਪਾਤ $\frac{x}{y}$ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਬਦਲਾਓ ਨਹੀਂ ਆਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਅਚਲ (ਮੰਨ ਲਵੋ k) ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਇਹ $\frac{1}{15}$ ਹੈ, (ਇਸਦੀ ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ)।

ਜੇ $\frac{x}{y} = k$ ਜਾਂ $x = ky$ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ x **ਅਤੇ** y **ਵਿੱਚ ਸਿੱਧਾ ਜਾਂ ਪ੍ਰਤੱਖ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ (direct proportion) ਹੈ**, ਭਾਵ ਉਹ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤੀ (directly proportional) ਹੈ। ਇਸ ਉਦਾਹਰਣ ਤੋਂ, $\frac{4}{60} = \frac{12}{180}$ ਇੱਥੇ 4 ਅਤੇ 12 ਪੈਟਰੋਲ ਦੇ ਖਪਤ ਦੀ ਲਿਟਰ ਵਿੱਚ ਮਾਤਰਾਵਾਂ (x) ਹੈ ਅਤੇ 60 ਅਤੇ 180 km ਵਿੱਚ ਦੂਰੀਆਂ (y) ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਜੇ x ਅਤੇ y ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤੱਖ ਜਾਂ ਸਿੱਧਾ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ, ਅਸੀਂ $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। [x ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ x_1, x_2 ਦੇ ਲਈ y ਦੇ ਸੰਗਤ ਮੁੱਲ ਕ੍ਰਮਵਾਰ y_1, y_2 ਹਨ।]

ਪੈਟਰੋਲ ਦੀ ਖਪਤ ਅਤੇ ਇੱਕ ਕਾਰ ਦੁਆਰਾ ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਗਈ ਦੂਰੀ ਇੱਕ ਸਿੱਧੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਖਰਚ ਕੀਤੀ ਗਈ ਕੁੱਲ ਧਨ ਰਾਸ਼ੀ ਅਤੇ ਖਰੀਦੀਆਂ ਗਈਆਂ ਵਸਤੂਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਵੀ ਸਿੱਧੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਦੀ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਹੈ।

ਸਿੱਧੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਦੀਆਂ ਕੁੱਝ ਹੋਰ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਸੋਚੋ। ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ ਕਿ ਕੀ ਮੋਹਨ (ਸ਼ੁਰੂਆਤੀ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ) ਪੰਜ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੇ ਲਈ ਚਾਹ ਬਣਾਉਣ ਦੇ ਲਈ 750 mL ਪਾਣੀ,

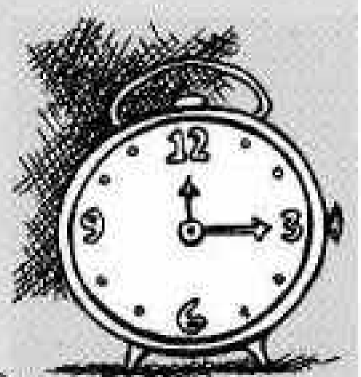
5 ਚਮਚ ਖੰਡ, $2\frac{1}{2}$ ਚਮਚ ਚਾਹ ਪੱਤੀ, 125 mL ਦੁੱਧ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰੇਗਾ। ਆਓ, ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀ ਕਿਰਿਆ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਸਿੱਧੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਦੇ ਸੰਕਲਪ ਨੂੰ ਜ਼ਿਆਦਾ ਸਮਝਣ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰੀਏ।

ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਕਰੋ

(i) • ਇੱਕ ਘੜੀ ਲਵੋ ਅਤੇ ਉਸਦੀ ਮਿੰਟਾਂ ਵਾਲੀ (ਵੱਡੀ) ਸੂਈ ਨੂੰ 12 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਕਰੋ।
• ਮਿੰਟ ਦੀ ਸੂਈ ਦੁਆਰਾ ਆਪਣੀ ਅਰੰਭਿਕ ਸਥਿਤੀ ਤੋਂ ਘੁੰਮ ਗਏ ਕੋਣਾਂ ਅਤੇ ਬੀਤੇ ਹੋਏ ਸਮੇਂ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ :

ਬਤੀਤ ਹੋਇਆ ਸਮਾਂ (T) (ਮਿੰਟਾਂ ਵਿੱਚ)	(T_1) 15	(T_2) 30	(T_3) 45	(T_4) 60
ਘੁੰਮਿਆ ਗਿਆ ਕੋਣ (A) (ਡਿਗਰੀ ਵਿੱਚ)	(A_1) 90	(A_2) ...	(A_3) ...	(A_4) ...
$\frac{T}{A}$	...	...	...	...

ਤੁਸੀਂ T ਅਤੇ A ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਕੀ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ? ਕੀ ਇਸ ਵਿੱਚ ਨਾਲ-ਨਾਲ ਵਾਧਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ? ਕੀ $\frac{T}{A}$ ਹਰੇਕ ਸਮਾਂ ਉਹ ਹੀ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ? ਕੀ ਮਿੰਟ ਦੀ ਸੂਈ ਦੁਆਰਾ ਘੁੰਮਿਆ ਗਿਆ ਕੋਣ ਬਤੀਤ ਹੋਏ ਸਮੇਂ ਦੇ ਸਿੱਧੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤੀ (directly proportional) ਹੈ? ਹਾਂ!



ਉਪਰੋਕਤ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ

$T_1 : T_2 = A_1 : A_2$, 4; ਕਿਉਂਕਿ

$T_1 : T_2 = 15 : 30 = 1:2$

$A_1 : A_2 = 90 : 180 = 1:2$

ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ ਕਿ ਕੀ $T_2 : T_3 = A_2 : A_3$ ਅਤੇ $T_1 : T_4 = A_1 : A_4$ ਹੈ।

ਤੁਸੀਂ ਖ਼ੁਦ ਆਪਣੇ ਸਮੇਂ-ਅੰਤਰਾਲ ਲੈ ਕੇ, ਇਸ ਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਦੁਹਰਾ ਸਕਦੇ ਹੋ।

(ii) ਆਪਣੇ ਮਿੱਤਰ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ ਭਰਨ ਲਈ ਕਹੋ। ਉਸਦੀ ਉਮਰ ਅਤੇ ਉਸਦੀ ਮਾਂ ਦੀ ਸੰਗਤ ਉਮਰ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਵੀ ਕਹੋ।

	ਪੰਜ ਸਾਲ ਪਹਿਲਾਂ ਦੀ ਉਮਰ	ਵਰਤਮਾਨ ਉਮਰ	ਪੰਜ ਸਾਲ ਦੇ ਬਾਅਦ ਦੀ ਉਮਰ
ਮਿੱਤਰ ਦੀ ਉਮਰ (F)			
ਮਾਂ ਦੀ ਉਮਰ (M)			
$\frac{F}{M}$			

ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਦੇਖਿਆ ਹੈ? ਕੀ F ਅਤੇ M ਵਿੱਚ ਨਾਲ-ਨਾਲ ਵਾਧਾ (ਜਾਂ ਕਮੀ) ਹੁੰਦੀ ਹੈ? $\frac{F}{M}$ ਹਰੇਕ ਵਾਰੀ ਉਹ ਹੀ ਹੈ? ਨਹੀਂ। ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਆਪਣੇ ਹੋਰ ਮਿੱਤਰਾਂ ਦੇ ਨਾਲ ਦੁਹਰਾ ਸਕਦੇ ਹੋ ਅਤੇ ਆਪਣੇ ਨਿਰੀਖਣਾਂ ਨੂੰ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਇਹ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ ਨਾਲ-ਨਾਲ ਵੱਧਦੇ (ਜਾਂ ਘੱਟਣ) ਵਾਲੇ ਚਲ ਹਮੇਸ਼ਾ ਸਿੱਧੇ ਅਨੁਪਾਤ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹੀ ਹੋਣ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ :

(i) ਮਨੁੱਖਾਂ ਵਿੱਚ ਭੌਤਿਕ ਪਰਿਵਰਤਨ ਸਮੇਂ ਦੇ ਨਾਲ ਹੁੰਦੇ ਰਹਿੰਦੇ ਹਨ, ਪਰ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਕਿ ਇਹ ਇੱਕ ਪਹਿਲਾਂ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹੀ ਹੋਣ।

(ii) ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੇ ਭਾਰ ਅਤੇ ਲੰਬਾਈ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਨ ਕਿਸੇ ਖਾਸ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

(iii) ਕਿਸੇ ਦਰੱਖਤ ਦੀ ਉਚਾਈ ਅਤੇ ਉਸਦੀਆਂ ਟਹਿਣੀਆਂ ਤੇ ਉੱਗਣ ਵਾਲੀਆਂ ਪੱਤੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਸਿੱਧਾ ਸੰਬੰਧ ਜਾਂ ਅਨੁਪਾਤ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

1. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਸਾਰਣੀਆਂ ਨੂੰ ਦੇਖੋ ਤੇ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਕੀ x ਅਤੇ y ਸਿੱਧੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹਨ।

(i)

x	20	17	14	11	8	5	2
y	40	34	28	22	16	10	4

(ii)

x	6	10	14	18	22	26	30
y	4	8	12	16	20	24	28

(iii)

x	5	8	12	15	18	20
y	15	24	36	60	72	100

2. ਮੂਲਧਨ = ₹ 1000, ਵਿਆਜ ਦਰ = 8% ਸਲਾਨਾ। ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ ਨੂੰ ਭਰੋ ਅਤੇ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ, ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਵਿਆਜ (ਸਧਾਰਨ ਜਾਂ ਮਿਸ਼ਰਿਤ) ਸਮਾਂ ਅੰਤਰਾਲ ਦੇ ਨਾਲ ਸਿੱਧੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਬਦਲਦਾ ਹੈ।

$$\frac{P \times r \times t}{100}$$

$$P\left(1+\frac{r}{100}\right)^{t}-P$$

ਸਮਾਂ ਕਾਲ/ਅੰਤਰਾਲ	1 ਸਾਲ	2 ਸਾਲ	3 ਸਾਲ
ਸਧਾਰਨ ਵਿਆਜ (ਰੁਪਏ ਵਿੱਚ)			
ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਵਿਆਜ (ਰੁਪਏ ਵਿੱਚ)			

ਸੋਚੋ, ਚਰਚਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਲਿਖੋ

ਜੇ ਅਸੀਂ ਸਮੇਂ ਅੰਤਰਾਲ ਅਤੇ ਵਿਆਜ ਦੀ ਦਰ ਸਥਿਰ ਰੱਖੀਏ, ਤਾਂ ਸਧਾਰਨ ਵਿਆਜ ਮੂਲਧਨ ਦੇ ਨਾਲ ਸਿੱਧੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਬਦਲਦਾ ਹੈ। ਕੀ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਸੰਬੰਧ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਵਿਆਜ ਦੇ ਲਈ ਵੀ ਸੰਭਵ ਹੋਵੇਗਾ? ਕਿਉਂ?

ਆਓ, ਹੁਣ ਕੁੱਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਹੱਲ ਕਰੀਏ, ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਸਿੱਧੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਦੇ ਸੰਕਲਪ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ 5 ਮੀਟਰ ਕੱਪੜੇ ਦਾ ਮੁੱਲ ₹ 210 ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ 2, 4, 10 ਅਤੇ 13 ਮੀਟਰ ਦੇ ਕੱਪੜੇ ਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਸਾਰਣੀ ਬਣਾਓ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਵੋ ਕਿ ਕੱਪੜੇ ਦੀ ਲੰਬਾਈ x ਮੀਟਰ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸਦਾ ਮੁੱਲ (₹ ਵਿੱਚ) y ਹੈ।

x	2	4	5	10	13
y	y_2	y_3	210	y_4	y_5

ਜਿਵੇਂ - ਜਿਵੇਂ ਕੱਪੜੇ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਵਿੱਚ ਵਾਧਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਉਸਦੇ ਮੁੱਲ ਵਿੱਚ ਵੀ ਉਸੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵਾਧਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਹ ਇੱਕ ਸਿੱਧੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਹੈ।

ਅਸੀਂ $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}$ ਵਰਗੇ ਸੰਬੰਧ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

(i) ਇੱਥੇ $x_1=5$, $y_1=210$ ਅਤੇ $x_2=2$ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}$ ਵਿੱਚੋਂ ਸਾਨੂੰ $\frac{5}{210}=\frac{2}{y_2}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਜਿਵੇਂ ਕਿ, $5y_2=2\times210$ ਜਾਂ $y_2=\frac{2\times210}{5}=84$

(ii) ਜਦ $x_3=4$, ਤਾਂ $\frac{5}{210}=\frac{4}{y_3}$ ਜਾਂ $5y_3=4\times210$ ਜਾਂ $y_3=\frac{4\times210}{5}=168$

[ਕੀ ਅਸੀਂ ਇੱਥੇ $\frac{x_2}{y_2}=\frac{x_3}{y_3}$ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ? ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ।]

(iii) ਜਦ $x_4=10$, ਤਾਂ $\frac{5}{210}=\frac{10}{y_4}$ ਜਾਂ $5\times y_4=10\times210$ ਜਾਂ $y_4=\frac{10\times210}{5}=420$

(iv) ਜਦ $x_5=13$, ਤਾਂ $\frac{5}{210}=\frac{13}{y_5}$ ਜਾਂ $5\times y_5=13\times210$ ਜਾਂ $y_5=\frac{13\times210}{5}=546$

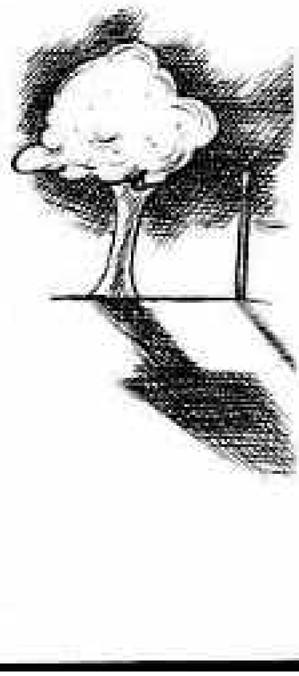
[ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ $\frac{5}{210}$ ਦੇ ਸਥਾਨ ਤੇ $\frac{2}{84}$ ਜਾਂ $\frac{4}{168}$ ਜਾਂ $\frac{10}{420}$ ਦਾ ਵੀ ਉਪਯੋਗ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।]

ਉਦਾਹਰਣ 2 : 14 ਮੀਟਰ ਉੱਚੇ ਇੱਕ ਬਿਜਲੀ ਦੇ ਖੰਭੇ ਦਾ ਪਰਛਾਵਾਂ 10 ਮੀਟਰ ਹੈ। ਸਮਾਨ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਉਸ ਦਰਖਤ ਦੀ ਉਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦਾ ਪਰਛਾਵਾਂ 15 ਮੀਟਰ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਵੋ ਕਿ ਦਰਖਤ ਦੀ ਉਚਾਈ x ਮੀਟਰ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਦਰਸਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਇੱਕ ਸਾਰਣੀ ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਾਂ :

ਵਸਤੂ ਦੀ ਉਚਾਈ (ਮੀਟਰ ਵਿੱਚ)	14	x
ਪਰਛਾਵੇਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ (ਮੀਟਰ ਵਿੱਚ)	10	15

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਵਸਤੂ ਦੀ ਉਚਾਈ ਜਿੰਨੀ ਜ਼ਿਆਦਾ ਹੋਵੇਗੀ, ਉਸਦੇ ਪਰਛਾਵੇਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਵੀ ਉਨੀ ਜ਼ਿਆਦਾ ਹੋਵੇਗੀ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਹ ਇੱਕ ਸਿੱਧੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਹੈ।



ਭਾਵ, $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}$ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ : $\frac{14}{10}=\frac{x}{15}$ (ਕਿਉਂ ?)

ਜਾਂ $\frac{14\times15}{10}=x$ ਜਾਂ $\frac{14\times3}{2}=x$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $x=21$, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਰਖਤ ਦੀ ਉਚਾਈ 21 ਮੀਟਰ ਹੈ।

ਬਦਲਵੇਂ ਢੰਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}$ ਨੂੰ $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $x_1:x_2=y_1:y_2$ ਜਾਂ $14:x=10:15$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $10\times x=15\times14$ ਜਾਂ $x=\frac{15\times14}{10}=21$

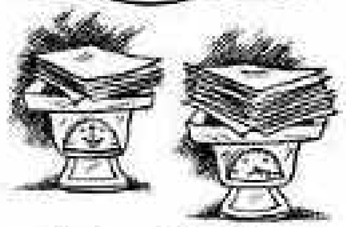
ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਜੇ ਮੋਟੇ ਕਾਗਜ਼ ਦੀ 12 ਸ਼ੀਟਾਂ (sheets) ਦਾ ਭਾਰ 40 ਗ੍ਰਾਮ ਹੈ, ਤਾਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਕਾਗਜ਼ ਦੀਆਂ ਕਿੰਨੀਆਂ ਸ਼ੀਟਾਂ ਦਾ ਭਾਰ $2\frac{1}{2}$ ਕਿਲੋਗ੍ਰਾਮ ਹੋਵੇਗਾ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਵੋ ਕਿ ਉਹਨਾਂ ਸ਼ੀਟਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ x ਹੈ ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਭਾਰ $2\frac{1}{2}$ ਕਿਲੋਗ੍ਰਾਮ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਉਪਰੋਕਤ ਸੂਚਨਾ ਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਦਰਸਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਇੱਕ ਸਾਰਣੀ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ :

ਸ਼ੀਟਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	12	x
ਸ਼ੀਟਾਂ ਦਾ ਭਾਰ (ਗ੍ਰਾਮ ਵਿੱਚ)	40	2500

1 ਕਿਲੋਗ੍ਰਾਮ = 1000 ਗ੍ਰਾਮ
$2\frac{1}{2}$ ਕਿਲੋਗ੍ਰਾਮ = 2500 ਗ੍ਰਾਮ

ਸ਼ੀਟਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਜ਼ਿਆਦਾ ਹੋਵੇਗੀ, ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਭਾਰ ਵੀ ਓਨਾ ਹੀ ਜ਼ਿਆਦਾ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸ਼ੀਟਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਭਾਰ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਸਿੱਧੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹਨ।



ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\frac{12}{40} = \frac{x}{2500}$

ਜਾਂ $\frac{12 \times 2500}{40} = x$ ਜਾਂ $750 = x$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਾਗਜ਼ ਦੀ ਸ਼ੀਟਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਖਿਆ 750 ਹੈ।

ਬਦਲਵੀਂ ਵਿਧੀ : ਦੋ ਰਾਸ਼ੀਆਂ x ਅਤੇ y ਜੋ ਸਿੱਧੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਬਦਲਦੀਆਂ ਹਨ ਉਹਨਾਂ ਵਿੱਚ

$x = ky$ ਜਾਂ $\frac{x}{y} = k$ ਦਾ ਸੰਬੰਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇੱਥੇ $k = \frac{\text{ਸ਼ੀਟਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ}}{\text{ਗ੍ਰਾਮਾਂ ਵਿੱਚ ਸ਼ੀਟਾਂ ਦਾ ਭਾਰ}} = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$

ਹੁਣ x ਉਹ ਕਾਗਜ਼ ਦੀਆਂ ਸ਼ੀਟਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਭਾਰ $2\frac{1}{2}$ kg (2500 gm) ਹੈ।

ਸੰਬੰਧ $x = ky$ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ, $x = \frac{3}{10} \times 2500 = 750$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ, ਕਾਗਜ਼ ਦੀ 750 ਸ਼ੀਟਾਂ ਦਾ ਭਾਰ $2\frac{1}{2}$ ਕਿਲੋਗ੍ਰਾਮ ਹੋਵੇਗਾ।

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਇੱਕ ਰੇਲਗੱਡੀ 75 km/h ਦੇ ਇੱਕ ਸਮਾਨ (uniform) ਚਾਲ ਤੇ ਚੱਲ ਰਹੀ ਹੈ।

(i) ਉਹ 20 ਮਿੰਟ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੀ ਦੂਰੀ ਤੈਅ ਕਰੇਗੀ ?

(ii) 250 km ਦੀ ਦੂਰੀ ਤੈਅ ਕਰਨ ਤੇ ਲੱਗਣ ਵਾਲਾ ਸਮਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਵੋ ਕਿ 20 ਮਿੰਟ ਵਿੱਚ ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਗਈ ਦੂਰੀ (km ਵਿੱਚ) x ਹੈ ਅਤੇ 250 km ਦੀ ਦੂਰੀ ਵਿੱਚ ਤੈਅ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਲੱਗਣ ਵਾਲਾ ਸਮਾਂ (ਮਿੰਟਾਂ ਵਿੱਚ) y ਹੈ।

1 ਘੰਟਾ = 60 ਮਿੰਟ

ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਗਈ ਦੂਰੀ (km ਵਿੱਚ)	75	x	250
ਲਿਆ ਗਿਆ ਸਮਾਂ (ਮਿੰਟਾਂ ਵਿੱਚ)	60	20	y

ਕਿਉਂਕਿ ਚਾਲ ਇੱਕਸਾਰ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਗਈ ਦੂਰੀ ਲਏ ਗਏ ਸਮੇਂ ਦੇ ਸਿੱਧੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹੋਵੇਗੀ।

(i) ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ : $\frac{75}{60} = \frac{x}{20}$ ਜਾਂ $\frac{75 \times 20}{60} = x$

ਜਾਂ $x = 25$ । ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਰੇਲਗੱਡੀ 20 ਮਿੰਟ ਵਿੱਚ 25 km ਦੀ ਦੂਰੀ ਤੈਅ ਕਰੇਗੀ।

(ii) ਨਾਲ ਹੀ, $\frac{75}{60} = \frac{250}{y}$

ਜਾਂ $y = \frac{250 \times 60}{75} = 200$ ਮਿੰਟ, ਜਾਂ 3 ਘੰਟੇ 20 ਮਿੰਟ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ 250 km ਦੀ ਦੂਰੀ ਤੈਅ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ 3 ਘੰਟੇ 20 ਮਿੰਟ ਦਾ ਸਮਾਂ ਲੱਗੇਗਾ।

ਬਦਲਵੇਂ ਢੰਗ ਨਾਲ, ਜੇ x ਪਤਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਸੰਬੰਧ $\frac{x}{20} = \frac{250}{y}$ ਤੋਂ y ਨੂੰ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

> ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ ਇੱਕ ਨਕਸ਼ਾ (map) ਇੱਕ ਬਹੁਤ ਵੱਡੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਛੋਟਾ ਪ੍ਰਗਟਾਵਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਨਕਸ਼ੇ ਦੇ ਸਭ ਤੋਂ ਹੇਠਾਂ ਵਾਲੇ ਹਿੱਸੇ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਪੈਮਾਨਾ (scale) ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ । ਇਹ ਪੈਮਾਨਾ ਅਸਲ ਲੰਬਾਈ ਅਤੇ ਨਕਸ਼ੇ ਤੇ ਦਰਸਾਈ ਲੰਬਾਈ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਨਕਸ਼ੇ ਦਾ ਪੈਮਾਨਾ ਨਕਸ਼ੇ ਦੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੀ ਦੂਰੀ ਅਤੇ ਵੱਡੇ ਖੇਤਰ ਤੇ ਦੋਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੀ ਅਸਲ ਦੂਰੀ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, ਜੇ ਨਕਸ਼ੇ ਤੇ 1 cm ਅਸਲ ਦੂਰੀ 8km ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ (ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਪੈਮਾਨਾ 1cm : 8 km ਜਾਂ 1 : 800000 ਹੈ), ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਨਕਸ਼ੇ ਤੇ 2cm, ਅਸਲ ਦੂਰੀ 16km ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਨਕਸ਼ੇ ਦਾ ਪੈਮਾਨਾ ਸਿੱਧੇ ਅਨੁਪਾਤ ਦੇ ਸੰਕਲਪ ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ਇੱਕ ਨਕਸ਼ੇ ਦਾ ਪੈਮਾਨਾ 1 : 30000000 ਦਿੱਤਾ ਹੈ। ਦੋ ਸ਼ਹਿਰ ਨਕਸ਼ੇ ਵਿੱਚ 4 cm ਦੀ ਦੂਰੀ ਤੇ ਹਨ। ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦੀ ਅਸਲ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਵੋ ਕਿ ਨਕਸ਼ੇ 'ਤੇ ਦੂਰੀ x cm ਹੈ ਅਤੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਦੂਰੀ y cm ਹੈ।

ਤਦ, $1 : 30000000 = x : y$ ਜਾਂ $\frac{1}{3 \times 10^7} = \frac{x}{y}$

ਕਿਉਂਕਿ $x = 4$ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ $\frac{1}{3 \times 10^7} = \frac{4}{y}$

ਜਾਂ $y = 4 \times 3 \times 10^7 = 12 \times 10^7$ cm = 1200 km

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ, ਨਕਸ਼ੇ 'ਤੇ 4 cm ਦੀ ਦੂਰੀ ਵਾਲੇ ਸ਼ਹਿਰਾਂ ਦੀ ਅਸਲ ਦੂਰੀ 1200 km ਹੈ।

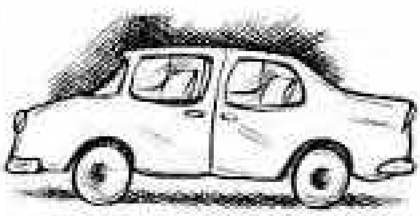
ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਕਰੋ

ਆਪਣੇ ਰਾਜ ਦਾ ਇੱਕ ਨਕਸ਼ਾ ਲਵੋ। ਉੱਥੇ ਵਰਤੇ ਪੈਮਾਨੇ ਨੂੰ ਵੀ ਲਿਖ ਲਵੋ। ਫੁੱਟੇ (ruler) ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਨਕਸ਼ੇ 'ਤੇ ਦੋ ਸ਼ਹਿਰਾਂ ਦੀ ਦੂਰੀ ਮਾਪੋ। ਇਹਨਾਂ ਦੋਨਾਂ ਸ਼ਹਿਰਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦੀ ਅਸਲ ਦੂਰੀ ਗਣਨਾ ਕਰੋ।

ਅਭਿਆਸ 13.1

1. ਇੱਕ ਰੇਲਵੇ ਸਟੇਸ਼ਨ ਦੇ ਨੇੜੇ ਕਾਰ ਪਾਰਕਿੰਗ ਫ਼ੀਸ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ—

4 ਘੰਟੇ ਤੱਕ	₹ 60
8 ਘੰਟੇ ਤੱਕ	₹ 100
12 ਘੰਟੇ ਤੱਕ	₹ 140
24 ਘੰਟੇ ਤੱਕ	₹ 180



ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ ਕਿ ਕੀ ਕਾਰ ਪਾਰਕਿੰਗ ਫ਼ੀਸ, ਪਾਰਕਿੰਗ ਸਮੇਂ ਦੇ ਸਿੱਧੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹੈ।

2. ਇੱਕ ਪੇਂਟ ਦੇ ਮੂਲ ਮਿਸ਼ਰਨ (base) ਦੇ 8 ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਲਾਲ ਰੰਗ ਦੇ ਪਦਾਰਥ ਦਾ 1 ਭਾਗ ਮਿਲਾਕੇ ਮਿਸ਼ਰਨ ਤਿਆਰ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ, ਮੂਲ ਮਿਸ਼ਰਨ ਦੇ ਉਹ ਭਾਗ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਏ ਜਾਣ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ :

ਲਾਲ ਰੰਗ ਦੇ ਪਦਾਰਥ ਦੇ ਭਾਗ	1	4	7	12	20
ਮੂਲ ਮਿਸ਼ਰਨ ਦੇ ਭਾਗ	8	...	...	...	...

3. ਪ੍ਰਸ਼ਨ 2 ਵਿੱਚ ਜੇ ਲਾਲ ਰੰਗ ਦੇ ਪਦਾਰਥ ਦੇ 1 ਭਾਗ ਦੇ ਲਈ 75 mL ਮੂਲ ਮਿਸ਼ਰਨ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ, ਤਾਂ ਮੂਲ ਮਿਸ਼ਰਨ ਦੇ 1800 mL ਵਿੱਚ ਸਾਨੂੰ ਕਿੰਨਾ ਲਾਲ ਰੰਗ ਦਾ ਪਦਾਰਥ ਮਿਲਾਉਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ?

4. ਕਿਸੇ ਸਾਫਟ ਡਰਿੰਕ ਫੈਕਟਰੀ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਮਸ਼ੀਨ 840 ਬੋਤਲਾਂ 6 ਘੰਟੇ ਵਿੱਚ ਭਰਦੀ ਹੈ ਉਹ ਮਸ਼ੀਨ ਪੰਜ ਘੰਟੇ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੀਆਂ ਬੋਤਲਾਂ ਭਰੇਗੀ ?

5. ਇੱਕ ਬੈਕਟੀਰੀਆ (bacteria) ਜਾਂ ਜੀਵਾਣੂ ਦੇ ਫੋਟੋਗ੍ਰਾਫ (ਚਿੱਤਰ) ਨੂੰ 50,000 ਗੁਣਾ ਵੱਡਾ ਕਰਨ ਤੇ ਉਸਦੀ ਲੰਬਾਈ 5 cm ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਨਾਲ ਦਿੱਤੇ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਬੈਕਟੀਰੀਆ ਦੀ ਅਸਲ ਲੰਬਾਈ ਕੀ ਹੈ ? ਜੇਕਰ ਫੋਟੋਗ੍ਰਾਫ ਨੂੰ ਸਿਰਫ 20,000 ਗੁਣਾ ਵੱਡਾ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ, ਤਾਂ ਉਸਦੀ ਵਧਾਈ ਗਈ ਲੰਬਾਈ ਕੀ ਹੋਵੇਗੀ ?

6. ਇੱਕ ਜਹਾਜ਼ ਦੇ ਮਾਡਲ ਵਿੱਚ, ਉਸਦਾ ਮਸਤੂਲ (mast) 9 cm ਉੱਚਾ ਹੈ, ਜਦ ਕਿ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਜਹਾਜ਼ ਦਾ ਮਸਤੂਲ 12 m ਉੱਚਾ ਹੈ। ਜੇ ਜਹਾਜ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 28 m ਹੈ, ਤਾਂ ਉਸਦੇ ਮਾਡਲ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਕਿੰਨੀ ਹੈ ?

7. ਮੰਨ ਲਵੋ 2kg ਖੰਡ ਵਿੱਚ 9×10^6 ਕ੍ਰਿਸਟਲ ਹਨ। ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀ ਖੰਡ ਵਿੱਚ ਖੰਡ ਦੇ ਕਿੰਨੇ ਕ੍ਰਿਸਟਲ ਹੋਣਗੇ ?
   (i) 5 kg (ii) 1.2 kg

8. ਰਸ਼ਮੀ ਦੇ ਕੋਲ ਇੱਕ ਸੜਕ ਦਾ ਨਕਸ਼ਾ ਹੈ, ਜਿਸਦੇ ਪੈਮਾਨੇ ਵਿੱਚ 1 cm ਦੀ ਦੂਰੀ 18 km ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਉਹ ਉਸ ਸੜਕ ਤੇ ਆਪਣੀ ਗੱਡੀ ਤੋਂ 72 km ਦੀ ਦੂਰੀ ਤੈਅ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਉਸ ਦੇ ਦੁਆਰਾ ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਗਈ ਦੂਰੀ ਨਕਸ਼ੇ ਵਿੱਚ ਕੀ ਹੋਵੇਗੀ ?

9. ਇੱਕ 5 m 60 cm ਉੱਚੇ ਖੜ੍ਹਵੇਂ ਖੰਭੇ ਦੇ ਪਰਛਾਵੇਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 3 m 20 cm ਹੈ। ਉਸ ਸਮੇਂ ਪਤਾ ਕਰੋ—
   (i) 10 m 50 cm ਉੱਚੇ ਇੱਕ ਹੋਰ ਖੰਭੇ ਦੇ ਪਰਛਾਵੇਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ
   (ii) ਉਸ ਖੰਭੇ ਦੀ ਉਚਾਈ ਜਿਸਦੇ ਪਰਛਾਵੇਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 5 m ਹੈ।

10. ਮਾਲ ਦਾ ਲੱਦਿਆ ਹੋਇਆ ਇੱਕ ਟਰੱਕ 25 ਮਿੰਟ ਵਿੱਚ 14km ਚਲਦਾ ਹੈ। ਜੇ ਚਾਲ ਉਹੀ ਰਹੇ, ਤਾਂ ਉਹ 5 ਘੰਟੇ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੀ ਦੂਰੀ ਤੈਅ ਕਰ ਲਵੇਗਾ ?

ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਕਰੋ

1. ਇੱਕ ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਕਾਗਜ਼ 'ਤੇ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਪੰਜ ਵਰਗ ਖਿੱਚੋ। ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀ ਸੂਚਨਾ ਨੂੰ ਇੱਕ ਸਾਰਣੀ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ :

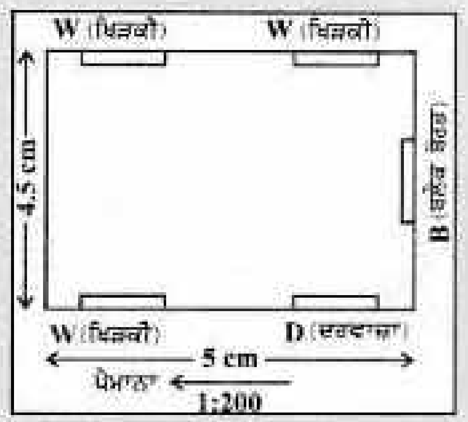
	ਵਰਗ-1	ਵਰਗ-2	ਵਰਗ-3	ਵਰਗ-4	ਵਰਗ-5
ਇੱਕ ਭੁਜਾ ਦੀ ਲੰਬਾਈ (L)					
ਪਰਿਮਾਪ (P)					
$\frac{L}{P}$					

ਖੇਤਰਫਲ (A)					
$\frac{L}{A}$					

ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਕੀ ਭੁਜਾ ਦੀ ਲੰਬਾਈ
(a) ਵਰਗ ਦੇ ਪਰਿਮਾਪ ਦੇ ਸਿੱਧੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹੈ।
(b) ਵਰਗ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦੇ ਸਿੱਧੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹੈ।

2. ਪੰਜ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੇ ਲਈ ਹਲਵਾ ਬਣਾਉਣ ਦੇ ਲਈ, ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਮੱਗਰੀ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ : ਸੂਜੀ /ਰਵਾ = 250 g, ਖੰਡ = 300 g, ਘਿਉ = 200 g, ਪਾਣੀ = 200 mL
ਸਿੱਧੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਦੇ ਸੰਕਲਪ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਆਪਣੀ ਜਮਾਤ ਦੇ ਲਈ ਹਲਵਾ ਬਣਾਉਣ ਦੇ ਲਈ, ਇਹ ਸਮੱਗਰੀਆਂ ਦੀ ਮਾਤਰਾਵਾਂ ਵਿੱਚ ਹੋਣ ਵਾਲੇ ਪਰਿਵਰਤਨਾਂ ਦਾ ਅੰਦਾਜ਼ਾ (estimate) ਲਗਾਓ।

3. ਇੱਕ ਪੈਮਾਨੇ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਆਪਣੀ ਜਮਾਤ ਦੇ ਕਮਰੇ ਦਾ ਨਕਸ਼ਾ ਖਿੱਚੋ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਖਿੜਕੀਆਂ, ਦਰਵਾਜ਼ੇ, ਬਲੈਕ ਬੋਰਡ ਆਦਿ ਦਰਸਾਏ ਗਏ ਹੋਣ। (ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਇੱਥੇ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।)



ਸੋਚੋ, ਚਰਚਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਲਿਖੋ

'ਸਿੱਧੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ (ਪਰਿਵਰਤਨ)' ਦੀਆਂ ਹੁਣ ਤੱਕ ਹੱਲ ਕੀਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੁੱਝ ਨੂੰ ਲਵੋ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਸੋਚ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਹਨਾਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਇਕਾਈ ਦੀ ਵਿਧੀ (unitary method) ਨਾਲ ਹੱਲ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ?

13.3 ਉਲਟ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ

ਦੋ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵੀ ਬਦਲ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ ਕਿ ਜੇ ਇੱਕ ਰਾਸ਼ੀ ਵਿੱਚ ਵਾਧਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਦੂਸਰੀ ਰਾਸ਼ੀ ਵਿੱਚ ਕਮੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਇੱਕ ਵਿੱਚ ਕਮੀ ਹੋਣ ਤੇ ਦੂਸਰੀ ਵਿੱਚ ਵਾਧਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ, ਜੇ ਕਿਸੇ ਕੰਮ ਲਈ ਵੱਧ ਮਜ਼ਦੂਰ ਲਗਾਏ ਜਾਂਦੇ ਹਨ ਤਾਂ ਉਹ ਕੰਮ ਘੱਟ ਸਮੇਂ ਵਿੱਚ ਪੂਰਾ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜਦ ਚਾਲ ਵੱਧ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਦੂਰੀ ਤੈਅ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਘੱਟ ਸਮਾਂ ਲੱਗਦਾ ਹੈ।

ਇਸਨੂੰ ਸਮਝਣ ਦੇ ਲਈ, ਆਓ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀ ਸਥਿਤੀ ਨੂੰ ਦੇਖੋ :

ਜਾਹਿਦਾ ਆਪਣੇ ਸਕੂਲ ਚਾਰ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਢੰਗਾਂ ਨਾਲ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਉਹ ਪੈਦਲ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ, ਦੌੜ ਕੇ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ, ਸਾਈਕਲ 'ਤੇ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਕਾਰ 'ਤੇ ਵੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਨਾਲ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਣੀ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰੋ :

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਜਦ ਚਾਲ ਵਿੱਚ ਵਾਧਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਸਮਾਨ ਦੂਰੀ ਨੂੰ ਤੈਅ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਲੱਗਣ ਵਾਲੇ ਸਮੇਂ ਵਿੱਚ ਕਮੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਜਦ ਜਾਹਿਦਾ ਦੌੜ ਕੇ ਆਪਣੀ ਚਾਲ ਦੁੱਗਣੀ ਕਰਦੀ ਹੈ, ਤਾਂ ਉਸਦੇ ਦੁਆਰਾ ਲਿਆ ਗਿਆ ਸਮਾਂ $\frac{1}{2}$ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

(×2, ×3, ×15)

	ਪੈਦਲ ਚੱਲ ਕੇ	ਦੌੜ ਕੇ	ਸਾਈਕਲ 'ਤੇ	ਕਾਰ ਦੁਆਰਾ
ਚਾਲ (km/hour ਵਿੱਚ)	3	6	9	45
ਲਿਆ ਗਿਆ ਸਮਾਂ (ਮਿੰਟਾਂ ਵਿੱਚ)	30	15	10	2

($\times\frac{1}{2}$, $\times\frac{1}{3}$, $\times\frac{1}{15}$)

ਜਦ ਉਹ ਆਪਣੀ ਚਾਲ ਸਾਈਕਲ 'ਤੇ ਤਿੰਨ ਗੁਣਾ ਕਰਦੀ ਹੈ, ਤਾਂ ਉਸਦੇ ਦੁਆਰਾ ਲਿਆ ਗਿਆ ਸਮਾਂ $\frac{1}{3}$ ਰਹਿ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜਦ ਉਹ ਆਪਣੀ ਚਾਲ 15 ਗੁਣਾ ਕਰਦੀ ਹੈ, ਤਾਂ ਉਸਦੇ ਦੁਆਰਾ ਲਿਆ ਗਿਆ ਸਮਾਂ $\frac{1}{15}$ ਰਹਿ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਸਮੇਂ ਵਿੱਚ ਹੋਣ ਵਾਲੀ ਕਮੀ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ ਚਾਲ ਵਿੱਚ ਹੋਣ ਵਾਲੀ ਅਨੁਸਾਰੀ ਵਾਧੇ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਦਾ ਉਲਟ (inverse) ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਕੀ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਗਤੀ ਅਤੇ ਸਮਾਂ ਉਲਟ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਬਦਲਦੇ ਹਨ।

> ਕਿਸੇ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਗੁਣਾਤਮਕ ਉਲਟ (inverse) ਉਸਦਾ ਉਲਟਕ੍ਰਮ (reciprocal) ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ, $\frac{1}{2}$, 2 ਦਾ ਉਲਟ ਹੈ। (ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ $2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 2 = 1$ ਹੈ।)

ਆਓ, ਇੱਕ ਹੋਰ ਉਦਾਹਰਣ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ। ਇੱਕ ਸਕੂਲ ਗਣਿਤ ਦੀਆਂ ਪਾਠ ਪੁਸਤਕਾਂ ਦੇ ਲਈ ₹ 6000 ਖਰਚ ਕਰਦਾ ਹੈ। ₹ 40 ਪ੍ਰਤੀ ਪੁਸਤਕ ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਕਿੰਨੀਆਂ ਪੁਸਤਕਾਂ ਖਰੀਦੀਆਂ ਜਾ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ ? ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ 150 ਪੁਸਤਕਾਂ ਖਰੀਦੀਆਂ ਜਾ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ। ਜਦ ਇੱਕ ਪਾਠ ਪੁਸਤਕ ਦਾ ਮੁੱਲ ₹ 40 ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਉਸੇ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਰਾਸ਼ੀ ਵਿੱਚ 150 ਤੋਂ ਘੱਟ ਪੁਸਤਕਾਂ ਖਰੀਦੀਆਂ ਜਾਣਗੀਆਂ। ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਦੇਖੋ :

ਹਰੇਕ ਪੁਸਤਕ ਦਾ ਮੁੱਲ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ)	40	50	60	75	80	100
ਖਰੀਦੀਆਂ ਜਾ ਸਕਣ ਵਾਲੀਆਂ ਪੁਸਤਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	150	120	100	80	75	60

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ ਜੇ ਹਰੇਕ ਪੁਸਤਕ ਦੇ ਮੁੱਲ ਵਿੱਚ ਵਾਧਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਫੰਡ (ਰਾਸ਼ੀ) ਵਿੱਚ ਖਰੀਦੀਆਂ ਜਾ ਸਕਣ ਵਾਲੀਆਂ ਪੁਸਤਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਕਮੀ ਹੋ ਜਾਵੇਗੀ।

ਜਦ ਪੁਸਤਕ ਦਾ ਮੁੱਲ ₹ 40 ਤੋਂ ₹ 50 ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਇਸਦੇ ਵਾਧੇ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ 4 : 5 ਹੈ ਅਤੇ ਅਨੁਸਾਰੀ ਪੁਸਤਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 150 ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੋ ਕੇ 120 ਹੋਣ ਤੇ ਅਨੁਪਾਤ 5 : 4 ਹੈ। ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ਦੋਨਾਂ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਦੇ ਉਲਟ (inverse) ਹੈ। ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਦੋਨਾਂ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰੀ ਮਾਨਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਅਚਲ ਜਿਵੇਂ ਕਿ

$$40 \times 150 = 50 \times 120 = 6000 \text{ ਹੈ।}$$

ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਹਰੇਕ ਪੁਸਤਕ ਦਾ ਮੁੱਲ (ਰੁਪਏ ਵਿੱਚ) ਨੂੰ x ਅਤੇ ਖਰੀਦੀਆਂ ਗਈਆਂ ਪੁਸਤਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ y ਨਾਲ ਦਰਸਾਈਏ, ਤਾਂ ਜਦੋਂ x ਵਿੱਚ ਵਾਧਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਤਦ y ਵਿੱਚ ਕਮੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਦੇ ਉਲਟ ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ। ਇਹ ਧਿਆਨ ਦੇਣਾ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਹੈ ਕਿ ਗੁਣਨਫਲ xy ਅਚਲ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ x, y ਦੇ ਨਾਲ ਉਲਟ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲਦਾ (varies inversely) ਹੈ ਅਤੇ y, x ਦੇ ਨਾਲ ਉਲਟ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਦੋ ਰਾਸ਼ੀਆਂ x ਅਤੇ y ਉਲਟ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਬਦਲਦੀਆਂ ਹਨ, ਜਦੋਂ ਉਸਦੇ ਮੁੱਲ ਵਿੱਚ $xy = k$ ਦਾ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੋਈ ਸੰਬੰਧ ਹੋਵੇ, ਇੱਥੇ k ਕੋਈ ਅਚਲ ਹੈ। ਜਦ x ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ x_1, x_2 ਦੇ ਲਈ y ਅਨੁਸਾਰੀ ਮੁੱਲ $y_1 y_2$ ਹਨ, ਤਾਂ $x_1 y_1 = x_2 y_2$ $(=k)$, ਜਿਵੇਂ ਕਿ $x_1/x_2 = y_2/y_1$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

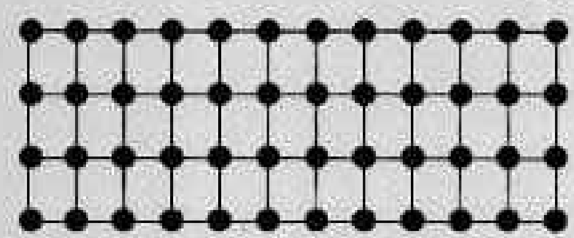
ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ x ਅਤੇ y **ਉਲਟ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ** (inverse proportion) ਵਿੱਚ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ, ਇੱਕ ਪੁਸਤਕ ਦਾ ਮੁੱਲ ਅਤੇ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਧਨ ਰਾਸ਼ੀ ਵਿੱਚ ਖਰੀਦੀਆਂ ਜਾਣ ਵਾਲੀਆਂ ਪੁਸਤਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਉਲਟ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਇੱਕ ਵਾਹਨ ਦੀ ਚਾਲ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਦੁਆਰਾ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਦੂਰੀ ਤੈਅ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਲਿਆ ਗਿਆ ਸਮਾਂ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਉਲਟ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਬਦਲਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਕੁੱਝ ਹੋਰ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਦੇ ਜੋੜਿਆਂ ਦੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਸੋਚੋ ਜੋ ਉਲਟ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਬਦਲਦੀਆਂ ਹਨ। ਹੁਣ ਤੁਸੀਂ ਫਰਨੀਚਰ ਨੂੰ ਤਰਤੀਬਵਾਰ ਕਰਨ ਦੀ ਉਹ ਸਮੱਸਿਆ ਤੇ ਧਿਆਨ ਦੇ ਸਕਦੇ ਹੋ, ਜੋ ਅਸੀਂ ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਦੀ ਭੂਮਿਕਾ ਵਿੱਚ ਬਿਆਨ ਕੀਤੀ ਸੀ।

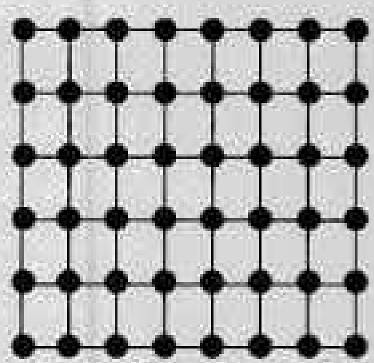
ਉਲਟ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਨੂੰ ਹੋਰ ਚੰਗੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਸਮਝਣ ਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਕਿਰਿਆ ਇੱਥੇ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹੈ।

ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਕਰੋ :

ਇੱਕ ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਕਾਗਜ਼ ਲਵੋ ਅਤੇ ਉਸ ਤੇ 48 ਕਾਊਂਟਰਾਂ (counters) ਨੂੰ ਲਾਈਨਾਂ ਦੀ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਹੇਠਾਂ ਦਰਸਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਤਰਤੀਬ ਦਿਓ।



4 ਲਾਈਨਾਂ, 12 ਕਾਲਮ



6 ਲਾਈਨਾਂ, 8 ਕਾਲਮ

ਲਾਈਨਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ (R)	(R_1) 2	(R_2) 3	(R_3) 4	(R_4) 6	(R_5) 8
ਕਾਲਮਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ (C)	(C_1) ...	(C_2) ...	(C_3) 12	(C_4) 8	(C_5) ...

ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਦੇਖਦੇ ਹੋ? ਜੇ R ਵਿੱਚ ਵਾਧਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ C ਵਿੱਚ ਕਮੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

(i) ਕੀ $R_1 : R_2 = C_2 : C_1$ ਹੈ ? (ii) ਕੀ $R_3 : R_4 = C_4 : C_3$ ਹੈ ?

(iii) ਕੀ R ਅਤੇ C ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਉਲਟ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤੀ ਹਨ ?

ਇਸ ਕਿਰਿਆ ਨੂੰ 36 ਕਾਊਂਟਰਾਂ ਦੇ ਨਾਲ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ।

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀਆਂ ਨੂੰ ਦੇਖੋ ਅਤੇ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਕਿਹੜੇ-ਕਿਹੜੇ ਚਲਾਂ (ਇੱਥੇ x ਅਤੇ y) ਦੇ ਜੋੜੇ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਉਲਟ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹਨ :

(i)

x	50	40	30	20
y	5	6	7	8

(ii)

x	100	200	300	400
y	60	30	20	15

(iii)

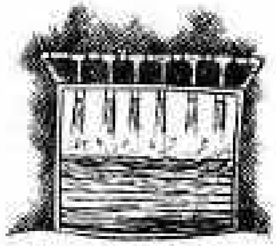
x	90	60	45	30	20	5
y	10	15	20	25	30	35

ਆਓ, ਕੁੱਝ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ ਜਿੱਥੇ ਅਸੀਂ ਉਲਟ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਦੇ ਸੰਕਲਪ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਜਦ ਰਾਸ਼ੀਆਂ x ਅਤੇ y ਪ੍ਰਤੱਖ ਜਾਂ ਸਿੱਧੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ, ਤਾਂ ਇਹ $x \propto y$ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜੇ ਦੋ ਰਾਸ਼ੀਆਂ x ਅਤੇ y ਉਲਟ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ, ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ $x \propto \frac{1}{y}$ ਵੀ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

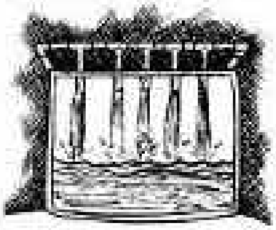
ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਇੱਕ ਟੈਂਕੀ ਨੂੰ 1 ਘੰਟੇ 20 ਮਿੰਟ ਵਿੱਚ ਭਰਨ ਦੇ ਲਈ 6 ਪਾਈਪਾਂ (pipes) ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਪੈਂਦੀ ਹੈ। ਜੇ ਉਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਕੇਵਲ 5 ਪਾਈਪਾਂ ਦਾ ਹੀ ਉਪਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ, ਤਾਂ ਉਹ ਟੈਂਕੀ ਕਿੰਨੇ ਸਮੇਂ ਵਿੱਚ ਭਰੇਗੀ ?

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਵੋ ਕਿ ਟੈਂਕੀ ਨੂੰ ਭਰਨ ਦਾ ਲੋੜੀਂਦਾ ਸਮਾਂ x ਮਿੰਟ ਹੈ। ਤਦ, ਸਾਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ :



ਪਾਈਪਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	6	5
ਸਮਾਂ (ਮਿੰਟਾਂ ਵਿੱਚ)	80	x

ਪਾਈਪਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਜਿੰਨੀ ਘੱਟ ਹੋਵੇਗੀ, ਟੈਂਕੀ ਨੂੰ ਭਰਨ ਵਿੱਚ ਓਨਾ ਹੀ ਜ਼ਿਆਦਾ ਸਮਾਂ ਲੱਗੇਗਾ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਹ ਇੱਕ ਉਲਟ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਹੈ।



ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $80 \times 6 = x \times 5 \ (x_1 y_1 = x_2 y_2)$

ਜਾਂ $\frac{80 \times 6}{5} = x$ ਜਾਂ $x = 96$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ, ਟੈਂਕੀ ਨੂੰ 5 ਪਾਈਪਾਂ ਦੁਆਰਾ 96 ਮਿੰਟ, ਜਾਂ 1 ਘੰਟਾ 36 ਮਿੰਟ ਵਿੱਚ ਭਰਿਆ ਜਾਵੇਗਾ।

ਉਦਾਹਰਣ 7 : ਇੱਕ ਹੋਸਟਲ ਵਿੱਚ 100 ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਹਨ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਭੋਜਨ ਦੀ ਸਮੱਗਰੀ 20 ਦਿਨ ਦੇ ਲਈ ਕਾਫੀ ਹੈ। ਜੇ ਇਸ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ 25 ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਹੋਰ ਆ ਜਾਣ, ਤਾਂ ਇਹ ਭੋਜਨ ਸਮੱਗਰੀ ਕਿੰਨੇ ਦਿਨ ਚੱਲੇਗੀ ?

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਵੋ ਕਿ ਭੋਜਨ ਸਮੱਗਰੀ 125 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਲਈ y ਦਿਨ ਤੱਕ ਚੱਲੇਗੀ। ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	100	125
ਦਿਨਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	20	y

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਜਿੰਨੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਜ਼ਿਆਦਾ ਹੋਣਗੇ ਉਨੇ ਹੀ ਘੱਟ ਸਮੇਂ ਵਿੱਚ ਭੋਜਨ ਸਮੱਗਰੀ ਖ਼ਤਮ ਹੋ ਜਾਵੇਗੀ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਹ ਇੱਕ ਉਲਟ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $100 \times 20 = 125 \times y$

ਜਾਂ $\frac{100 \times 20}{125} = y$

ਜਾਂ $y = 16$

ਬਦਲਵੇਂ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ $x_1 y_1 = x_2 y_2$ ਨੂੰ $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਜਿਵੇਂ ਕਿ $x_1 : x_2 = y_2 : y_1$

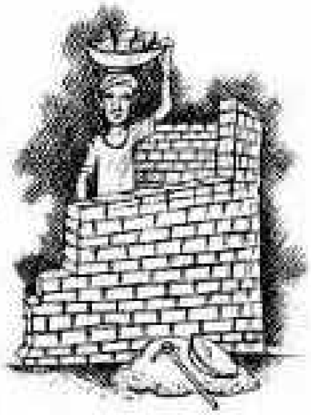
ਜਾਂ $100 : 125 = y : 20$

ਜਾਂ $y = \frac{100 \times 20}{125} = 16$

ਉਦਾਹਰਣ 8 : ਜੇ 15 ਮਜ਼ਦੂਰ ਕਿਸੇ ਦੀਵਾਰ ਨੂੰ 48 ਘੰਟੇ ਵਿੱਚ ਬਣਾ ਸਕਦੇ ਹਨ, ਤਾਂ ਇਸੇ ਕੰਮ ਨੂੰ 30 ਘੰਟੇ ਵਿੱਚ ਪੂਰਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ, ਕਿੰਨੇ ਮਜ਼ਦੂਰਾਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੋਵੇਗੀ ?

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਵੋ ਦੀਵਾਰ ਨੂੰ 30 ਘੰਟੇ ਵਿੱਚ ਬਣਾਉਣ ਲਈ y ਮਜ਼ਦੂਰਾਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ, ਤਦ ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

ਘੰਟਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	48	30
ਮਜ਼ਦੂਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	15	y



ਸਪੱਸ਼ਟ ਤੌਰ ਤੇ, ਜ਼ਿਆਦਾ ਮਜ਼ਦੂਰ ਹੋਣ ਤੇ, ਦੀਵਾਰ ਬਣਾਉਣ ਵਿੱਚ ਘੱਟ ਸਮਾਂ ਲੱਗੇਗਾ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਹ ਇੱਕ ਉਲਟ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, $48 \times 15 = 30 \times y$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\frac{48 \times 15}{30} = y$ ਜਾਂ $y = 24$

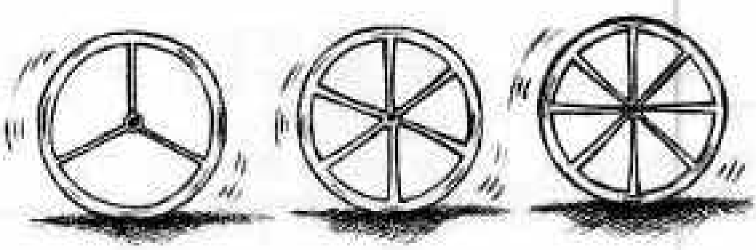
ਭਾਵ ਇਸ ਕੰਮ ਨੂੰ 30 ਘੰਟੇ ਵਿੱਚ ਖ਼ਤਮ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ 24 ਮਜ਼ਦੂਰਾਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 13.2

1. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਵਿੱਚ ਕਿਹੜੇ ਉਲਟ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹਨ ?
   (i) ਕਿਸੇ ਕੰਮ ਤੇ ਲੱਗੇ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਅਤੇ ਉਸ ਕੰਮ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਲੱਗਾ ਸਮਾਂ।
   (ii) ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਚਾਲ ਨਾਲ ਕਿਸੇ ਯਾਤਰਾ ਵਿੱਚ ਲਿਆ ਗਿਆ ਸਮਾਂ ਅਤੇ ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਦੂਰੀ।
   (iii) ਖੇਤੀ ਕੀਤੀ ਗਈ ਜ਼ਮੀਨ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਅਤੇ ਕੱਟੀ ਗਈ ਫਸਲ।
   (iv) ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਯਾਤਰਾ ਵਿੱਚ ਲਿਆ ਗਿਆ ਸਮਾਂ ਅਤੇ ਵਾਹਨ ਦੀ ਚਾਲ।
   (v) ਕਿਸੇ ਦੇਸ਼ ਦੀ ਜਨਸੰਖਿਆ ਅਤੇ ਪ੍ਰਤੀ ਵਿਅਕਤੀ ਜ਼ਮੀਨ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ।
2. ਇੱਕ ਟੈਲੀਵਿਜ਼ਨ ਗੇਮ ਸ਼ੋ (game show) ਵਿੱਚ, ₹ 1,00,000 ਦੀ ਇਨਾਮੀ ਰਾਸ਼ੀ ਜੇਤੂਆਂ ਵਿੱਚ ਬਰਾਬਰ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵੰਡੀ ਜਾਣੀ ਹੈ। ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਕੀ ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀਗਤ ਜੇਤੂ ਨੂੰ ਦਿੱਤੇ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਇਨਾਮ ਦੀ ਧਨ ਰਾਸ਼ੀ ਜੇਤੂਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਸਿੱਧੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹੈ ਜਾਂ ਉਲਟ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹੈ।

ਜੇਤੂਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	1	2	4	5	8	10	20
ਹਰੇਕ ਜੇਤੂ ਦਾ ਇਨਾਮ (₹ ਵਿੱਚ)	1,00,000	50,000	...	...	...	...	...

3. ਰਹਿਮਾਨ ਤੀਲੀਆਂ ਜਾਂ ਛੜਿਆਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਇੱਕ ਪਹੀਆ ਬਣਾ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਉਹ ਬਰਾਬਰ ਤੀਲੀਆਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਗਾਉਣਾ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸੇ ਵੀ ਲਗਾਤਾਰ ਤੀਲੀਆਂ ਦੇ ਜੋੜਿਆਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੇ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ।



ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਕਰਕੇ, ਉਸਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਕਰੋ :

ਤੀਲੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	4	6	8	10	12
ਕ੍ਰਮਾਗਤ ਤੀਲੀਆਂ ਦੇ ਇੱਕ ਜੋੜੇ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦਾ ਕੋਣ	90°	60°	...	...	...

(i) ਕੀ ਤੀਲੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਅਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਤੀਲੀਆਂ ਦੇ ਕਿਸੇ ਜੋੜੇ ਦੇ ਵਿਚਲਾ ਕੋਣ ਉਲਟ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹੈ ?

(ii) 15 ਤੀਲੀਆਂ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਪਹੀਏ ਦੇ ਲਗਾਤਾਰ ਤੀਲੀਆਂ ਦੇ ਕਿਸੇ ਜੋੜੇ ਵਿਚਲਾ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

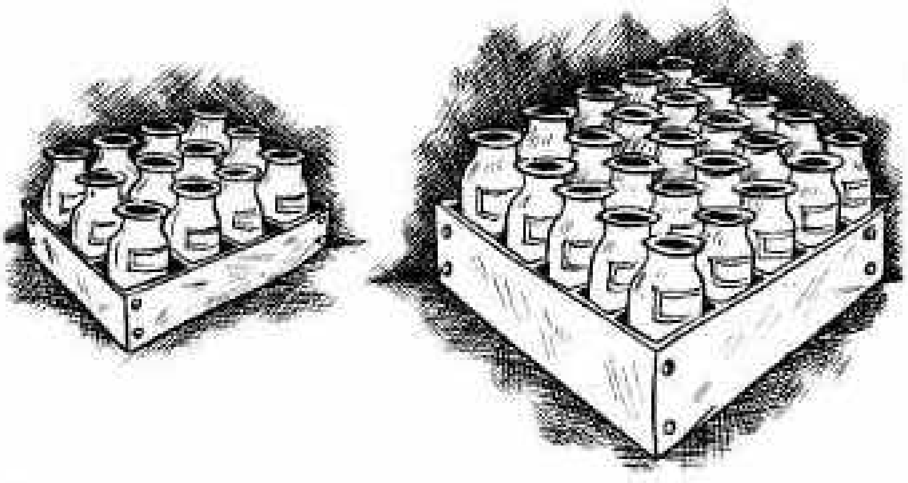
(iii) ਜੇ ਲਗਾਤਾਰ ਤੀਲੀਆਂ ਦੇ ਹਰੇਕ ਜੋੜੇ ਵਿਚਲਾ ਕੋਣ 40° ਹੈ, ਤਾਂ ਜ਼ਰੂਰੀ ਤੀਲੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਕਿੰਨੀ ਹੋਵੇਗੀ ?

4. ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਡੱਬੇ ਦੀ ਮਿਠਾਈ ਨੂੰ 24 ਬੱਚਿਆਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ, ਹਰੇਕ ਬੱਚੇ ਨੂੰ 5 ਮਿਠਾਈਆਂ ਮਿਲਦੀਆਂ ਹਨ। ਜੇ ਬੱਚਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ 4 ਦੀ ਕਮੀ ਹੋ ਜਾਵੇ, ਤਾਂ ਹਰੇਕ ਬੱਚੇ ਨੂੰ ਕਿੰਨੀਆਂ ਮਿਠਾਈਆਂ ਮਿਲਣਗੀਆਂ ?

5. ਇੱਕ ਕਿਸਾਨ ਦੀ ਡੇਅਰੀ ਵਿੱਚ 20 ਪਸ਼ੂਆਂ ਦੇ ਲਈ 6 ਦਿਨ ਦਾ ਭੋਜਨ ਪਿਆ ਹੈ। ਜੇ ਇਸ ਡੇਅਰੀ ਵਿੱਚ 10 ਪਸ਼ੂ ਹੋਰ ਆ ਜਾਣ, ਤਾਂ ਇਹ ਭੋਜਨ ਕਿੰਨੇ ਦਿਨ ਤੱਕ ਕਾਫ਼ੀ ਹੋਵੇਗਾ ?

6. ਇੱਕ ਠੇਕੇਦਾਰ ਇਹ ਗਣਨਾ ਕਰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਜਸਮਿੰਦਰ ਦੇ ਘਰ ਵਿੱਚ ਦੁਬਾਰਾ ਤਾਰ ਲਗਾਉਣ ਦਾ ਕੰਮ 3 ਵਿਅਕਤੀ 4 ਦਿਨ ਵਿੱਚ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਜੇ ਉਹ ਤਿੰਨ ਦੀ ਥਾਂ ਤੇ ਚਾਰ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਨੂੰ ਇਸ ਕੰਮ ਤੇ ਲਗਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਇਹ ਕੰਮ ਕਿੰਨੇ ਦਿਨਾਂ ਵਿੱਚ ਪੂਰਾ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ ?

7. ਬੋਤਲਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਬੈਚ (batch) ਨੂੰ 25 ਬਕਸਿਆਂ ਵਿੱਚ ਰੱਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜੇ ਹਰੇਕ ਬਕਸੇ ਵਿੱਚ 12 ਬੋਤਲਾਂ ਹਨ। ਜੇ ਇਸ ਬੈਚ ਦੀਆਂ ਬੋਤਲਾਂ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਰੱਖਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਕਿ ਹਰੇਕ ਬਕਸੇ ਵਿੱਚ 20 ਬੋਤਲਾਂ ਹੋਣ, ਤਾਂ ਕਿੰਨੇ ਬਕਸੇ ਭਰੇ ਜਾਣਗੇ ?



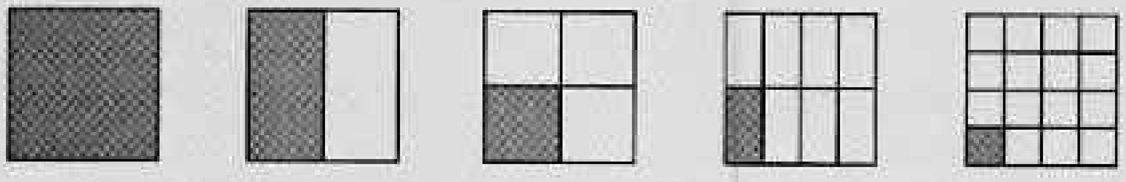
8. ਇੱਕ ਫੈਕਟਰੀ ਨੂੰ ਕੁਝ ਵਸਤੂਆਂ 63 ਦਿਨਾਂ ਵਿੱਚ ਬਣਾਉਣ ਦੇ ਲਈ 42 ਮਸ਼ੀਨਾਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਉਨ੍ਹੀਆਂ ਹੀ ਵਸਤੂਆਂ 54 ਦਿਨ ਵਿੱਚ ਬਣਾਉਣ ਦੇ ਲਈ, ਕਿੰਨੀਆਂ ਮਸ਼ੀਨਾਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੋਵੇਗੀ ?

9. ਇੱਕ ਕਾਰ ਇੱਕ ਸਥਾਨ ਤੱਕ ਪਹੁੰਚਣ ਵਿੱਚ 60 km/h ਦੀ ਚਾਲ ਵਿੱਚ ਚੱਲ ਕੇ 2 ਘੰਟਿਆਂ ਦਾ ਸਮਾਂ ਲੈਂਦੀ ਹੈ। 80 km/h ਦੀ ਚਾਲ ਨਾਲ ਉਸ ਕਾਰ ਨੂੰ ਕਿੰਨਾ ਸਮਾਂ ਲੱਗੇਗਾ ?

10. ਦੋ ਵਿਅਕਤੀ ਇੱਕ ਘਰ ਵਿੱਚ ਨਵੀਆਂ ਖਿੜਕੀਆਂ 3 ਦਿਨ ਵਿੱਚ ਲਗਾ ਸਕਦੇ ਹਨ।
    (i) ਕੰਮ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋਣ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ, ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਬੀਮਾਰ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਹੁਣ ਇਹ ਕੰਮ ਕਿੰਨੇ ਦਿਨ ਵਿੱਚ ਪੂਰਾ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ?
    (ii) ਇੱਕ ਹੀ ਦਿਨ ਵਿੱਚ ਖਿੜਕੀਆਂ ਲਗਵਾਉਣ ਦੇ ਲਈ, ਕਿੰਨੇ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੋਵੇਗੀ।
11. ਕਿਸੇ ਸਕੂਲ ਵਿੱਚ, 45 ਮਿੰਟ ਦੀ ਅੰਤਰਾਲ ਦੇ 8 ਪੀਰੀਅਡ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਹ ਕਲਪਨਾ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਕਿ ਸਕੂਲ ਦੇ ਕੰਮ ਦਾ ਸਮਾਂ ਉਨਾ ਹੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਸਕੂਲ ਵਿੱਚ ਬਰਾਬਰ ਅੰਤਰਾਲ ਦੇ 9 ਪੀਰੀਅਡ ਹੋਣ, ਤਾਂ ਹਰੇਕ ਪੀਰੀਅਡ ਕਿੰਨੇ ਸਮੇਂ ਦਾ ਹੋਵੇਗਾ?

ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਕਰੋ :

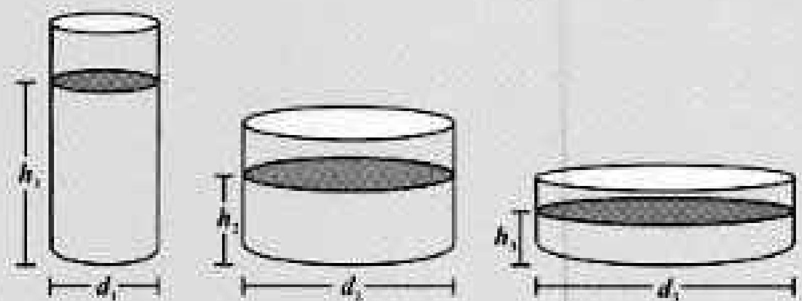
1. ਇੱਕ ਕਾਗਜ਼ ਦੀ ਸ਼ੀਟ ਲਵੋ। ਇਸ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਮੋੜੋ। ਹਰੇਕ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਭਾਗਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਅਤੇ ਇੱਕ ਭਾਗ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਲਿਖੋ।



ਆਪਣੇ ਨਿਰੀਖਣਾਂ ਦੀ ਸਾਰਣੀ ਬਣਾਉ ਅਤੇ ਉਸਦੀ ਆਪਣੇ ਮਿੱਤਰਾਂ ਵਿੱਚ ਚਰਚਾ ਕਰੋ। ਕੀ ਇਹ ਇੱਕ ਉਲਟ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਹੈ ? ਕਿਉਂ?

ਭਾਗਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	1	2	4	8	16
ਹਰੇਕ ਭਾਗ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ	ਕਾਗਜ਼ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ	ਕਾਗਜ਼ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦਾ $\frac{1}{2}$	...	...	...

2. ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਅਧਾਰ ਵਾਲੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਮਾਪਾਂ ਦੇ ਕੁਝ ਬਰਤਨ ਲਓ। ਹਰੇਕ ਬਰਤਨ ਵਿੱਚ ਪਾਣੀ ਦੀ ਸਮਾਨ ਮਾਤਰਾ ਭਰੋ। ਹਰੇਕ ਬਰਤਨ ਦਾ ਵਿਆਸ ਅਤੇ ਉਸ ਬਰਤਨ ਵਿੱਚ ਪਾਣੀ ਕਿਸ ਉਚਾਈ ਤੱਕ ਹੈ ਉਸਨੂੰ ਮਾਪ ਕੇ ਲਿਖੋ। ਆਪਣੇ ਨਿਰੀਖਣਾਂ ਦੀ ਇੱਕ ਸਾਰਣੀ ਬਣਾਉ। ਕੀ ਇਹ ਇੱਕ ਉਲਟ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਹੈ?



ਬਰਤਨ ਦਾ ਵਿਆਸ (cm ਵਿੱਚ)			
ਪਾਣੀ ਦੇ ਸਤਰ ਦੀ ਉਚਾਈ (cm ਵਿੱਚ)			

ਅਸੀਂ ਕੀ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀ ?

1. ਦੋ ਰਾਸ਼ੀਆਂ x ਅਤੇ y ਪ੍ਰਤੱਖ ਜਾਂ ਸਿੱਧੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਜਾਂ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤੀ ਕਹੀਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ, ਜੇ ਉਹ ਨਾਲ-ਨਾਲ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵੱਧਦੀਆਂ (ਘੱਟਦੀਆਂ) ਹਨ ਕਿ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰੀ ਮੁੱਲਾਂ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ ਅਚਲ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ। ਭਾਵ, ਜੇ $\frac{x}{y}=k$ ਹੋਵੇ (ਜਿੱਥੇ k ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਅਚਲ ਹੈ) ਤਾਂ x ਅਤੇ y ਨੂੰ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਸਿੱਧੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤੀ ਆਖਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਜੇ x ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ x_1, x_2 ਦੇ ਲਈ y ਅਨੁਸਾਰੀ ਮੁੱਲ ਕ੍ਰਮਵਾਰ y_1, y_2 ਹੋਣ ਤਾਂ $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
2. ਦੋ ਰਾਸ਼ੀਆਂ x ਅਤੇ y ਉਲਟ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਜਾਂ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਉਲਟ ਪਰਿਵਰਤਨ ਆਖੀਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ, ਜੇ x ਵਿੱਚ ਹੋਇਆ ਇੱਕ ਵਾਧੇ ਕਾਰਨ y ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤੀ ਕਮੀ ਹੋਵੇ ਜਾਂ x ਵਿੱਚ ਹੋਈ ਕਮੀ y ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤੀ ਵਾਧਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਕਿ ਇਸਦੇ ਅਨੁਸਾਰੀ ਮੁੱਲਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਅਚਲ ਰਹੇ। ਜਾਂ ਜੇ $xy = k$ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ x ਅਤੇ y ਨੂੰ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਉਲਟ ਪਰਿਵਰਤਨ ਆਖਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਜੇ x ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ x_1, x_2 ਦੇ ਲਈ, y ਦੇ ਅਨੁਸਾਰੀ ਮੁੱਲ ਕ੍ਰਮਵਾਰ y_1, y_2 ਹੋਵੇ ਤਾਂ $x_1y_1 = x_2y_2$ ਜਾਂ $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_2}{y_1}$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਅਧਿਆਇ

14

ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ

14.1 ਭੂਮਿਕਾ

14.1.1 ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ

ਤੁਹਾਨੂੰ ਯਾਦ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ (factors) ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਜਮਾਤ VI ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹਿਆ ਸੀ। ਆਉ, ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ। ਮੰਨ ਲਵੋ ਕਿ ਇਹ ਸੰਖਿਆ 30 ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਹੋਰ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ

$$30 = 2 \times 15$$
$$= 3 \times 10 = 5 \times 6$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 ਅਤੇ 30 ਸੰਖਿਆ 30 ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹਨ। ਇਸ ਵਿੱਚ 2, 3 ਅਤੇ 5, ਸੰਖਿਆ 30 ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹਨ (ਕਿਉਂ ?) ਜਦ ਕੋਈ ਸੰਖਿਆ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੀ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਉਹ ਉਸਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਰੂਪ ਕਹਿਲਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ 30 ਨੂੰ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਰੂਪ ਵਿੱਚ $2 \times 3 \times 5$ ਲਿਖਦੇ ਹਨ।

> ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ 30 ਨੂੰ ਇਸ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵੀ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ : $30 = 1 \times 30$
> ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, 1 ਅਤੇ 30 ਵੀ 30 ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹਨ। ਤੁਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹੋ ਕਿ 1 ਹਰੇਕ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਇੱਕ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, $101 = 1 \times 101$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
> ਪਰ ਜਦ ਵੀ ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ, ਤਾਂ ਅਸੀਂ 1 ਨੂੰ ਗੁਣਨਖੰਡ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਤੱਦ ਤੱਕ ਨਹੀਂ ਲਿਖਾਂਗੇ। ਜਦ ਤੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਨਾਲ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਾ ਹੋਵੇ।

70 ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਰੂਪ $2 \times 5 \times 7$ ਹੈ। 90 ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਰੂਪ $2 \times 3 \times 3 \times 5$ ਹੈ, ਆਦਿ।

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ, ਅਸੀਂ ਬੀਜਗਣਿਤਿਕ ਵਿਅੰਜਕਾਂ (algebraic expression) ਨੂੰ ਵੀ ਉਸਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲਾਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਸਦਾ ਅਸੀਂ ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ।

14.1.2 ਬੀਜਗਣਿਤਿਕ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ

ਅਸੀਂ ਜਮਾਤ VII ਵਿੱਚ ਦੇਖ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਕਿ ਬੀਜਗਣਿਤਿਕ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਦੇ ਪਦ (terms) ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲਾਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਣਦੇ ਹਨ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, ਬੀਜਗਣਿਤਿਕ ਵਿਅੰਜਕ $5xy + 3x$ ਵਿੱਚ, ਪਦ $5xy$ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ 5, x ਅਤੇ y ਨਾਲ ਬਣਿਆ ਹੈ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ

$$5xy = 5 \times x \times y$$

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ $5xy$ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ 5, x ਅਤੇ y ਨੂੰ ਹੋਰ ਅੱਗੇ ਗੁਣਨਖੰਡਿਤ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਨੂੰ ਗੁਣਨਫਲ

> ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ 1 ਪਦ $5xy$ ਦਾ ਇੱਕ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ
> $$5xy = 1 \times 5 \times x \times y$$
> ਅਸਲ ਵਿੱਚ, 1 ਹਰੇਕ ਪਦ ਦਾ ਇੱਕ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਜਦ ਤੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜ਼ਰੂਰਤ ਨਾ ਹੋਵੇ, ਅਸੀਂ 1 ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਵੀ ਪਦ ਦਾ ਵੱਖ ਤੋਂ ਗੁਣਨਖੰਡ ਨਹੀਂ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ।

ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਨਹੀਂ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $5xy$ ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ (prime factors) 5, x ਅਤੇ y ਹਨ। ਬੀਜਗਣਿਤਿਕ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ 'ਅਭਾਜ' ਦੇ ਸਥਾਨ ਤੇ ਸ਼ਬਦ 'ਅਖੰਡ' (irreducible) ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $5xy$ ਦਾ ਅਖੰਡ ਰੂਪ $5 \times x \times y$ ਹੈ। ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ $5 \times (xy)$ ਪਦ $5xy$ ਦਾ ਅਖੰਡ ਰੂਪ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਗੁਣਨਖੰਡ xy ਨੂੰ ਅੱਗੇ x ਅਤੇ y ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਭਾਵ $xy = x \times y$ ਹੈ।

ਹੁਣ, ਵਿਅੰਜਕ $3x(x + 2)$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਇਸ ਨੂੰ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ 3, x ਅਤੇ $(x + 2)$ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਜਿਵੇਂ ਕਿ

$$3x(x + 2) = 3 \times x \times (x + 2)$$

ਵਿਅੰਜਕ $3x(x + 2)$ ਦੇ ਅਖੰਡ ਗੁਣਨਖੰਡ 3, x ਅਤੇ $(x + 2)$ ਹਨ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਵਿਅੰਜਕ $10x(x + 2)(y + 3)$ ਨੂੰ ਅਖੰਡ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$10x(x + 2)(y + 3) = 2 \times 5 \times x \times (x + 2) \times (y + 3)$$

14.2 ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਕੀ ਹੈ ?

ਜਦ ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਬੀਜਗਣਿਤਿਕ ਵਿਅੰਜਕ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਉਸ ਨੂੰ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ। ਇਹ ਗੁਣਨਖੰਡ, ਸੰਖਿਆਵਾਂ, ਬੀਜਗਣਿਤਿਕ ਚਲ ਜਾਂ ਬੀਜਗਣਿਤਿਕ ਵਿਅੰਜਕ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ। $3xy$, $5x^2y$, $2x(y + 2)$, $5(y + 1)(x + 2)$ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਵਿਅੰਜਕ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਹੀ ਗੁਣਨਖੰਡ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹਨ। ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਹੀ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਉਪਰੋਕਤ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਦੇਖ ਕੇ ਹੀ ਪੜ੍ਹ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਇਸਦੇ ਉੱਲਟ $2x + 4$, $3x + 3y$, $x^2 + 5x$, $x^2 + 5x + 6$ ਵਰਗੇ ਵਿਅੰਜਕਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਇਹ ਸਪੱਸ਼ਟ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਕੀ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ, ਸਾਨੂੰ ਲੜੀਵਾਰ ਵਿਧੀਆਂ ਵਿਕਸਿਤ ਕਰਨ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ। ਇਹੀ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਕਰਾਂਗੇ।

14.2.1 ਸਾਂਝੇ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੀ ਵਿਧੀ

- ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਸਰਲ ਉਦਾਹਰਣ ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ : $2x + 4$ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਬਣਾਉ।
  ਅਸੀਂ ਇਸਦੇ ਹਰੇਕ ਪਦ ਨੂੰ ਅਖੰਡ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ :

$$2x = 2 \times x$$
$$4 = 2 \times 2$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$2x + 4 = (2 \times x) + (2 \times 2)$$

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਗੁਣਨਖੰਡ 2 ਦੋਨਾਂ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਸਾਂਝਾ ਹੈ।

ਦੇਖੋ, ਵੰਡਕਾਰੀ ਦੇ ਨਿਯਮ ਦੁਆਰਾ

$$2 \times (x + 2) = (2 \times x) + (2 \times 2)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$2x + 4 = 2 \times (x + 2) = 2(x + 2)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵਿਅੰਜਕ $2x + 4$ ਉਹ ਹੀ ਹੈ ਜੋ $2(x + 2)$ ਹੈ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਸਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਪੜ੍ਹ ਸਕਦੇ ਹਾਂ : ਇਹ 2 ਅਤੇ $(x + 2)$ ਹੈ। ਇਹ ਗੁਣਨਖੰਡ ਅਖੰਡ ਹਨ।

ਹੁਣ, $5xy + 10x$ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਕਰੋ।

$5xy$ ਅਤੇ $10x$ ਦੇ ਅਖੰਡ ਗੁਣਨਖੰਡ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਹਨ :

$$5xy = 5 \times x \times y$$
$$10x = 2 \times 5 \times x$$

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਦੋਨਾਂ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ 5 ਅਤੇ x ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ। ਹੁਣ,

$$5xy + 10x = (5 \times x \times y) + (5 \times x \times 2)$$
$$= (5x \times y) + (5x \times 2)$$

ਅਸੀਂ ਦੋਨਾਂ ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਵੰਡਕਾਰੀ ਦੇ ਨਿਯਮ ਦੁਆਰਾ ਸੰਯੋਜਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$(5x \times y) + (5x \times 2) = 5x \times (y + 2)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $5xy + 10x = 5x(y + 2)$ (ਇਹ ਲੋੜੀਂਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਰੂਪ ਹੈ।)

ਉਦਾਹਰਣ 1 : $12a^2b + 15ab^2$ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਬਣਾਉ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ :

$$12a^2b = 2 \times 2 \times 3 \times a \times a \times b$$
$$15ab^2 = 3 \times 5 \times a \times b \times b$$

ਇਹਨਾਂ ਦੋਨਾਂ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ 3, a ਅਤੇ b ਸਾਂਝੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹਨ

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $12a^2b + 15ab^2 = (3 \times a \times b \times 2 \times 2 \times a) + (3 \times a \times b \times 5 \times b)$

$$= 3 \times a \times b \times [(2 \times 2 \times a) + (5 \times b)]$$
$$= 3ab \times (4a + 5b) \quad \text{(ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਤੇ)}$$
$$= 3ab\,(4a + 5b) \quad \text{(ਲੋੜੀਂਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਰੂਪ)}$$

ਉਦਾਹਰਣ 2 : $10x^2 - 18x^3 + 14x^4$ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਬਣਾਉ।

ਹੱਲ :

$$10x^2 = 2 \times 5 \times x \times x$$
$$18x^3 = 2 \times 3 \times 3 \times x \times x \times x$$
$$14x^4 = 2 \times 7 \times x \times x \times x \times x$$

ਇਹਨਾਂ ਤਿੰਨਾਂ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਸਾਂਝੇ ਗੁਣਨਖੰਡ 2, x ਅਤੇ x ਹਨ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $10x^2 - 18x^3 + 14x^4 = (2 \times x \times x \times 5) - (2 \times x \times x \times 3 \times 3 \times x)$

$$+ (2 \times x \times x \times 7 \times x \times x)$$
$$= 2 \times x \times x \times [(5 - (3 \times 3 \times x) + (7 \times x \times x)]$$
$$= 2x^2 \times (5 - 9x + 7x^2) = 2x^2(7x^2 - 9x + 5) \quad \text{(ਤਿੰਨਾਂ ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ 'ਤੇ)}$$

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਰਹੇ ਹੋ ਕਿ ਇੱਕ ਵਿਅੰਜਕ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਹੀ ਪਦ ਹੁੰਦਾ ਹੈ?

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

ਗੁਣਨਖੰਡ ਬਣਾਉ :

(i) $12x + 36$ (ii) $22y - 33z$ (iii) $14pq + 35pqr$

14.2.2 ਪਦਾਂ ਦੇ ਦੁਬਾਰਾ ਸਮੂਹੀਕਰਨ ਦੁਆਰਾ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ

ਵਿਅੰਜਕ $2xy + 2y + 3x + 3$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਤੁਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹੋ ਕਿ ਪਹਿਲੇ ਦੋ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਸਾਂਝੇ ਗੁਣਨਖੰਡ 2 ਅਤੇ y ਹਨ ਅਤੇ ਆਖਰੀ ਦੋ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ 3 ਹੈ। ਪਰ ਸਾਰੇ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਾਂਗੇ ?

ਆਉ, $(2xy + 2y)$ ਨੂੰ ਗੁਣਨਖੰਡ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੀਏ।

$$2xy + 2y = (2 \times x \times y) + (2 \times y)$$
$$= (2 \times y \times x) + (2 \times y \times 1)$$
$$= (2y \times x) + (2y \times 1) = 2y\,(x + 1)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ,

$$3x + 3 = (3 \times x) + (3 \times 1)$$
$$= 3 \times (x + 1) = 3\,(x + 1)$$

ਧਿਆਨ ਦਿਓ : ਇੱਥੇ ਸਾਨੂੰ 1 ਨੂੰ ਗੁਣਨਖੰਡ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉਣ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ। ਕਿਉਂ ?

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $2xy + 2y + 3x + 3 = 2y\,(x + 1) + 3\,(x + 1)$

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਇੱਥੇ ਸੱਜੇ ਪੱਖ ਦੇ ਦੋਨਾਂ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ $(x + 1)$ ਹੈ। ਦੋਨਾਂ ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਤੇ,

$$2xy + 2y + 3x + 3 = 2y\,(x + 1) + 3\,(x + 1) = (x + 1)\,(2y + 3)$$

ਹੁਣ, ਵਿਅੰਜਕ $2xy + 2y + 3x + 3$ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੈ। ਇਸਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ $(x + 1)$ ਅਤੇ $(2y + 3)$ ਹਨ। ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਇਹ ਗੁਣਨਖੰਡ ਅਖੰਡ ਹਨ।

ਦੁਬਾਰਾ ਸਮੂਹੀਕਰਨ (regrouping) ਕੀ ਹੈ ?

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਉਪਰੋਕਤ ਵਿਅੰਜਕ $2xy + 3 + 2y + 3x$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ, ਤਦ ਇਸਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਦੇਖਣਾ ਸਰਲ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਵਿਅੰਜਕ ਨੂੰ $2xy + 2y + 3x + 3$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦੁਬਾਰਾ ਵਿਵਸਥਿਤ ਕਰਨ 'ਤੇ, ਇਸਦੇ $(2xy + 2y)$ ਅਤੇ $(3x + 3)$ ਸਮੂਹ ਬਣਾ ਕੇ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਇਹੀ ਦੁਬਾਰਾ ਸਮੂਹੀਕਰਨ ਹੈ।

ਦੁਬਾਰਾ ਸਮੂਹੀਕਰਨ ਇੱਕ ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਵਿਧੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਸੰਭਵ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਅਸੀਂ ਉਪਰੋਕਤ ਵਿਅੰਜਕ ਨੂੰ $2xy + 3x + 2y + 3$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦੁਬਾਰਾ ਸਮੂਹੀਕਰਨ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਵਿੱਚ ਵੀ ਅਸੀਂ ਗੁਣਨਖੰਡ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਆਉ, ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੀਏ :

$$\begin{aligned} 2xy + 3x + 2y + 3 &= 2 \times x \times y + 3 \times x + 2y + 3 \\ &= x \times (2y + 3) + 1 \times (2y + 3) \\ &= (2y + 3)\,(x + 1) \end{aligned}$$

ਗੁਣਨਖੰਡ ਉਹੀ ਹੈ (ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਸੀ), ਭਾਵੇਂ ਉਹ ਵੱਖ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਈ ਦੇ ਰਹੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 3 : $6xy - 4y + 6 - 9x$ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਬਣਾਉ।

ਹੱਲ :

ਪਗ 1 ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ ਕੀ ਸਾਰੇ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਕੋਈ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਪਗ 2 ਸਮੂਹੀਕਰਨ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਸੋਚੋ। ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਪਹਿਲੇ ਦੋ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ $2y$ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $6xy - 4y = 2y\,(3x - 2)$ (a)

ਅੰਤਿਮ ਦੋ ਪਦਾਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਕਿਹਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ? ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਦੇਖੋ। ਜਦ ਤੁਸੀਂ ਇਸਦਾ ਕ੍ਰਮ ਬਦਲ ਕੇ $-9x + 6$, ਲਿਖ ਲਓ ਤਾਂ ਗੁਣਨਖੰਡ $(3x - 2)$ ਆ ਜਾਵੇਗਾ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $-9x + 6 = -3\,(3x) + 3\,(2)$

$= -3\,(3x - 2)$ (b)

ਪਗ 3 (a) ਅਤੇ (b) ਨੂੰ ਇੱਕਠੇ ਰੱਖਣ 'ਤੇ,

$$\begin{aligned} 6xy - 4y + 6 - 9x &= 6xy - 4y - 9x + 6 \\ &= 2y\,(3x - 2) - 3\,(3x - 2) \\ &= (3x - 2)\,(2y - 3) \end{aligned}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $(6xy - 4y + 6 - 9x)$ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ $(3x - 2)$ ਅਤੇ $(2y - 3)$ ਹਨ।

ਅਭਿਆਸ 14.1

1. ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਪਤਾ ਕਰੋ :
   (i) $12x, 36$ (ii) $2y, 22xy$ (iii) $14\,pq, 28p^2q^2$
   (iv) $2x, 3x^2, 4$ (v) $6abc, 24ab^2, 12\,a^2b$
   (vi) $16\,x^3, -4x^2, 32x$ (vii) $10\,pq, 20qr, 30rp$
   (viii) $3x^2\,y^3, 10x^3\,y^2, 6\,x^2\,y^2z$
2. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਬਣਾਉ :
   (i) $7x - 42$ (ii) $6p - 12q$ (iii) $7a^2 + 14a$
   (iv) $-16\,z + 20\,z^3$ (v) $20\,l^2\,m + 30\,a\,l\,m$
   (vi) $5\,x^2\,y - 15\,xy^2$ (vii) $10\,a^2 - 15\,b^2 + 20\,c^2$
   (viii) $-4\,a^2 + 4\,ab - 4\,ca$ (ix) $x^2\,y\,z + x\,y^2z + x\,y\,z^2$
   (x) $a\,x^2\,y + b\,x\,y^2 + c\,x\,y\,z$

(ਤਿੰਨਾਂ ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਤੇ)

3. ਗੁਣਨਖੰਡ ਬਣਾਉ :
   (i) $x^2 + x\,y + 8x + 8y$ (ii) $15\,xy - 6x + 5y - 2$
   (iii) $ax + bx - ay - by$ (iv) $15\,pq + 15 + 9q + 25p$
   (v) $z - 7 + 7\,x\,y - x\,y\,z$

14.2.3 ਸਰਬਸਮਤਾਵਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੁਆਰਾ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{(I)}$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad \text{(II)}$$
$$(a + b)\,(a - b) = a^2 - b^2 \quad \text{(III)}$$

ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਹੱਲ ਕੀਤੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇਹ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ ਕਿ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਇਹ ਸਰਬਸਮਤਾਵਾਂ (identities) ਦਾ ਕਿਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵਿਅੰਜਕ ਨੂੰ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ। ਜੇਕਰ ਇਹ ਉਪਰੋਕਤ ਸਰਬਸਮਤਾਵਾਂ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਦੇ ਸੱਜੇ ਪੱਖ ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਉਸ ਸਰਬਸਮਤਾ ਦੇ ਖੱਬੇ ਪੱਖ ਦੇ ਸੰਗਤ ਵਿਅੰਜਕ ਤੋਂ ਲੋੜੀਂਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਜਾਂਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 4 : $x^2 + 8x + 16$ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਬਣਾਉ।

ਹੱਲ : ਇਸ ਵਿਅੰਜਕ ਨੂੰ ਦੇਖੋ। ਇਸਦੇ ਤਿੰਨ ਪਦ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਸ ਵਿੱਚ ਸਰਬਸਮਤਾ III ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ, ਇਸਦੇ ਪਹਿਲਾ ਅਤੇ ਤੀਸਰਾ ਪਦ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਹੈ ਅਤੇ ਵਿੱਚ ਵਾਲੇ ਪਦ ਦਾ ਚਿੰਨ੍ਹ ਧਨਾਤਮਕ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਹ $a^2 + 2ab + b^2$ ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੈ, ਇੱਥੇ $a = x$ ਅਤੇ $b = 4$ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, $a^2 + 2ab + b^2 = x^2 + 2\,(x)\,(4) + 4^2$
$= x^2 + 8x + 16$

ਕਿਉਂਕਿ $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$,

ਤੁਲਨਾ ਕਰਨ ਤੇ, $x^2 + 8x + 16 = (\,x + 4)^2$ (ਲੋੜੀਂਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡ)

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਵਿਅੰਜਕ $a^2 - 2ab + b^2$ ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੈ, ਇੱਥੇ $a = 2y$, $b = 3$ ਅਤੇ $2ab = 2 \times 2y \times 3 = 12y$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 5 : $4y^2 - 12y + 9$ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਬਣਾਉ।

ਹੱਲ : ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ $4y^2 = (2y)^2$, $9 = 3^2$ ਅਤੇ $12y = 2 \times 3 \times (2y)$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $4y^2 - 12y + 9 = (2y)^2 - 2 \times 3 \times (2y) + (3)^2$
$= (\,2y - 3)^2$ (ਲੋੜੀਂਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡ)

ਉਦਾਹਰਣ 6 : $49p^2 - 36$ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਬਣਾਉ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ ਦੋ ਪਦ ਹਨ। ਦੋਨੋਂ ਹੀ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਹਨ ਅਤੇ ਦੂਸਰਾ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੈ ਭਾਵ ਇਹ ਵਿਅੰਜਕ $(a^2 - b^2)$ ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਸਰਬਸਮਤਾ III ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇਗਾ।

$$49p^2 - 36 = (7p)^2 - (6)^2$$
$$= (7p - 6)(7p + 6) \text{ (ਲੋੜੀਂਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡ)}$$

ਉਦਾਹਰਣ 7 : $a^2 - 2ab + b^2 - c^2$ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਬਣਾਉ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵਿਅੰਜਕ ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਤਿੰਨ ਪਦਾਂ ਨਾਲ $(a - b)^2$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਚੌਥਾ ਪਦ ਇੱਕ ਵਰਗ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਵਿਅੰਜਕ ਨੂੰ ਦੋ ਵਰਗਾਂ ਦੇ ਅੰਤਰ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $a^2 - 2ab + b^2 - c^2 = (a - b)^2 - c^2$ (ਸਰਬਸਮਤਾ II ਨਾਲ)

$= [((a - b) - c)((a - b) + c)]$ (ਸਰਬਸਮਤਾ III ਨਾਲ)

$= (a - b - c)(a - b + c)$ (ਲੋੜੀਂਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡ)

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਲੋੜੀਂਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇੱਕ ਦੇ ਬਾਅਦ ਇੱਕ, ਦੋ ਸਰਬਸਮਤਾਵਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 8 : $m^4 - 256$ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਬਣਾਉ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $m^4 = (m^2)^2$ ਅਤੇ $256 = (16)^2$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਵਿਅੰਜਕ ਵਿੱਚ ਸਰਬਸਮਤਾ III ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਹੋਵੇਗਾ।

ਇਸ ਲਈ $m^4 - 256 = (m^2)^2 - (16)^2$

$= (m^2 - 16)(m^2 + 16)$ [(ਸਰਬਸਮਤਾ (III) ਨਾਲ]

ਹੁਣ $m^2 + 16$ ਦੇ ਅੱਗੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਨਹੀਂ ਬਣਾਏ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ, ਪਰ $(m^2 - 16)$ ਦੇ ਸਰਬਸਮਤਾ III ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨਾਲ ਹੋਰ ਵੀ ਗੁਣਨਖੰਡ ਬਣਾਏ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ।

ਹੁਣ $m^2 - 16 = m^2 - 4^2$

$= (m - 4)(m + 4)$

ਇਸ ਲਈ $m^4 - 256 = (m - 4)(m + 4)(m^2 + 16)$

14.2.4 $(x + a)(x + b)$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਗੁਣਨਖੰਡ

ਆਉ ਹੁਣ ਚਰਚਾ ਕਰੀਏ ਕਿ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਚਲ ਵਾਲੇ ਵਿਅੰਜਕਾਂ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ $x^2 + 5x + 6$, $y^2 - 7y + 12$, $z^2 - 4z - 12$, $3m^2 + 9m + 6$, ਆਦਿ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਣਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਇਹ ਵਿਅੰਜਕ $(a + b)^2$ ਜਾਂ $(a - b)^2$ ਦੇ ਕਿਸਮ ਨਹੀਂ ਹਨ, ਭਾਵ ਕਿ ਇਹ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ $x^2 + 5x + 6$ ਵਿੱਚ ਪਦ 6 ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਸਪੱਸ਼ਟ ਤੌਰ ਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਵਿਅੰਜਕ $(a^2 - b^2)$ ਦੇ ਕਿਸਮ ਦੇ ਵੀ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਪਰ ਇਹ $x^2 + (a + b)x + ab$ ਦੇ ਕਿਸਮ ਦੇ ਪ੍ਰਤੀਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਬਣਾਉਣ ਦੇ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਪਿਛਲੇ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਸਰਬਸਮਤਾ (VII) ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਹ ਸਰਬਸਮਤਾ ਹੈ :

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab \qquad \text{(IV)}$$

ਇਸਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ x ਦੇ ਗੁਣਾਂਕ (coefficient) ਅਤੇ ਅਚਲ ਪਦ ਨੂੰ ਦੇਖਣਾ ਹੋਵੇਗਾ। ਆਉ, ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਹ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 9 : $x^2 + 5x + 6$ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਬਣਾਉ।

ਹੱਲ : ਜਦ ਅਸੀਂ ਸਰਬਸਮਤਾ (IV) ਦੇ ਸੱਜੇ ਪੱਖ (RHS) ਨਾਲ $x^2 + 5x + 6$ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰੀਏ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਾਂਗੇ ਕਿ $ab = 6$ ਅਤੇ $a + b = 5$ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਸਾਨੂੰ a ਅਤੇ b ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। ਤਦ $(x + a)$ ਅਤੇ $(x + b)$ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੋਣਗੇ।

ਜੇ $ab = 6$ ਹੈ, ਤਾਂ ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ a ਅਤੇ b ਸੰਖਿਆ 6 ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹਨ।

ਆਉ, $a = 6$ ਅਤੇ $b = 1$ ਲੈ ਕੇ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੀਏ। ਇਸਦੇ ਲਈ, $a + b = 7$ ਹੈ ਅਤੇ 5 ਨਹੀਂ ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਵਿਕਲਪ ਸਹੀ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਆਉ, $a = 2$ ਅਤੇ $b = 3$ ਲੈ ਕੇ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੀਏ। ਇਸਦੇ ਲਈ, $a + b = 5$ ਹੈ, ਜੋ ਠੀਕ ਉਹੀ ਹੈ ਜੋ ਅਸੀਂ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ।

ਤਦ, ਇਸ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵਿਅੰਜਕ ਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਰੂਪ $(x + 2)(x + 3)$ ਹੈ।

> ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ, $x^2 + px + q$ ਕਿਸਮ ਦੇ ਬੀਜਗਣਿਤਿਕ ਵਿਅੰਜਕ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ, ਅਸੀਂ q ਦੇ (ਭਾਵ ਅਚਲ ਪਦ ਦੇ) ਦੋ ਗੁਣਨਖੰਡ a ਅਤੇ b ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ
>
> $ab = q$ ਅਤੇ $a + b = p$ ਹੈ।
>
> ਤਦ, ਇਹ ਵਿਅੰਜਕ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ : $x^2 + (a + b)x + ab$
>
> ਜਾਂ $x^2 + ax + bx + ab$
>
> ਜਾਂ $x(x + a) + b(x + a)$
>
> ਜਾਂ $(x + a)(x + b)$ ਜੋ, ਲੋੜੀਂਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 10 : $y^2 - 7y + 12$ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਬਣਾਉ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $12 = 3 \times 4$ ਅਤੇ $3 + 4 = 7$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $y^2 - 7y + 12 = y^2 - 3y - 4y + 12$

$= y(y - 3) - 4(y - 3) = (y - 3)(y - 4)$

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਇਸ ਵਾਰ a ਅਤੇ b ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ, ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਵਿਅੰਜਕ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਸਰਬਸਮਤਾ IV ਨਾਲ ਨਹੀਂ ਕੀਤੀ। ਕਾਫੀ ਅਭਿਆਸ ਦੇ ਬਾਅਦ, ਤੁਹਾਨੂੰ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਉਸਦੀ ਤੁਲਨਾ ਸਰਬਸਮਤਾ ਦੇ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਨਾਲ ਕਰਨ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਨਹੀਂ ਹੈ ਅਤੇ ਤੁਸੀਂ ਸਿੱਧੇ ਹੀ ਗੁਣਨਖੰਡ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਉੱਪਰ ਕੀਤਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 11 : $z^2 - 4z - 12$ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਬਣਾਉ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $ab = -12$ ਹੈ। ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ a ਅਤੇ b ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ, $a + b = -4$ ਹੈ। ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ ਮੁੱਲ ਵਾਲਾ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੈ। ਅਸੀਂ $a = -4$ ਅਤੇ $b = 3$; ਲੈ ਕੇ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਪਰੰਤੂ ਇਹ ਕੰਮ ਨਹੀਂ ਕਰੇਗਾ, ਕਿਉਂਕਿ $a + b = -1$ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਅਗਲੇ ਸੰਭਵ ਮੁੱਲ $a = -6$ ਅਤੇ $b = 2$ ਹੈ, ਤਦ $a + b = -4$ ਹੈ, ਜੋ ਸਾਨੂੰ ਚਾਹੀਦਾ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $z^2 - 4z - 12 = z^2 - 6z + 2z - 12$

$= z(z - 6) + 2(z - 6)$

$= (z - 6)(z + 2)$

ਉਦਾਹਰਣ 12 : $3m^2 + 9m + 6$ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਬਣਾਉ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ 3 ਸਾਰੇ ਪਦਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $3m^2 + 9m + 6 = 3(m^2 + 3m + 2)$

ਹੁਣ, $m^2 + 3m + 2 = m^2 + m + 2m + 2$ (ਕਿਉਂਕਿ $2 = 1 \times 2$)

$= m(m + 1) + 2(m + 1)$

$= (m + 1)(m + 2)$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $3m^2 + 9m + 6 = 3(m + 1)(m + 2)$

ਅਭਿਆਸ 14.2

1. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਬਣਾਉ।
   (i) $a^2 + 8a + 16$ (ii) $p^2 - 10p + 25$ (iii) $25m^2 + 30m + 9$
   (iv) $49y^2 + 84yz + 36z^2$ (v) $4x^2 - 8x + 4$
   (vi) $121b^2 - 88bc + 16c^2$
   (vii) $(l + m)^2 - 4lm$ (ਸੰਕੇਤ : ਪਹਿਲਾ $(l + m)^2$ ਨੂੰ ਵਿਸਥਾਰ ਕਰੋ)
   (viii) $a^4 + 2a^2b^2 + b^4$
2. ਗੁਣਨਖੰਡ ਬਣਾਉ।
   (i) $4p^2 - 9q^2$ (ii) $63a^2 - 112b^2$ (iii) $49x^2 - 36$
   (iv) $16x^5 - 144x^3$ (v) $(l + m)^2 - (l - m)^2$
   (vi) $9x^2y^2 - 16$ (vii) $(x^2 - 2xy + y^2) - z^2$
   (viii) $25a^2 - 4b^2 + 28bc - 49c^2$
3. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਬਣਾਉ।
   (i) $ax^2 + bx$ (ii) $7p^2 + 21q^2$ (iii) $2x^3 + 2xy^2 + 2xz^2$
   (iv) $am^2 + bm^2 + bn^2 + an^2$ (v) $(lm + l) + m + 1$
   (vi) $y(y + z) + 9(y + z)$ (vii) $5y^2 - 20y - 8z + 2yz$
   (viii) $10ab + 4a + 5b + 2$ (ix) $6xy - 4y + 6 - 9x$
4. ਗੁਣਨਖੰਡ ਬਣਾਉ।
   (i) $a^4 - b^4$ (ii) $p^4 - 81$ (iii) $x^4 - (y + z)^4$
   (iv) $x^4 - (x - z)^4$ (v) $a^4 - 2a^2b^2 + b^4$
5. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਬਣਾਉ।
   (i) $p^2 + 6p + 8$ (ii) $q^2 - 10q + 21$ (iii) $p^2 + 6p - 16$

14.3 ਬੀਜਗਣਿਤਿਕ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਦੀ ਵੰਡ

ਅਸੀਂ ਸਿੱਖ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਕਿ ਬੀਜਗਣਿਤਿਕ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਨੂੰ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜੋੜਿਆ ਅਤੇ ਘਟਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦੋ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਦੀ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਗੁਣਾ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਬੀਜਗਣਿਤਿਕ ਵਿਅੰਜਕ ਨਾਲ ਦੂਸਰੇ ਵਿਅੰਜਕ ਦੀ ਵੰਡ ਤੇ ਹੁਣ ਤੱਕ ਚਰਚਾ ਨਹੀਂ ਕੀਤੀ ਹੈ ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਇਹੀ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ।

ਤੁਹਾਨੂੰ ਯਾਦ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਵੰਡ (division) ਗੁਣਾ (multiplication) ਦੀ ਉੱਲਟ ਕਿਰਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, $7 \times 8 = 56$ ਨਾਲ $56 \div 8 = 7$ ਜਾਂ $56 \div 7 = 8$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਹੀ ਅਸੀਂ ਬੀਜਗਣਿਤਿਕ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਦੇ ਵੰਡਣ (ਜਾਂ ਭਾਗ ਦੇਣ) ਦੇ ਲਈ ਵੀ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ,

(i) $2x \times 3x^2 = 6x^3$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $6x^3 \div 2x = 3x^2$

ਅਤੇ ਨਾਲ ਹੀ $6x^3 \div 3x^2 = 2x$

(ii) $5x\,(x + 4) = 5x^2 + 20x$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $(5x^2 + 20x) \div 5x = x + 4$

ਅਤੇ ਨਾਲ ਹੀ, $(5x^2 + 20x) \div (x + 4) = 5x$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਧਿਆਨ ਨਾਲ ਦੇਖਾਂਗੇ ਕਿ ਇੱਕ ਵਿਅੰਜਕ ਨੂੰ ਹੋਰ ਵਿਅੰਜਕ ਨਾਲ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵੰਡਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਪਦੀ (monomial) ਦੀ ਇੱਕ ਪਦੀ ਨਾਲ ਵੰਡ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ।

14.3.1 ਇੱਕ ਪਦੀ ਦੀ ਇੱਕ ਹੋਰ ਪਦੀ ਨਾਲ ਵੰਡ

$6x^3 \div 2x$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

ਅਸੀਂ $2x$ ਅਤੇ $6x^3$ ਨੂੰ ਅਖੰਡ ਗੁਣਨਖੰਡ ਰੂਪਾਂ ਵਿੱਚ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :

$$2x = 2 \times x$$

$$6x^3 = 2 \times 3 \times x \times x \times x$$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ $2x$ ਨੂੰ ਵੱਖ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ, $6x^3$ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਾਂ

$$6x^3 = 2 \times x \times (3 \times x \times x) = (2x) \times (3x^2)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, $6x^3 \div 2x = 3x^2$

ਸਾਂਝੇ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਨੂੰ ਕੱਟਣ ਦੀ ਇੱਕ ਸੰਖੇਪ ਵਿਧੀ ਉਹ ਹੈ ਕਿ ਜੋ ਅਸੀਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਵੰਡ ਵਿੱਚ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਜਿਵੇਂ ਕਿ $$77 \div 7 = \frac{77}{7} = \frac{7 \times 11}{7} = 11$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, $$6x^3 \div 2x = \frac{6x^3}{2x}$$

$$= \frac{2 \times 3 \times x \times x \times x}{2 \times x} = 3 \times x \times x = 3x^2$$

ਉਦਾਹਰਣ 13 : ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਦੀ ਵੰਡ ਕਰੋ :

(i) $-20x^4 \div 10x^2$ (ii) $7x^2y^2z^2 \div 14xyz$

ਹੱਲ :

(i) $-20x^4 = -2 \times 2 \times 5 \times x \times x \times x \times x$

$10x^2 = 2 \times 5 \times x \times x$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$(-20x^4) \div 10x^2 = \frac{-2 \times 2 \times 5 \times x \times x \times x \times x}{2 \times 5 \times x \times x} = -2 \times x \times x = -2x^2$$

(ii) $$7x^2y^2z^2 \div 14xyz = \frac{7 \times x \times x \times y \times y \times z \times z}{2 \times 7 \times x \times y \times z}$$

$$= \frac{x \times y \times z}{2} = \frac{1}{2}xyz$$

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

ਭਾਗ ਦਿਉ :

(i) $24xy^2z^3$ ਨੂੰ $6yz^2$ ਨਾਲ (ii) $63a^2b^4c^6$ ਨੂੰ $7a^2b^2c^3$ ਨਾਲ

14.3.2 ਇੱਕ ਬਹੁਪਦ ਦਾ ਇੱਕ ਪਦੀ ਨਾਲ ਵੰਡ

ਆਉ, ਇੱਕ ਤਿੰਨ ਪਦੀ (trinomial) $4y^3 + 5y^2 + 6y$ ਦਾ ਇੱਕ ਪਦੀ $2y$ ਨਾਲ ਵੰਡ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

$$4y^3 + 5y^2 + 6y = (2 \times 2 \times y \times y \times y) + (5 \times y \times y) + (2 \times 3 \times y)$$

[ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਬਹੁਪਦ (polynomial) ਦੇ ਹਰੇਕ ਪਦ ਨੂੰ ਗੁਣਨਖੰਡ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ।] ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $2 \times y$ ਦੋ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ ਨਾਲ ਹੀ, ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਤੀਸਰੇ ਪਦ $5y^2$ ਦੇ ਲਈ ਵੀ ਇੱਕ ਸਾਂਝੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਤਦ, ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$4y^3 + 5y^2 + 6y = 2 \times y \times (2 \times y \times y) + 2 \times y \times \left(\frac{5}{2} \times y\right) + 2 \times y \times 3$$

$$= 2y\,(2y^2) + 2y\left(\frac{5}{2}y\right) + 2y\,(3)$$

$$= 2y\left(2y^2 + \frac{5}{2}y + 3\right)$$ (ਸਾਂਝੇ ਗੁਣਨਖੰਡ $2y$ ਨੂੰ ਵੱਖ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ)

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $(4y^3 + 5y^2 + 6y) \div 2y$

$$= \frac{4y^3 + 5y^2 + 6y}{2y} = \frac{2y(2y^2 + \frac{5}{2}y + 3)}{2y} = 2y^2 + \frac{5}{2}y + 3$$

ਬਦਲਵੇਂ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਤਿੰਨ ਪਦੀ ਦੇ ਹਰੇਕ ਪਦ ਨੂੰ ਕੱਟਣ ਦੀ ਵਿਧੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਉਸ ਨੂੰ ਇੱਕ ਪਦੀ ਨਾਲ ਭਾਗ ਦੇ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :

ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਅੰਸ਼ ਵਿੱਚ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਹਰੇਕ ਪਦ ਨੂੰ ਹਰ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਪਦੀ ਨਾਲ ਭਾਗ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ।

$$(4y^3 + 5y^2 + 6y) \div 2y = \frac{4y^3 + 5y^2 + 6y}{2y}$$

$$= \frac{4y^3}{2y} + \frac{5y^2}{2y} + \frac{6y}{2y} = 2y^2 + \frac{5}{2}y + 3$$

ਉਦਾਹਰਣ 14 : ਉਪਰੋਕਤ ਦੋਨਾਂ ਵਿਧੀਆਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, $24(x^2yz + xy^2z + xyz^2)$ ਨੂੰ $8xyz$ ਨਾਲ ਭਾਗ ਦਿਉ।

ਹੱਲ : $24\,(x^2yz + xy^2z + xyz^2)$

$$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times [(x \times x \times y \times z) + (x \times y \times y \times z) + (x \times y \times z \times z)]$$

$$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times x \times y \times z \times (x + y + z)$$ (ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਬਾਹਰ ਲੈਣ 'ਤੇ)

$$= 8 \times 3 \times xyz \times (x + y + z)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $24\,(x^2yz + xy^2z + xyz^2) \div 8xyz$

$$= \frac{8 \times 3 \times xyz \times (x + y + z)}{8 \times xyz} = 3 \times (x + y + z) = 3\,(x + y + z)$$

ਬਦਲਵੇਂ ਰੂਪ ਵਿੱਚ $24(x^2yz + xy^2z + xyz^2) \div 8xyz = \dfrac{24x^2yz}{8xyz} + \dfrac{24xy^2z}{8xyz} + \dfrac{24xyz^2}{8xyz}$

$$= 3x + 3y + 3z = 3(x + y + z)$$

14.4 ਬਹੁਪਦ ਦਾ ਬਹੁਪਦ ਨਾਲ ਵੰਡ

- $(7x^2 + 14x) \div (x + 2)$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

  ਹਰ ਦੇ ਨਾਲ $(7x^2 + 14x)$ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੀ ਪੜਤਾਲ ਅਤੇ ਮੇਲ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ, ਪਹਿਲਾਂ ਇਸਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਬਣਾਵਾਂਗੇ।

$$7x^2 + 14x = (7 \times x \times x) + (2 \times 7 \times x)$$

$$= 7 \times x \times (x + 2) = 7x(x + 2)$$

ਹੁਣ, $(7x^2 + 14x) \div (x + 2) = \dfrac{7x^2 + 14x}{x + 2}$

$$= \frac{7x(x + 2)}{x + 2} = 7x$$ (ਗੁਣਨਖੰਡ $(x + 2)$ ਨੂੰ ਕੱਟਣ 'ਤੇ)

ਉਦਾਹਰਣ 15 : $44(x^4 - 5x^3 - 24x^2)$ ਨੂੰ $11x\,(x - 8)$ ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $44(x^4 - 5x^3 - 24x^2)$, ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਕਰਨ ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$44(x^4 - 5x^3 - 24x^2) = 2 \times 2 \times 11 \times x^2(x^2 - 5x - 24)$$

(ਬਰੈਕਟਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ x^2 ਬਾਹਰ ਕਰਨ 'ਤੇ)

$$= 2 \times 2 \times 11 \times x^2(x^2 - 8x + 3x - 24)$$

$$= 2 \times 2 \times 11 \times x^2\,[x\,(x - 8) + 3(x - 8)]$$

$$= 2 \times 2 \times 11 \times x^2\,(x - 8)\,(x + 3)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $44(x^4 - 5x^3 - 24x^2) \div 11x(x - 8)$

$$= \frac{2 \times 2 \times 11 \times x \times x \times (x + 3) \times (x - 8)}{11 \times x \times (x - 8)}$$

$$= 2 \times 2 \times x\,(x + 3) = 4x(x + 3)$$

ਉਦਾਹਰਣ **16 :** $z(5z^2 - 80)$ ਨੂੰ $5z(z + 4)$ ਨਾਲ ਭਾਗ ਦਿਉ।

> ਅਸੀਂ ਅੰਸ਼ ਅਤੇ ਹਰ ਵਿੱਚੋਂ ਸਾਂਝੇ ਗੁਣਨਖੰਡ 11, x ਅਤੇ $(x - 8)$ ਨੂੰ ਕੱਟ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ।

ਹੱਲ : ਭਾਜ $= z(5z^2 - 80)$

$= z[(5 \times z^2) - (5 \times 16)]$

$= z \times 5 \times (z^2 - 16)$

$= 5z \times (z + 4)(z - 4)$ [ਸਰਬਸਮਤਾ $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ 'ਤੇ]

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, $z(5z^2 - 80) \div 5z(z + 4) = \dfrac{5z(z - 4)(z + 4)}{5z(z + 4)} = (z - 4)$

ਅਭਿਆਸ 14.3

1. ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਦੀ ਵੰਡ ਕਰੋ :
   (i) $28x^4 \div 56x$ (ii) $-36y^3 \div 9y^2$ (iii) $66pq^2r^3 \div 11qr^2$
   (iv) $34x^3y^3z^3 \div 51xy^2z^3$ (v) $12a^8b^8 \div (-6a^6b^4)$
2. ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਬਹੁਪਦ ਨੂੰ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਇੱਕ ਪਦੀ ਨਾਲ ਭਾਗ ਦਿਉ :
   (i) $(5x^2 - 6x) \div 3x$ (ii) $(3y^8 - 4y^6 + 5y^4) \div y^4$
   (iii) $8(x^3y^2z^2 + x^2y^3z^2 + x^2y^2z^3) \div 4x^2y^2z^2$ (iv) $(x^3 + 2x^2 + 3x) \div 2x$
   (v) $(p^3q^6 - p^6q^3) \div p^3q^3$
3. ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਦੀ ਵੰਡ ਕਰੋ :
   (i) $(10x - 25) \div 5$ (ii) $(10x - 25) \div (2x - 5)$
   (iii) $10y(6y + 21) \div 5(2y + 7)$ (iv) $9x^2y^2(3z - 24) \div 27xy(z - 8)$
   (v) $96abc\,(3a - 12)(5b - 30) \div 144(a - 4)(b - 6)$
4. ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅਨੁਸਾਰ ਭਾਗ ਕਰੋ :
   (i) $5(2x + 1)(3x + 5) \div (2x + 1)$ (ii) $26xy(x + 5)(y - 4) \div 13x(y - 4)$
   (iii) $52pqr\,(p + q)(q + r)(r + p) \div 104pq(q + r)(r + p)$
   (iv) $20(y + 4)(y^2 + 5y + 3) \div 5(y + 4)$ (v) $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) \div x(x + 1)$
5. ਵਿਅੰਜਕ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਕਰੋ ਅਤੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅਨੁਸਾਰ ਭਾਗ ਦਿਉ :
   (i) $(y^2 + 7y + 10) \div (y + 5)$ (ii) $(m^2 - 14m - 32) \div (m + 2)$
   (iii) $(5p^2 - 25p + 20) \div (p - 1)$ (iv) $4yz(z^2 + 6z - 16) \div 2y(z + 8)$
   (v) $5pq(p^2 - q^2) \div 2p(p + q)$
   (vi) $12xy(9x^2 - 16y^2) \div 4xy(3x + 4y)$ (vii) $39y^3(50y^2 - 98) \div 26y^2(5y + 7)$

14.5 ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਗਲਤੀ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ ?

ਕੰਮ (Task) 1 ਇੱਕ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਦੇ ਸਮੇਂ, ਸਰਿਤਾ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਢੰਗ ਨਾਲ ਹੱਲ ਕਰਦੀ ਹੈ :

$$3x + x + 5x = 72$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $8x = 72$

ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ, $x = \dfrac{72}{8} = 9$

ਉਸਨੇ ਕਿਥੇ ਗਲਤੀ ਕੀਤੀ ਹੈ ? ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

> ਕਿਸੇ ਪਦ ਦੇ ਗੁਣਾਂਕ 1 ਨੂੰ ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਦਰਸਾਇਆ ਨਹੀਂ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਪਰ ਸਮਾਨ ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਜੋੜਦੇ ਸਮੇਂ ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਜੋੜ ਵਿੱਚ ਸ਼ਾਮਲ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਕੰਮ (Task) 2 ਅੱਪੂ ਨੇ ਇਹ ਕੀਤਾ :

$$x = -3,\ 5x = 5 - 3 = 2$$

ਕੀ ਉਸਦੀ ਵਿਧੀ ਸਹੀ ਹੈ ? ਜੇ ਨਹੀਂ, ਤਾਂ ਇਸ ਨੂੰ ਸਹੀ ਕਰੋ।

> ਇੱਕ ਰਿਣਾਤਮਕ ਮੁੱਲ ਰੱਖਦੇ ਸਮੇਂ ਬਰੈਕਟਾਂ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨਾ ਯਾਦ ਰੱਖੋ।

ਕੰਮ (Task) 3 ਨਮਰਤਾ ਅਤੇ ਸਲਮਾ ਨੇ ਬੀਜਗਣਿਤਿਕ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਢੰਗਾਂ ਨਾਲ ਕੀਤੀ :

	ਨਮਰਤਾ	ਸਲਮਾ
(a)	$3(x-4) = 3x - 4$	$3(x-4) = 3x - 12$
(b)	$(2x)^2 = 2x^2$	$(2x)^2 = 4x^2$
(c)	$(2a-3)(a+2) = 2a^2 - 6$	$(2a-3)(a+2) = 2a^2 + a - 6$
(d)	$(x+8)^2 = x^2 + 64$	$(x+8)^2 = x^2 + 16x + 64$
(e)	$(x-5)^2 = x^2 - 25$	$(x-5)^2 = x^2 - 10x + 25$

> ਯਾਦ ਰੱਖੋ, ਜੇ ਤੁਸੀਂ ਬਰੈਕਟਾਂ ਵਿੱਚ ਬੰਦ ਕਿਸੇ ਵਿਅੰਜਕ ਨੂੰ ਉਸਦੇ ਬਾਹਰ ਲਿਖੇ ਅਚਲ (ਜਾਂ ਚਲ) ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਦੇ ਹੋ ਤਾਂ ਵਿਅੰਜਕ ਦੇ ਹਰੇਕ ਪਦ ਨਾਲ ਉਸ ਅਚਲ (ਜਾਂ ਚਲ) ਨੂੰ ਗੁਣਾ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

> ਯਾਦ ਰੱਖੋ ਕਿ, ਜੇ ਤੁਸੀਂ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਪਦੀ ਦਾ ਵਰਗ ਕਰਦੇ ਹੋ, ਤਾਂ ਸੰਖਿਆਤਮਕ ਗੁਣਾਂਕ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਗੁਣਨਖੰਡ ਦਾ ਵਰਗ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਕੀ ਨਮਰਤਾ ਅਤੇ ਸਲਮਾ ਦੁਆਰਾ ਕੀਤੇ ਗਏ ਗੁਣਨ ਸਹੀ ਹਨ ? ਕਾਰਨ ਸਹਿਤ ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਦਿਉ।

> ਕੋਈ ਵੀ ਸੂਤਰ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ, ਇਹ ਪੱਕਾ ਕਰ ਲਉ ਕਿ ਉਹ ਸੂਤਰ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਕੰਮ (Task) 4 ਜੋਸਫ ਨੇ ਇੱਕ ਵੰਡ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੀਤੀ : $\frac{a+5}{5} = a + 1$

ਉਸਦੇ ਮਿੱਤਰ ਸ਼ਰੀਸ਼ ਨੇ ਇਹ ਵੰਡ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੀਤੀ : $\frac{a+5}{5} = a$

ਉਸਦੇ ਹੋਰ ਮਿੱਤਰ ਸੁਮਨ ਨੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੀਤੀ : $\frac{a+5}{5} = \frac{a}{5} + 1$

ਕਿਸਨੇ ਵੰਡ ਸਹੀ ਕੀਤੀ ? ਕਿਸਨੇ ਵੰਡ ਗਲਤ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਕੀਤੀ ? ਅਤੇ ਕਿਉਂ ?

> ਇੱਕ ਬਹੁਪਦ ਨੂੰ ਇੱਕ ਪਦੀ ਨਾਲ ਭਾਗ ਦਿੰਦੇ ਸਮੇਂ, ਅਸੀਂ ਅੰਸ਼ ਦੇ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਹਰੇਕ ਪਦ ਨੂੰ ਹਰ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਇੱਕ ਪਦੀ ਨਾਲ ਭਾਗ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ।

ਕੁਝ ਮਨੋਰੰਜਨ !

ਅਤੁੱਲ ਹਮੇਸ਼ਾਂ ਵੱਖ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਸੋਚਦਾ ਹੈ। ਉਹ ਸੁਮਥੀ ਅਧਿਆਪਕਾ ਤੋਂ ਪੁੱਛਦਾ ਹੈ, "ਜੇ ਤੁਸੀਂ ਕੁੱਝ ਕਹਿੰਦੇ ਹੋ, ਉਹ ਸੱਚ ਹੈ ਤਾਂ ਮੈਂ $\frac{64}{16} = \frac{4}{1} = 4$ ਦੇ ਲਈ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਕਿਉਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਰਿਹਾ ਹਾਂ ? ਅਧਿਆਪਕਾ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕਰਦੀ ਹੈ, "ਅਜਿਹਾ ਇਸ ਲਈ ਹੈ ਕਿ $64 = 16 \times 4$; ਹੈ ਅਤੇ $\frac{64}{16} = \frac{16\times4}{16\times1} = \frac{4}{1}$ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸਾਂਝੇ ਗੁਣਨਖੰਡ 16 ਨੂੰ ਕੱਟਦੇ ਹਾਂ, 6 ਨੂੰ ਨਹੀਂ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ, 6 ਨਾ ਤਾਂ 64 ਦਾ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ 16 ਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ।" ਅਧਿਆਪਕਾ ਅੱਗੇ ਕਹਿੰਦੀ ਹੈ, "ਨਾਲ ਹੀ $\frac{664}{166} = \frac{4}{1}, \frac{6664}{1666} = \frac{4}{1}$, ਆਦਿ ਵੀ ਹੈ।" ਕੀ ਇਹ ਰੋਚਕ ਨਹੀਂ ਹੈ ? ਕੀ ਤੁਸੀਂ $\frac{64}{16}$ ਦੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਕੁੱਝ ਹੋਰ ਉਦਾਹਰਣ ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਅਤੁਲ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ।

ਅਭਿਆਸ 14.4

ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਗਣਿਤਿਕ ਕਥਨਾਂ ਵਿੱਚ ਗਲਤੀ ਪਤਾ ਕਰਕੇ ਉਸ ਨੂੰ ਸਹੀ ਕਰੋ :

1. $4(x-5) = 4x-5$ **2.** $x(3x+2) = 3x^2+2$ **3.** $2x+3y = 5xy$

4. $x+2x+3x = 5x$ **5.** $5y+2y+y-7y = 0$ **6.** $3x+2x = 5x^2$

7. $(2x)^2+4(2x)+7 = 2x^2+8x+7$ **8.** $(2x)^2+5x = 4x+5x = 9x$

9. $(3x+2)^2 = 3x^2+6x+4$

10. $x = -3$ ਮੁੱਲ ਭਰਨ 'ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(*a*) x^2+5x+4 ਤੋਂ $(-3)^2+5(-3)+4 = 9+2+4 = 15$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(*b*) x^2-5x+4 ਤੋਂ $(-3)^2-5(-3)+4 = 9-15+4 = -2$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(*c*) x^2+5x ਤੋਂ $(-3)^2+5(-3) = -9-15 = -24$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

11. $(y-3)^2 = y^2-9$ **12.** $(z+5)^2 = z^2+25$

13. $(2a+3b)(a-b) = 2a^2-3b^2$ **14.** $(a+4)(a+2) = a^2+8$

15. $(a-4)(a-2) = a^2-8$ **16.** $\frac{3x^2}{3x^2} = 0$

17. $\frac{3x^2+1}{3x^2} = 1+1 = 2$ **18.** $\frac{3x}{3x+2} = \frac{1}{2}$ **19.** $\frac{3}{4x+3} = \frac{1}{4x}$

20. $\frac{4x+5}{4x} = 5$ **21.** $\frac{7x+5}{5} = 7x$

ਅਸੀਂ ਕੀ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀ ?

1. ਜਦ ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਵਿਅੰਜਕ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਾਂ, ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਉਸ ਨੂੰ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ। ਇਹ ਗੁਣਨਖੰਡ, ਸੰਖਿਆਵਾਂ, ਬੀਜਗਣਿਤਿਕ ਚਲ ਜਾਂ ਬੀਜਗਣਿਤਿਕ ਵਿਅੰਜਕ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ।
2. ਇੱਕ ਅਖੰਡ ਗੁਣਨਖੰਡ ਉਹ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ ਜਿਸ ਨੂੰ ਹੋਰ ਅੱਗੇ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।
3. ਕਿਸੇ ਵਿਅੰਜਕ ਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਕਰਨ ਦੀ ਇੱਕ ਲੜੀਵਾਰ ਵਿਧੀ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਵਿਧੀ ਹੈ। ਇਸ ਵਿਧੀ ਦੇ ਤਿੰਨ ਪਗ ਹੁੰਦੇ ਹਨ : (i) ਵਿਅੰਜਕ ਦੇ ਹਰੇਕ ਪਦ ਨੂੰ ਅਖੰਡ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ। (ii) ਸਾਂਝੇ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦਾ ਪਤਾ ਲਗਾਉ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਅਲੱਗ ਕਰ ਲਓ। (iii) ਹਰੇਕ ਪਦ ਵਿੱਚ ਬਾਕੀ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਨੂੰ ਵੰਡਕਾਰੀ ਨਿਯਮ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਸੰਯੋਜਿਤ ਕਰੋ।
4. ਕਦੇ-ਕਦੇ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵਿਅੰਜਕ ਦੇ ਸਾਰੇ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ, ਪਰੰਤੂ ਇਹਨਾਂ ਪਦਾਂ ਦੇ ਕੁੱਝ ਸਮੂਹ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਣਾਏ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ ਕਿ ਹਰੇਕ ਸਮੂਹ ਦੇ ਸਾਰੇ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜੇ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਾਰੇ ਸਮੂਹਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਵਿਅੰਜਕ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ। ਇਹ ਵਿਧੀ ਦੁਬਾਰਾ ਸਮੂਹੀਕਰਨ ਵਿਧੀ ਅਖਵਾਉਂਦੀ ਹਾਂ।
5. ਦੁਬਾਰਾ ਸਮੂਹੀਕਰਨ ਦੁਆਰਾ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਵਿੱਚ, ਇਹ ਯਾਦ ਰੱਖਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਕਿ ਵਿਅੰਜਕ ਦੇ ਪਦਾਂ ਦੇ ਹਰੇਕ ਦੁਬਾਰਾ ਸਮੂਹੀਕਰਨ ਨਾਲ ਦੁਬਾਰਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਪ੍ਰਾਪਤ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਸਾਨੂੰ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਨੂੰ ਦੇਖਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਯਤਨ ਅਤੇ ਭੁੱਲ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਲੋੜੀਂਦਾ ਦੁਬਾਰਾ ਸਮੂਹੀਕਰਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

6. ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਕੀਤੇ ਜਾ ਸਕਣ ਵਾਲੇ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਵਿੱਚ ਅਨੇਕ $a^2 + 2ab + b^2$, $a^2 - 2ab + b^2$, $a^2 - b^2$ ਅਤੇ $x^2 + (a + b) + ab$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜਾਂ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਇਸ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਅਧਿਆਇ 9 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸਰਬਸਮਤਾਵਾਂ I, II, III ਅਤੇ IV ਨਾਲ ਪਤਾ ਕੀਤੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ :

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b).$$

7. ਉਹਨਾਂ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਵਿੱਚ, ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ $(x + a)(x + b)$ ਦੇ ਕਿਸਮ ਦੇ ਹਨ, ਯਾਦ ਰੱਖਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਕਿ ਸੰਖਿਆਤਮਕ (ਅਚਲ) ਪਦ ਨਾਲ ab ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ a ਅਤੇ b ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਚੁਣਨਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਕਿ ਚਿੰਨ੍ਹ ਨੂੰ ਧਿਆਨ ਵਿੱਚ ਰੱਖਦੇ ਹੋਏ, ਉਸਦਾ ਜੋੜ x ਦੇ ਗੁਣਾਂਕ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ।
8. ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਵੰਡ, ਗੁਣਾ ਦੀ ਉੱਲਟ ਕਿਰਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਹੀ ਗੱਲ ਬੀਜਗਣਿਤਿਕ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਦੇ ਵੰਡ ਦੇ ਲਈ ਵੀ ਲਾਗੂ ਰਹਿੰਦੀ ਹੈ।
9. ਇੱਕ ਬਹੁਪਦ ਨੂੰ ਇੱਕ ਪਦੀ ਨਾਲ ਵੰਡ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਜਾਂ ਤਾਂ ਵੰਡ, ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਹਰੇਕ ਪਦ ਨੂੰ ਇੱਕ ਪਦੀ ਨਾਲ ਭਾਗ ਦੇ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਜਾਂ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।
10. ਇੱਕ ਬਹੁਪਦ ਨੂੰ ਇੱਕ ਬਹੁਪਦ ਨਾਲ ਵਿਭਾਜਨ ਕਰਨ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਭਾਜ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਹਰੇਕ ਪਦ ਨੂੰ ਭਾਜਕ ਬਹੁਪਦ ਨਾਲ ਭਾਗ ਦੇ ਕੇ ਵੰਡ ਨਹੀਂ ਸਕਦੇ। ਇਸਦੀ ਥਾਂ ਤੇ, ਅਸੀਂ ਹਰੇਕ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਾਂ, ਅਤੇ ਇਸ ਵਿੱਚੋਂ ਸਾਂਝੇ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਨੂੰ ਕੱਟ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ।
11. ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹੇ ਗਏ ਬੀਜਗਣਿਤਿਕ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਦੀ ਵੰਡ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਨਾਲ ਸਾਨੂੰ
ਭਾਜ = ਭਾਜਕ × ਭਾਗਫਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗਾ।
ਪਰੰਤੂ ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਹ ਸੰਬੰਧ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ :
ਭਾਜ = ਭਾਜਕ × ਭਾਗਫਲ + ਬਾਕੀ
ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸਿਰਫ ਉਸ ਵੰਡ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਬਾਕੀ ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ।
12. ਬੀਜਗਣਿਤਿਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਦੇ ਸਮੇਂ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਅਨੇਕ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀਆਂ ਗਲਤੀਆਂ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਤੁਹਾਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਗਲਤੀਆਂ ਕਰਨ ਤੋਂ ਬਚਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਨੋਟ

ਗਰਾਫ਼ਾਂ ਬਾਰੇ ਜਾਣਕਾਰੀ

ਅਧਿਆਇ 15

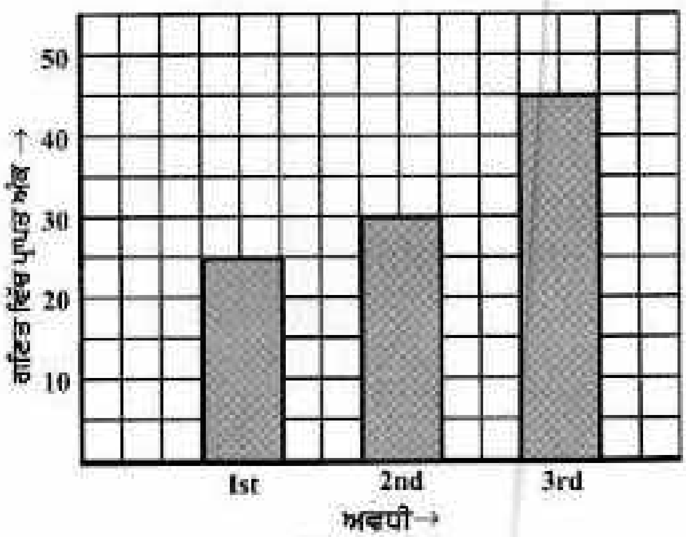
15.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਅਖਬਾਰਾਂ, ਦੂਰਦਰਸ਼ਨ, ਮੈਗਜ਼ੀਨਾਂ, ਪੁਸਤਕਾਂ ਆਦਿ ਵਿੱਚ ਗਰਾਫ਼ ਦੇਖੇ ਹਨ ? ਗਰਾਫ਼ਾਂ ਦਾ ਉਦੇਸ਼ ਸੰਖਿਆਤਮਕ ਤੱਥਾਂ ਨੂੰ ਚਿੱਤਰਾਂ ਦੁਆਰਾ ਦਿਖਾਉਣਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਨਾਲ ਉਹ ਜਲਦੀ, ਸੌਖੇ ਅਤੇ ਸਪੱਸ਼ਟ ਢੰਗ ਨਾਲ ਸਮਝੇ ਜਾ ਸਕਣ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਗਰਾਫ਼, ਇਕੱਤਰ ਕੀਤੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਚਿੱਤਰਾਂ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਨ ਹੈ। ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਸਾਰਣੀ ਨਾਲ ਵੀ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਪਰੰਤੂ ਗਰਾਫ਼ ਦੁਆਰਾ ਪੇਸ਼ਕਾਰੀ ਸਮਝਣ ਵਿੱਚ ਬਹੁਤ ਆਸਾਨ ਹੈ। ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਰੁਝਾਨ ਜਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਦਿਖਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਤਾਂ ਇਹ ਬਹੁਤ ਉਪਯੋਗੀ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਅਸੀਂ ਹੁਣ ਤੱਕ ਅਨੇਕਾਂ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਗਰਾਫ਼ ਦੇਖ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ। ਆਉ, ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਯਾਦ ਕਰ ਲਈਏ।

15.1.1 ਬਾਰ — ਗਰਾਫ਼

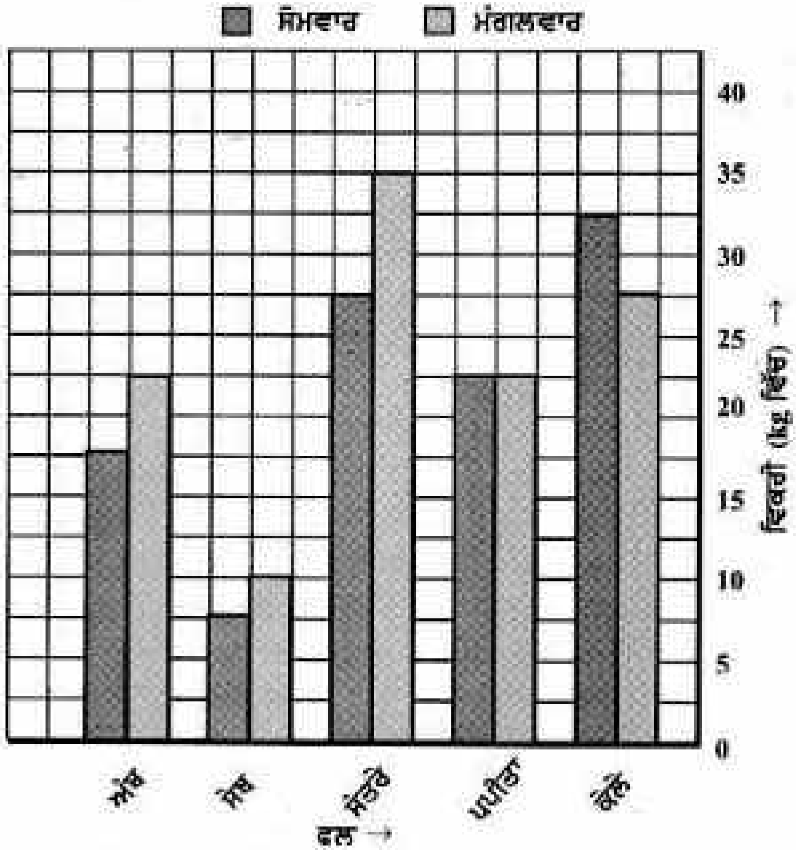
ਬਾਰ-ਗਰਾਫ਼ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਸ਼੍ਰੇਣੀਆਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਤੁਲਨਾ ਕਰਨ ਦੇ ਕੰਮ ਆਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਵਿੱਚ ਦੋ ਜਾਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਸਮਾਂਤਰ ਖੜਵੇਂ (ਜਾਂ ਲੇਟਵੇਂ), ਬਾਰ ਜਾਂ ਆਇਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਚਿੱਤਰ 15.1 ਵਿੱਚ ਬਾਰ-ਗਰਾਫ਼, ਅਨੂ ਦੁਆਰਾ ਸਾਲ ਦੇ ਦੌਰਾਨ ਲਈਆਂ ਤਿੰਨ ਪ੍ਰੀਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਗਣਿਤ ਦੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਤੁਹਾਨੂੰ ਉਸ ਦੀ ਕਾਰਗੁਜ਼ਾਰੀ ਦੀ ਤੁਲਨਾ, ਆਸਾਨੀ ਨਾਲ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਸਹਾਇਤਾ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਉਸਦੀ ਤਰੱਕੀ ਚੰਗੀ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 15.1

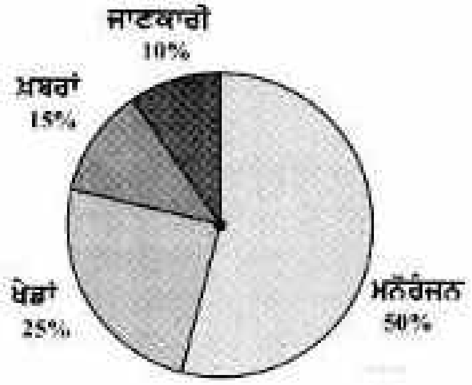
ਬਾਰ ਗਰਾਫ਼ ਵਿੱਚ ਦੋਹਰੇ ਬਾਰ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 15.2 ਵਿੱਚ। ਇਹ ਗਰਾਫ਼ ਕਿਸੇ ਦੋ ਦਿਨਾਂ ਵਿੱਚ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਫਲਾਂ ਦੀ ਵਿਕਰੀ (ਰੁਪਏ ਵਿੱਚ) ਦਾ ਤੁਲਨਾਤਮਕ ਬਿਓਰਾ ਹੈ। ਚਿੱਤਰ 15.2 ਅਤੇ ਚਿੱਤਰ 15.1 ਵਿੱਚ ਕੀ ਅੰਤਰ ਹੈ ? ਆਪਣੇ ਮਿੱਤਰਾਂ ਦੇ ਨਾਲ ਚਰਚਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 15.2

15.1.2 ਚੱਕਰ-ਗਰਾਫ਼ ਜਾਂ ਪਾਈ ਗਰਾਫ਼

ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਗਰਾਫ਼ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਦੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਭਾਗਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਚੱਕਰ, ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਚਿੱਤਰ 15.3 ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਗਰਾਫ਼ ਹੈ। ਇਹ ਦੂਰਦਰਸ਼ਨ ਦੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਚੈਨਲਾਂ ਦੇ ਦਰਸ਼ਕਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤਤਾ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।

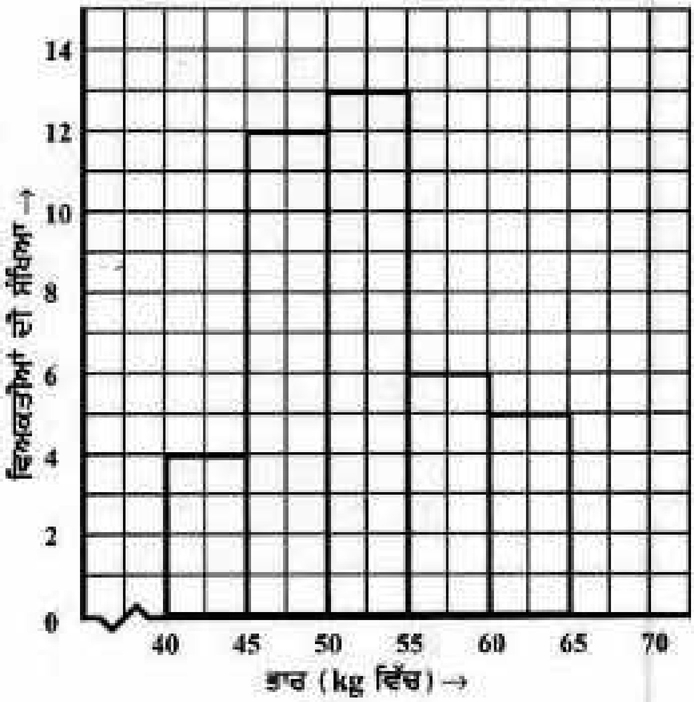


ਚਿੱਤਰ 15.3

15.1.3 ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ

ਇੱਕ ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ, ਇੱਕ ਬਾਰ-ਗਰਾਫ਼ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਵਿੱਚ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਨੂੰ ਨਾਲ-ਨਾਲ ਦਿੱਤੇ ਬਾਰ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
ਚਿੱਤਰ 15.4 ਵਿੱਚ ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ ਇੱਕ ਖੇਤਰ ਦੇ 40 ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੇ ਭਾਰ (kg ਵਿੱਚ) ਦੀ ਵੰਡ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਭਾਰ (kg ਵਿੱਚ)	40-45	45-50	50-55	55-60	60-65
ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	4	12	13	6	5



ਚਿੱਤਰ 15.4

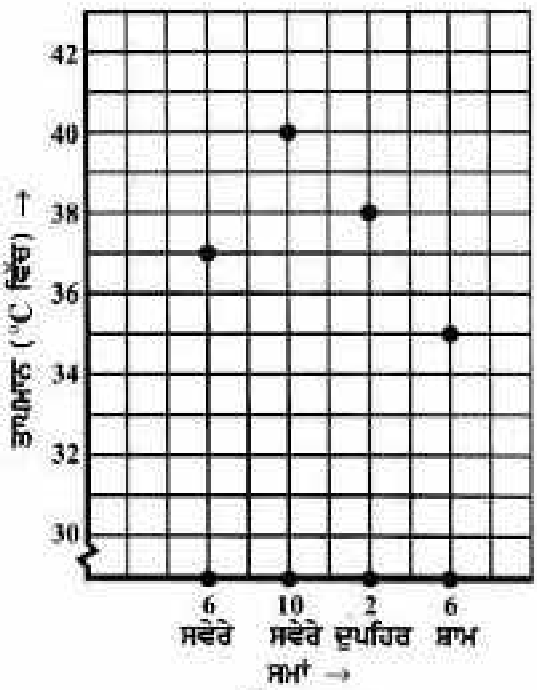
ਚਿੱਤਰ 15.4 ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਟੇਢੀ-ਮੇਢੀ ਰੇਖਾ ( ) ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤੀ ਗਈ ਹੈ ਕਿ ਜੋ ਇਹ ਦੱਸਦੀ ਹੈ ਕਿ ਲੇਟਵੇਂ ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਅਸੀਂ 0 ਤੋਂ 30 ਤੱਕ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨਹੀਂ ਦਿਖਾਈਆਂ ਹਨ।

ਧਿਆਨ ਰੱਖੋ, ਬਾਰਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਖਾਲੀ ਸਥਾਨ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਵੀ ਕੋਈ ਵਿੱਥ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ ਤੋਂ ਕੀ ਸੂਚਨਾਵਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹੋ? ਇਸਦੀ ਇੱਕ ਸੂਚੀ ਬਣਾਉ।

15.1.4 ਰੇਖਾ ਗਰਾਫ਼

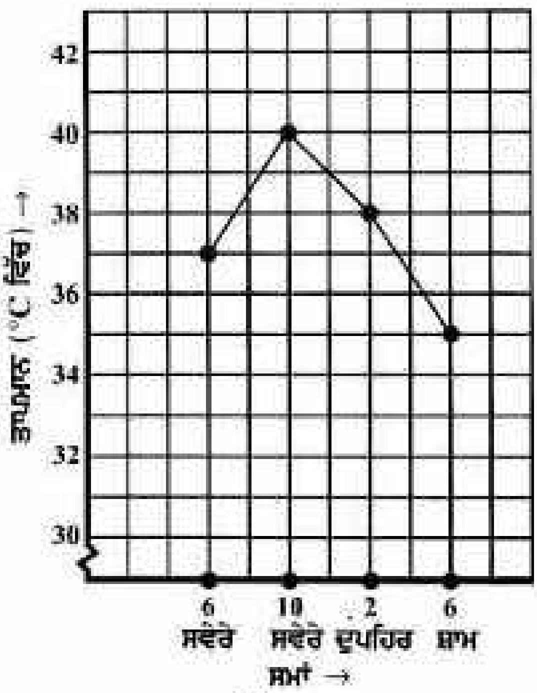
ਇੱਕ ਰੇਖਾ-ਗਰਾਫ਼, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਅੰਕੜੇ ਪੇਸ਼ ਕਰਦਾ ਹੈ ਜੋ ਸਮੇਂ ਦੇ ਨਾਲ-ਨਾਲ ਲਗਾਤਾਰ ਬਦਲਦੇ ਰਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਜਦ ਰੇਨੂੰ ਬੀਮਾਰ ਹੋਈ ਸੀ ਤਾਂ ਉਸ ਦੇ ਡਾਕਟਰ ਨੇ ਚਾਰ-ਚਾਰ ਘੰਟੇ ਬਾਅਦ ਉਸਦੇ ਸਰੀਰਕ ਤਾਪਮਾਨ ਦਾ ਰਿਕਾਰਡ ਕੀਤਾ। ਇਹ ਇੱਕ ਗਰਾਫ਼ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸੀ। (ਚਿੱਤਰ 15.5 ਅਤੇ 15.6 ਵਿੱਚੋਂ ਦੇਖੋ)।
ਅਸੀਂ ਇਸਨੂੰ 'ਸਮਾਂ ਤਾਪਮਾਨ' ਦਾ ਗਰਾਫ਼ ਵੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।
ਇਹ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਚਿੱਤਰ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਨ ਹੈ।

ਸਮਾਂ	6 ਵਜੇ ਸਵੇਰ	10 ਵਜੇ ਸਵੇਰ	2 ਵਜੇ ਦੁਪਹਿਰ	6 ਵਜੇ ਸ਼ਾਮ
ਤਾਪਮਾਨ (°C ਵਿੱਚ)	37	40	38	35



ਚਿੱਤਰ 15.5

ਹਰ ਅੰਕੜੇ ਨੂੰ ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਕਾਗਜ਼ 'ਤੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਦੁਆਰਾ ਅੰਕਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ



ਚਿੱਤਰ 15.6

ਬਾਅਦ ਵਿੱਚ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਰੇਖਾ ਖੰਡਾਂ ਨਾਲ ਮਿਲਾ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਨਤੀਜਾ, ਇਹ ਰੇਖਾ ਗਰਾਫ਼ ਹੈ।

ਲੇਟਵੀਂ ਰੇਖਾ (ਜਿਸ ਨੂੰ x-ਧੁਰਾ ਵੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ) ਉਹ ਸਮਾਂ ਦਿਖਾਉਂਦੀ ਹੈ, ਜਦ-ਜਦ ਤਾਪਮਾਨ ਲਿਆ ਗਿਆ। ਖੜਵੀਂ ਰੇਖਾ (ਜਿਸ ਨੂੰ y-ਧੁਰਾ ਵੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ) 'ਤੇ ਕੀ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ ?

ਇਹ ਗਰਾਫ਼ ਤੁਹਾਨੂੰ ਕੀ-ਕੀ ਦੱਸਦਾ ਹੈ ? ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਵਿੱਚ ਤਾਪਮਾਨ ਦੇ ਪੈਟਰਨ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ : 10 ਵਜੇ ਸਵੇਰੇ ਜ਼ਿਆਦਾ ਸੀ ਤੇ ਫਿਰ 6 ਵਜੇ ਸ਼ਾਮ ਤੱਕ ਘਟਦਾ ਗਿਆ। ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ 6 ਵਜੇ ਸਵੇਰ ਅਤੇ 10 ਵਜੇ ਸਵੇਰ ਦੇ ਵਿੱਚ ਤਾਪਮਾਨ 3°C (40°C – 37°C) ਵਧਿਆ।

8 ਵਜੇ ਸਵੇਰੇ ਤਾਪਮਾਨ ਨਹੀਂ ਪੜ੍ਹਿਆ ਗਿਆ, ਫਿਰ ਵੀ ਗਰਾਫ਼ ਦੇਖ ਕੇ ਲੱਗਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇਹ 37°C ਨਾਲੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਸੀ। (ਕਿਵੇਂ ?)

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਗਰਾਫ਼ (ਚਿੱਤਰ 15.7) ਸਾਲ 2007 ਵਿੱਚ, ਦੋ ਬੱਲੇਬਾਜ਼ A ਅਤੇ B ਦੁਆਰਾ ਖੇਡੇ ਗਏ 10 ਮੈਚਾਂ ਵਿੱਚ ਬਣਾਏ ਗਏ ਰਨਾਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਗਰਾਫ਼ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰੋ ਅਤੇ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਉੱਤਰ ਦਿਓ :

(i) ਦੋਨੋਂ ਧੁਰਾਂ 'ਤੇ ਕਿਹੜੀ-ਕਿਹੜੀ ਸੂਚਨਾ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹੈ ?

(ii) ਕਿਹੜੀ ਰੇਖਾ ਬੱਲੇਬਾਜ਼ A ਦੁਆਰਾ ਬਣਾਏ ਗਏ ਰਨ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰਦੀ ਹੈ ?

(iii) ਸਾਲ 2007 ਵਿੱਚ, ਕੀ ਕਿਸੇ ਮੈਚ ਦੇ ਦੋਨਾਂ ਬੱਲੇਬਾਜ਼ਾਂ ਦੁਆਰਾ ਬਣਾਏ ਗਏ ਰਨ ਸਮਾਨ ਹਨ ? ਜੇ ਹਾਂ, ਤਾਂ ਕਿਸ ਮੈਚ ਵਿੱਚ ?

(iv) ਦੋਨਾਂ ਬੱਲੇਬਾਜ਼ਾਂ ਵਿੱਚ ਕਿਹੜਾ ਜ਼ਿਆਦਾ ਸਥਿਰ ਹੈ ? ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਨਿਰਣਾ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਆ ?

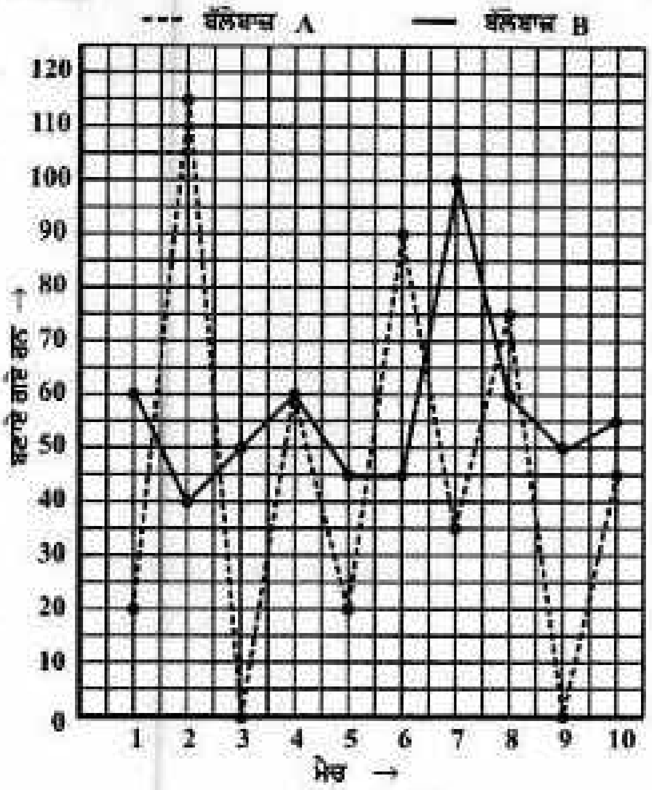
ਹੱਲ :

(i) ਲੇਟਵਾਂ ਧੁਰਾ (ਜਾਂ x– ਧੁਰਾ), ਸਾਲ 2007 ਵਿੱਚ ਖੇਡੇ ਗਏ ਮੈਚਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਖੜਵਾਂ ਧੁਰਾ (ਜਾਂ y-ਧੁਰਾ) ਹਰੇਕ ਮੈਚ ਵਿੱਚ ਬਣਾਏ ਗਏ ਰਨਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।

(ii) ਬਿੰਦੂਵਾਰ ਰੇਖਾ A ਬੱਲੇਬਾਜ਼ ਦੁਆਰਾ ਬਣਾਏ ਗਏ ਰਨਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਗਰਾਫ਼ ਦੇ ਉੱਪਰ ਸੰਕੇਤ ਵੀ ਹੈ।

(iii) ਚੌਥੇ ਮੈਚ ਦੇ ਦੌਰਾਨ ਦੋਨਾਂ ਨੇ ਇੱਕ ਸਮਾਨ 60 ਰਨ ਬਣਾਏ। (ਇਹ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਪਤਾ ਚਲਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ ਦੋਨੋਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਇੱਕ-ਦੂਸਰੇ ਨੂੰ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ।

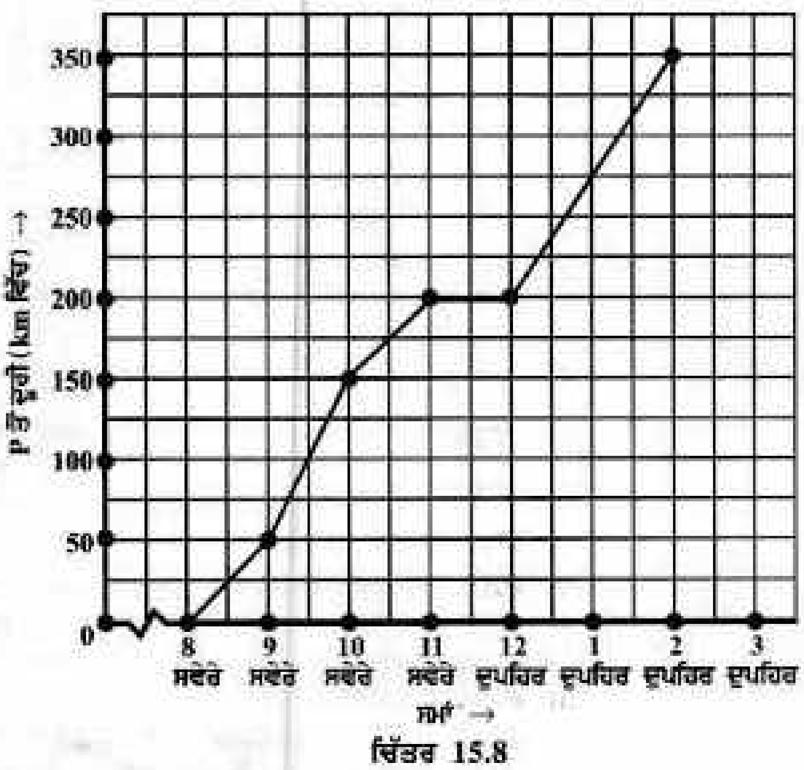
(iv) ਬੱਲੇਬਾਜ਼ A ਦੇ ਗਰਾਫ਼ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਉੱਚਾ ਸਿਖਰ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਹੇਠਾਂ ਘਾਟੀਆਂ। ਉਹ ਰਨ ਬਣਾਉਣ ਵਿੱਚ ਸਥਿਰ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਜਦ ਕਿ ਦੂਸਰੇ ਪਾਸੇ, ਬੱਲੇਬਾਜ਼ B ਨੇ ਕਦੇ 40 ਤੋਂ ਘੱਟ ਰਨ ਨਹੀਂ ਬਣਾਏ ਜਦੋਂ ਕਿ ਉਸਨੇ B ਦੇ 115 ਦੇ ਮੁਕਾਬਲੇ ਜਿਆਦਾਤਰ 100 ਹੀ ਰਨ ਬਣਾਏ। A ਨੇ ਦੋਨਾਂ ਮੈਚਾਂ ਵਿੱਚ ਸਿਫ਼ਰ ਰਨ ਹੀ ਬਣਾਏ ਤੇ ਕੁੱਲ ਪੰਜ ਮੈਚਾਂ ਵਿੱਚ 40 ਤੋਂ ਘੱਟ। ਕਿਉਂਕਿ A ਦੁਆਰਾ ਬਣਾਏ ਗਏ ਰਨਾਂ ਵਿੱਚ ਜਿਆਦਾ ਉਤਾਰ-ਚੜ੍ਹਾਅ ਹੈ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ B ਹੀ ਇੱਕ ਭਰੋਸੇਯੋਗ ਸਥਿਰ ਬੱਲੇਬਾਜ਼ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 15.7

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਇੱਕ ਕਾਰ ਸ਼ਹਿਰ P ਤੋਂ ਦੂਸਰੇ ਸ਼ਹਿਰ Q ਦੇ ਵੱਲ ਜਾ ਰਹੀ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਤੋਂ 350 km ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਹਨ। ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਗਰਾਫ਼ (ਚਿੱਤਰ 15.8) ਵੱਖ-ਵੱਖ ਸਮਿਆਂ 'ਤੇ ਕਾਰ ਦੀ P ਸ਼ਹਿਰ ਤੋਂ ਦੂਰੀਆਂ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਗਰਾਫ਼ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰੋ ਅਤੇ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਉੱਤਰ ਦਿਓ :

(i) ਦੋਨੋਂ ਧੁਰਾਂ 'ਤੇ ਕੀ-ਕੀ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ ?
(ii) ਕਾਰ ਨੇ ਕਿਸ ਸਮੇਂ ਅਤੇ ਕਿੱਥੋਂ ਯਾਤਰਾ ਸ਼ੁਰੂ ਕੀਤੀ ?
(iii) ਪਹਿਲੇ ਘੰਟੇ ਵਿੱਚ ਕਾਰ ਕਿੰਨੀ ਦੂਰੀ ਚੱਲੀ ?
(iv) ਦੂਸਰੇ ਘੰਟੇ ਅਤੇ ਤੀਸਰੇ ਘੰਟੇ ਵਿੱਚ ਕਾਰ ਨੇ ਕਿੰਨੀ-ਕਿੰਨੀ ਦੂਰੀ ਤੈਅ ਕੀਤੀ ?
(v) ਕੀ ਪਹਿਲੇ ਤਿੰਨ ਘੰਟੇ ਵਿੱਚ ਕਾਰ ਦੀ ਚਾਲ ਸਮਾਨ ਸੀ ? ਤੁਸੀਂ ਕਿਵੇਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ?
(vi) ਕੀ ਕਾਰ ਕਿਸੇ ਸਥਾਨ 'ਤੇ ਰੁਕੀ ? ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਦੇ ਲਈ ਤਰਕ ਵੀ ਦਿਓ ?
(vii) ਕਾਰ, ਸ਼ਹਿਰ Q 'ਤੇ ਕਿਸ ਸਮੇਂ ਪਹੁੰਚੀ ?



ਚਿੱਤਰ 15.8

ਹੱਲ :

(i) ਲੇਟਵਾਂ ਧੁਰਾ (x) ਸਮਾਂ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਖੜਵਾਂ (y) ਧੁਰਾ, P ਸ਼ਹਿਰ ਤੋਂ ਕਾਰ ਦੀ ਦੂਰੀਆਂ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।)

(ii) ਕਾਰ 8 ਵਜੇ ਸਵੇਰੇ ਸ਼ਹਿਰ P ਤੋਂ ਚਲਦੀ ਹੈ।

(iii) ਕਾਰ ਪਹਿਲੇ ਘੰਟੇ ਵਿਚ 50 km ਦੀ ਦੂਰੀ ਤੈਅ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਕਾਰ ਸਵੇਰੇ 8 ਵਜੇ ਸ਼ਹਿਰ P ਤੋਂ ਚਲਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਸਵੇਰੇ 9 ਵਜੇ ਗਰਾਫ਼ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ, 50 km ਦੀ ਦੂਰੀ ਤੇ ਸੀ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਵੇਰੇ 8 ਅਤੇ 9 ਵਜੇ ਦੇ ਵਿੱਚ, ਇੱਕ ਘੰਟੇ ਵਿੱਚ ਕਾਰ ਨੇ 50 km ਦੂਰੀ ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਹੈ।

(iv) (a) ਕਾਰ ਦੂਸਰੇ ਘੰਟੇ (ਸਵੇਰ 9 ਵਜੇ ਤੋਂ 10 ਵਜੇ) ਵਿੱਚ 100 km ਦੂਰੀ (150-50) ਤੈਅ ਕਰਦੀ ਹੈ।
(b) ਕਾਰ ਤੀਸਰੇ ਘੰਟੇ (ਸਵੇਰੇ 10 ਵਜੇ ਤੋਂ 11 ਵਜੇ) ਤੱਕ 50 km ਦੀ ਦੂਰੀ (200-150) ਤੈਅ ਕਰਦੀ ਹੈ।

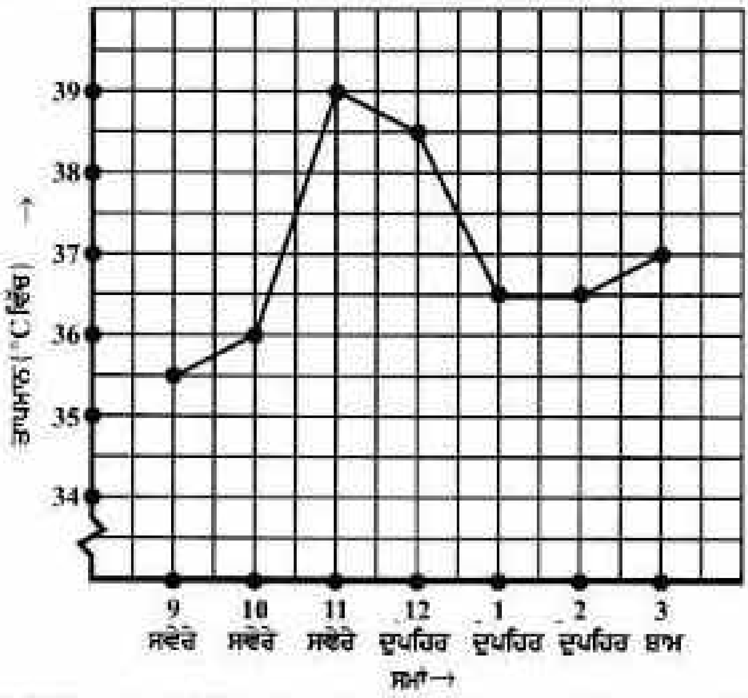
(v) ਪ੍ਰਸ਼ਨ (iii) ਅਤੇ (iv) ਦੇ ਉੱਤਰਾਂ ਤੋਂ ਪਤਾ ਚਲਦਾ ਹੈ ਕਿ ਕਾਰ ਦੀ ਚਾਲ ਹਮੇਸ਼ਾਂ ਸਮਾਨ ਨਹੀਂ ਸੀ। (ਗਰਾਫ਼ ਇਹ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਚਾਲ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਦਲਦੀ ਹੈ।)

(vi) ਗਰਾਫ਼ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕਾਰ ਸਵੇਰੇ 11 ਵਜੇ ਅਤੇ 12 ਵਜੇ ਵੀ ਸ਼ਹਿਰ P ਤੋਂ 200 km ਦੂਰ ਸੀ। ਇਸ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਗਈ ਦੂਰੀ, ਇੱਕ ਲੇਟਵਾਂ ਰੇਖਾਖੰਡ ਹੈ ਜੋ ਇਸ ਤੱਥ ਦੀ ਪੁਸ਼ਟੀ ਕਰਦਾ ਹੈ

(vii) 2 ਵਜੇ ਦੁਪਹਿਰ ਕਾਰ Q ਸ਼ਹਿਰ ਪਹੁੰਚੀ।

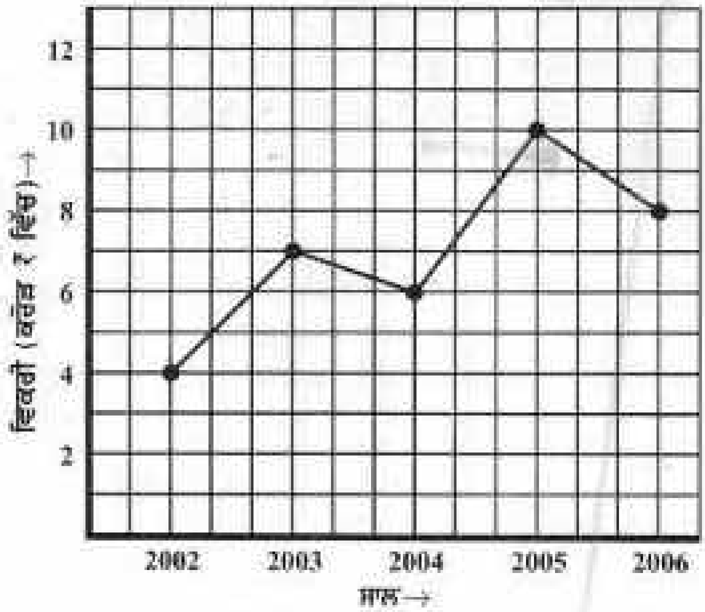
ਅਭਿਆਸ 15.1

1. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਗਰਾਫ਼, ਕਿਸੇ ਹਸਪਤਾਲ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਰੋਗੀ ਦਾ ਪ੍ਰਤੀ ਘੰਟੇ ਲਿਆ ਗਿਆ ਤਾਪਮਾਨ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ :
   (a) ਦੁਪਹਿਰ 1 ਵਜੇ ਰੋਗੀ ਦਾ ਤਾਪਮਾਨ ਕੀ ਸੀ ?
   (b) ਰੋਗੀ ਦਾ ਤਾਪਮਾਨ 38.5° C ਕਦੋਂ ਸੀ ?



   (c) ਇਸ ਪੂਰੇ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ ਰੋਗੀ ਦਾ ਤਾਪਮਾਨ ਦੋ ਵਾਰ ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਹੀ ਸੀ। ਇਹ ਦੋ ਸਮੇਂ, ਕਿਹੜੇ-ਕਿਹੜੇ ਸਨ ?
   (d) 1.30 ਵਜੇ ਦੁਪਹਿਰ ਰੋਗੀ ਦਾ ਤਾਪਮਾਨ ਕੀ ਸੀ ? ਇਸ ਸਿੱਟੇ 'ਤੇ ਤੁਸੀਂ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਹੁੰਚੋਗੇ ?
   (e) ਕਿਹੜੇ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਵਿੱਚ ਰੋਗੀ ਦਾ ਤਾਪਮਾਨ 'ਵਧਣ ਦੇ ਰੁਝਾਣ' ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ?

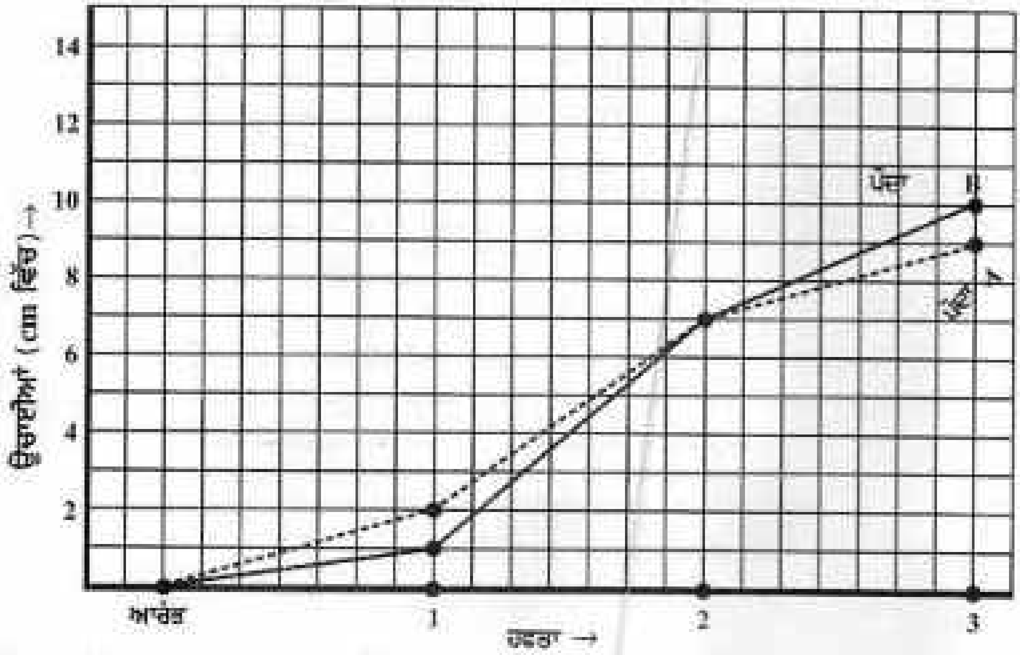
2. ਇੱਕ ਨਿਰਮਾਣ ਕੰਪਨੀ ਦੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਸਾਲਾਂ ਵਿੱਚ ਕੀਤੀ ਗਈ ਵਿਕਰੀ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਗਰਾਫ਼ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਈ ਗਈ ਹੈ:
   (a) (i) ਸਾਲ 2002 ਵਿੱਚ (ii) ਸਾਲ 2006 ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੀ ਵਿਕਰੀ ਸੀ ?
   (b) (i) ਸਾਲ 2003 ਵਿੱਚ (ii) ਸਾਲ 2005 ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੀ ਵਿਕਰੀ ਸੀ ?



(c) ਸਾਲ 2002 ਅਤੇ ਸਾਲ 2006 ਵਿੱਚ ਵਿਕਰੀ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨਾ ਅੰਤਰ ਸੀ ?

(d) ਕਿਸ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ ਵਿਕਰੀ ਦਾ ਇਹ ਅੰਤਰ ਸਭ ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਸੀ ?

3. ਬਨਸਪਤੀ—ਵਿਗਿਆਨ ਦੇ ਇੱਕ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ, ਸਮਾਨ ਪ੍ਰਯੋਗਸ਼ਾਲਾਂ ਪਰਿਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਦੋ ਪੌਦੇ A ਅਤੇ B ਉਗਾਏ ਗਏ। ਤਿੰਨ ਹਫਤਿਆਂ ਤੱਕ ਉਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਉਚਾਈਆਂ ਨੂੰ ਹਰ ਹਫਤੇ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿਚ ਮਾਪਿਆ ਗਿਆ। ਨਤੀਜਿਆਂ ਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਗਰਾਫ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ:



(a) (i) 2 ਹਫਤੇ ਬਾਅਦ (ii) 3 ਹਫਤੇ ਬਾਅਦ ਪੌਦੇ A ਦੀ ਉਚਾਈ ਕਿੰਨੀ ਸੀ ?

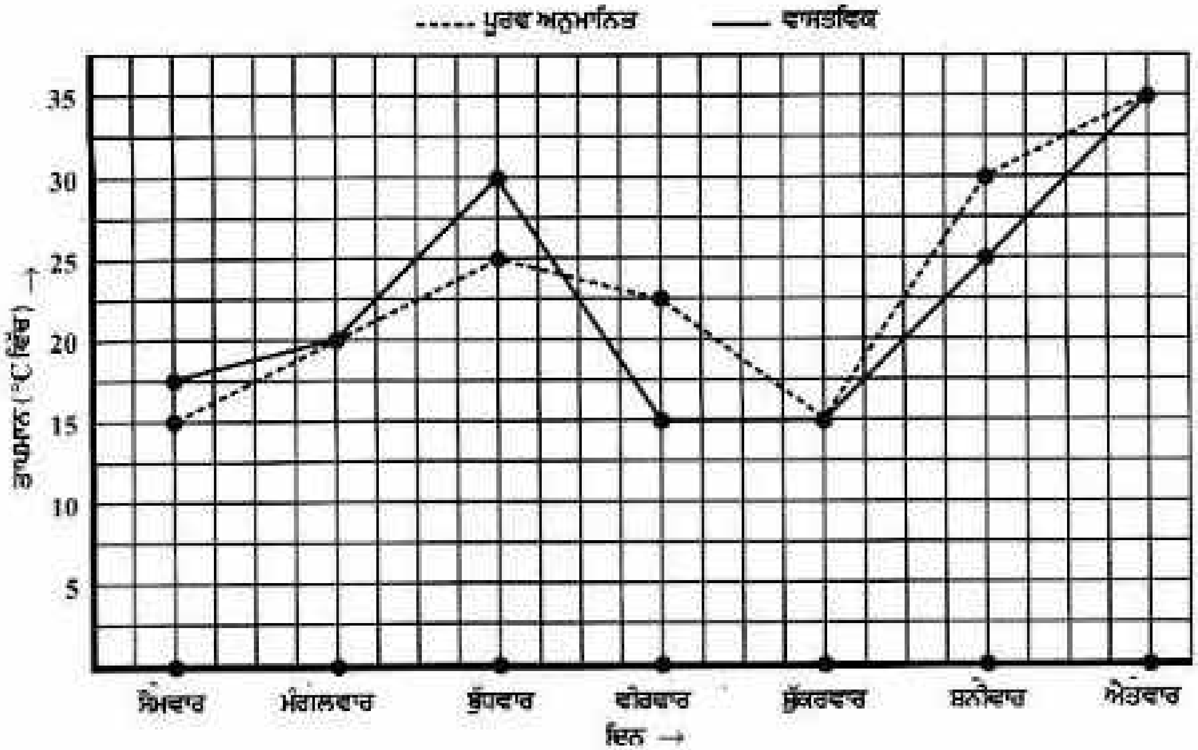
(b) (i) 2 ਹਫਤੇ ਬਾਅਦ (ii) 3 ਹਫਤੇ ਬਾਅਦ ਪੌਦੇ B ਦੀ ਉਚਾਈ ਕਿੰਨੀ ਸੀ ?

(c) ਤੀਸਰੇ ਹਫਤੇ ਵਿੱਚ ਪੌਦੇ A ਦੀ ਉਚਾਈ ਕਿੰਨੀ ਵਧੀ ?

(d) ਦੂਸਰੇ ਹਫਤੇ ਤੇ ਅੰਤ ਤੋਂ ਤੀਸਰੇ ਹਫਤੇ ਦੇ ਅੰਤ ਤੱਕ ਪੌਦੇ B ਦੀ ਉਚਾਈ ਕਿੰਨੀ ਵਧੀ ?

(e) ਕਿਸ ਹਫਤੇ ਵਿੱਚ ਪੌਦੇ A ਦੀ ਉਚਾਈ ਸਭ ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਵਧੀ ?
(f) ਕਿਸ ਹਫਤੇ ਵਿੱਚ ਪੌਦੇ B ਦੀ ਉਚਾਈ ਸਭ ਤੋਂ ਘੱਟ ਵਧੀ ?
(g) ਕੀ ਕਿਸੇ ਹਫਤੇ ਵਿੱਚ ਦੋਨਾਂ ਪੌਦਿਆਂ ਦੀ ਉਚਾਈ ਬਰਾਬਰ ਸੀ ? ਪਛਾਣੋ।

4. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਾ ਗਰਾਫ, ਕਿਸੇ ਹਫਤੇ ਦੇ ਹਰੇਕ ਦਿਨ ਦੇ ਲਈ ਪੂਰਵ ਅਨੁਮਾਨਿਤ ਅਤੇ ਅਸਲ ਤਾਪਮਾਨ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ:
(a) ਕਿਸ ਦਿਨ ਪੂਰਵ ਅਨੁਮਾਨਿਤ ਤਾਪਮਾਨ ਅਤੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸਮਾਨ ਹਨ ?
(b) ਹਫਤੇ ਵਿੱਚ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਪੂਰਵ ਅਨੁਮਾਨਿਤ ਤਾਪਮਾਨ ਕੀ ਸੀ ?
(c) ਹਫਤੇ ਵਿੱਚ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਅਸਲ ਤਾਪਮਾਨ ਕੀ ਸੀ ?
(d) ਕਿਸ ਦਿਨ ਅਸਲ ਤਾਪਮਾਨ ਅਤੇ ਪੂਰਵ ਅਨੁਮਾਨਿਤ ਤਾਪਮਾਨ ਵਿੱਚ ਅੰਤਰ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਸੀ ?



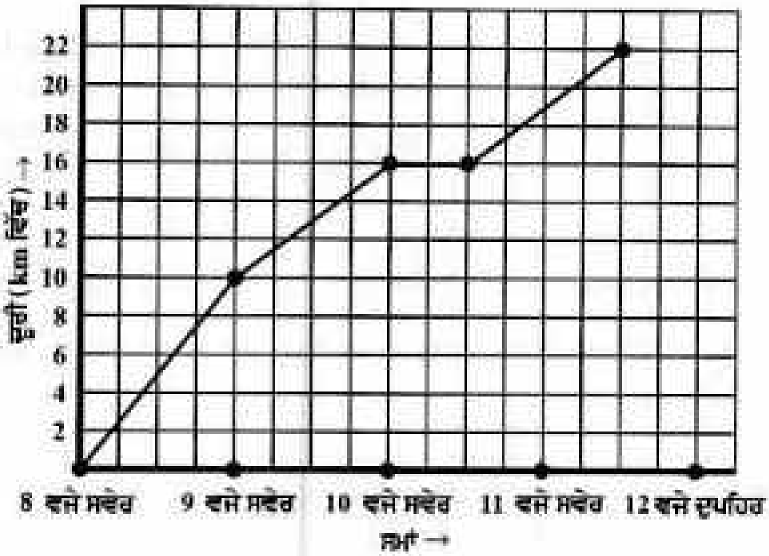
5. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਣੀ ਨੂੰ ਦੇਖ ਕੇ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਗਰਾਫ ਬਣਾਉ :
(a) ਵੱਖ-ਵੱਖ ਸਾਲਾਂ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਪਹਾੜੀ ਸ਼ਹਿਰ ਵਿੱਚ ਬਰਫ ਪੈਣ ਦੇ ਦਿਨਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ :

ਸਾਲ	2003	2004	2005	2006
ਦਿਨ	8	10	5	12

(b) ਵੱਖ-ਵੱਖ ਸਾਲਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਪਿੰਡ ਵਿੱਚ, ਪੁਰਸ਼ਾਂ ਅਤੇ ਇਸਤਰੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ (ਹਜ਼ਾਰਾਂ ਵਿੱਚ)

ਸਾਲ	2003	2004	2005	2006	2007
ਪੁਰਸ਼ਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	12	12.5	13	13.2	13.5
ਇਸਤਰੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	11.3	11.9	13	13.6	12.8

6. ਇੱਕ ਡਾਕੀਆ ਕਿਸੇ ਸ਼ਹਿਰ ਦੇ ਕੋਲ ਹੀ ਪੈਂਦੇ ਇੱਕ ਕਸਬੇ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਵਪਾਰੀ ਕੋਲ ਪਾਰਸਲ ਪਹੁੰਚਾਉਣ ਲਈ ਸਾਈਕਲ 'ਤੇ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਵੱਖ-ਵੱਖ ਸਮਿਆਂ ਤੇ ਸ਼ਹਿਰ ਤੋਂ ਉਸਦੀ ਦੂਰੀ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਗਰਾਫ਼ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਈ ਗਈ ਹੈ।



(a) x-ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਸਮਾਂ ਦਰਸਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਕੀ ਪੈਮਾਨਾ ਵਰਤਿਆ ਗਿਆ ਹੈ ?

(b) ਉਸਨੇ ਪੂਰੀ ਯਾਤਰਾ ਦੇ ਲਈ ਕਿੰਨਾ ਸਮਾਂ ਲਿਆ ?

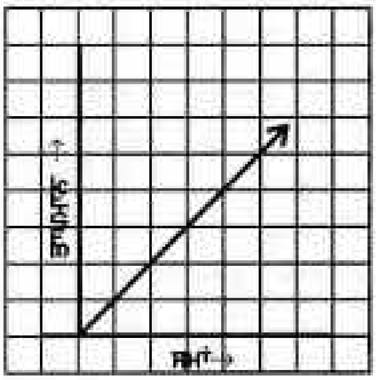
(c) ਵਪਾਰੀ ਦੇ ਥਾਂ ਦੀ ਸ਼ਹਿਰ ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਕਿੰਨੀ ਹੈ ?

(d) ਕੀ, ਡਾਕੀਆ ਰਸਤੇ ਵਿੱਚ ਕਿਤੇ ਰੁਕਿਆ ? ਵਿਸਥਾਰ ਨਾਲ ਦੱਸੋ।

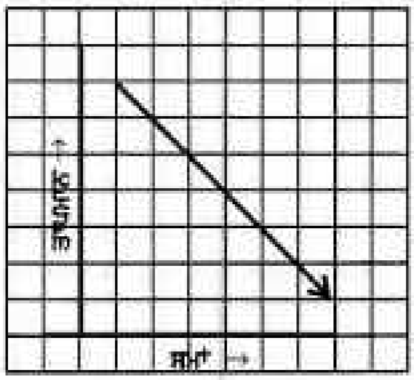
(e) ਕਿਸ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ ਉਸਦੀ ਚਾਲ ਸਭ ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਸੀ ?

7. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਗਰਾਫ਼ਾਂ ਵਿੱਚ ਕਿਹੜੇ-ਕਿਹੜੇ ਗਰਾਫ਼ ਸਮੇਂ ਅਤੇ ਤਾਪਮਾਨ ਦੇ ਵਿੱਚ ਸੰਬਧ ਹਨ ? ਤਰਕ ਦੇ ਨਾਲ ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਦਿਓ।

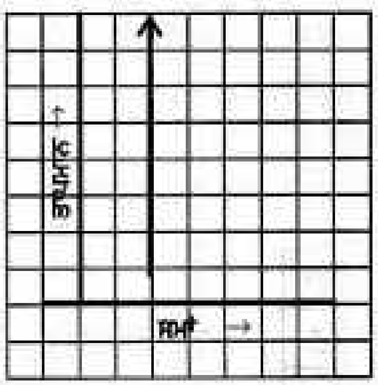
(i)



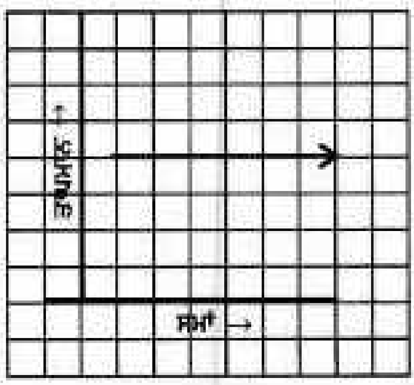
(ii)



(iii)

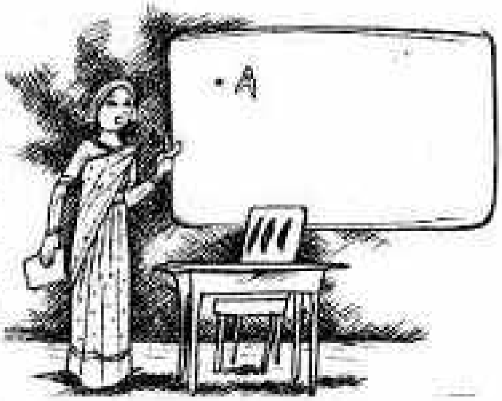


(iv)



15.2 ਰੇਖੀ ਗਰਾਫ਼

ਰੇਖੀ ਗਰਾਫ਼, ਅਨੇਕ ਰੇਖਾਖੰਡਾਂ ਨੂੰ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਮਿਲਾ ਕੇ ਬਣਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਕਦੇ-ਕਦੇ ਇਹ ਗਰਾਫ਼ ਇੱਕ ਪੂਰੀ (ਬਿਨ੍ਹਾਂ ਟੁੱਟੇ) ਰੇਖਾ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਗਰਾਫ਼ ਨੂੰ ਰੇਖੀ ਗਰਾਫ਼ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਗਰਾਫ਼ ਬਣਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਕਾਗਜ਼ 'ਤੇ ਕੁਝ ਬਿੰਦੂ ਅੰਕਿਤ ਕਰਨੇ ਪੈਂਦੇ ਹਨ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਸਿੱਖਾਂਗੇ ਕਿ ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਕਾਗਜ਼ ਦੇ ਬਿੰਦੂ ਅਸਾਨੀ ਨਾਲ ਕਿਵੇਂ ਅੰਕਿਤ ਕੀਤੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ।



15.2.1 ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ

ਅਧਿਆਪਕਾ ਨੇ ਬਲੈਕਬੋਰਡ 'ਤੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਅੰਕਿਤ ਕੀਤਾ। ਫਿਰ ਉਸਨੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਤੋਂ ਪੁੱਛਿਆ ਕਿ ਉਹ ਉਸਦੀ ਬਲੈਕਬੋਰਡ 'ਤੇ ਸਥਿਤੀ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੱਸਣਗੇ ? ਇਸ 'ਤੇ ਅਨੇਕ ਉੱਤਰ ਮਿਲੇ (ਚਿੱਤਰ 15.9)।

ਚਿੱਤਰ 15.9

ਕੀ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਵੀ ਕਥਨ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਨੂੰ ਸਹੀ-ਸਹੀ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ ? ਨਹੀਂ, ਕੋਈ ਵੀ ਨਹੀਂ। ਕਿਉਂ ? ਇਸਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਸੋਚੋ।

ਤਦ ਜੋਹਨ ਨੇ ਇੱਕ ਸੁਝਾਓ ਦਿੱਤਾ। ਉਸਨੇ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਦੂਰੀ ਬਲੈਕਬੋਰਡ ਦੇ ਖੱਬੇ ਕਿਨਾਰੇ ਤੋਂ ਮਾਪੀ ਅਤੇ ਕਿਹਾ, "ਇਹ ਬਿੰਦੂ ਬਲੈਕਬੋਰਡ ਦੇ ਖੱਬੇ ਕਿਨਾਰੇ ਤੋਂ 90 cm ਦੂਰ ਹੈ।" ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਸਮਝਦੇ ਹੋ ਕਿ ਉਸਦਾ ਸੁਝਾਓ ਬਿਲਕੁੱਲ ਸਹੀ ਹੈ ? (ਚਿੱਤਰ 15.10)

ਚਿੱਤਰ 15.10

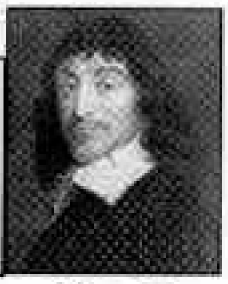
A, A_1, A_2, A_3 ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂ ਖੱਬੇ ਕਿਨਾਰੇ ਤੋਂ 90 cm ਦੂਰ ਹਨ।

ਚਿੱਤਰ 15.11

ਬਿੰਦੂ A ਖੱਬੇ ਕਿਨਾਰੇ ਤੋਂ 90 cm ਅਤੇ ਹੇਠਲੇ ਕਿਨਾਰੇ ਤੋਂ 160 cm ਦੂਰ ਹੈ।

ਤਦ ਰੇਖਾ ਨੇ ਕਥਨ ਨੂੰ ਸੁਧਾਰਦੇ ਹੋਏ ਕਿਹਾ, "ਇਹ ਬਿੰਦੂ ਬਲੈਕਬੋਰਡ ਦੇ ਖੱਬੇ ਕਿਨਾਰੇ ਤੋਂ 90 cm ਅਤੇ ਹੇਠਲੇ ਕਿਨਾਰੇ ਤੋਂ 160 cm ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਠੀਕ ਹੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਨ, (ਚਿੱਤਰ 15.7)। ਤਦ ਅਧਿਆਪਕ ਨੇ ਦੱਸਿਆ, ਅਸੀਂ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ (90, 160) ਲਿਖ ਕੇ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਕੀ ਬਿੰਦੂ (160, 90) ਬਿੰਦੂ (90, 160) ਤੋਂ ਵੱਖਰਾ ਹੋਵੇਗਾ ?" ਇਸਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

> *ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਸਤਾਰ੍ਹਵੀਂ ਸਦੀ ਵਿੱਚ ਰੇਨੇ ਦਕਾਰਤੇ (Rene Descartes) ਨੇ ਕੀੜੀ ਨੂੰ ਛੱਤ ਦੇ ਕੋਨੇ ਦੇ ਕੋਲ ਚਲਦੇ ਹੋਏ ਦੇਖਿਆ ਅਤੇ ਤਲ 'ਤੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਨੂੰ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰਨ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਸੋਚਣਾ ਸ਼ੁਰੂ ਕੀਤਾ। ਲੇਟਵੀਂ ਅਤੇ ਖੜ੍ਹਵੀਂ, ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਤੋਂ ਬਿੰਦੂ ਦੀਆਂ ਦੋ ਦੂਰੀਆਂ ਮਾਪ ਕੇ, ਸਥਿਤੀ ਦੱਸਣ ਦੀ ਵਿਧੀ ਨੂੰ, ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਸਨਮਾਨ ਵਿੱਚ ਅੱਜ ਕਾਰਟੀਜ਼ੀਅਨ ਵਿਧੀ (Cartesian system) ਆਖਦੇ ਹਨ।*



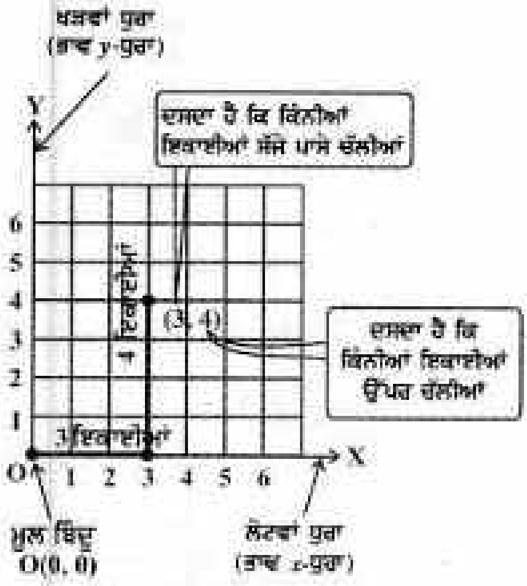
ਰੇਨੇ ਦਕਾਰਤੇ
(1596-1650)

15.2.2 ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ

ਕਲਪਨਾ ਕਰੋ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਕਿਸੇ ਥਿਏਟਰ ਵਿੱਚ ਜਾਂਦੇ ਹੋ ਅਤੇ ਆਪਣੀ ਰਿਜ਼ਰਵ ਸੀਟ ਲੱਭਦੇ ਹੋ। ਇਸਦੇ ਲਈ ਤੁਹਾਨੂੰ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਚਾਹੀਦੀਆਂ ਹਨ; ਇੱਕ ਲਾਈਨ ਨੰਬਰ ਅਤੇ ਸੀਟ ਨੰਬਰ। ਕਿਸੇ ਤਲ ਤੋਂ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰਨ ਦਾ ਇਹੀ ਅਧਾਰ ਹੈ।

ਚਿੱਤਰ 15.12 ਤੇ ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਬਿੰਦੂ (3,4) ਜਿਸਦੀ ਦੂਰੀ ਖੱਬੇ ਕਿਨਾਰੇ ਤੋਂ 3 ਇਕਾਈਆਂ ਅਤੇ ਹੇਠਲੇ ਕਿਨਾਰੇ ਤੋਂ 6 ਇਕਾਈਆਂ ਹਨ, ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਕਾਗਜ਼ 'ਤੇ ਕਿਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਅੰਕਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

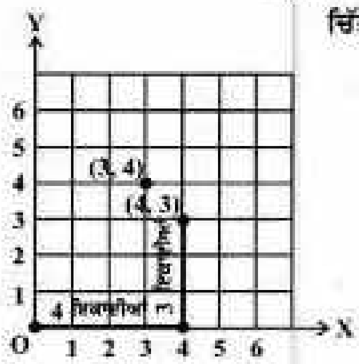
ਗਰਾਫ਼ ਵਾਲਾ ਕਾਗਜ਼ ਵੀ ਇੱਕ ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਕਾਗਜ਼ ਹੀ ਹੈ। ਇਸ 'ਤੇ ਅਸੀਂ x-ਧੁਰਾ ਅਤੇ y-ਧੁਰਾ ਸੁਵਿਧਾ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਫਿਰ ਉਸ ਤੇ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਸੰਖਿਆ 3, ਬਿੰਦੂ ਦਾ x-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਅਤੇ 4, y-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ (3, 4) ਬਿੰਦੂ ਦੇ **ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ** ਹਨ।



ਚਿੱਤਰ 15.12

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਇੱਕ ਗਰਾਫ਼ 'ਤੇ ਬਿੰਦੂ (4, 3) ਅੰਕਿਤ ਕਰੋ। ਕੀ ਇਹ ਉਹੀ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਜੋ (3, 4) ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ?

ਹੱਲ : ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਕਾਗਜ਼ 'ਤੇ x-ਧੁਰਾ ਅਤੇ y-ਧੁਰਾ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰੋ। (ਇਹ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾਵਾਂ ਹੀ ਹਨ) ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ (0, 0) ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰੋ। 4 ਇਕਾਈਆਂ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਜਾ ਕੇ ਫਿਰ 3 ਇਕਾਈਆਂ ਉੱਪਰ ਦੇ ਵੱਲ ਚਲੋ ਤਾਂ ਤੁਹਾਨੂੰ ਬਿੰਦੂ (4,3) ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਚਿੱਤਰ 15.13 ਦੇਖ ਕੇ ਤੁਸੀਂ ਸਮਝ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਬਿੰਦੂ (4,3) ਅਤੇ ਬਿੰਦੂ (3,4) ਵੱਖ-ਵੱਖ ਬਿੰਦੂ ਹਨ।



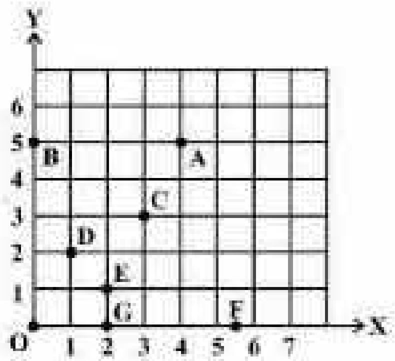
ਚਿੱਤਰ 15.13

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਚਿੱਤਰ 15.14 ਦੇਖ ਕੇ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਲਈ ਸਹੀ ਅੱਖਰ ਚੁਣੋ :

(i) (2, 1) (ii) (0, 5) (iii) (2, 0) ਅਤੇ ਲਿਖੋ

(iv) ਬਿੰਦੂ A ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ

(v) ਬਿੰਦੂ F ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ



ਚਿੱਤਰ 15.14

ਹੱਲ :

(i) (2, 1) ਹੈ ਬਿੰਦੂ E (D ਨਹੀਂ, ਸੋਚੋ)।

(ii) (0, 5) ਹੈ ਬਿੰਦੂ B (ਕਿਉਂ ? ਮਿੱਤਰਾਂ ਦੇ ਨਾਲ ਚਰਚਾ ਕਰੋ)।

(iii) (2, 0) ਹੈ ਬਿੰਦੂ G।

(iv) ਬਿੰਦੂ A ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹਨ (4,5)।

(v) ਬਿੰਦੂ F ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹਨ (5.5, 0)।

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਕਾਗਜ਼ 'ਤੇ ਅੰਕਿਤ ਕਰੋ ਅਤੇ ਦੇਖੋ ਕਿ ਕੀ ਉਹ ਸਾਰੇ ਇੱਕ ਹੀ ਸਰਲ ਰੇਖਾ ਵਿੱਚ ਹਨ। ਜੇ ਹਨ ਤਾਂ ਉਸ ਰੇਖਾ ਨੂੰ ਨਾਂ ਦਿਓ।

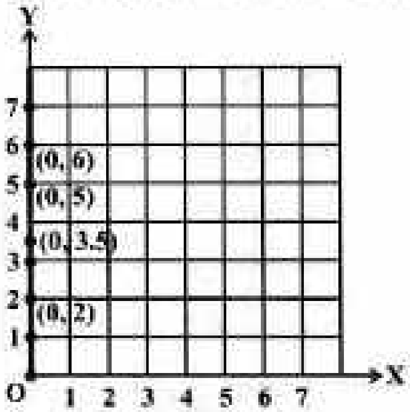
(i) (0, 2), (0, 5), (0, 6), (0, 3.5)

(ii) A(1, 1), B(1, 2), C(1, 3), D(1, 4)

(iii) K(1, 3), L(2, 3), M(3, 3), N(4, 3)

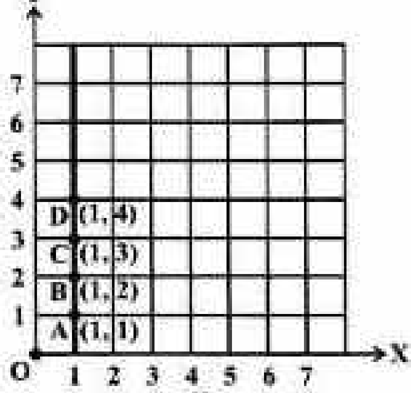
(iv) W(2, 6), X(3, 5), Y(5, 3), Z(6, 2)

ਹੱਲ :



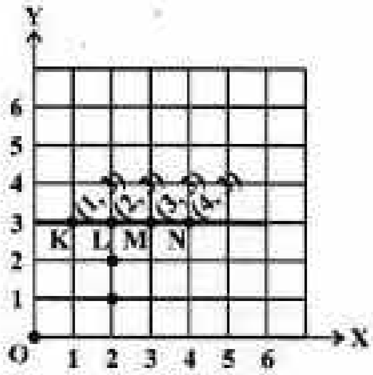
(i)

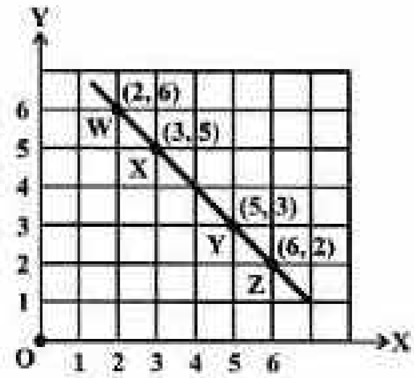
ਇਹ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂ ਇੱਕ ਹੀ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਹਨ। ਉਹ ਹੈ y-ਧੁਰਾ



(ii)

ਇਥੇ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂ ਇੱਕ ਹੀ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਹਨ। ਇਹ ਹੈ ਰੇਖਾ AD (ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਕੋਈ ਹੋਰ ਨਾਂ ਵੀ ਦੇ ਸਕਦੇ ਹੋ।) ਇਹ y-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ।)





(iii) **ਚਿੱਤਰ 15.15** (iv)

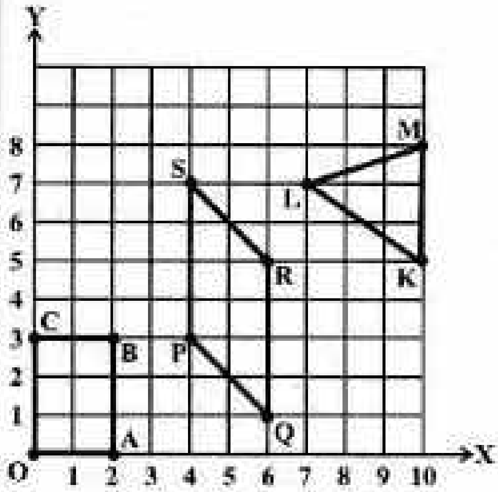
ਇਸ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂ ਇੱਕ ਹੀ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਹਨ। ਇਸ ਨੂੰ ਅਸੀਂ KL ਜਾਂ KM ਜਾਂ MN ਆਦਿ ਨਾਮ ਦੇ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਹ x-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ।

ਇਹ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂ ਇੱਕ ਹੀ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਹਨ। ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ XY ਜਾਂ WY ਜਾਂ YZ ਆਦਿ ਨਾਂ ਦੇ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਰੇਕ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ ਅੰਕਿਤ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਗਰਾਫ਼ ਇੱਕ ਸਰਲ ਰੇਖਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਗਰਾਫ਼ਾਂ ਨੂੰ ਰੇਖੀ ਗਰਾਫ਼ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਅਭਿਆਸ 15.2

1. ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਕਾਗਜ਼ (Graph Sheet) 'ਤੇ ਅੰਕਿਤ ਕਰੋ ਅਤੇ ਜਾਂਚੋ ਕਿ ਕੀ ਇਹ ਸਾਰੇ ਇੱਕ ਸਰਲ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਹਨ ?
   (a) A(4, 0), B(4, 2), C(4, 6), D(4, 2.5)
   (b) P(1, 1), Q(2, 2), R(3, 3), S(4, 4)
   (c) K(2, 3), L(5, 3), M(5, 5), N(2, 5)
2. ਬਿੰਦੂਆਂ (2,3) ਅਤੇ (3,2) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਹੋਈ ਇੱਕ ਸਰਲ ਰੇਖਾ ਖਿੱਚੋ। ਉਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਲਿਖੋ ਜਿਹਨਾਂ 'ਤੇ ਇਹ ਰੇਖਾ x-ਧੁਰੇ ਅਤੇ y-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕੱਟਦੀ ਹੈ।
3. ਗਰਾਫ਼ ਵਿੱਚ ਬਣਾਏ ਗਏ ਚਿੱਤਰਾਂ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਦੇ ਸਿਖਰਾਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਲਿਖੋ।
4. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਵਿੱਚ ਕਿਹੜੇ ਸੱਚ ਹਨ ਅਤੇ ਕਿਹੜੇ ਝੂਠ ? ਝੂਠ ਨੂੰ ਠੀਕ ਕਰੋ।
   (i) ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ ਜਿਸਦਾ x-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ, ਅਤੇ y-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਸਿਫ਼ਰ ਨਹੀਂ ਹੈ, y-ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
   (ii) ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ ਜਿਸਦਾ y-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ, ਅਤੇ x-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ 5 ਹੈ, y-ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
   (iii) ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (0, 0) ਹੈ।



15.3 ਕੁਝ ਪ੍ਰਯੋਗ

ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਜੀਵਨ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖਿਆ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਕਿਸੇ ਵੀ ਸੁਵਿਧਾ ਦੀ ਜਿੰਨੀ ਜ਼ਿਆਦਾ ਵਰਤੋਂ ਤੁਸੀਂ ਕਰਦੇ ਹੋ, ਉਨ੍ਹਾਂ ਹੀ ਜ਼ਿਆਦਾ ਉਸਦੇ ਲਈ ਮੁੱਲ ਦੇਣਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਜੇ ਤੁਸੀਂ ਬਿਜਲੀ ਜ਼ਿਆਦਾ ਖਰਚ ਕਰਦੇ ਹੋ ਤਾਂ ਤੁਹਾਨੂੰ ਬਿੱਲ ਵੀ ਜ਼ਿਆਦਾ ਦੇਣਾ ਪਵੇਗਾ। ਜੇ ਤੁਸੀਂ ਬਿਜਲੀ ਘੱਟ ਖਰਚ ਕਰਦੇ ਹੋ ਤਾਂ ਬਿੱਲ ਵੀ ਘੱਟ ਆਵੇਗਾ। ਇਹ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਹੈ ਜਿੱਥੇ ਇੱਕ ਰਾਸ਼ੀ ਦੂਸਰੀ ਨੂੰ ਪ੍ਰਭਾਵਿਤ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਬਿਜਲੀ ਦਾ ਬਿੱਲ, ਉਪਯੋਗ ਕੀਤੀ ਗਈ ਬਿਜਲੀ ਦੀ ਮਾਤਰਾ 'ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਬਿਜਲੀ ਦੀ ਮਾਤਰਾ ਇੱਕ **ਮੁਕਤ ਜਾਂ ਸੁਤੰਤਰ ਚਲ** ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਬਿਜਲੀ ਦਾ ਬਿੱਲ ਇੱਕ **ਨਿਰਭਰ ਚਲ** ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਗਰਾਫ਼ ਦੁਆਰਾ ਵੀ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਸੋਚੋ, ਚਰਚਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਲਿਖੋ

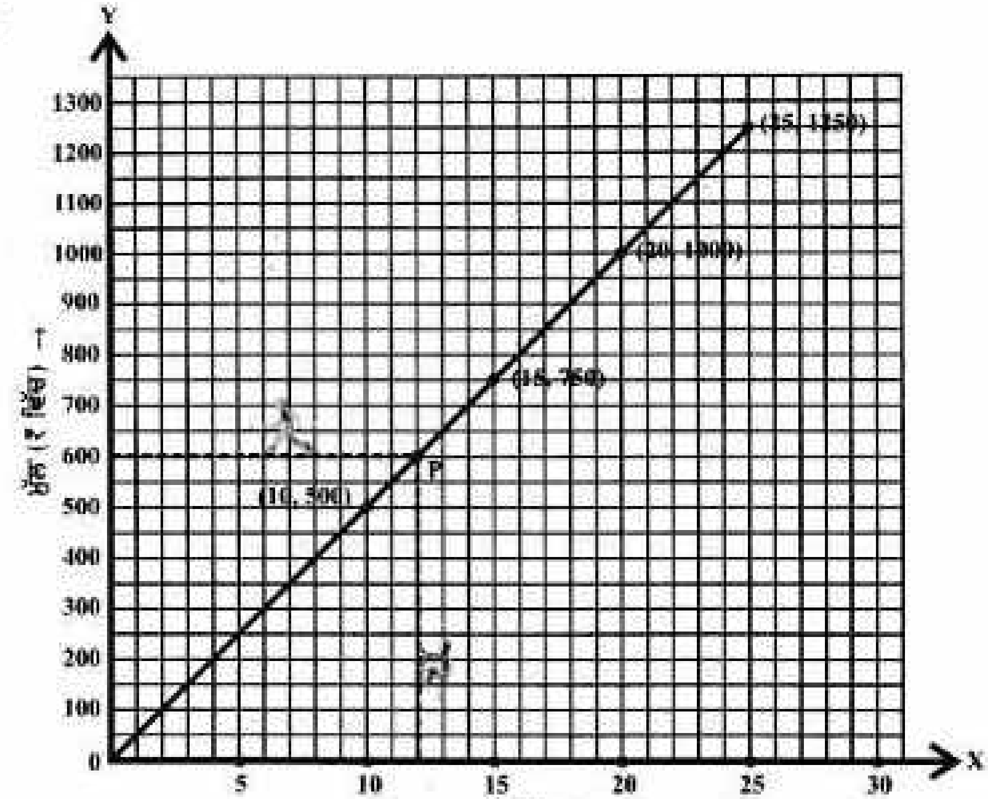
ਇੱਕ ਕਾਰ ਦੀ ਪੈਟਰੋਲ ਟੈਂਕੀ ਨੂੰ ਭਰਨ ਦੇ ਲਈ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਰਾਸ਼ੀ ਖਰੀਦੇ ਗਏ ਪੈਟਰੋਲ ਦੀ ਮਾਤਰਾ (ਲਿਟਰ ਵਿੱਚ) ਦੁਆਰਾ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਕਿਹੜਾ ਚਲ ਸੁਤੰਤਰ ਹੈ ? ਚਰਚਾ ਕਰੋ ?

ਉਦਾਹਰਣ 6 : (ਮਾਤਰਾ ਅਤੇ ਮੁੱਲ) ਹੇਠ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਣੀ ਪੈਟਰੋਲ ਦੀ ਮਾਤਰਾ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਮੁੱਲ ਦੱਸਦੀ ਹੈ:

ਪੈਟਰੋਲ ਦੀ ਮਾਤਰਾ (ਲਿਟਰ ਵਿੱਚ)	10	15	20	25
ਪੈਟਰੋਲ ਦਾ ਮੁੱਲ (ਰੁਪਏ ਵਿੱਚ)	500	750	1000	1250

ਇਹਨਾਂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਲਈ ਗਰਾਫ਼ ਬਣਾਉ।

ਹੱਲ :



ਚਿੱਤਰ 15.16

(i) ਆਉ, ਦੋਨਾਂ ਧੁਰਿਆਂ ਲਈ (ਚਿੱਤਰ 15.16) ਸਹੀ ਪੈਮਾਨਾ ਚੁਣੀਏ।

(ii) ਲੇਟਵੇਂ ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਪੈਟਰੋਲ ਦੀ ਮਾਤਰਾ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

(iii) ਖੜ੍ਹਵੇਂ ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਮੁੱਲ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

(iv) (10, 500) , (15, 750), (20, 1000) ਅਤੇ (25, 1250) ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਅੰਕਿਤ ਕਰੋ।

(v) ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉ।

ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਗਰਾਫ ਇੱਕ ਸਰਲ ਰੇਖਾ ਹੈ। (ਇਹ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਗਰਾਫ ਹੈ) ਇਹ ਗਰਾਫ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਕਿਉਂ ਲੰਘਦਾ ਹੈ ? ਇਸਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਸੋਚੋ।

ਇਹ ਗਰਾਫ ਸਾਡੇ ਕੁੱਝ ਤੱਥਾਂ 'ਤੇ ਅਨੁਮਾਨ ਲਗਾਉਣ ਵਿੱਚ ਸਹਾਇਕ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਮੰਨ ਲਵੋ, ਅਸੀਂ ਜਾਨਣਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ 12 ਲਿਟਰ ਪੈਟਰੋਲ ਦੇ ਲਈ ਕਿੰਨਾ ਮੁੱਲ ਦੇਣਾ ਹੋਵੇਗਾ ?

ਲੇਟਵੇਂ ਧੁਰੇ 'ਤੇ 12 ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਦੇਖੋ। 12 ਦੇ ਚਿੰਨ੍ਹ 'ਤੇ ਖੜ੍ਹਵੀਂ ਰੇਖਾ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਚਲ ਕੇ ਗਰਾਫ ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ P 'ਤੇ ਮਿਲਦੇ ਹਾਂ।

ਬਿੰਦੂ P ਤੋਂ ਲੇਟਵੀਂ ਰੇਖਾ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਚਲ ਕੇ ਖੜ੍ਹਵੇਂ ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਪਹੁੰਚਦੇ ਹਾਂ ਜਿੱਥੇ ਸਾਨੂੰ ਉਹ ਬਿੰਦੂ ਮਿਲਦਾ ਹੈ, ਜੋ ₹ 600 ਉੱਤਰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਇਹ ਗਰਾਫ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਦਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਦੋ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹਨ। ਕਿਵੇਂ ? ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ, ਗਰਾਫ ਹਮੇਸ਼ਾਂ ਰੇਖੀ ਹੀ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੀ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ, ਗਰਾਫ ਤੋਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ₹ 800 ਵਿੱਚ ਕਿੰਨਾ ਪੈਟਰੋਲ ਖਰੀਦਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ?

ਉਦਾਹਰਣ 7 : (ਮੂਲਧਨ ਅਤੇ ਸਧਾਰਨ ਵਿਆਜ)

ਇੱਕ ਬੈਂਕ ਸੀਨੀਅਰ ਸਿਟੀਜ਼ਨ ਨੂੰ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਜਮ੍ਹਾਂ ਧਨ 'ਤੇ 10% ਸਧਾਰਨ ਵਿਆਜ ਦਿੰਦਾ ਹੈ। ਜਮ੍ਹਾਂ ਧਨ ਅਤੇ ਉਸ 'ਤੇ ਬਣੇ ਸਧਾਰਨ ਵਿਆਜ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਗਰਾਫ਼ ਖਿੱਚੋ। ਇਹ ਗਰਾਫ਼ ਤੋਂ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(a) ₹ 250 ਜਮ੍ਹਾਂ ਕਰਨ 'ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਵਿਆਜ।

(b) ₹ 70 ਵਿਆਜ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਕਿੰਨਾ ਧਨ ਜਮ੍ਹਾਂ ਕਰਨਾ ਪਵੇਗਾ ?

ਜਮ੍ਹਾਂ ਧਨ	1 ਸਾਲ ਦੇ ਲਈ ਸਧਾਰਨ ਵਿਆਜ
₹ 100	$\frac{100\times1\times10}{100}$ = ₹ 10
₹ 200	$\frac{200\times1\times10}{100}$ = ₹ 20
₹ 300	$\frac{300\times1\times10}{100}$ = ₹ 30
₹ 500	$\frac{500\times1\times10}{100}$ = ₹ 50
₹ 1000	₹ 100

ਲੋੜੀਂਦੇ ਪਗ :
1. ਅੰਕਿਤ ਕੀਤੀਆਂ ਜਾਣ ਵਾਲੀਆਂ ਰਾਸ਼ੀਆਂ, ਜਮ੍ਹਾਂ ਧਨ ਅਤੇ ਉਸ 'ਤੇ ਬਣਿਆ ਵਿਆਜ ਪਤਾ ਕਰੋ।
2. x-ਧੁਰੇ ਅਤੇ y-ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਦਰਸਾਈਆਂ ਜਾਣ ਵਾਲੀਆਂ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰੋ।
3. ਉੱਚਿਤ ਪੈਮਾਨੇ ਚੁਣੋ।
4. ਬਿੰਦੂ ਅੰਕਿਤ ਕਰੋ।
5. ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਓ।

ਇਹਨਾਂ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਤੋਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਜਮ੍ਹਾਂ ਧਨ (₹ ਵਿੱਚ)	100	200	300	500	1000
ਸਾਲਾਨਾ ਸਧਾਰਨ ਵਿਆਜ (₹ ਵਿੱਚ)	10	20	30	50	100

(i) ਪੈਮਾਨਾ : ਲੇਟਵੇਂ ਧੁਰੇ 'ਤੇ 1 ਇਕਾਈ = ₹ 100
ਖੜ੍ਹਵੇਂ ਧੁਰੇ 'ਤੇ 1 ਇਕਾਈ = ₹ 10

(ii) ਜਮ੍ਹਾਂ ਧਨ ਨੂੰ ਲੇਟਵੇਂ ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

(iii) ਸਧਾਰਨ ਵਿਆਜ ਨੂੰ ਖੜ੍ਹਵੇਂ ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

(iv) (100, 10), (200, 20), (300, 30), (500, 50) ਅਤੇ (1000, 100) ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਅੰਕਿਤ ਕਰੋ।

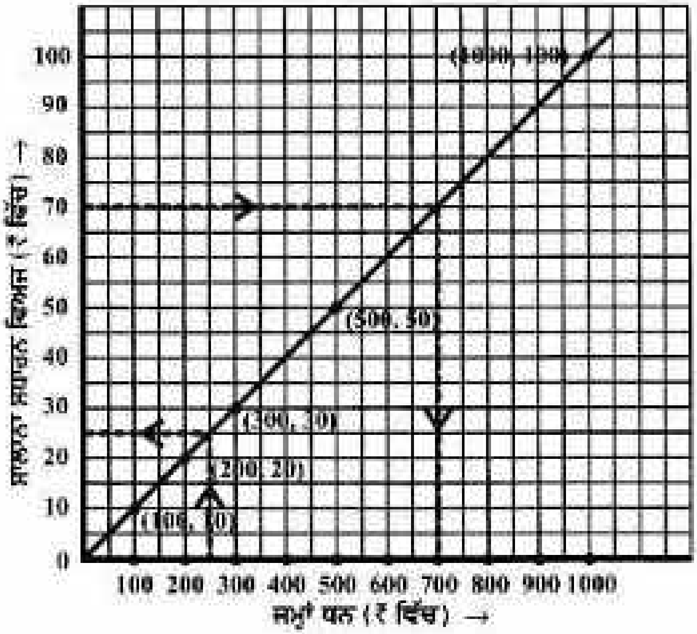
(v) ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉ। ਸਾਨੂੰ ਗਰਾਫ਼ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਰਲ ਰੇਖਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, (ਚਿੱਤਰ 15.17)।

(a) ਲੇਟਵੇਂ ਧੁਰੇ 'ਤੇ ₹ 250 ਮੂਲਧਨ ਦੇ ਲਈ ਖੜ੍ਹਵੇਂ ਧੁਰੇ 'ਤੇ ₹ 25 ਸਧਾਰਨ ਵਿਆਜ ਹੈ।

(b) ਖੜ੍ਹਵੇਂ ਧੁਰੇ 'ਤੇ ₹ 70 ਵਿਆਜ ਦੇ ਲਈ ਲੇਟਵੇਂ ਧੁਰੇ 'ਤੇ ₹ 700 ਮੂਲਧਨ ਹੈ।

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

ਕੀ ਉਦਾਹਰਣ 7 ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਦੀ ਉਦਾਹਰਣ ਹੈ?



ਚਿੱਤਰ 15.17

ਉਦਾਹਰਣ 8 : **(ਸਮੇਂ ਅਤੇ ਦੂਰੀ)** ਅਜੀਤ ਲਗਾਤਾਰ 30 km/hour ਦੀ ਗਤੀ ਨਾਲ ਸਕੂਟਰ ਚਲਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਦੇ ਲਈ ਸਮੇਂ-ਦੂਰੀ ਦੇ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਗਰਾਫ਼ ਖਿੱਚੋ। ਇਸ ਗਰਾਫ਼ ਤੋਂ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) ਅਜੀਤ ਨੂੰ 75 km ਦੂਰੀ ਤੈਅ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਲੱਗਣ ਵਾਲਾ ਸਮਾਂ।

(ii) ਅਜੀਤ ਵਲੋਂ $3\frac{1}{2}$ ਘੰਟੇ ਵਿੱਚ ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਗਈ ਦੂਰੀ

ਹੱਲ :

ਯਾਤਰਾ ਦੇ ਘੰਟੇ	ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਗਈ ਦੂਰੀ
1 ਘੰਟਾ	30 km
2 ਘੰਟੇ	$2 \times 30 = 60$ km
3 ਘੰਟੇ	$3 \times 30 = 90$ km
4 ਘੰਟੇ	$4 \times 30 = 120$ km

ਇਹਨਾਂ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਤੋਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ:

ਸਮਾਂ (ਘੰਟਿਆਂ ਵਿੱਚ)	1	2	3	4
ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਗਈ ਦੂਰੀ (km ਵਿੱਚ)	30	60	90	120

(i) ਪੈਮਾਨਾ : ਲੇਟਵੇਂ ਧੁਰੇ 'ਤੇ 2 ਇਕਾਈਆਂ = 1 ਘੰਟਾ

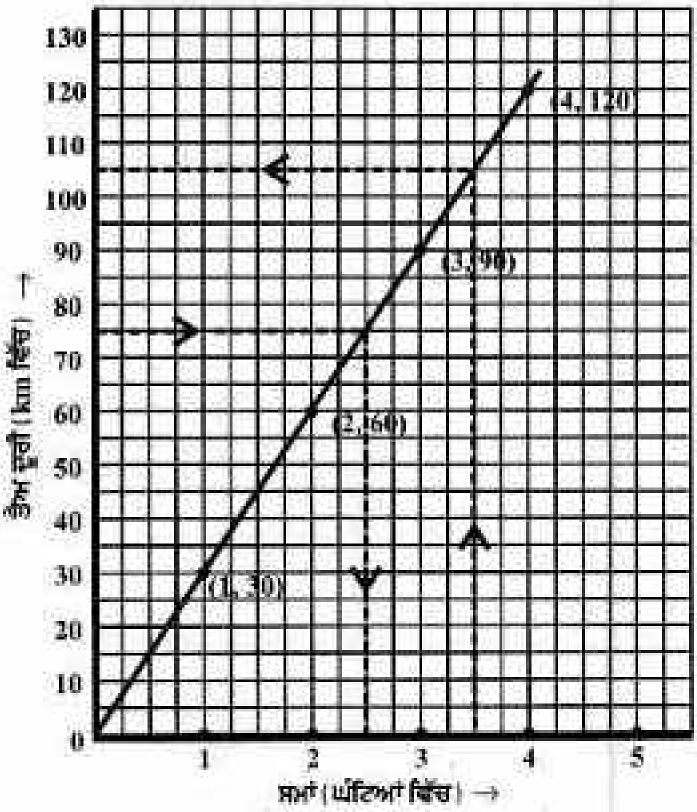
ਖੜ੍ਹਵੇਂ ਧੁਰੇ 'ਤੇ 1 ਇਕਾਈ = 10 km

(ii) ਲੇਟਵੇਂ ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਸਮਾਂ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ।

(iii) ਖੜ੍ਹਵੇਂ ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਦੂਰੀ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ।

(iv) (1, 30), (2, 60), (3, 90) ਅਤੇ (4, 120) ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਅੰਕਿਤ ਕਰੋ।

(v) ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉ। ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਗਰਾਫ਼ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ; (ਚਿੱਤਰ 15.18)।



ਚਿੱਤਰ 15.18

(a) ਖੜ੍ਹਵੇਂ ਧੁਰੇ 'ਤੇ 75 km ਦੂਰੀ ਲੈਣ 'ਤੇ, ਉਸਦੇ ਅਨੁਸਾਰੀ ਲੇਟਵੇਂ ਧੁਰੇ 'ਤੇ 2.5 ਘੰਟੇ ਲੱਗਦੇ ਹਨ।

(b) ਲੇਟਵੇਂ ਧੁਰੇ 'ਤੇ $3\frac{1}{2}$ ਘੰਟੇ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰੀ ਖੜ੍ਹਵੇਂ ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਦੂਰੀ 105 km ਮਿਲਦੀ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 15.3

1. ਢੁੱਕਵੇਂ ਪੈਮਾਨੇ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਸਾਰਣੀਆਂ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਦੇ ਲਈ ਗਰਾਫ਼ ਬਣਾਉ :

(a) ਸੇਬਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ

ਸੇਬਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	1	2	3	4	5
ਮੁੱਲ (₹ ਵਿੱਚ)	5	10	15	20	25

(b) ਕਾਰ ਦੁਆਰਾ ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਗਈ ਦੂਰੀ

ਸਮਾਂ (ਘੰਟਿਆਂ ਵਿੱਚ)	6 ਵਜੇ ਸਵੇਰ	7 ਵਜੇ ਸਵੇਰ	8 ਵਜੇ ਸਵੇਰ	9 ਵਜੇ ਸਵੇਰ
ਦੂਰੀ (km ਵਿੱਚ)	40	80	120	160

(i) 7.30 ਵਜੇ ਸਵੇਰ ਅਤੇ 8 ਵਜੇ ਸਵੇਰ ਦੇ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ ਕਾਰ ਦੁਆਰਾ ਕਿੰਨੀ ਦੂਰੀ ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਗਈ?

(ii) ਕਾਰ ਦੀ 100 km ਦੂਰੀ ਤੈਅ ਕਰ ਲੈਣ 'ਤੇ ਸਮਾਂ ਕੀ ਸੀ?

(c) ਜਮ੍ਹਾਂ ਧਨ 'ਤੇ ਸਾਲਾਨਾ ਵਿਆਜ

ਜਮ੍ਹਾਂ ਧਨ (₹ ਵਿੱਚ)	1000	2000	3000	4000	5000
ਸਧਾਰਨ ਵਿਆਜ (₹ ਵਿੱਚ)	80	160	240	320	400

(i) ਕੀ ਗਰਾਫ਼ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਲੰਘਦਾ ਹੈ?

(ii) ਗਰਾਫ਼ ਤੋਂ ₹ 2500 ਦਾ ਸਾਲਾਨਾ ਵਿਆਜ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(iii) ₹ 280 ਵਿਆਜ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਕਿੰਨਾ ਧਨ ਜਮ੍ਹਾਂ ਕਰਨਾ ਹੋਵੇਗਾ?

2. ਸਾਰਣੀਆਂ ਦੇ ਲਈ ਗਰਾਫ਼ ਖਿੱਚੋ।

(i)

ਵਰਗ ਦੀ ਭੁਜਾ (cm ਵਿੱਚ)	2	3	3.5	5	6
ਪਰਿਮਾਪ (cm ਵਿੱਚ)	8	12	14	20	24

ਕੀ ਇਹ ਰੇਖੀ ਗਰਾਫ਼ ਹੈ?

(ii)

ਵਰਗ ਦੀ ਭੁਜਾ (cm ਵਿੱਚ)	2	3	4	5	6
ਖੇਤਰਫਲ (cm^2 ਵਿੱਚ)	4	9	16	25	36

ਕੀ ਇਹ ਰੇਖੀ ਗਰਾਫ਼ ਹੈ?

ਅਸੀਂ ਕੀ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀ?

1. ਗਰਾਫ਼ ਚਿੱਤਰ ਸਮਝਣਾ ਸੌਖਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
2. (i) **ਬਾਰ ਗਰਾਫ਼** ਵੱਖ-ਵੱਖ ਸ਼੍ਰੇਣੀਆਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਢੁੱਕਵਾਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ?
   (ii) **ਚੱਕਰ ਗਰਾਫ਼** ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਦੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਭਾਗਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਢੁੱਕਵਾਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
   (iii) **ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ** ਲਗਾਤਾਰ ਅੰਤਰਾਲ ਵਾਲੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੇ ਲਈ ਬਾਰ-ਗਰਾਫ਼ ਹੈ।
3. ਰੇਖਾ-ਗਰਾਫ਼, ਸਮੇਂ ਦੇ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਦੇ ਨਾਲ ਅੰਕੜਿਆਂ ਵਿੱਚ ਬਦਲਾਓ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।
4. ਰੇਖਾ-ਗਰਾਫ਼ ਜੋ ਕਿ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਅਖੰਡਿਤ (ਨਾ ਟੁੱਟੀ) ਰੇਖਾ ਹੋਵੇ, ਇੱਕ **ਰੇਖੀ ਗਰਾਫ਼** ਕਹਿਲਾਉਂਦਾ ਹੈ।
5. ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਕਾਗਜ਼ 'ਤੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ **x-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ** ਅਤੇ **y-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ** ਚਾਹੀਦੇ ਹਨ।
6. ਇੱਕ **ਸੁਤੰਤਰ ਚਲ** ਅਤੇ **ਨਿਰਭਰ ਚਲ** ਵਿੱਚ ਸੰਬੰਧ ਇੱਕ ਗਰਾਫ਼ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਅਧਿਆਇ 16

ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਨਾਲ ਖੇਡਣਾ

16.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਤੁਸੀਂ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਕਿਸਮਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ, ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ, ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਤੇ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਅਧਿਐਨ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹੋ। ਤੁਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਅਨੇਕ ਰੋਚਕ ਗੁਣਾਂ ਦਾ ਵੀ ਅਧਿਐਨ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹੋ। ਜਮਾਤ VI ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਅਤੇ ਗੁਣਜਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਖੋਜ ਕੀਤੀ ਅਤੇ ਇਹ ਵੀ ਦੇਖਿਆ ਕਿ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਕੀ ਸੰਬੰਧ ਪਤਾ ਕੀਤੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਹੋਰ ਜ਼ਿਆਦਾ ਵਿਸਥਾਰ ਨਾਲ ਜਾਣਕਾਰੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਾਂਗੇ। ਇਹ ਸੰਕਲਪ ਵੰਡਣ ਦੇ ਨਿਯਮਾਂ ਦੀ ਜਾਂਚ (test of divisibility) ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਵਿੱਚ ਸਹਾਇਤਾ ਕਰਨਗੇ।

16.2 ਆਮ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸੰਖਿਆਵਾਂ

ਆਉ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ 52 ਲਵੋ ਅਤੇ ਉਸ ਨੂੰ ਇਸ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ :

$$52 = 50 + 2 = 10 \times 5 + 2$$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਸੰਖਿਆ 37 ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$37 = 10 \times 3 + 7$$

ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਅੰਕਾਂ a ਅਤੇ b ਨਾਲ ਬਣੀ ਕਿਸੇ ਦੋ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ab ਨੂੰ ਇਸ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ : $ab = 10 \times a + b = 10a + b$

ਇੱਥੇ ab ਦਾ ਮਤਲਬ $a \times b$ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ba ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਕੀ ਕਿਹਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ? $ba = 10 \times b + a = 10b + a$

ਆਉ, ਹੁਣ ਸੰਖਿਆ 351 ਲੈ ਲਵੋ। ਇਹ ਇੱਕ ਤਿੰਨ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਹੈ abc ਨੂੰ ਇਸ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$351 = 300 + 50 + 1 = 100 \times 3 + 10 \times 5 + 1 \times 1$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, $497 = 100 \times 4 + 10 \times 9 + 1 \times 7$

ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਅੰਕਾਂ a, b ਅਤੇ c ਨਾਲ ਬਣੀ ਕਿਸੇ ਤਿੰਨ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ abc ਨੂੰ ਇਸ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$abc = 100 \times a + 10 \times b + 1 \times c$$
$$= 100a + 10b + c$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ,

$$cab = 100c + 10a + b$$
$$bca = 100b + 10c + a$$

ਆਦਿ।

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

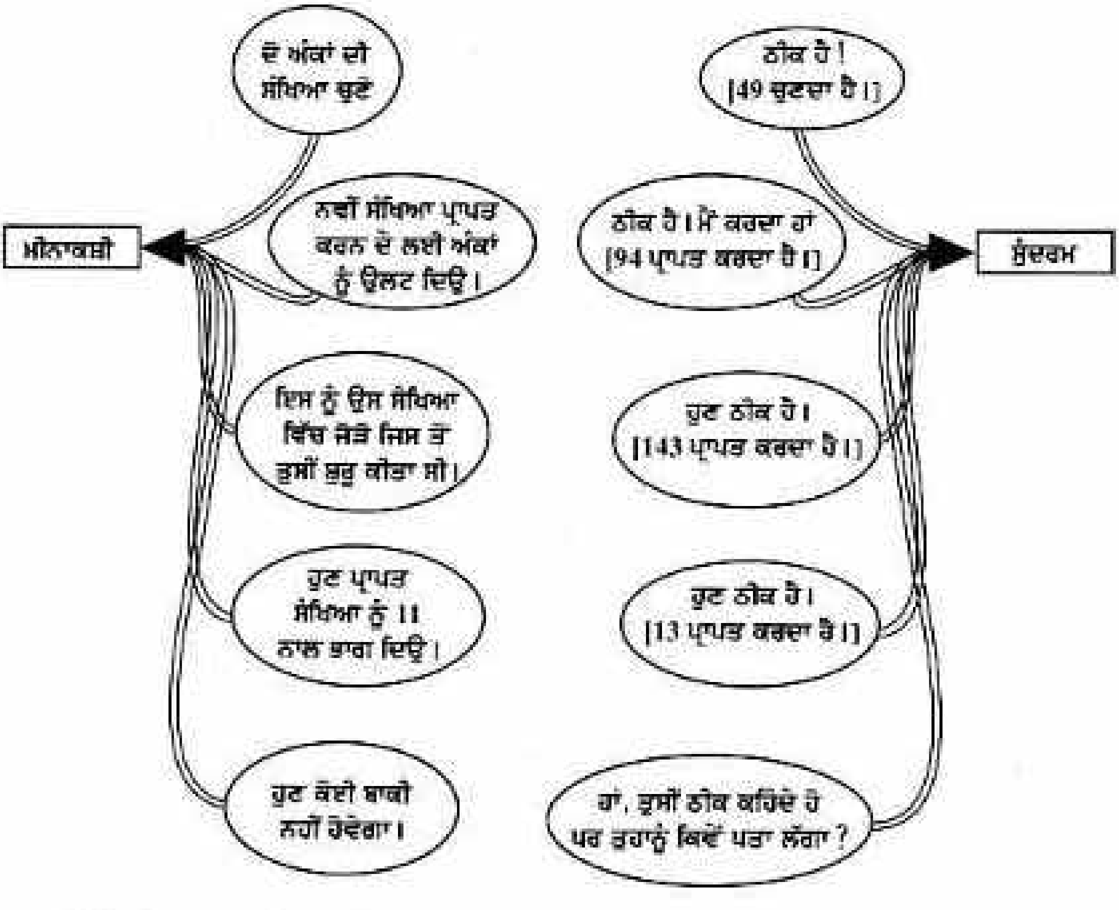
1. ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ :
   (i) 25 (ii) 73 (iii) 129 (iv) 302
2. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਨੂੰ ਸਧਾਰਨ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ :
   (i) $10 \times 5 + 6$ (ii) $100 \times 7 + 10 \times 1 + 8$ (iii) $100a + 10c + b$

16.3 ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਨਾਲ ਖੇਡਾਂ

(i) ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਪਲਟਣਾ-ਦੋ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ

ਮੀਨਾਕਸ਼ੀ ਨੇ ਸੁੰਦਰਮ ਨੂੰ ਕੋਈ ਦੋ ਅੰਕਾਂ ਵਾਲੀ ਸੰਖਿਆ ਸੋਚਣ ਨੂੰ ਕਿਹਾ ਅਤੇ ਇਹ ਵੀ ਕਿਹਾ ਕਿ ਉਹ ਹੁਣ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਹਿੰਦੀ ਜਾਵੇ ਉਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਰਦਾ ਜਾਵੇ। ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਗੱਲਬਾਤ ਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਚਿੱਤਰਾਂ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਅੱਗੇ ਪੜ੍ਹਨ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ, ਕ੍ਰਿਪਾ ਕਰਕੇ ਚਿੱਤਰ ਦਾ ਧਿਆਨ ਨਾਲ ਅਧਿਐਨ ਕਰੋ।

ਮੀਨਾਕਸ਼ੀ ਅਤੇ ਸੁੰਦਰਮ ਵਿੱਚ ਗੱਲਬਾਤ : ਪਹਿਲਾ ਦੌਰ



ਇੱਥੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਸੁੰਦਰਮ 49 ਚੁਣਦਾ ਹੈ। ਅੰਕ ਉਲਟਾਉਣ ਤੇ ਉਸ ਨੂੰ ਸੰਖਿਆ 94 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਫਿਰ ਉਹ ਇਹਨਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਜੋੜ ਕੇ $49 + 94 = 143$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਅੰਤ ਵਿੱਚ, ਉਸਨੇ ਇਸ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ 11 ਨਾਲ ਭਾਗ ਦੇ ਕੇ $143 \div 11 = 13$ ਭਾਗਫਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਅਤੇ ਕੋਈ ਬਾਕੀ ਨਹੀਂ ਰਿਹਾ। ਇਹੀ ਉਹ ਗੱਲ ਹੈ ਜੋ ਮੀਨਾਕਸ਼ੀ ਨੇ ਪਹਿਲਾਂ ਹੀ ਦੱਸੀ ਸੀ (ਭਵਿੱਖਬਾਣੀ ਕੀਤੀ ਸੀ)।

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ ਕਿ ਜੇ ਸੁੰਦਰਮ ਨੇ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਚੁਣੀਆਂ ਹੁੰਦੀਆਂ, ਤਾਂ ਕੀ ਨਤੀਜੇ ਮਿਲਦੇ :

1. 27 2. 39 3. 64 4. 17

ਆਉ, ਹੁਣ ਦੇਖੀਏ ਕਿ ਕੀ ਅਸੀਂ ਮੀਨਾਕਸ਼ੀ ਦੀ ਚਤੁਰਾਈ (trick)" ਨੂੰ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਮੰਨ ਲਵੋ ਕਿ ਸੁੰਦਰਮ ਸੰਖਿਆ ab ਚੁਣਦਾ ਹੈ, ਜੋ ਦੋ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ $10a + b$ ਦਾ ਸੰਖੇਪ ਰੂਪ ਹੈ। ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਪਲਟਨ 'ਤੇ, ਇਹ ਸੰਖਿਆ $ba = 10b + a$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਦੋਨਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਜੋੜਨ 'ਤੇ, ਉਸ ਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$(10a + b) + (10b + a) = 11a + 11b$$
$$= 11\,(a + b)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਜੋੜ ਹਮੇਸ਼ਾਂ 11 ਦਾ ਇੱਕ ਗੁਣਜ (multiple) ਹੈ, ਜਿਵੇਂ ਮੀਨਾਕਸ਼ੀ ਨੇ ਦਾਅਵਾ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਜੋੜ ਨੂੰ 11 ਨਾਲ ਭਾਗ ਦਈਏ ਤਾਂ ਭਾਗਫਲ $(a + b)$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਭਾਗਫਲ ਚੁਣੀ ਹੋਈ ਸੰਖਿਆ ba ਦੇ ਅੰਕਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

ਤੁਸੀਂ ਉਪਰੋਕਤ ਕੀਤੀ ਪੜਤਾਲ ਹੋਰ ਵੀ ਦੋ ਅੰਕਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ।

ਮੀਨਾਕਸ਼ੀ ਅਤੇ ਸੁੰਦਰਮ ਦੀ ਖੇਡ ਚਾਲੂ ਰਹਿੰਦੀ ਹੈ!

ਮੀਨਾਕਸ਼ੀ : ਇੱਕ ਹੋਰ ਦੋ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਸੋਚੋ। ਪਰ ਮੈਨੂੰ ਉਹ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਦੱਸਣੀ।

ਸੁੰਦਰਮ : ਠੀਕ ਹੈ!

ਮੀਨਾਕਸ਼ੀ : ਹੁਣ ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਪਲਟੋ ਅਤੇ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚੋਂ ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ ਘਟਾਓ।

ਸੁੰਦਰਮ : ਮੈਂ ਘਟਾ ਲਈ ਹੈ। ਹੁਣ ਅੱਗੇ ਕੀ ਕਰਨਾ ਹੈ?

ਮੀਨਾਕਸ਼ੀ : ਹੁਣ ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਨੂੰ 9 ਨਾਲ ਭਾਗ ਦੇਵੋ। ਮੇਰਾ ਵਿਸ਼ਵਾਸ ਹੈ ਕਿ ਬਾਕੀ 0 ਹੋਵੇਗਾ।

ਸੁੰਦਰਮ : ਹਾਂ, ਤੂੰ ਸਹੀ ਕਹਿ ਰਹੀ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ, ਇੱਥੇ ਬਾਕੀ 0 ਹੀ ਹੈ। ਪਰ ਇਸ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਮੈਂ ਜਾਣਦਾ ਹਾਂ ਕਿ ਤੂੰ ਇਸ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਇੰਨੀ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕਿਉਂ ਹੈ ?

ਅਸਲ ਵਿੱਚ, ਸੁੰਦਰਮ ਨੇ ਸੰਖਿਆ 29 ਸੋਚੀ ਸੀ। ਇਸਦੇ ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਪਲਟ ਕੇ ਉਸਨੇ ਸੰਖਿਆ 92 ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੀ। ਫਿਰ ਉਸਨੇ $92 - 29 = 63$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਅਤੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਉਸਨੇ $63 \div 9$ ਪਤਾ ਕੀਤਾ, ਜੋ ਭਾਗਫਲ 7 ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਬਾਕੀ 0 ਹੈ।

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ ਕਿ ਜੇ ਸੁੰਦਰਮ ਨੇ ਉਪਰੋਕਤ ਦੇ ਲਈ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਚੁਣੀਆਂ ਹੁੰਦੀਆਂ, ਤਾਂ ਕੀ ਨਤੀਜੇ ਮਿਲਦੇ :

1. 17 2. 21 3. 96 4. 37

ਆਉ ਵੇਖੀਏ ਕਿ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸੁੰਦਰਮ ਮੀਨਾਕਸ਼ੀ ਦੀ ਦੂਸਰੀ ਚਤੁਰਾਈ ਨੂੰ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ। (ਹੁਣ ਉਹ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਆਤਮ-ਵਿਸ਼ਵਾਸ ਮਹਿਸੂਸ ਕਰਨ ਲੱਗਾ ਹੈ।)

ਮੰਨ ਲਵੋ ਕਿ ਉਹ ਦੋ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ $ab = 10a + b$ ਚੁਣਦਾ ਹੈ। ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਪਲਟਨ 'ਤੇ, ਉਹ ਸੰਖਿਆ $ba = 10b + a$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਮੀਨਾਕਸ਼ੀ ਉਸ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚੋਂ ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ ਘਟਾਉਣ ਨੂੰ ਕਹਿੰਦੀ ਹੈ।

- ਜਦ ਦਹਾਈ ਦਾ ਅੰਕ ਇਕਾਈ ਦੇ ਅੰਕ ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਹੈ (ਭਾਵ $a > b$ ਹੈ), ਤਾਂ ਉਹ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਘਟਾਉਂਦਾ ਹੈ :

$$(10a + b) - (10b + a) = 10a + b - 10b - a$$
$$= 9a - 9b = 9(a - b)$$

- ਜਦ ਇਕਾਈ ਦਾ ਅੰਕ ਦਹਾਈ ਦੇ ਅੰਕ ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਹੈ (ਭਾਵ $b > a$ ਹੈ), ਤਾਂ ਉਹ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਘਟਾਉਂਦਾ ਹੈ :

$$(10b + a) - (10a + b) = 9(b - a)$$

- ਬਿਨ੍ਹਾਂ ਸ਼ੱਕ, ਜਦ $a = b$ ਹੈ, ਤਾਂ ਉਹ 0 ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਹਰੇਕ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਖਿਆ 9 ਨਾਲ ਵੰਡੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਾਕੀ 0 ਹੈ। ਧਿਆਨ ਰੱਖੋ ਕਿ ਜਦ ਅਸੀਂ (ਘਟਾਉਣ 'ਤੇ) ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਭਾਗ ਦੇਈਏ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ $a > b$ ਜਾਂ $a < b$ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਭਾਗਫਲ $(a - b)$ ਜਾਂ $(b - a)$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਕੋਈ ਵੀ ਹੋਰ ਦੋ ਅੰਕਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲੈ ਕੇ ਉਪਰੋਕਤ ਤੱਥ ਦੀ ਪੜਤਾਲ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ।

(ii) ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਪਲਟਨਾ— ਤਿੰਨ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ

ਹੁਣ ਸੁੰਦਰਮ ਦੀ ਵਾਰੀ ਹੈ ਕਿ ਉਹ ਚਤੁਰਾਈ ਦਿਖਾਵੇ।

ਸੁੰਦਰਮ : ਇੱਕ ਤਿੰਨ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਕੋਈ ਸੰਖਿਆ ਸੋਚੋ, ਪਰ ਇਸਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਮੈਨੂੰ ਨਾ ਦੱਸੋ।

ਮੀਨਾਕਸ਼ੀ : ਠੀਕ ਹੈ।

ਸੁੰਦਰਮ : ਹੁਣ ਇਹਨਾਂ ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਉੱਲਟ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ (ਪਲਟਦੇ ਹੋਏ) ਲੈ ਕੇ ਇੱਕ ਨਵੀਂ ਸੰਖਿਆ ਬਣਾਓ ਅਤੇ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚੋਂ ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ ਘਟਾਉ।

ਮੀਨਾਕਸ਼ੀ : ਠੀਕ ਹੈ, ਮੈਂ ਘਟਾ ਲਿਆ ਹੈ। ਅੱਗੇ ਕੀ ਕਰਨਾ ਹੈ ?

ਸੁੰਦਰਮ : ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਨੂੰ 99 ਨਾਲ ਭਾਗ ਦਿਓ। ਮੈਂ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕਹਿ ਸਕਦਾ ਹਾਂ ਕਿ ਬਾਕੀ 0 ਹੋਵੇਗਾ।

ਅਸਲ ਵਿੱਚ, ਮੀਨਾਕਸ਼ੀ ਨੇ ਤਿੰਨ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 349 ਚੁਣੀ ਸੀ। ਇਸ ਲਈ ਉਸਨੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ :

- ਅੰਕ ਪਲਟਨ ਤੇ ਸੰਖਿਆ : 943;
- ਅੰਤਰ : $943 - 349 = 594$
- ਵੰਡ : $594 \div 99 = 6$, ਬਾਕੀ 0 ਨਾਲ।

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ ਕਿ ਜੇ ਮੀਨਾਕਸ਼ੀ ਨੇ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਚੁਣੀਆਂ ਹੁੰਦੀਆਂ, ਤਾਂ ਨਤੀਜਾ ਕੀ ਮਿਲਦਾ ? ਹਰੇਕ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਏ ਭਾਗਫਲ ਦਾ ਇੱਕ ਰਿਕਾਰਡ (record) ਰੱਖੋ।

1. 132 2. 469 3. 737 4. 901

ਆਉ ਦੇਖੀਏ ਕਿ ਇਹ ਚਤੁਰਾਈ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੰਮ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਵੋ ਕਿ ਮੀਨਾਕਸ਼ੀ ਵੱਲੋਂ ਚੁਣੀ ਗਈ ਤਿੰਨ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ $abc = 100a + 10b + c$ ਹੈ।

ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਪਲਟਨ 'ਤੇ, ਉਹ ਸੰਖਿਆ $cba = 100c + 10b + a$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਘਟਾਉਣ 'ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗਾ :

- ਜਦ $a > c$ ਹੈ, ਤਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਅੰਤਰ ਹੈ,

$$(100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = 100a + 10b + c - 100c - 10b - a$$
$$= 99a - 99c = 99(a - c).$$

- ਜਦ $c > a$ ਹੈ, ਤਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਅੰਤਰ ਹੈ,

$$(100c + 10b + a) - (100a + 10b + c) = 99c - 99a = 99(c - a).$$

- ਬਿਨ੍ਹਾਂ ਸ਼ੱਕ, ਜਦ, $a = c$ ਹੈ ਤਾਂ ਅੰਤਰ 0 ਹੈ।

ਹਰੇਕ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਨਤੀਜੇ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਖਿਆ 99 ਨਾਲ ਭਾਜ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਬਾਕੀ 0 ਮਿਲਦਾ ਹੈ। ਧਿਆਨ ਰੱਖੋ ਕਿ ਭਾਗਫਲ $(a - c)$ ਜਾਂ $(c - a)$ ਹੋਵੇਗਾ। ਤੁਸੀਂ ਤਿੰਨ ਅੰਕਾਂ ਦੀਆਂ ਹੋਰ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲੈ ਕੇ ਇਸ ਤੱਥ ਦੀ ਪੜਤਾਲ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ।

(iii) **ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਤਿੰਨ ਅੰਕਾਂ ਤੋਂ ਤਿੰਨ ਅੰਕਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਬਣਾਉਣਾ**

ਹੁਣ ਇੱਕ ਵਾਰ ਫਿਰ ਮੀਨਾਕਸ਼ੀ ਦੀ ਵਾਰੀ ਹੈ।

ਮੀਨਾਕਸ਼ੀ : ਤਿੰਨ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਕੋਈ ਸੰਖਿਆ ਸੋਚੋ।

ਸੁੰਦਰਮ : ਠੀਕ ਹੈ, ਮੈਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਰ ਲਿਆ ਹੈ।

ਮੀਨਾਕਸ਼ੀ : ਹੁਣ ਇਸ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੋ ਹੋਰ ਤਿੰਨ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਬਣਾਉਣ ਵਿੱਚ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਕਰੋ :

ਜਦ ਤੁਸੀਂ ਸੰਖਿਆ abc ਚੁਣੀ ਹੈ, ਤਾਂ

- ਪਹਿਲੀ ਸੰਖਿਆ cab (ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਇਕਾਈ ਦਾ ਅੰਕ ਉਸ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਖੱਬੇ ਸਿਰੇ 'ਤੇ ਪਹੁੰਚ ਗਿਆ) ਹੈ।
- ਹੋਰ ਸੰਖਿਆ bca (ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਸੈਂਕੜੇ ਦਾ ਅੰਕ ਉਸ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਸੱਜੇ ਸਿਰੇ 'ਤੇ ਪਹੁੰਚ ਗਿਆ) ਹੈ।

ਹੁਣ ਇਹਨਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਜੋੜੋ। ਨਤੀਜੇ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ 37 ਨਾਲ ਭਾਗ ਦਿਓ। ਮੇਰਾ ਵਿਸ਼ਵਾਸ ਹੈ ਕਿ ਬਾਕੀ 0 ਹੋਵੇਗਾ।

ਸੁੰਦਰਮ : ਹਾਂ ਤੁਸੀਂ ਸਹੀ ਹੋ।

ਅਸਲ ਵਿੱਚ, ਸੁੰਦਰਮ ਨੇ ਤਿੰਨ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 237 ਸੋਚੀ ਸੀ। ਜਿਵੇਂ ਮੀਨਾਕਸ਼ੀ ਨੇ ਕਿਹਾ ਸੀ, ਉਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਰਨ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਉਸਨੂੰ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 723 ਅਤੇ 372 ਮਿਲੀਆਂ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਉਸਨੇ ਇਹ ਕੀਤਾ।

$$\begin{array}{r} 2\,3\,7 \\ +\ 7\,2\,3 \\ +\ 3\,7\,2 \\ \hline 1\,3\,3\,2 \\ \hline \end{array}$$

> ਤਿੰਨਾਂ ਅੰਕਾਂ 2, 3 ਅਤੇ 7 ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ, ਤਿੰਨ ਅੰਕਾਂ ਵਾਲੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਭਵ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਬਣਾਓ ਅਤੇ ਇਸਦਾ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ ਕਿ ਕੀ ਇਹ ਜੋੜ 37 ਨਾਲ ਭਾਜ ਹੈ। ਕੀ ਇਹ ਤੱਥ, ਸੰਖਿਆ abc ਦੇ ਤਿੰਨਾ ਅੰਕਾਂ a, b ਅਤੇ c ਨਾਲ ਬਣੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ।

ਫਿਰ ਉਸਨੇ ਨਤੀਜੇ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਖਿਆਂ 1332 ਨੂੰ 37 ਨਾਲ ਭਾਗ ਦਿੱਤਾ :

$$1332 \div 37 = 36, \quad \text{ਬਾਕੀ 0 ਦੇ ਨਾਲ।}$$

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ ਕਿ ਜੇ ਸੁੰਦਰਮ ਨੇ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਸੋਚੀਆਂ ਹੁੰਦੀਆਂ, ਤਾਂ ਨਤੀਜਾ ਕੀ ਮਿਲਦਾ ?

1. 417 2. 632 3. 117 4. 937

ਕੀ ਇਹ ਚਤੁਰਾਈ ਹਮੇਸ਼ਾਂ ਕੰਮ ਕਰਦੀ ਹੈ ?
ਆਉ ਦੇਖੀਏ :

$$abc = 100a + 10b + c$$
$$cab = 100c + 10a + b$$
$$bca = 100b + 10c + a$$
$$abc + cab + bca = 111(a + b + c)$$
$$= 37 \times 3(a + b + c)$$ ਜੋ 37 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ ਹੈ।

16.4 ਅੰਕਾਂ ਦੇ ਲਈ ਅੱਖਰ

ਇੱਥੇ ਸਾਡੇ ਸਾਹਮਣੇ ਕੁਝ ਪਹੇਲੀਆਂ ਹਨ ਜਿੱਥੇ ਇੱਕ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਵਿੱਚ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਥਾਂ 'ਤੇ ਅੱਖਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਸਮੱਸਿਆ ਇਹ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਹੈ ਕਿ ਕਿਹੜਾ ਅੱਖਰ ਕਿਸ ਅੰਕ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਹ ਇੱਕ ਢੰਗ ਨਾਲ ਕੋਡ (code) ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਵਰਗੀ ਗੱਲ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਜੋੜ ਅਤੇ ਗੁਣਾ ਦੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਤੱਕ ਹੀ ਸੀਮਿਤ ਰਹਾਂਗੇ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਪਹੇਲੀਆਂ ਹੱਲ ਕਰਦੇ ਸਮੇਂ ਵਰਤੇ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਦੋ ਨਿਯਮ ਇਹ ਹਨ :

1. *ਪਹੇਲੀ ਵਿੱਚ, ਹਰੇਕ ਅੱਖਰ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਹੀ ਅੰਕ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੋਵੇ। ਇੱਕ ਅੰਕ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਹੀ ਅੱਖਰ ਵੱਲੋਂ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।*
2. *ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਪਹਿਲਾ ਅੰਕ ਸਿਫ਼ਰ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਅਸੀਂ ਸੰਖਿਆ ਤ੍ਰੇਹਠ ਨੂੰ '063' ਜਾਂ '0063' ਨਾ ਲਿਖ ਕੇ '63' ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ।*

ਇੱਕ ਨਿਯਮ ਜਿਸਨੂੰ ਅਸੀਂ ਮੰਨਣਾ ਹੈ ਉਹ ਹੈ ਕਿ ਪਹੇਲੀ ਦਾ ਸਿਰਫ਼ ਇੱਕ ਹੀ ਉੱਤਰ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਜੋੜ ਵਿੱਚ Q ਪਤਾ ਕਰੋ :

$$\begin{array}{r} 3\ 1\ Q \\ +\ 1\ Q\ 3 \\ \hline 5\ 0\ 1 \\ \hline \end{array}$$

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ ਸਿਰਫ਼ ਇੱਕ ਅੱਖਰ Q ਹੈ, ਜਿਸਦਾ ਅਸੀਂ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ।

ਇਕਾਈ ਦੇ ਕਾਲਮ ਵਿੱਚ, ਉਪਰੋਕਤ ਜੋੜ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰੋ। Q +3 ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ 1 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਭਾਵ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਜਿਸਦੀ ਇਕਾਈ ਦਾ ਅੰਕ 1 ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੋਣ ਲਈ, Q ਅੰਕ 8 ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਸ ਪਹੇਲੀ ਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਦਰਸਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਹੱਲ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$\begin{array}{r} 3\ 1\ 8 \\ +\ 1\ 8\ 3 \\ \hline 5\ 0\ 1 \\ \hline \end{array}$$ ਭਾਵ Q = 8 ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਜੋੜ ਵਿੱਚ A ਅਤੇ B ਪਤਾ ਕਰੋ :

$$\begin{array}{r} A \\ +\ A \\ +\ A \\ \hline B\ A \\ \hline \end{array}$$

ਹੱਲ : ਇਸ ਵਿੱਚ ਦੋ ਅੱਖਰ A ਅਤੇ B ਹਨ, ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨੇ ਹਨ।

ਇਕਾਈ ਦੇ ਕਾਲਮ ਵਿੱਚ ਜੋੜ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰੋ : ਤਿੰਨ A ਦਾ ਜੋੜ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਜਿਸਦੀ ਇਕਾਈ ਦਾ ਅੰਕ A ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੋ A ਦਾ ਜੋੜ ਐਸੀ ਸੰਖਿਆ ਹੋਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਇਕਾਈ ਦਾ ਅੰਕ 0 ਹੋਵੇ। ਇਹ ਉਸ ਵੇਲੇ ਹੋਵੇਗਾ ਜਦ $A = 0$ ਹੋਵੇ ਜਾਂ $A = 5$ ਹੋਵੇ।

ਜੇਕਰ $A = 0$ ਹੈ ਤਾਂ ਜੋੜਫਲ $0 + 0 + 0 = 0$ ਹੋਵੇਗਾ, ਜਿਸ ਤੋਂ $B = 0$ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ। ਅਸੀਂ ਇਹ ਨਹੀਂ ਚਾਹਾਂਗੇ (ਕਿਉਂਕਿ ਇਸ ਨਾਲ $A = B$ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ ਅਤੇ BA ਦੇ ਦਹਾਈ ਦਾ ਅੰਕ ਵੀ 0 ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ)। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਛੱਡ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਲਈ $A = 5$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਇਹ ਪਹੇਲੀ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੱਲ ਹੋਵੇਗੀ :

$$\begin{array}{rr} & 5 \\ + & 5 \\ + & 5 \\ \hline 1 & 5 \\ \hline \end{array}$$

ਭਾਵ, $A = 5$ ਅਤੇ $B = 1$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 3 : A ਅਤੇ B ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ :

$$\begin{array}{rrr} & B & A \\ \times & B & 3 \\ \hline 5 & 7 & A \\ \hline \end{array}$$

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ ਵੀ ਦੋ ਅੱਖਰ A ਅਤੇ B ਹਨ, ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾਣਾ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ $3 \times A$ ਦੀ ਇਕਾਈ ਦਾ ਅੰਕ A ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਤਾਂ $A = 0$ ਹੈ ਜਾਂ $A = 5$ ਹੈ।

ਹੁਣ B ਨੂੰ ਦੇਖੋ। ਜੇ $B = 1$ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ $BA \times B3$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਜ਼ਿਆਦਾ ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ 19×19, ਜਿਵੇਂ ਕਿ 361 ਹੋਵੇਗਾ। ਪਰ ਇੱਥੇ ਗੁਣਨਫਲ 57A ਹੈ, ਜੋ 500 ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $B = 1$ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ।

ਜੇ $B = 3$ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ $BA \times B3$ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ 30×30 ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਹੋਵੇਗਾ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਇਹ 900 ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਹੋਵੇਗਾ। ਪਰ 57A ਦਾ ਮੁੱਲ 600 ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $B = 3$ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ।

ਉਪਰੋਕਤ ਦੋਨਾਂ ਤੱਥਾਂ ਨੂੰ ਧਿਆਨ ਵਿੱਚ ਰੱਖਦੇ ਹੋਏ, B ਦਾ ਮੁੱਲ ਕੇਵਲ 2 ਹੀ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਗੁਣਾ ਜਾਂ ਤਾਂ 20×23 ਹੋਵੇਗਾ ਜਾਂ 25×23 ਹੋਵੇਗਾ।

ਪਹਿਲੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦੀ, ਕਿਉਂਕਿ $20 \times 23 = 460$ ਹੈ। ਪਰ ਦੂਸਰੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਸਹੀ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ $25 \times 23 = 575$ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $A = 5$ ਅਤੇ $B = 2$ ਹੈ।

$$\begin{array}{rrr} & 2 & 5 \\ \times & 2 & 3 \\ \hline 5 & 7 & 5 \\ \hline \end{array}$$

ਇਸ ਨੂੰ ਕਰੋ

ਦੋ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ab ਲਿਖੋ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਪਲਟਨ 'ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਖਿਆ ba ਲਿਖੋ। ਇਹਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਮੰਨ ਲਵੋ ਕਿ ਇਹ ਜੋੜ ਤਿੰਨ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ dad ਹੈ।

ਭਾਵ

$$ab + ba = dad$$
$$(10a + b) + (10b + a) = dad$$
$$11(a + b) = dad$$

ਜੋੜ $(a + b)$ ਸੰਖਿਆ 18 ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ (ਕਿਉਂ ?) ਕੀ dad, 11 ਦਾ ਇੱਕ ਗੁਣਜ ਹੈ ? ਕੀ dad, 198 ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ ? 98 ਤੱਕ ਤਿੰਨ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਿਖੋ, ਜੋ 11 ਦਾ ਗੁਣਜ ਹਨ। a ਅਤੇ d ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਅਭਿਆਸ 16.1

ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਵਿੱਚੋਂ ਅੱਖਰਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਸੰਬੰਧਤ ਪਗਾਂ ਦੇ ਲਈ ਕਾਰਨ ਵੀ ਦੱਸੋ :

1. $\begin{array}{rr} & 3\ A \\ + & 2\ 5 \\ \hline & B\ 2 \\ \hline \end{array}$

2. $\begin{array}{rr} & 4\ A \\ + & 9\ 8 \\ \hline & C\ B\ 3 \\ \hline \end{array}$

3. $\begin{array}{rr} & 1\ A \\ \times & A \\ \hline & 9\ A \\ \hline \end{array}$

4. $\begin{array}{rr} & A\ B \\ + & 3\ 7 \\ \hline & 6\ A \\ \hline \end{array}$

5. $\begin{array}{rr} & A\ B \\ \times & 3 \\ \hline & C\ A\ B \\ \hline \end{array}$

6. $\begin{array}{rr} & A\ B \\ \times & 5 \\ \hline & C\ A\ B \\ \hline \end{array}$

7. $\begin{array}{rr} & A\ B \\ \times & 6 \\ \hline & B\ B\ B \\ \hline \end{array}$

8. $\begin{array}{rr} & A\ 1 \\ + & 1\ B \\ \hline & B\ 0 \\ \hline \end{array}$

9. $\begin{array}{rr} & 2\ A\ B \\ + & A\ B\ 1 \\ \hline & B\ 1\ 8 \\ \hline \end{array}$

10. $\begin{array}{rr} & 1\ 2\ A \\ + & 6\ A\ B \\ \hline & A\ 0\ 9 \\ \hline \end{array}$

16.5 ਭਾਜਯੋਗਤਾ ਦੀ ਪੜਤਾਲ

ਜਮਾਤ VI ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹੋ ਕਿ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਭਾਜਕਾਂ ਨਾਲ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਭਾਜਯੋਗਤਾ (divisibility) ਦੀ ਪੜਤਾਲ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ :

10, 5, 2, 3, 6, 4, 8, 9, 11

ਤੁਹਾਨੂੰ ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਪੜਤਾਲ ਕਰਨ ਦੇ ਨਿਯਮ ਸੌਖੇ ਲੱਗੇ ਹੋਣਗੇ ਪਰ ਨਾਲ ਹੀ ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਸੋਚ ਕੇ ਹੈਰਾਨ ਹੋਏ ਹੋਵੋਗੇ ਕਿ ਅਸੀਂ ਇਹ ਕਿਉਂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਇਸਦੇ 'ਕਿਉਂ' ਵਾਲੇ ਪੱਖ 'ਤੇ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ।

16.5.1 10 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗਤਾ

ਇਹ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਹੀ ਸਾਰਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਸਭ ਤੋਂ ਸੌਖੀ ਪੜਤਾਲ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ 10 ਦੇ ਕੁਝ ਗੁਣਜ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ :

10, 20, 30, 40, 50, 60, ... ,

ਇਸਦੇ ਨਾਲ 10 ਦੇ ਕੁਝ ਅਗੁਣਜਾਂ (non-multiples) ਨੂੰ ਦੇਖੋ 13, 27, 32, 48, 55, 69, ... ਇਹਨਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਤੋਂ ਇਹ ਪਤਾ ਚਲਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਇਕਾਈ ਅੰਕ 0 ਹੈ, 10 ਦੇ ਗੁਣਜ ਹਨ, ਅਤੇ ਉਹ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਇਕਾਈ ਅੰਕ 0 ਨਹੀਂ ਹੈ, 10 ਦੇ ਗੁਣਜ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਇਸ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ 10 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗਤਾ ਦੀ ਪੜਤਾਲ ਦਾ ਇੱਕ ਨਿਯਮ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਬਿਨ੍ਹਾਂ ਸ਼ੱਕ ਸਾਨੂੰ ਕੇਵਲ ਪੜਤਾਲ ਦਾ ਨਿਯਮ ਦੇ ਕੇ ਹੀ ਨਹੀਂ ਰੁੱਕ ਜਾਣਾ ਚਾਹੀਦਾ। ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਵੀ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕਰਨਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਪੜਤਾਲ ਦਾ ਨਿਯਮ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੰਮ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਰਨਾ ਔਖਾ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਸਾਨੂੰ ਸਿਰਫ਼ ਸਥਾਨਕ ਮੁੱਲ (place value) ਦੇ ਨਿਯਮਾਂ ਨੂੰ ਯਾਦ ਰੱਖਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। ਕੋਈ ਸੰਖਿਆ ... cba ਲਵੋ। ਇਹ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ, ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਸੰਖੇਪ ਰੂਪ ਹੈ :

$$\ldots + 100c + 10b + a$$

ਇੱਥੇ a ਇਕਾਈ ਦਾ ਅੰਕ ਹੈ, b ਦਹਾਈ ਦਾ ਅੰਕ ਹੈ, c ਸੈਂਕੜੇ ਦਾ ਅੰਕ ਹੈ ਆਦਿ। ਇੱਥੇ ਤਿੰਨ ਬਿੰਦੂ (...) ਇਹ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ ਕਿ c ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਹੋਰ ਅੰਕ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ।

ਕਿਉਂਕਿ 10, 100,... 10 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $10b$, $100c$, ... ਵੀ 10 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ ਹੋਣਗੇ। ਜਿੱਥੋਂ ਤੱਕ ਸੰਖਿਆ a ਦਾ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਹੈ, ਜੇ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸੰਖਿਆ 10 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ ਹੈ ਤਾਂ a ਨੂੰ ਵੀ 10 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਤਾਂ ਹੀ ਸੰਭਵ ਹੈ ਜਦ $a = 0$ ਹੋਵੇ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੋਈ ਸੰਖਿਆ 10 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜੇਕਰ ਉਸਦਾ ਇਕਾਈ ਅੰਕ 0 ਹੈ।

16.5.2 5 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗਤਾ

5 ਦੇ ਗੁਣਜਾਂ ਨੂੰ ਦੇਖੋ : 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, ...

ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਕਾਈ ਅੰਕ 5 ਅਤੇ 0 ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਛੱਡ ਕੇ ਆ ਰਹੇ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਇਲਾਵਾ ਇਕਾਈ ਦੀ ਥਾਂ ਤੇ ਕੋਈ ਹੋਰ ਅੰਕ ਨਹੀਂ ਆ ਰਿਹਾ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ 5 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗਤਾ ਦਾ ਇਹ ਨਿਯਮ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ : *ਜੇ ਕਿਸੇ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਇਕਾਈ ਅੰਕ 5 ਜਾਂ 0 ਹੈ, ਤਾਂ ਇਹ ਸੰਖਿਆ 5 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।*

ਆਉ, ਇਸ ਨਿਯਮ ਨੂੰ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕਰੀਏ। ਕਿਸੀ ਸੰਖਿਆ ... cba ਨੂੰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ : $\ldots + 100c + 10b + a$

ਕਿਉਂਕਿ 10, 100, ...10 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ $10b$, $100b$, ... ਵੀ 10 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ ਹੋਵੇਗੀ ਅਤੇ ਇਹ ਬਾਅਦ ਵਿੱਚ 5 ਨਾਲ ਵੀ ਭਾਜਯੋਗ ਹੋਵੇਗੀ, ਕਿਉਂਕਿ $10 = 5 \times 2$ ਹੈ। ਜਿੱਥੋਂ ਤੱਕ ਸੰਖਿਆ a ਦਾ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਹੈ, ਜੇ ਸੰਖਿਆ 5 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਨੂੰ ਵੀ 5 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ a ਨੂੰ 0 ਜਾਂ 5 ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

(ਪਹਿਲਾ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਤੁਹਾਡੀ ਸਹਾਇਤਾ ਦੇ ਲਈ ਕੀਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ।

1. ਜਦ ਭਾਗ N ÷ 5 ਤੋਂ ਬਾਕੀ 3 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ N ਦੀ ਇਕਾਈ ਦਾ ਅੰਕ ਕੀ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ?
   (ਇਕਾਈ ਦੇ ਅੰਕ ਨੂੰ 5 ਨਾਲ ਭਾਗ ਦੇਣ 'ਤੇ ਬਾਕੀ 3 ਆਉਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਕਾਈ ਦਾ ਅੰਕ 3 ਜਾਂ 8 ਹੋਵੇਗਾ)
2. ਜਦ ਭਾਗ N ÷ 5 ਤੋਂ ਬਾਕੀ 1 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ N ਦੀ ਇਕਾਈ ਦਾ ਅੰਕ ਕੀ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ?
3. ਜਦ ਭਾਗ N ÷ 5 ਤੋਂ ਬਾਕੀ 4 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ N ਦੀ ਇਕਾਈ ਦਾ ਅੰਕ ਕੀ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ?

16.5.3 2 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗਤਾ

ਇਹ ਸਾਰੀਆਂ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ : 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, ... ,

ਅਤੇ ਇਹ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ : 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, ... ,

ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਜਿਸਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜਦ ਇਸਦੀ ਇਕਾਈ ਦਾ ਅੰਕ ਹੋਵੇ,

2, 4, 6, 8 ਜਾਂ 0

ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਟਾਂਕ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜਦ ਇਸਦੀ ਇਕਾਈ ਦਾ ਅੰਕ ਹੋਵੇ, 1, 3, 5, 7 ਜਾਂ 9

ਜਮਾਤ VI ਵਿੱਚ ਸਿੱਖੇ ਗਏ 2 ਦੀ ਭਾਜਯੋਗਤਾ ਦੀ ਪੜਤਾਲ ਕਰ ਕੇ ਨਿਯਮ ਨੂੰ ਯਾਦ ਕਰੋ। ਇਹ ਨਿਯਮ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ।

ਜੇ ਕਿਸੇ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਇਕਾਈ ਅੰਕ 0, 2, 4, 6, ਜਾਂ 8 ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਉਹ ਸੰਖਿਆ 2 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਇਸਦੇ ਲਈ ਸਪਸ਼ਟੀਕਰਨ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ :

ਕਿਸੇ ਵੀ ਸੰਖਿਆ ... cba ਨੂੰ ... + $100c + 10b + a$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸਦੇ ਪਹਿਲੇ ਦੋਨੋਂ ਪਦ $100c$ ਅਤੇ $10b$ ਸੰਖਿਆ 2 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ ਹਨ, ਕਿਉਂਕਿ 100 ਅਤੇ 10 ਸੰਖਿਆ 2 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ ਹਨ। ਜਿੱਥੋਂ ਤੱਕ a ਦਾ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਹੈ, ਜੇ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸੰਖਿਆ 2 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ ਹੈ, ਤਾਂ ਇਸ ਨੂੰ 2 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਤਾਂ ਹੀ ਸੰਭਵ ਹੈ ਜਦੋਂ $a = 0, 2, 4, 6$ ਜਾਂ 8 ਹੋਵੇ।

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

(ਪਹਿਲਾ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਤੁਹਾਡੀ ਸਹਾਇਤਾ ਦੇ ਲਈ ਕੀਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ।)

1. ਜਦ ਭਾਗ N ÷ 2 ਤੋਂ ਬਾਕੀ 1 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ N ਦੀ ਇਕਾਈ ਦਾ ਅੰਕ ਕੀ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ?
   (N ਟਾਂਕ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਇਸਦੀ ਇਕਾਈ ਦਾ ਅੰਕ ਟਾਂਕ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ N ਦੀ ਇਕਾਈ ਦਾ ਅੰਕ 1, 3, 5, 7 ਜਾਂ 9 ਹੋਵੇਗਾ।)
2. ਜੇ ਭਾਗ N ÷ 2 ਨਾਲ ਕੋਈ ਬਾਕੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ (ਭਾਵ ਬਾਕੀ 0 ਹੈ), ਤਾਂ N ਦੀ ਇਕਾਈ ਦਾ ਅੰਕ ਕੀ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ?
3. ਮੰਨ ਲਵੋ ਕਿ ਭਾਗ N ÷ 5 ਨਾਲ ਬਾਕੀ 4 ਅਤੇ ਭਾਗ N ÷ 2 ਨਾਲ ਬਾਕੀ 1 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। N ਦੀ ਇਕਾਈ ਦਾ ਅੰਕ ਕੀ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ?

16.5.4 9 ਅਤੇ 3 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗਤਾ

ਹੁਣ ਤੱਕ ਪਤਾ ਕੀਤੇ ਗਏ ਭਾਜਯੋਗਤਾ ਦੀ ਪੜਤਾਲ ਦੇ ਤਿੰਨਾਂ ਨਿਯਮਾਂ ਨੂੰ ਧਿਆਨ ਨਾਲ ਦੇਖੋ, ਜੋ 10, 5 ਅਤੇ 2 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗਤਾ ਦੀ ਕੀਤੀ ਪੜਤਾਲ ਦੇ ਲਈ ਕੀਤੇ ਸਨ। ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਾਂਝੀ ਗੱਲ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ : ਇਸ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਇਕਾਈ ਦੇ ਅੰਕ ਦਾ ਹੀ ਪਯੋਗ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਹੋਰ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਇਸ 'ਤੇ ਕੋਈ ਅਸਰ/ਫ਼ਰਕ ਨਹੀਂ ਪੈਂਦਾ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਭਾਜਯੋਗਤਾ ਦਾ ਨਿਰਣਾ ਸਿਰਫ਼ ਇਕਾਈ ਅੰਕ ਤੋਂ ਹੀ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। 10, 5 ਅਤੇ 2 ਸੰਖਿਆ 10 ਦੇ ਭਾਜਕ (division) ਹਨ, ਜੋ ਸਾਡੇ ਸਥਾਨਕ ਮੁੱਲ ਸਿਸਟਮ/ਵਿਵਸਥਾ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਪਰ 9 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗਤਾ ਦੀ ਪੜਤਾਲ ਵਿੱਚ ਇਹ ਨਿਯਮ ਨਹੀਂ ਚੱਲਣਗੇ। ਆਓ ਕੋਈ ਸੰਖਿਆ, ਮੰਨ ਲਵੋ 3573 ਲਓ

ਇਸਦਾ ਪ੍ਰਸਾਰਿਤ/ਵਿਸਤ੍ਰਤ ਰੂਪ $3 \times 1000 + 5 \times 100 + 7 \times 10 + 3$ ਹੈ।

ਇਸਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵੀ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :

$$3 \times (999 + 1) + 5 \times (99 + 1) + 7 \times (9 + 1) + 3$$

$$= 3 \times 999 + 5 \times 99 + 7 \times 9 + (3 + 5 + 7 + 3) \quad \ldots (1)$$

ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸੰਖਿਆ 9 ਜਾਂ 3 ਨਾਲ ਤਾਂ ਹੀ ਭਾਜਯੋਗ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜੇ $(3 + 5 + 7 + 3)$ ਸੰਖਿਆ 9 ਜਾਂ 3 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ ਹੋਵੇ।

ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $(3 + 5 + 7 + 3) = 18$ ਸੰਖਿਆ 9 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ ਹੈ ਅਤੇ 3 ਨਾਲ ਵੀ ਭਾਜਯੋਗ ਹੈ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 3573 ਸੰਖਿਆਵਾਂ 9 ਅਤੇ 3 ਦੋਨਾਂ ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ ਹੈ। ਆਓ ਹੁਣ ਸੰਖਿਆ 3576 ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ ਉੱਪਰ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

$$3576 = 3 \times 1000 + 5 \times 100 + 7 \times 10 + 6$$

$$= 3 \times (999 + 1) + 5 \times (99 + 1) + 7 \times (9 + 1) + 6$$

$$= 3 \times 999 + 5 \times 99 + 7 \times 9 + (3 + 5 + 7 + 6)$$

ਕਿਉਂਕਿ $(3 + 5 + 7 + 6) = 21$, 9 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ ਨਹੀਂ ਹੈ ਪਰ 3 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ 3576, ਸੰਖਿਆ 9 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ ਨਹੀਂ ਹੈ ਪਰ ਇਹ 3 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ :

(i) ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ N ਸੰਖਿਆ 9 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜਦ ਇਸਦੇ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 9 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ ਹੋਵੇ। ਨਹੀਂ ਤਾਂ ਉਹ ਸੰਖਿਆ 9 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

(ii) ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ N ਸੰਖਿਆ 3 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜਦ ਇਸਦੇ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 3 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ ਹੋਵੇ। ਨਹੀਂ ਤਾਂ ਉਹ ਸੰਖਿਆ 3 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਜੇ ਸੰਖਿਆ cba ਹੈ, ਤਾਂ $100c + 10b + a = 99c + 9b + (a + b + c)$

$$= \underbrace{9(11c + b)}_{\text{3 ਅਤੇ 9 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ}} + (a + b + c)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ 9 (ਜਾਂ 3) ਦੀ ਭਾਜਯੋਗਤਾ ਤਾਂ ਹੀ ਸੰਭਵ ਹੈ, ਜਦ $(a \times b \times c)$ 9 (ਜਾਂ 3) ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ ਹੋਵੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 4 : 21436587 ਦੀ 9 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗਤਾ ਦੀ ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : 21436587 ਦੇ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $= 2 + 1 + 4 + 3 + 6 + 5 + 8 + 7 = 36$

ਇਹ ਜੋੜਫਲ 9 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ ਹੈ। $(36 \div 9 = 4)$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਕਿ 21436587 ਸੰਖਿਆ 9 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਦੁਬਾਰਾ ਪੜਤਾਲ ਵੀ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ $\frac{21436587}{9} = 2381843$ (ਭਾਗਫਲ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ)

ਉਦਾਹਰਣ 5 : 152875 ਦੀ 9 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗਤਾ ਦੀ ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : 152875 ਦੇ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $1 + 5 + 2 + 8 + 7 + 5 = 28$ ਹੈ। ਇਹ ਸੰਖਿਆ 9 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਕਿ 152875 ਸੰਖਿਆ 9 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ 9 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗਤਾ ਦੀ ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ :

1. 108 2. 616 3. 294 4. 432 5. 927

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਜੇ ਤਿੰਨ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ $24x$, 9 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ ਹੈ, ਤਾਂ x ਦਾ ਮੁੱਲ ਕੀ ਹੈ,

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ $24x$, ਸੰਖਿਆ 9 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਇਸਦੇ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $2 + 4 + x$, 9 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਭਾਵ $6 + x$, a ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਇਹ ਤਾਂ ਹੀ ਸੰਭਵ ਹੈ ਜੇ $6 + x$ ਜਾਂ ਤਾਂ 9 ਹੋਵੇ ਜਾਂ 18 ਹੋਵੇ ਕਿਉਂਕਿ x ਇੱਕ ਅੰਕ ਹੈ ਇਸ ਲਈ $6 + x = 9$ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, $x = 3$ ਹੈ।

ਸੋਚੋ, ਚਰਚਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਲਿਖੋ

1. ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਚੁੱਕੇ ਹੋ ਕਿ 450, 10 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ ਹੈ। ਇਹ 2 ਅਤੇ 5 ਨਾਲ ਵੀ ਭਾਜਯੋਗ ਹੈ, ਜੋ 10 ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸੰਖਿਆ 135, 9 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ ਹੈ, ਇਹ 3 ਨਾਲ ਵੀ ਭਾਜਯੋਗ ਹੈ ਜੋ ਕਿ 9 ਦਾ ਇੱਕ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ।

   ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਜਦ ਕੋਈ ਸੰਖਿਆ ਕਿਸੇ ਸੰਖਿਆ m ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਇਹ m ਦੇ ਹਰੇਕ ਗੁਣਨਖੰਡ ਨਾਲ ਵੀ ਭਾਜਯੋਗ ਹੋਵੇਗੀ ?

2. (i) ਇੱਕ ਤਿੰਨ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ abc ਨੂੰ $100a + 10b + c$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ। ਹੁਣ

$$100a + 10b + c = 99a + 11b + (a - b + c)$$
$$= 11(9a + b) + (a - b + c)$$

   ਜਦ ਸੰਖਿਆ abc, 11 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ $(a - b + c)$ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਕੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ ? ਕੀ ਇਹ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ ਕਿ $(a + c - b)$, 11 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ ਹੋਵੇ ?

   (ii) ਇੱਕ ਚਾਰ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ $abcd$ ਨੂੰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਲਿਖੋ :

$$1000a + 100b + 10c + d$$
$$= (1001a + 99b + 11c) - (a - b + c - d)$$
$$= 11(91a + 9b + c) + [(b + d) - (a + c)]$$

ਜੇ ਸੰਖਿਆ *abcd*, 11 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ ਹੈ, ਤਾਂ $(b+d)-(a+c)$ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ ?

(iii) ਉਪਰੋਕਤ (i) ਅਤੇ (ii) ਵਿੱਚ, ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਕੋਈ ਸੰਖਿਆ 11 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ ਹੋਵੇਗੀ, ਜਦ ਇਸਦੇ ਟਾਂਕ ਸਥਾਨਾਂ ਦੇ ਅੰਕਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਅਤੇ ਜਿਸਤ ਸਥਾਨਾਂ ਦੇ ਅੰਕਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦਾ ਅੰਤਰ 11 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ ਹੋਵੇਗਾ ?

ਉਦਾਹਰਣ 7 : 2146587 ਦੀ 3 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗਤਾ ਦੀ ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : 2146587 ਦੇ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $2+1+4+6+5+8+7=33$ ਹੈ। ਜੋ ਸਪੱਸ਼ਟ 3 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ ਹੈ। $(33 \div 3 = 11)$। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਕਿ 2146587, ਸੰਖਿਆ 3 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 8 : 15287 ਦੀ 3 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗਤਾ ਦੀ ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : 15287 ਦੇ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $= 1+5+2+8+7=23$ ਹੈ। ਜੋ 3 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਕਿ 15287 ਸੰਖਿਆ 3 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ।

ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ

ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ 3 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗਤਾ ਦੀ ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ।

1. 108 2. 616 3. 294 4. 432 5. 927

ਅਭਿਆਸ 16.2

1. ਜੇ $21y5$, 9 ਦਾ ਇੱਕ ਗੁਣਜ ਹੈ, ਇੱਥੇ y ਇੱਕ ਅੰਕ ਹੈ, ਤਾਂ y ਦਾ ਮੁੱਲ ਕੀ ਹੈ ?
2. ਜੇ $31z5$, 9 ਦਾ ਇੱਕ ਗੁਣਜ ਹੈ, ਇੱਥੇ z ਇੱਕ ਅੰਕ ਹੈ, ਤਾਂ z ਦਾ ਮੁੱਲ ਕੀ ਹੈ ? ਤੁਸੀਂ ਦੇਖੋਗੇ ਕਿ ਇਸਦੇ ਦੋ ਉੱਤਰ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿਉਂ ਹੈ ?
3. ਜੇ $24x$, 3 ਦਾ ਇੱਕ ਗੁਣਜ ਹੈ, ਇੱਥੇ x ਇੱਕ ਅੰਕ ਹੈ, ਤਾਂ x ਦਾ ਮੁੱਲ ਕੀ ਹੈ ? (ਕਿਉਂਕਿ $24x$, 3 ਦਾ ਇੱਕ ਗੁਣਜ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਇਸਦੇ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $6+x$, 3 ਦਾ ਇੱਕ ਗੁਣਜ ਹੈ। ਜਿਵੇਂ ਕਿ $6+x$ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਹੋਵੇਗੀ,

   $$0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, \ldots$$

   ਪਰ ਕਿਉਂਕਿ x ਇੱਕ ਅੰਕ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ $6+x=6$ ਜਾਂ $6+x=9$ ਜਾਂ $6+x=12$ ਜਾਂ $6+x=15$ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, $x=0$ ਜਾਂ 3 ਜਾਂ 6 ਜਾਂ 9 ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ x ਦਾ ਮੁੱਲ ਇਹਨਾਂ ਚਾਰਾਂ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਮੁੱਲਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਇੱਕ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ।
4. ਜੇ $31z5$, 3 ਦਾ ਇੱਕ ਗੁਣਜ ਹੈ, ਇੱਥੇ z ਇੱਕ ਅੰਕ ਹੈ, ਤਾਂ z ਦਾ ਮੁੱਲ ਕੀ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ?

ਅਸੀਂ ਕੀ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀ ?

1. ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਦੋ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ab ਨੂੰ $10a + b$ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।
2. ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ, ਬੁਝਾਰਤਾਂ ਜਾਂ ਸੰਖਿਆ ਖੇਡਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਸਹਾਇਕ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।
3. ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ 10, 5, 2, 9 ਜਾਂ 3 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗਤਾ ਦੇ ਕਾਰਨ ਤਾਂ ਪਤਾ ਲੱਗ ਸਕਦੇ ਹਨ, ਜੇ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾਵੇ।

ਉੱਤਰਮਾਲਾ

ਅਭਿਆਸ 1.1

1. (i) 2 (ii) $\frac{-11}{28}$

2. (i) $\frac{-2}{8}$ (ii) $\frac{5}{9}$ (iii) $\frac{-6}{5}$ (iv) $\frac{2}{9}$ (v) $\frac{19}{6}$

4. (i) $\frac{-1}{13}$ (ii) $\frac{-19}{13}$ (iii) 5 (iv) $\frac{56}{15}$ (v) $\frac{5}{2}$ (vi) 1

5. (i) 1 ਗੁਣਾਤਮਕ ਤਤਸਮਕ/ਸਮਤਾ ਹੈ। (ii) ਕ੍ਰਮਵਟਾਂਦਰਾ
   (iii) ਗੁਣਾਤਮਕ ਉਲਟ

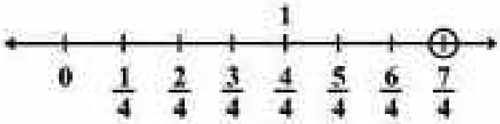
6. $\frac{-96}{91}$ 7. ਸਹਿਚਾਰਿਤਾ 8. ਨਹੀਂ, ਕਿਉਂਕਿ ਗੁਣਨਫਲ 1 ਨਹੀਂ ਹੈ।

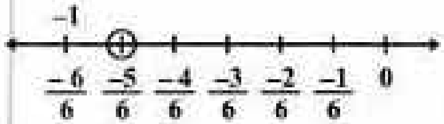
9. ਹਾਂ, ਕਿਉਂਕਿ $0.3 \times 3\frac{1}{3} = \frac{3}{10} \times \frac{10}{3} = 1$

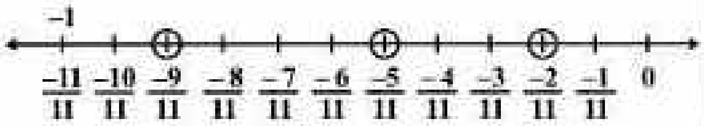
10. (i) 0 (ii) 1 ਅਤੇ (–1) (iii) 0

11. (i) ਨਹੀਂ (ii) 1, –1 (iii) $\frac{-1}{5}$ (iv) x (v) ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ
    (vi) ਧਨਾਤਮਕ

ਅਭਿਆਸ 1.2

1. (i) 

(ii) 

2. 

3. ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੁਝ ਹਨ : $1, \frac{1}{2}, 0, -1, \frac{-1}{2}$

4. $\frac{-7}{20}, \frac{-6}{20}, \frac{-5}{20}, \frac{-4}{20}, \frac{-3}{20}, \frac{-2}{20}, \frac{-1}{20}, 0, \ldots, \frac{1}{20}, \frac{2}{20}$
   (ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਹੋਰ ਬਹੁਤ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ।)

5. (i) $\frac{41}{60}, \frac{42}{60}, \frac{43}{60}, \frac{44}{60}, \frac{45}{60}$ (ii) $\frac{-8}{6}, \frac{-7}{6}, 0, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}$
   (iii) $\frac{9}{32}, \frac{10}{32}, \frac{11}{32}, \frac{12}{32}, \frac{13}{32}$ (ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਹੋਰ ਬਹੁਤ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ।)

6. $-\frac{3}{2}, -1, \frac{-1}{2}, 0, \frac{1}{2}$ (ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਹੋਰ ਬਹੁਤ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ।)

7. $\frac{97}{160}, \frac{98}{160}, \frac{99}{160}, \frac{100}{160}, \frac{101}{160}, \frac{102}{160}, \frac{103}{160}, \frac{104}{160}, \frac{105}{160}, \frac{106}{160}$
(ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਹੋਰ ਬਹੁਤ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ।

ਅਭਿਆਸ 2.1

1. $x = 9$ 2. $y = 7$ 3. $z = 4$ 4. $x = 2$ 5. $x = 2$ 6. $t = 50$
7. $x = 27$ 8. $y = 2.4$ 9. $x = \frac{25}{7}$ 10. $y = \frac{3}{2}$ 11. $p = -\frac{4}{3}$ 12. $x = -\frac{8}{5}$

ਅਭਿਆਸ 2.2

1. $\frac{3}{4}$ 2. ਲੰਬਾਈ = 52 m, ਚੌੜਾਈ = 25 m 3. $1\frac{2}{5}$ cm 4. 40 ਅਤੇ 55
5. 45, 27 6. 16, 17, 18 7. 288, 296 ਅਤੇ 304 8. 7, 8, 9
9. ਰਾਹੁਲ ਦੀ ਉਮਰ = 20 ਸਾਲ; ਹਾਰੂਨ ਦੀ ਉਮਰ = 28 ਸਾਲ 10. 48 ਵਿਦਿਆਰਥੀ
11. ਬਾਈਚੁੰਗ ਦੀ ਉਮਰ = 17 ਸਾਲ; ਬਾਈਚੁੰਗ ਦੇ ਪਿਤਾ ਦੀ ਉਮਰ = 46 ਸਾਲ;
ਬਾਈਚੁੰਗ ਦੇ ਦਾਦਾ ਜੀ ਦੀ ਉਮਰ = 72 ਸਾਲ 12. 5 ਸਾਲ 13 $-\frac{1}{2}$
14. ₹ 100 → 2000 ਨੋਟ; ₹ 50 → 3000 ਨੋਟ; ₹ 10 → 5000 ਨੋਟ
15. ₹ 1 ਦੇ ਸਿੱਕਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = 80; ₹ 2 ਦੇ ਸਿੱਕਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = 60; ₹ 5 ਦੇ ਸਿੱਕਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = 20
16. 19

ਅਭਿਆਸ 2.3

1. $x = 18$ 2. $t = -1$ 3. $x = -2$ 4. $z = \frac{3}{2}$ 5. $x = 5$ 6. $x = 0$
7. $x = 40$ 8. $x = 10$ 9. $y = \frac{7}{3}$ 10. $m = \frac{4}{5}$

ਅਭਿਆਸ 2.4

1. 4 2. 7, 35 3. 36 4. 26 (ਜਾਂ 62)
5. ਸ਼ੋਬੋ ਦੀ ਉਮਰ = 5 ਸਾਲ; ਸ਼ੋਬੋ ਦੀ ਮਾਂ ਦੀ ਉਮਰ = 30 ਸਾਲ
6. ਲੰਬਾਈ = 275 m; ਚੌੜਾਈ = 100 m 7. 200 m 8. 72
9. ਪੋਤਰੀ ਦੀ ਉਮਰ = 6 ਸਾਲ; ਦਾਦਾ ਜੀ ਦੀ ਉਮਰ = 60 ਸਾਲ
10. ਅਮਨ ਦੀ ਉਮਰ = 60 ਸਾਲ; ਅਮਨ ਦੇ ਪੁੱਤਰ ਦੀ ਉਮਰ = 20 ਸਾਲ

ਅਭਿਆਸ 2.5

1. $x = \frac{27}{10}$ 2. $n = 36$ 3. $x = -5$ 4. $x = 8$ 5. $t = 2$

6. $m = \frac{7}{5}$ 7. $t = -2$ 8. $y = \frac{2}{3}$ 9. $z = 2$ 10. $f = 0.6$

ਅਭਿਆਸ 2.6

1. $x = \frac{3}{2}$ 2. $x = \frac{35}{33}$ 3. $z = 12$ 4. $y = -8$ 5. $y = -\frac{4}{5}$

6. ਹਰੀ ਦੀ ਉਮਰ = 20 ਸਾਲ; ਹੈਰੀ ਦੀ ਉਮਰ = 28 ਸਾਲ 7. $\frac{13}{21}$

ਅਭਿਆਸ 3.1

1. (a) 1, 2, 5, 6, 7 (b) 1, 2, 5, 6, 7 (c) 1, 2, 4
   (d) 2 (e) 1, 4
2. (a) 2 (b) 9 (c) 0
3. 360°; ਹਾਂ
4. (a) 900° (b) 1080° (c) 1440° (d) $(n-2)180°$
5. ਬਰਾਬਰ ਭੁਜਾਵਾਂ ਅਤੇ ਬਰਾਬਰ ਕੋਣਾਂ ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਬਹੁਭੁਜ
   (i) ਸਮਭੁਜੀ ਤਿਕੋਣ (ii) ਵਰਗ (iii) ਸਮਛੇਭੁਜ
6. (a) 60° (b) 140° (c) 140° (d) 108°
7. (a) $x + y + z = 360°$ (b) $x + y + z + w = 360°$

ਅਭਿਆਸ 3.2

1. (a) $360° - 250° = 110°$ (b) $360° - 310° = 50°$
2. (i) $\frac{360°}{9} = 40°$ (ii) $\frac{360°}{15} = 24°$
3. $\frac{360}{24} = 15$ ਭੁਜਾਵਾਂ
4. ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = 24
5. (i) ਨਹੀਂ (ਕਿਉਂਕਿ 360 ਨੂੰ 22 ਨਹੀਂ ਵੰਡਦਾ ਹੈ।)
   (ii) ਨਹੀਂ (ਕਿਉਂਕਿ ਹਰੇਕ ਬਾਹਰੀ ਕੋਣ $180° - 22° = 158°$ ਹੈ, ਜੋ 360° ਨੂੰ ਨਹੀਂ ਵੰਡਦਾ ਹੈ।)
6. (a) ਕਿਉਂਕਿ ਸਮਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਤਿੰਨ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਸਮਬਹੁਭੁਜ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਇਸਦੇ ਹਰੇਕ ਅੰਦਰਲੇ ਕੋਣ ਦੀ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਮਾਪ = 60° ਹੈ।
   (b) (a) ਅਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਬਾਹਰੀ ਕੋਣ 120° ਹੋਵੇਗਾ।

ਅਭਿਆਸ 3.3

1. (i) BC (ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। (ii) $\angle$ DAB (ਸਨਮੁੱਖ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।)

(iii) OA (ਵਿਕਰਨ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ।)

(iv) 180° (ਕਾਟਵੀਂ ਰੇਖਾ ਦੇ ਇੱਕ ਹੀ ਪਾਸੇ ਦੇ ਅੰਦਰਲੇ ਕੋਣ, ਕਿਉਂਕਿ $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$)

2. (i) $x = 80°; y = 100°; z = 80°$ (ii) $x = 130°; y = 130°; z = 130°$
(iii) $x = 90°; y = 60°; z = 60°$ (iv) $x = 100°; y = 80°; z = 80°$
(v) $y = 112°; x = 28°; z = 28°$

3. (i) ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਪਰ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਹੈ।
(ii) ਨਹੀਂ ; (ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਵਿੱਚ, ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ, ਪਰੰਤੂ ਇੱਥੇ $AD \neq BC$ ਹੈ।)
(iii) ਨਹੀਂ ; (ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਵਿੱਚ, ਸਨਮੁੱਖ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਪਰੰਤੂ ਇੱਥੇ $\angle A \neq \angle C$ ਹੈ)

4. ਉਦਾਹਰਣ, ਇੱਕ ਪਤੰਗ 5. 108°; 72°; 6. ਹਰੇਕ ਕੋਣ ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਹੈ।

7. $x = 110°; y = 40°; z = 30°$

8. (i) $x = 6; y = 9$ (ii) $x = 3; y = 13;$ 9. $x = 50°$

10. $\overline{NM} \parallel \overline{KL}$ (ਕਾਟਵੀਂ ਰੇਖਾ ਦੇ ਇੱਕ ਹੀ ਪਾਸੇ ਦੇ ਅੰਦਰਲੇ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 180° ਹੈ।) ਇਸ ਲਈ, KLMN ਇੱਕ ਸਮਲੰਬ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ।

11. 60° 12. $\angle P = 50°; \angle S = 90°$

ਅਭਿਆਸ 3.4

1. (b), (c), (f), (g) ਅਤੇ (h) ਠੀਕ ਹਨ, ਬਾਕੀ ਗਲਤ ਹਨ।

2. (a) ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ; ਵਰਗ (b) ਵਰਗ; ਆਇਤ

3. (i) ਇੱਕ ਵਰਗ ਵਿੱਚ ਚਾਰ ਭੁਜਾਵਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ।
(ii) ਇੱਕ ਵਰਗ ਦੀਆਂ ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾਵਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ; ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ।
(iii) ਵਰਗ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ ਜਿਸਦੀਆਂ ਚਾਰ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਇੱਕ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ।
(iv) ਵਰਗ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ, ਜਿਸਦੇ ਸਾਰੇ ਕੋਣ ਸਮਕੋਣ ਹੁੰਦੇ ਹਨ; ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਇੱਕ ਆਇਤ ਹੈ।

4. (i) ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ, ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ; ਵਰਗ ਅਤੇ ਆਇਤ
(ii) ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ; ਵਰਗ (iii) ਵਰਗ; ਆਇਤ

5. ਇਸਦੇ ਦੋਨੋਂ ਵਿਕਰਨ ਇਸ ਦੇ ਅੰਦਰਲੇ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

6. $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$; $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਵਿੱਚ ਵਿਕਰਨ $\overline{AC}$ ਦਾ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ O ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 5.1

1. (b), (d) ਇਹਨਾਂ ਸਾਰੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ, ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

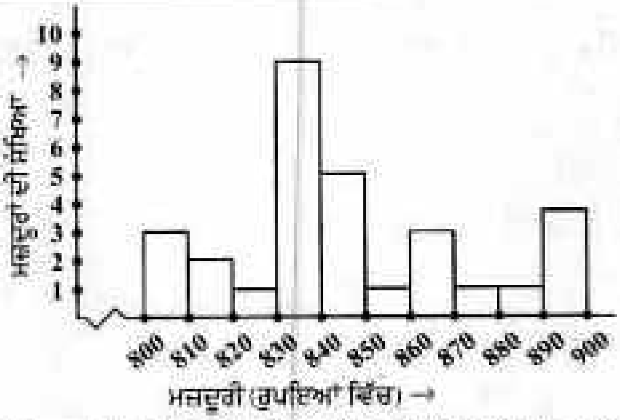
2.

ਖਰੀਦਣ ਵਾਲਾ	ਮਿਲਾਨ ਚਿੰਨ੍ਹ	ਸੰਖਿਆ
W	~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~ |||	28
M	~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~	15
B	~~||||~~	5
G	~~||||~~ ~~||||~~ ||	12

3.

ਅੰਤਰਾਲ	ਮਿਲਾਨ ਚਿੰਨ੍ਹ	ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ
800 - 810	|||	3
810 - 820	||	2
820 - 830			1
830 - 840	~~||||~~ ||||	9
840 - 850	~~||||~~	5
850 - 860			1
860 - 870	|||	3
870 - 880			1
880 - 890			1
890 - 900	||||	4
	ਜੋੜ	30

4. (i) 830 - 840 (ii) 10
(iii) 20

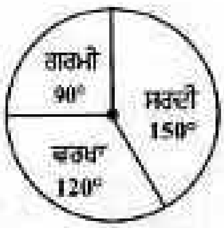


5. (i) 4 - 5 ਘੰਟੇ (ii) 34
(iii) 14

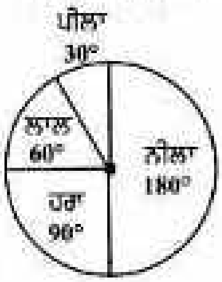
ਅਭਿਆਸ 5.2

1. (i) 200 (ii) ਮਨੋਰੰਜਨ (iii) ਸ਼ਾਸਤਰੀ - 100, ਉਪ-ਸ਼ਾਸਤਰੀ : - 200, ਮਨੋਰੰਜਨ - 400, ਲੋਕ ਸੰਗੀਤ - 300

2. (i) ਸਰਦੀ (ii) ਸਰਦੀ - 150°, ਵਰਖਾ - 120°, ਗਰਮੀ - 90° (iii)

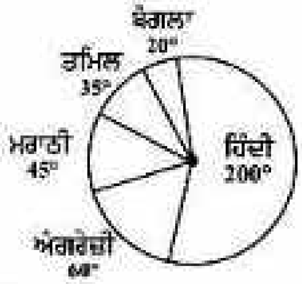


3.



4. (i) ਹਿੰਦੀ (ii) 30 ਅੰਕ (iii) ਹਾਂ

5.



ਅਭਿਆਸ 5.3

1. (a) ਨਤੀਜਾ → A, B, C, D
   (b) HT, HH, TH, TT [ਇੱਥੇ HT ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ਪਹਿਲਾ ਸਿੱਕੇ 'ਤੇ ਚਿਤ (Head) ਦੂਸਰੇ ਸਿੱਕੇ 'ਤੇ ਪਟ (Tail) ਆਦਿ।]
2. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਘਟਨਾ ਦੇ ਨਤੀਜੇ :
   (i) (a) 2, 3, 5 (b) 1, 4, 6
   (ii) (a) 6 (b) 1, 2, 3, 4, 5
3. (a) $\frac{1}{5}$ (b) $\frac{1}{13}$ (c) $\frac{4}{7}$
4. (i) $\frac{1}{10}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{2}{5}$ (iv) $\frac{9}{10}$
5. ਹਰਾ ਚੱਕਰਖੰਡ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ = $\frac{3}{5}$; ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਚੱਕਰਖੰਡ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਜੋ ਨੀਲਾ ਨਹੀਂ ਹੈ = $\frac{4}{5}$
6. ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ = $\frac{1}{2}$; ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਜੋ ਅਭਾਜ ਨਹੀਂ ਹੈ = $\frac{1}{2}$, 5 ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ = $\frac{1}{6}$, 5 ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਨਹੀਂ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ = $\frac{5}{6}$

ਅਭਿਆਸ 6.1

1. (i) 1 (ii) 4 (iii) 1 (iv) 9 (v) 6 (vi) 9
   (vii) 4 (viii) 0 (ix) 6 (x) 5
2. ਇਹ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ 'ਤੇ ਖ਼ਤਮ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ :
   (i) 7 (ii) 3 (iii) 8 (iv) 2 (v) 0 (vi) 2
   (vii) 0 (viii) 0
3. (i), (iii)
4. 100000200001, 100000020000001
5. 1020304030201, 101010101^2
6. 20, 6, 42, 43
7. (i) 25 (ii) 100 (iii) 144
8. (i) 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13
   (ii) 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21
9. (i) 24 (ii) 50 (iii) 198

ਅਭਿਆਸ 6.2

1. (i) 1024 (ii) 1225 (iii) 7396 (iv) 8649 (v) 5041 (vi) 2116
2. (i) 6,8,10 (ii) 14,48,50 (iii) 16,63,65 (iv) 18,80,82

ਅਭਿਆਸ 6.3

1. (i) 1, 9 (ii) 4, 6 (iii) 1, 9 (iv) 5
2. (i), (ii), (iii)
3. 10, 13
4. (i) 27 (ii) 20 (iii) 42 (iv) 64 (v) 88 (vi) 98
   (vii) 77 (viii) 96 (ix) 23 (x) 90
5. (i) 7; 42 (ii) 5; 30 (iii) 7, 84 (iv) 3; 78 (v) 2; 54 (vi) 3; 48
6. (i) 7; 6 (ii) 13; 15 (iii) 11; 6 (vi) 5; 23 (v) 7; 20 (vi) 5; 18
7. 49
8. 45 ਲਾਈਨਾਂ, ਹਰੇਕ ਲਾਈਨ ਵਿੱਚ 45 ਪੌਦੇ
9. 900
10. 3600

ਅਭਿਆਸ 6.4

1. (i) 48 (ii) 67 (iii) 59 (iv) 23 (v) 57 (vi) 37
   (vii) 76 (viii) 89 (ix) 24 (x) 32 (xi) 56 (xii) 30
2. (i) 1 (ii) 2 (iii) 2 (iv) 3 (v) 3
3. (i) 1.6 (ii) 2.7 (iii) 7.2 (iv) 6.5 (v) 5.6
4. (i) 2; 20 (ii) 53; 44 (iii) 1; 57 (iv) 41; 28 (v) 31; 63
5. (i) 4; 23 (ii) 14; 42 (iii) 4; 16 (iv) 24; 43 (v) 149; 81
6. 21 m
7. (a) 10 cm (b) 12 cm
8. 24 ਪੌਦੇ
9. 16 ਬੱਚੇ

ਅਭਿਆਸ 7.1

1. (ii) ਅਤੇ (iv)
2. (i) 3 (ii) 2 (iii) 3 (iv) 5 (v) 10
3. (i) 3 (ii) 2 (iii) 5 (iv) 3 (v) 11
4. 20 ਘਣਾਵ

ਅਭਿਆਸ 7.2

1. (i) 4 (ii) 8 (iii) 22 (iv) 30 (v) 25 (vi) 24
   (vii) 48 (viii) 36 (ix) 56
2. (i) ਗਲਤ (ii) ਠੀਕ (iii) ਗਲਤ (iv) ਗਲਤ (v) ਗਲਤ (vi) ਗਲਤ
   (vii) ਠੀਕ
3. 11, 17, 23, 32

ਅਭਿਆਸ 8.1

1. (a) 1 : 2 (b) 1 : 2000 (c) 1 : 10

2. (a) 75% (b) $66\frac{2}{3}$% **3.** 28% ਵਿਦਿਆਰਥੀ **4.** 25 ਮੈਚ **5.** ₹ 2400

6. 10%, ਕ੍ਰਿਕੇਟ → 30 ਲੱਖ, ਫੁਟਬਾਲ → 15 ਲੱਖ; ਹੋਰ ਖੇਡਾਂ → 5 ਲੱਖ

ਅਭਿਆਸ 8.2

1. ₹ 1,40,000 **2.** 80% **3.** ₹ 34.80 **4.** ₹ 18342.50

5. 2% ਲਾਭ **6.** ₹ 2835 **7.** ₹ 1269.84 ਦੀ ਹਾਨੀ

8. ₹ 14560 **9.** ₹ 2000 **10.** ₹ 5000

ਅਭਿਆਸ 8.3

1. (a) ਮਿਸ਼ਰਧਨ = ₹ 15377.34 ; ਮਿਸ਼ਰਤ ਵਿਆਜ = ₹ 4577.34

(b) ਮਿਸ਼ਰਧਨ = ₹ 22869 ; ਵਿਆਜ = ₹ 4869

(c) ਮਿਸ਼ਰਧਨ = ₹ 70,304 ; ਵਿਆਜ = ₹ 7804

(d) ਮਿਸ਼ਰਧਨ = ₹ 8736.20 ; ਵਿਆਜ = ₹ 736.20

(e) ਮਿਸ਼ਰਧਨ = ₹ 10,816 ; ਵਿਆਜ = ₹ 816

2. ₹ 36659.70 **3.** ਫੈਬਿਨਾ ₹ 362.50 ਜ਼ਿਆਦਾ ਦਿੰਦੀ ਹੈ **4.** ₹ 43.20

5. (ii) ₹ 63600 (ii) ₹ 67416 **6.** (i) ₹ 92400 (ii) ₹ 92610

7. (i) ₹ 8820 (ii) ₹ 441

8. ਮਿਸ਼ਰਧਨ = ₹ 11576.25 ; ਵਿਆਜ = ₹ 1576.25 ; ਹਾਂ

9. ₹ 4913 **10.** (i) ਲਗਭਗ 48980 (ii) 59535 **11.** 531616 (ਲਗਭਗ)

12. ₹ 38640

ਅਭਿਆਸ 9.1

1.

	ਪਦ	ਗੁਣਾਂਕ
(i)	$5xyz^2$ $-3zy$	5 −3
(ii)	1 x x^2	1 1 1
(iii)	$4x^2y^2$ $-4x^2y^2z^2$ z^2	4 −4 1
(iv)	3 $-pq$ qr $-rp$	3 −1 1 −1
(v)	$\frac{x}{2}$ $\frac{y}{2}$ $-xy$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ −1
(vi)	$0.3a$ $-0.6ab$ $0.5b$	0.3 −0.6 0.5

2. ਇੱਕ ਪਦੀ 1000, pqr

ਦੋ ਪਦੀ : $x + y$, $2y - 3y^2$, $4z - 15z^2$, $p^2q + pq^2$, $2p + 2q$

ਤਿੰਨ ਪਦੀ : $7 + y + 5x$, $2y - 3y^2 + 4y^3$, $5x - 4y + 3xy$

ਉਹ ਬਹੁਪਦ ਜੋ ਉਪਰਿਕਤ ਸ਼੍ਰੇਣੀਆਂ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਆਉਂਦੇ ਹਨ :

$x + x^2 + x^3 + x^4$, $ab + bc + cd + da$

3. (i) 0 (ii) $ab + bc + ac$ (iii) $-p^2q^2 + 4pq + 9$

(iv) $2(l^2 + m^2 + n^2 + lm + mn + nl)$

4. (a) $8a - 2ab + 2b - 15$ (b) $2xy - 7yz + 5zx + 10xyz$

(c) $p^2q - 7pq^2 + 8pq - 18q + 5p + 28$

ਅਭਿਆਸ 9.2

1. (i) $28p$ (ii) $-28p^2$ (iii) $-28p^2q$ (iv) $-12p^4$ (v) 0

2. pq; $50\ mn$; $100\ x^2y^2$; $12x^3$; $12mn^2p$

3.

ਪਹਿਲਾ ਇੱਕ ਪਦੀ : → ਦੂਸਰਾ ਇੱਕ ਪਦੀ :↓	$2x$	$-5y$	$3x^2$	$-4xy$	$7x^2y$	$-9x^2y^2$
$2x$	$4x^2$	$-10xy$	$6x^3$	$-8x^2y$	$14x^3y$	$-18x^3y^2$
$-5y$	$-10xy$	$25y^2$	$-15x^2y$	$20xy^2$	$-35x^2y^2$	$45x^2y^3$
$3x^2$	$6x^3$	$-15x^2y$	$9x^4$	$-12x^3y$	$21x^4y$	$-27x^4y^2$
$-4xy$	$-8x^2y$	$20xy^2$	$-12x^3y$	$16x^2y^2$	$-28x^3y^2$	$36x^3y^3$
$7x^2y$	$14x^3y$	$-35x^2y^2$	$21x^4y$	$-28x^3y$	$49x^4y^2$	$-63x^4y^3$
$-9x^2y^2$	$-18x^3y^2$	$45x^2y^3$	$-27x^4y^2$	$36x^3y^2$	$-63x^4y^3$	$81x^4y^4$

4. (i) $105a^7$ (ii) $64pqr$ (iii) $4x^3y^4$ (iv) $6abc$

5. (i) $x^2y^2z^2$ (ii) $-a^6$ (iii) $1024y^6$ (iv) $36a^2b^2c^2$ (v) $-m^3n^2p$

ਅਭਿਆਸ 9.3

1. (i) $4pq + 4pr$ (ii) $a^2b - ab^2$ (iii) $7a^3b^2 + 7a^2b^3$

(iv) $4a^3 - 36a$ (v) 0

2. (i) $ab + ac + ad$ (ii) $5x^2y + 5xy^2 - 25xy$

(iii) $6p^3 - 7p^2 + 5p$

(iv) $4p^4q^2 - 4p^2q^4$ (v) $a^2bc + ab^2c + abc^2$

3. (i) $8a^{50}$ (ii) $-\frac{3}{5}x^3y^3$ (iii) $-4p^4q^4$ (iv) x^{10}

4. (a) $12x^2 - 15x + 3$; (i) 66 (ii) $\frac{-3}{2}$

(b) $a^3 + a^2 + a + 5$; (i) 5 (ii) 8 (iii) 4

5. (a) $p^2 + q^2 + r^2 - pq - qr - pr$ (b) $-2x^2 - 2y^2 - 4xy + 2yz + 2zx$

(c) $5l^2 + 25ln$ (d) $-3a^2 - 2b^2 + 4c^2 - ab + 6bc - 7ac$

ਅਭਿਆਸ 9.4

1. (i) $8x^2 + 14x - 15$ (ii) $3y^2 - 28y + 32$ (iii) $6.25l^2 - 0.25m^2$
(iv) $ax + 5a + 3bx + 15b$ (v) $6p^2q^2 + 5pq^3 - 6q^4$ (vi) $3a^4 + 10a^2b^2 - 8b^4$
2. (i) $15 - x - 2x^2$ (ii) $7x^2 + 48xy - 7y^2$ (iii) $a^3 + a^2b^2 + ab + b^3$
(iv) $2p^3 + p^2q - 2pq^2 - q^3$
3. (i) $x^3 + 5x^2 - 5x$ (ii) $a^2b^3 + 3a^2 + 5b^3 + 20$ (iii) $t^3 - st + s^2t^2 - s^3$
(iv) $4ac$ (v) $3x^2 + 4xy - y^2$ (vi) $x^3 + y^3$
(vii) $2.25x^2 - 16y^2$ (viii) $a^2 + b^2 - c^2 + 2ab$

ਅਭਿਆਸ 9.5

1. (i) $x^2 + 6x + 9$ (ii) $4y^2 + 20y + 25$ (iii) $4a^2 - 28a + 49$
(iv) $9a^2 - 3a + \frac{1}{4}$ (v) $1.21m^2 - 0.16$ (vi) $b^4 - a^4$
(vii) $36x^2 - 49$ (viii) $a^2 - 2ac + c^2$ (ix) $\frac{x^2}{4} + \frac{3xy}{4} + \frac{9y^2}{16}$
(x) $49a^2 - 126ab + 81b^2$
2. (i) $x^2 + 10x + 21$ (ii) $16x^2 + 24x + 5$ (iii) $16x^2 - 24x + 5$
(iv) $16x^2 + 16x - 5$ (v) $4x^2 + 16xy + 15y^2$ (vi) $4a^4 + 28a^2 + 45$
(vii) $x^2y^2z^2 - 6xyz + 8$
3. (i) $b^2 - 14b + 49$ (ii) $x^2y^2 + 6xyz + 9z^2$ (iii) $36x^4 - 60x^2y + 25y^2$
(iv) $\frac{4}{9}m^2 + 2mn + \frac{9}{4}n^2$ (v) $0.16p^2 + 0.04pq + 0.25q^2$ (vi) $4x^2y^2 + 20xy^2 + 25y^2$
4. (i) $a^4 - 2a^2b^2 + b^4$ (ii) $40x$ (iii) $98m^2 + 128n^2$
(iv) $41m^2 + 80mn + 41n^2$ (v) $4p^2 - 4q^2$ (vi) $a^2b^2 + b^2c^2$ (vii) $m^4 + n^4m^2$
6. (i) 5041 (ii) 9801 (iii) 10404 (iv) 996004
(v) 27.04 (vi) 89991 (vii) 6396 (viii) 79.21
(ix) 9.975
7. (i) 200 (ii) 0.08 (iii) 1800 (iv) 84
8. (i) 10712 (ii) 26.52 (iii) 10094 (iv) 95.06

ਅਭਿਆਸ 10.1

1. (a) → (iii) → (iv) (b) → (i) → (v) (c) → (iv) → (ii)
(d) → (v) → (iii) (e) → (ii) → (i)
2. (a) (i) → ਸਾਹਮਣੇ, (ii) → ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਤੋਂ (iii) → ਉਪਰੋਂ (b) (i) → ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਤੋਂ, (ii) → ਸਾਹਮਣੇ, (iii) → ਉਪਰੋਂ
(c) (i) → ਸਾਹਮਣੇ, (ii) → ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਤੋਂ (iii) → ਉਪਰੋਂ (d) (i) → ਸਾਹਮਣੇ, (ii) → ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਤੋਂ (iii) → ਉਪਰੋਂ
3. (a) (i) → ਉਪਰੋਂ (ii) → ਸਾਹਮਣੇ (iii) → ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਤੋਂ (b) (i) → ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਤੋਂ, (ii) → ਸਾਹਮਣੇ, (iii) → ਉਪਰੋਂ
(c) (i) → ਉਪਰੋਂ (ii) → ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਤੋਂ (iii) → ਸਾਹਮਣੇ (d) (i) → ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਤੋਂ, (ii) → ਸਾਹਮਣੇ, (iii) → ਉਪਰੋਂ
(e) (i) → ਸਾਹਮਣੇ (ii) → ਉਪਰੋਂ (iii) → ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਤੋਂ

ਅਭਿਆਸ 10.3

1. (i) ਨਹੀਂ (ii) ਹਾਂ (iii) ਹਾਂ
2. ਤਦ ਸੰਭਵ ਹੈ ਜਦ ਫਲਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 4 ਜਾਂ ਉਸ ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਹੋਵੇ।
3. ਕੇਵਲ (ii) ਅਤੇ (iv)
4. (i) ਇੱਕ ਪ੍ਰਿਜ਼ਮ ਵੇਲਣ ਦਾ ਰੂਪ ਲੈ ਲੈਂਦਾ ਹੈ, ਜਦ ਅਧਾਰ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਵੱਡੀ ਅਤੇ ਹੋਰ ਵੱਡੀ ਹੁੰਦੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।
   (ii) ਇੱਕ ਪਿਰਾਮਿਡ ਸ਼ੰਕੂ ਦਾ ਰੂਪ ਲੈ ਲੈਂਦਾ ਹੈ, ਜਦ ਅਧਾਰ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਵੱਡੀ ਅਤੇ ਹੋਰ ਵੱਡੀ ਹੁੰਦੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।
5. ਨਹੀਂ। ਇਹ ਘਣਾਵ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ।
7. ਫਲਕ → 8, ਸਿਖਰ → 6, ਕਿਨਾਰੇ → 30
8. ਨਹੀਂ

ਅਭਿਆਸ 11.1

1. (a)
2. ₹ 17,875
3. ਖੇਤਰਫਲ = 129.5 m^2; ਪਰਿਮਾਪ = 48 m
4. 45000 ਟਾਈਲਾਂ
5. (b)

ਅਭਿਆਸ 11.2

1. 0.88 m^2
2. 7 cm
3. 660 m^2
4. 252 m^2
5. 45 cm^2
6. 24 cm^2, 6 cm
7. ₹ 810
8. 140 m
9. 119 m^2
10. ਜੋਤੀ ਦੀ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਖੇਤਰਫਲ = $2 \times \frac{1}{2} \times \frac{15}{2} \times (30+15)\ m^2 = 337.5\ m^2$,

    ਕਵਿਤਾ ਦੀ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਖੇਤਰਫਲ = $\frac{1}{2} \times 15 \times 15 + 15 \times 15\ m^2 = 337.5\ m^2$
11. 80 cm^2, 96 cm^2, 80 cm^2, 96 cm^2

ਅਭਿਆਸ 11.3

1. (a)
2. 144 m
3. 10 cm
4. 11 m^2
5. 5 ਕੈਨ
6. ਸਮਾਨਤਾ → ਦੋਨਾਂ ਦੀਆਂ ਬਰਾਬਰ ਉੱਚਾਈਆਂ ਹਨ; ਅੰਤਰ → ਇੱਕ ਵੇਲਣ ਹੈ ਅਤੇ ਦੂਸਰਾ ਘਣ ਹੈ। ਘਣ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਜ਼ਿਆਦਾ ਹੈ।
7. 440 m^2
8. 322 cm
9. 1980 m^2
10. 704 cm^2

ਅਭਿਆਸ 11.4

1. (a) ਆਇਤਨ (b) ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ (c) ਆਇਤਨ
2. ਵੇਲਣ B ਦਾ ਆਇਤਨ ਜ਼ਿਆਦਾ ਹੈ। ਵੇਲਣ B ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਜ਼ਿਆਦਾ ਹੈ।
3. 5 cm
4. 450
5. 1 m
6. 49500 L
7. (i) ਚਾਰ ਗੁਣਾ (ii) ਅੱਠ ਗੁਣਾ
8. 30 ਘੰਟੇ

ਅਭਿਆਸ 12.1

1. (i) $\frac{1}{9}$ (ii) $\frac{1}{16}$ (iii) 32

2. (i) $\frac{1}{(-4)^3}$ (ii) $\frac{1}{2^6}$ (iii) $(5)^4$ (iv) $\frac{1}{(3)^2}$ (v) $\frac{1}{(-14)^3}$

3. (i) 5 (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) 29 (iv) 1 (v) $\frac{81}{16}$

4. (i) 250 (ii) $\frac{1}{60}$ 5. $m = 2$ 6. (i) -1 (ii) $\frac{512}{125}$

7. (i) $\frac{625t^4}{2}$ (ii) 5^5

ਅਭਿਆਸ 12.2

1. (i) 8.5×10^{-12} (ii) 9.42×10^{-12} (iii) 6.02×10^{15}
   (iv) 8.37×10^{-9} (v) 3.186×10^{10}
2. (i) 0.00000302 (ii) 45000 (iii) 0.00000003
   (iv) 1000100000 (v) 5800000000000 (vi) 3614920
3. (i) 1×10^{-6} (ii) 1.6×10^{-19} (iii) 5×10^{-7}
   (iv) 1.275×10^{-5} (v) 7×10^{-2}
4. 1.0008×10^2

ਅਭਿਆਸ 13.1

1. ਨਹੀਂ

2.

ਲਾਲ ਰੰਗ ਦੇ ਭਾਗ	1	4	7	12	20
ਮੂਲ ਮਿਸ਼ਰਨ ਦੇ ਭਾਗ	8	32	56	96	160

3. 24 ਭਾਗ 4. 700 ਬੋਤਲਾਂ 5. 10^{-4} cm; 2 cm 6. 21 m

7. (i) 2.25×10^7 ਕ੍ਰਿਸਟਲ (ii) 5.4×10^6 ਕ੍ਰਿਸਟਲ 8. 4 cm

9. (i) 6 m (ii) 8 m 75 cm 10. 168 km

ਅਭਿਆਸ 13.2

1. (i), (iv), (v) 2. $4 \rightarrow 25{,}000$; $5 \rightarrow 20{,}000$; $8 \rightarrow 12{,}500$; $10 \rightarrow 10{,}000$; $20 \rightarrow 5{,}000$
ਇੱਕ ਜੇਤੂ ਨੂੰ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਧਨ ਰਾਸ਼ੀ ਜੇਤੂਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਦੇ ਉਲਟ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹੈ।

3. $8 \rightarrow 45°$, $10 \rightarrow 36°$, $12 \rightarrow 30°$ (i) ਹਾਂ (ii) 24° (iii) 9

4. 6 5. 4 6. 3 ਦਿਨ 7. 15 ਬਕਸੇ

8. 49 ਮਸ਼ੀਨਾਂ 9. $1\frac{1}{2}$ ਘੰਟੇ 10. (i) 6 ਦਿਨ (ii) 6 ਵਿਅਕਤੀ 11. 40 ਮਿੰਟ

ਅਭਿਆਸ 14.1

1. (i) 12 (ii) $2y$ (iii) $14pq$ (iv) 1 (v) $6ab$ (vi) $4x$
   (vii) 10 (viii) x^2y^2

2. (i) $7(x-6)$ (ii) $6(p-2q)$ (iii) $7a(a+2)$ (iv) $4z(-4+5z^2)$
(v) $10\,lm(2l+3a)$ (vi) $5xy(x-3y)$ (vii) $5(2a^2-3b^2+4c^2)$
(viii) $4a(-a+b-c)$ (ix) $xyz(x+y+z)$ (x) $xy(ax+by+cz)$

3. (i) $(x+8)(x+y)$ (ii) $(3x+1)(5y-2)$ (iii) $(a+b)(x-y)$
(iv) $(5p+3)(3q+5)$ (v) $(z-7)(1-xy)$

ਅਭਿਆਸ 14.2

1. (i) $(a+4)^2$ (ii) $(p-5)^2$ (iii) $(5m+3)^2$ (iv) $(7y+6z)^2$
(v) $4(x-1)^2$ (vi) $(11b-4c)^2$ (vii) $(l-m)^2$ (viii) $(a^2+b^2)^2$

2. (i) $(2p-3q)(2p+3q)$ (ii) $7(3a-4b)(3a+4b)$ (iii) $(7x-6)(7x+6)$
(iv) $16x^3(x-3)(x+3)$ (v) $4lm$ (vi) $(3xy-4)(3xy+4)$
(vii) $(x-y-z)(x-y+z)$ (viii) $(5a-2b+7c)(5a+2b-7c)$

3. (i) $x(ax+b)$ (ii) $7(p^2+3q^2)$ (iii) $2x(x^2+y^2+z^2)$
(iv) $(m^2+n^2)(a+b)$ (v) $(l+1)(m+1)$ (vi) $(y+9)(y+z)$
(vii) $(5y+2z)(y-4)$ (viii) $(2a+1)(5b+2)$ (ix) $(3x-2)(2y-3)$

4. (i) $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$ (ii) $(p-3)(p+3)(p^2+9)$
(iii) $(x-y-z)(x+y+z)[x^2+(y+z)^2]$ (iv) $z(2x-z)(2x^2-2xz+z^2)$
(v) $(a-b)^2(a+b)^2$

5. (i) $(p+2)(p+4)$ (ii) $(q-3)(q-7)$ (iii) $(p+8)(p-2)$

ਅਭਿਆਸ 14.3

1. (i) $\frac{x^3}{2}$ (ii) $-4y$ (iii) $6pqr$ (iv) $\frac{2}{3}x^2y$ (v) $-2a^2b^4$

2. (i) $\frac{1}{3}(5x-6)$ (ii) $3y^4-4y^2+5$ (iii) $2(x+y+z)$
(iv) $\frac{1}{2}(x^2+2x+3)$ (v) q^3-p^3

3. (i) $2x-5$ (ii) 5 (iii) $6y$ (iv) xy (v) $10abc$

4. (i) $5(3x+5)$ (ii) $2y(x+5)$ (iii) $\frac{1}{2}r(p+q)$ (iv) $4(y^2+5y+3)$
(v) $(x+2)(x+3)$

5. (i) $y+2$ (ii) $m-16$ (iii) $5(p-4)$ (iv) $2z(z-2)$ (v) $\frac{5}{2}q(p-q)$
(vi) $3(3x-4y)$ (vii) $3y(5y-7)$

ਅਭਿਆਸ 14.4

1. $4(x-5)=4x-20$
2. $x(3x+2)=3x^2+2x$
3. $2x+3y=2x+3y$
4. $x+2x+3x=6x$
5. $5y+2y+y-7y=y$
6. $3x+2x=5x$

7. $(2x)^2 + 4(2x) + 7 = 4x^2 + 8x + 7$

8. $(2x)^2 + 5x = 4x^2 + 5x$

9. $(3x + 2)^2 = 9x^2 + 12x + 4$

10. (a) $(-3)^2 + 5(-3) + 4 = 9 - 15 + 4 = -2$ (b) $(-3)^2 - 5(-3) + 4 = 9 + 15 + 4 = 28$

(c) $(-3)^2 + 5(-3) = 9 - 15 = -6$

11. $(y - 3)^2 = y^2 - 6y + 9$

12. $(z + 5)^2 = z^2 + 10z + 25$

13. $(2a + 3b)(a - b) = 2a^2 + ab - 3b^2$

14. $(a + 4)(a + 2) = a^2 + 6a + 8$

15. $(a - 4)(a - 2) = a^2 - 6a + 8$

16. $\frac{3x^2}{3x^2} = 1$

17. $\frac{3x^2 + 1}{3x^2} = \frac{3x^2}{3x^2} + \frac{1}{3x^2} = 1 + \frac{1}{3x^2}$

18. $\frac{3x}{3x + 2} = \frac{3x}{3x + 2}$

19. $\frac{3}{4x + 3} = \frac{3}{4x + 3}$

20. $\frac{4x + 5}{4x} = \frac{4x}{4x} + \frac{5}{4x} = 1 + \frac{5}{4x}$

21. $\frac{7x + 5}{5} = \frac{7x}{5} + \frac{5}{5} = \frac{7x}{5} + 1$

ਅਭਿਆਸ 15.1

1. (a) 36.5° C (b) ਦੁਪਹਿਰ 12 ਵਜੇ

(c) ਦੁਪਹਿਰ 1 ਵਜੇ, ਦੁਪਹਿਰ 2 ਵਜੇ

(d) 36.5° C; ਦੁਪਹਿਰ 1 ਵਜੇ ਤੋਂ 2 ਵਜੇ ਦੇ ਵਿੱਚ x- ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਬਿੰਦੂ ਦੁਪਹਿਰ 1 ਵਜੇ ਅਤੇ ਦੁਪਹਿਰ 2 ਵਜੇ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਵਾਲੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੋਂ ਬਰਾਬਰ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਦੁਪਹਿਰ 1 ਵੱਜ ਕੇ 30 ਮਿੰਟ ਦਾ ਸਮਾਂ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ y – ਧੁਰੇ 'ਤੇ 36° C ਅਤੇ 37° C ਦੇ ਵਿੱਚ ਦਾ ਬਿੰਦੂ 36.5° C ਨੂੰ ਦਰਸਾਏਗਾ।

(e) ਸਵੇਰ 9 ਵਜੇ ਤੋਂ ਸਵੇਰ 10 ਵਜੇ ਤੱਕ, ਸਵੇਰ 10 ਵਜੇ ਤੋਂ ਸਵੇਰ 11 ਵਜੇ ਤੱਕ, ਦੁਪਹਿਰ 2 ਵਜੇ ਤੋਂ ਦੁਪਹਿਰ 3 ਵਜੇ ਤੱਕ

2. (a) (i) ₹ 4 ਕਰੋੜ (ii) ₹ 8 ਕਰੋੜ

(b) (i) ₹ 7 ਕਰੋੜ (ii) ₹ 8.5 ਕਰੋੜ (ਲਗਭਗ)

(c) ₹ 4 ਕਰੋੜ (d) 2005

3. (a) (i) 7 cm (ii) 9 cm

(b) (i) 7 cm (ii) 10 cm

(c) 2 cm (d) 3 cm (e) ਦੂਸਰਾ ਹਫਤਾ (f) ਪਹਿਲਾ ਹਫਤਾ

(g) ਦੂਸਰੇ ਹਫਤੇ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ

4. (a) ਮੰਗਲ, ਸ਼ੁੱਕਰ, ਐਤ (b) 35° C (c) 15° C (d) ਵੀਰਵਾਰ

6. (a) 4 ਇਕਾਈ = 1 ਘੰਟਾ (b) $3\frac{1}{2}$ ਘੰਟੇ (c) 22 km

(d) ਹਾਂ, ਇਹ ਗਰਾਫ਼ ਦੇ ਲੇਟਵੇਂ ਭਾਗ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। (ਸਵੇਰ 10 ਵਜੇ ਤੋਂ ਸਵੇਰ 10:30 ਵਜੇ ਤੱਕ)

(e) ਸਵੇਰ 8 ਵਜੇ ਅਤੇ ਸਵੇਰ 9 ਵਜੇ ਦੇ ਵਿੱਚ

7. (iii) ਸੰਭਵ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 15.2

1. (a) ਅਤੇ (b) ਦੇ ਬਿੰਦੂ ਇੱਕ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਹਨ।
   (c) ਦੇ ਬਿੰਦੂ ਇੱਕ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਨਹੀਂ ਹਨ।
2. ਇਹ ਰੇਖਾ x – ਧੁਰੇ ਨੂੰ (5, 0) ਅਤੇ y – ਧੁਰੇ ਨੂੰ (0, 5) 'ਤੇ ਕੱਟੇਗੀ।
3. O(0, 0), A(2, 0), B(2, 3), C(0, 3), P(4, 3), Q(6, 1), R(6, 5), S(4, 7), K(10, 5), L(7, 7), M(10, 8)
4. (i) ਠੀਕ (ii) ਗਲਤ (iii) ਠੀਕ

ਅਭਿਆਸ 15.3

1. (b) (i) 20 km (ii) ਸਵੇਰ 7.30 ਵਜੇ (c) (i) ਹਾਂ (ii) ₹ 200 (iii) ₹ 3500
2. (a) ਹਾਂ (b) ਨਹੀਂ

ਅਭਿਆਸ 16.1

1. A = 7, B = 6
2. A = 5, B = 4, C = 1
3. A = 6
4. A = 2, B = 5
5. A = 5, B = 0, C = 1
6. A = 5, B = 0, C = 2
7. A = 7, B = 4
8. A = 7, B = 9
9. A = 4, B = 7
10. A = 8, B = 1

ਅਭਿਆਸ 16.2

1. $y = 1$
2. $z = 0$ ਜਾਂ 9
3. $z = 0, 3, 6$ ਜਾਂ 9
4. 0, 3, 6 ਜਾਂ 9

ਦਿਮਾਗੀ ਕਸਰਤ

1. **ਪਾਈਥਾਗੋਰੀਅਨ ਤਿੱਕੜੀਆਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਕੁੱਝ ਹੋਰ**
   ਅਸੀਂ ਪਾਈਥਾਗੋਰੀਅਨ ਤਿੱਕੜੀਆਂ (Pythagorean triplets) ਨੂੰ ਇੱਕ ਤਰ੍ਹਾਂ $2m, m^2 - 1, m^2 + 1$ ਨਾਲ ਲਿਖਣਾ ਦੇਖ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ। ਇੱਕ ਪਾਈਥਾਗੋਰੀਅਨ ਤਿੱਕੜੀ a, b, c ਦਾ ਅਰਥ $a^2 + b^2 = c^2$ ਹੈ। ਜੇ ਅਸੀਂ ਦੋ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ m ਅਤੇ n ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ $(m > n)$ ਅਤੇ $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$ ਅਤੇ $c = m^2 + n^2$ ਲਈਏ, ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $c^2 = a^2 + b^2$ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, $m > n$ ਦੇ ਨਾਲ, ਅਸੀਂ m ਅਤੇ n ਦੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਲਈ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a, b, c ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਬਣਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਉਹ ਪਾਈਥਾਗੋਰੀਅਨ ਤਿੱਕੜੀਆਂ ਬਣਾਉਣ।
   ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ $m = 2, n = 1$ ਲਵੋ।
   ਤਦ, $a = m^2 - n^2 = 3$, $b = 2mn = 4$, $c = m^2 + n^2 = 5$, ਇੱਕ ਪਾਈਥਾਗੋਰੀਅਨ ਤਿੱਕੜੀ ਹੈ। (ਇਸਦੀ ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ।)
   $m = 3, n = 2$, ਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।
   $a = 5, b = 12, c = 13$ ਜੋ ਕਿ ਫਿਰ ਇੱਕ ਪਾਈਥਾਗੋਰੀਅਨ ਤਿੱਕੜੀ ਹੈ।
   m ਅਤੇ n ਦੇ ਕੁੱਝ ਹੋਰ ਮੁੱਲ ਲਵੋ ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਹੋਰ ਜ਼ਿਆਦਾ ਤਿੱਕੜੀਆਂ ਬਣਾਓ।
2. ਜਦ ਪਾਣੀ ਜੰਮਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਉਸਦੇ ਆਇਤਨ ਵਿੱਚ 4% ਦਾ ਵਾਧਾ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। 221 cm^3 ਬਰਫ਼ ਬਣਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਕਿੰਨੇ ਪਾਣੀ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੋਵੇਗੀ ?
3. ਜੇ ਚਾਹ ਦਾ ਮੁੱਲ 20% ਵੱਧ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਉਸਦੀ ਖਪਤ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੇ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਦੀ ਕਮੀ ਕੀਤੀ ਜਾਵੇ ਕਿ ਉਸ ਤੇ ਹੋਣ ਵਾਲੇ ਖ਼ਰਚੇ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਵਾਧਾ ਨਾ ਹੋਵੇ ?

4. ਇਨਾਮ ਸਮਾਰੋਹ (Awards Ceremony) 1958 ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋਏ। ਉਸ ਵੇਲੇ ਇਨਾਮ ਜਿੱਤਣ ਦੇ ਲਈ 28 ਸ਼੍ਰੇਣੀਆਂ ਸਨ। 1993 ਵਿੱਚ 81 ਸ਼੍ਰੇਣੀਆਂ ਸੀ।
   (i) 1958 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਇਨਾਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 1993 ਦੇ ਇਨਾਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਕਿੰਨੇ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਹੈ ?
   (ii) 1993 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਇਨਾਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 1958 ਦੇ ਇਨਾਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਕਿੰਨੇ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਹੈ ?

5. ਭੌਰਿਆਂ ਦੇ ਝੁੰਡ ਵਿੱਚੋਂ $\frac{1}{15}$ ਭਾਗ ਕਦੰਬ ਦੇ ਫੁੱਲ 'ਤੇ ਜਾ ਬੈਠਾ, $\frac{1}{3}$ ਸਿਲੀਘਿਰੀ ਦੇ ਫੁੱਲ 'ਤੇ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਦੋਨਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਅੰਤਰ ਦਾ ਤਿਗੁਣਾ ਉੱਡ ਕੇ ਕੁਟਜ ਦੇ ਫੁੱਲ 'ਤੇ ਜਾ ਬੈਠਾ। ਤਦ ਝੁੰਡ ਵਿੱਚ ਕੇਵਲ 10 ਭੌਰੇ ਹੀ ਰਹਿ ਗਏ। ਝੁੰਡ ਵਿੱਚ ਸ਼ੁਰੂ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੇ ਭੌਰੇ ਸੀ ? [ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਕਦੰਬ, ਸਿਲੀਘਿਰੀ ਅਤੇ ਕੁਟਜ ਫੁਲਾਂ ਦੇ ਦਰੱਖਤ ਹਨ। ਇਹ ਸੱਮਸਿਆ ਬੀਜਗਣਿਤਕ ਦੇ ਇੱਕ ਪੁਰਾਣੇ ਭਾਰਤੀ ਗ੍ਰੰਥ ਵਿੱਚੋਂ ਲਈ ਗਈ ਹੈ।]

6. ਕਿਸੇ ਵਰਗ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ, ਸ਼ੇਖਰ ਨੇ ਵਰਗ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦਾ ਸੂਤਰ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ, ਜਦ ਕਿ ਉਸਦੇ ਮਿੱਤਰ ਨੇ ਮਰੂਫ ਨੇ ਵਰਗ ਦੇ ਪਰਿਮਾਪ ਦਾ ਸੂਤਰ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ। ਹੈਰਾਨੀ ਦੀ ਗੱਲ ਹੈ ਕਿ ਦੋਨਾਂ ਦੇ ਉੱਤਰ ਸੰਖਿਆਤਮਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਹੀ ਸਨ। ਮੈਨੂੰ ਦੱਸ ਕਿ ਜਿਸ ਵਰਗ 'ਤੇ ਉਹ ਕੰਮ ਕਰ ਰਹੇ ਸੀ। ਉਸਦੀ ਭੁਜਾ ਦੀਆਂ ਇਕਾਈਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਕੀ ਹੈ ?

7. ਇੱਕ ਵਰਗ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਸੰਖਿਆਤਮਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਆਪਣੀ ਭੁਜਾ ਦੇ 6 ਗੁਣਾ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੁਝ ਵਰਗਾਂ ਦੀ ਸੂਚੀ ਬਣਾਉ। ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

8. ਕੀ ਇਹ ਸੰਭਵ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਲੰਬ ਚੱਕਰੀ ਬੇਲਣ ਦਾ ਆਇਤਨ ਸੰਖਿਆਤਮਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਉਸਦੇ ਟੇਢੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇਗਾ ? ਜੇ ਹਾਂ, ਤਾਂ ਦੱਸੋ ਕਦੋਂ।

9. ਲੀਲਾ ਨੇ ਆਪਣੇ ਜਨਮ ਦਿਨ ਤੇ ਕੁਝ ਮਿੱਤਰਾਂ ਨੂੰ ਚਾਹ 'ਤੇ ਬੁਲਾਇਆ। ਉਸਦੀ ਮਾਂ ਨੇ ਖਾਣ ਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਮੇਜ਼ 'ਤੇ ਕੁਝ ਪਲੇਟਾਂ ਅਤੇ ਕੁਝ ਪੂੜੀਆਂ ਰੱਖ ਦਿੱਤੀਆਂ। ਜੇਕਰ ਲੀਲਾ ਹਰੇਕ ਪਲੇਟ ਵਿੱਚ 4 ਪੂੜੀਆਂ ਰੱਖਦੀ ਹੈ, ਤਾਂ ਇੱਕ ਪਲੇਟ ਖਾਲੀ ਰਹਿ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਜੇ ਉਹ ਹਰੇਕ ਪਲੇਟ ਵਿੱਚ 3 ਪੂੜੀਆਂ ਰੱਖਦੀ ਹੈ, ਤਾਂ 1 ਪੂੜੀ ਬੱਚ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਮੇਜ਼ 'ਤੇ ਰੱਖੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਪਲੇਟਾਂ ਅਤੇ ਪੂੜੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ।

10. ਕੀ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਕੋਈ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਜੋ ਆਪਣੇ ਘਣ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ, ਪਰ ਆਪਣੇ ਵਰਗ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹੈ ? ਜੇ ਹਾਂ, ਤਾਂ ਉਹ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ।

11. ਸੰਖਿਆਵਾਂ 1 ਤੋਂ 20 ਤੱਕ ਨੂੰ ਇੱਕ ਲਾਈਨ ਵਿੱਚ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਤਰਤੀਬਵਾਰ ਕਰੋ ਕਿ ਕੋਈ ਦੋ ਲਗਾਤਾਰ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਹੋਵੇ।

ਉੱਤਰਮਾਲਾ

2. $212\frac{1}{2}$ cm³ 3. $16\frac{2}{3}$% 4. (i) 34.5% (ii) 289%
5. 150
6. 4 ਇਕਾਈਆਂ
7. ਭੁਜਾ = 1, 2, 3, 4, 5 ਇਕਾਈਆਂ
8. ਹਾਂ ਜਦ ਅਰਧ ਵਿਆਸ = 2 ਇਕਾਈਆਂ
9. ਪੂੜੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = 16, ਪਲੇਟਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = 5
10. −1
11. ਇੱਕ ਤਰੀਕਾ ਇਹ ਹੈ ਕਿ 1, 3, 6, 19, 17, 8 (1 + 3 = 4, 3 + 6 = 9 ਆਦਿ) ਕੁੱਝ ਹੋਰ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ।