তৃতীয় অধ্যায়

সংহতি-তত্ত্ব
(SET THEORY)

3.1.1 পাতনি (Introduction) ঃ

ঊনৈশ শতিকাৰ শেষৰ পিনে জাৰ্মান গণিতজ্ঞ জৰ্জ কেণ্টৰে গণিতত সংহতি তত্ত্ব নামেৰে এটা নতুন ধাৰণাৰ অৱতাৰণা কৰে। সংহতি তত্ত্বক আধুনিক গণিতৰ ভাষা বুলি ক'ব পাৰি। বৰ্তমান সময়ত বিজ্ঞানৰ বিভিন্ন শাখাৰ উপৰিও সমাজবিজ্ঞান, বাণিজ্য শিক্ষা আদি শাখা যিবোৰত গণিতৰ ব্যৱহাৰৰ প্ৰয়োজন সেই সকলোবোৰতে সংহতি তত্ত্বৰ প্ৰাথমিক জ্ঞান অপৰিহাৰ্য হৈ পৰিছে।

3.1.2 সংহতি আৰু ইয়াৰ মৌলৰ ধাৰণ (Concept of Sets and element) ঃ

সংহতি আৰু সংহতিৰ মৌল বা উপাদান (elements) হ'ল এটা ধাৰণা। আমাৰ সহজাত বুদ্ধিৰে এই ধাৰণাসমূহ উপলব্ধি কৰিব লাগিব।

কেণ্টৰ মতে সংহতি হ'ল যিকোনো বস্তুৰ সু-সংজ্ঞাবদ্ধ সংগ্ৰহ (well defined collection) আৰু যিবোৰৰ সংগ্ৰহ সেইবোৰ হ'ল সংহতিটোৰ মৌল বা উপাদান (elements)।

আমি ইয়াত এটা ধাৰণা কৰি ল'ব পাৰোঁ যে সংহতি শব্দটো 'গোট', 'থূপ' বা 'সমষ্টি' শব্দৰ সমাৰ্থক আৰু আনহাতে মৌল শব্দটো বস্তু বা সদস্যৰ সৈতে সমাৰ্থক।

সু-সংজ্ঞাবদ্ধ মানে হ'ল যিকোনো এটা বস্তু দিয়া থাকিলে আমি দৃঢ়তাৰে ক'ব পাৰিব লাগিব যে সেই বস্তুটো সেই শ্ৰেণী বা গোটৰ সদস্য হয় নে নহয়? উদাহৰণস্বৰূপে—

(i) 1 আৰু 20 ৰ মাজত থকা সকলো অযুগ্ম সংখ্যাই এটা সংহতি গঠন কৰিব। কিয়নো আমি স্পষ্টভাৱে ক'ব পাৰোঁ যে 17 এই গোটৰ অন্তৰ্ভুক্ত কিন্তু 8 ইয়াৰ অন্তৰ্ভুক্ত নহয়।

(ii) ভাৰতৰ সকলোবোৰ ভাল ক্ৰিকেট খেলুৱৈৰ সমষ্টি এটা সংহতি নহয়। কাৰণ 'ভাল খেলুৱৈ' শব্দটো সু-সংজ্ঞাবদ্ধ নহয়।

ঠিক সেইদৰে কটন কলেজত পঢ়ি থকা সকলোবোৰ ধুনীয়া ছোৱালীৰ সমষ্টি এটা সংহতি নহয়, কিন্তু কটন কলেজত পঢ়ি থকা সকলোবোৰ ছোৱালীৰ সমষ্টিয়ে এটা সংহতি গঠন কৰিব।

* এটা সংহতিৰ নাম দিবলৈ আমি ইংৰাজী বৰফলাৰ আখৰ (capital letter) ব্যৱহাৰ কৰোঁ। উদাহৰণস্বৰূপে,

G = গুৱাহাটী বাণিজ্য মহাবিদ্যালয়ৰ ছাত্ৰ-ছাত্ৰীৰ সংহতি

* সংহতিৰ মৌলসমূহ সূচাবলৈ আমি ইংৰাজী সৰুফলাৰ (small letter) আখৰ ব্যৱহাৰ কৰোঁ।
* s সংহতিৰ a এটা মৌল হ'লে ইয়াক $a \in s$ প্ৰতীকেৰে বুজোৱা হয়। আনহাতে যদি b সংহতি s ৰ মৌল নহয়, তাক বুজাবলৈ $b \notin s$ ব্যৱহাৰ কৰা হয়।

  ইয়াত $\in$ (এপচিলেনে) এটা গ্ৰীক বৰ্ণমালাৰ আখৰ।

কিছুমান সংহতিৰ উদাহৰণ (Some examples of set) ঃ

1. ইংৰাজী স্বৰবৰ্ণৰ সংহতিটো পাঁচটা মৌল *a, e, i, o, u* ৰে গঠিত।
2. প্ৰথম পাঁচটা মৌলিক সংখ্যাৰে গঠিত সংহতিটোৰ মৌলকেইটা হ'ল 2, 3, 5, 7, 11।
3. অসমৰ সকলোবোৰ জিলাৰ সমষ্টিটোৰে এটা সংহতি গঠন কৰে।

3.1.3 সংহতি প্ৰদৰ্শন কৰা পদ্ধতি (Representation of a Set) ঃ

এটা সংহতি প্ৰদৰ্শনৰ বাবে দুটা পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰা হয়—

(i) **তালিকাভুক্তিকৰণৰ পদ্ধতি (Roaster or Tabular Method)** ঃ এই পদ্ধতিত এটা সংহতিৰ মৌলৰ সংখ্যা তাকৰ হ'লে সকলোবোৰ মৌল কুটিল বন্ধনীৰ মাজত { } কমা চিনেৰে বিচ্ছিন্ন কৰি লিখিব পাৰি।

কিন্তু মৌলৰ সংখ্যা সৰহ হ'লে প্ৰথম তিনিটা বা চাৰিটা মৌল লিখি তাৰ পিছত কেইটামান ফুট (·) দিয়া হয়।

উদাহৰণ স্বৰূপে —

$$V = \{a, e, i, o, u\}$$

ইংৰাজী স্বৰবৰ্ণৰ সংহতি

আকৌ ইংৰাজী ব্যঞ্জনবৰ্ণৰ সংহতি

$$N = \{b, c, d, f, ...\}$$

(ii) **সংহতি গঠন পদ্ধতি (Rule or Set Builder Method)** ঃ

এই পদ্ধতিত এটা সংহতিৰ মৌলবোৰৰ এটা উমৈহতীয়া ধৰ্ম $P(x)$ৰ দ্বাৰা বুজোৱা হয় আৰু ইয়াক $\{x \mid P(x)\}$ বা $\{x : P(x)\}$ বুলি লিখা হ'য়।

' : ' বা '।' চিনটোৰ অৰ্থ যাতে (Such that) উদাহৰণস্বৰূপে

$G = \{x \mid x$ গুৱাহাটী বাণিজ্য মহাবিদালয়ৰ এজন ছাত্ৰ$\}$

$N = \{x \mid x$ ইংৰাজী ব্যঞ্জন বৰ্ণৰ এটা বৰ্ণ$\}$

টোকা ঃ

(i) সংহতিত একেটা মৌলকে এবাৰতকৈ বেছি লিখা নহয়। কাৰণ সংহতিৰ প্ৰতিটো মৌল পৃথক হ'ব লাগিব। উদাহৰণ স্বৰূপে $P = \{1, 2, 2, 3, 5, 5, 5\}$

সংহতিক $P = \{1, 2, 3, 5\}$ বুলিহে লিখা হয়।

(ii) সংহতিৰ মৌলবোৰ যিকোনো ক্ৰমতে লিখিব পাৰি। উদাহৰণস্বৰূপে

$V = \{a, e, i, o, u\}$

$= \{e, i, o, u, a\}$

$= \{o, a, u, e, i\}$

(ii) এইটো মনত ৰাখিবলগীয়া কথা যে কোনো সংহতিৰ নাম দিবলৈ ইংৰাজী বৰফলাৰ যিকোনো বৰ্ণ ব্যৱহাৰ কৰিব পাৰি যদিও C, I, N, Q, R, W, Z এই বৰ্ণকেইটা তলত লিখা সংহতিকেইটা সূচাবলৈহে সাধাৰণতে ব্যৱহাৰ কৰা হয়।

N = স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ সংহতি

W = পূৰ্ণ সংখ্যাৰ সংহতি

I বা Z = অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি

Q = পৰিমেয় সংখ্যাৰ সংহতি

R = বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি

C = জটিল সংখ্যাৰ সংহতি

[এই সংখ্যাবোৰৰ বিষয়ে একাদশ শ্ৰেণীৰ পাঠ্যপুথিৰ 'বাস্তৱ সংখ্যা' পাঠত বিস্তৃতভাৱে আলোচনা কৰা হৈছে।]

ব্যাখ্যাসূচক উদাহৰণ (Worked out Example) ঃ

উদাহৰণ 1 ঃ $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \frac{9}{10}\right\}$ সংহতিক সংহতি গঠন পদ্ধতিৰ দ্বাৰা প্ৰকাশ কৰা।

সমাধান ঃ দেখা যায় যে প্ৰতিটো মৌলৰ হৰ (denominator)ৰ মান লব (numerator) তকৈ 1 বেছি আৰু লবসমূহৰ মান 1 ৰ পৰা 9 লৈকে বিস্তৃত।

গতিকে এই সংহতিক,

$$\left\{x : x = \frac{n}{n+1}, n \in 9, n \le 9\right\}$$

হিচাপে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি।

উদাহৰণ 2 ঃ$A = \{x : x \in z, x^2 < 25\}$ সংহতিক তালিকাকৰণ পদ্ধতিত লিখা।

সমাধান ঃ আমি দেখিবলৈ পাওঁ যে 0, ±1, ±2, ±3, ±4 অখণ্ড সংখ্যাৰ বৰ্গৰ মান 25 তকৈ কম।

$\therefore\ A = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

3.1.4 বিভিন্ন ধৰণৰ সংহতি (Different types of Sets) ঃ

একমৌল সংহতি (Singleten Set) ঃ যিবোৰ সংহতিত মাত্ৰ এটাহে মৌল থাকে তাক এক মৌল সংহতি বোলা হয়।

উদাহৰণস্বৰূপে —

(i) ভাৰতৰ মহিলা প্ৰধানমন্ত্ৰীৰ সংহতি = {ইন্দিৰা গান্ধী}

(ii) পৃথিৱীৰ স্বাভাৱিক উপগ্ৰহৰ সংহতি = {চন্দ্ৰ}

(iii) যুগ্ম মৌলিক সংখ্যাৰ সংহতি = {2}

ওপৰৰ সকলোবোৰ এক মৌল সংহতি।

সসীম সংহতি (Finite set) ঃ যিবিলাক সংহতিৰ মৌলৰ সংখ্যা গণনা কৰি শেষ কৰিব পাৰি তাক সসীম সংহতি বোলা হয়।

ধৰা হ'ল, A এটা সসীম সংহতি আৰু ইয়াত K সংখ্যক মৌল থাকে তেনেহ'লে ইয়াক বুজাবলৈ $n(A) = K$ ৰে সূচোৱা হয়।

উদাহৰণ স্বৰূপে —

এটা সপ্তাহৰ দিনবোৰৰ সংহতিক যদি D ৰে বুজোৱা হয়, তেনেহ'লে $n(D) = 7$

অসীম সংহতি (Infinite set) ঃ যিবোৰ সংহতি সসীম নহয় তাক অসীম সংহতি বোলা হয়।

ওপৰত উল্লেখ কৰা N, Z, W, Q, R আৰু C প্ৰত্যেকেই একোটা অসীম সংহতি।

3.1.5 সমতুল্য সংহতি (Equivalent Set) ঃ

দুটা সসীম সংহতি A আৰু B ক সমতুল্য সংহতি বোলা হয়, যদিহে $n(A) = n(B)$ হয় অৰ্থাৎ দুয়োটা সংহতিতে সমান সংখ্যক মৌল থাকে আৰু ইয়াক $A \sim B$ ৰ দ্বাৰা বুজোৱা হয়।

উদাহৰণ স্বৰূপে —

যদি $A = \{a, b, c\}$

$B = \{1, 2, 3\}$ হয়

ইয়াত $n(A) = n(B) = 3$

3.1.6 সংহতিৰ সমতা (Equality of Sets) ঃ

দুটা সংহতি A আৰু B ক সমান (equal) বুলি কোৱা হয় যদিহে A ৰ প্ৰতিটো মৌল B ত থাকে আৰু B ৰ প্ৰতিটো মৌলও A ত থাকে আৰু ইয়াক বুজাবলৈ A = B ব্যৱহাৰ কৰা হয়।

উদাহৰণ স্বৰূপে—

যদি $A = \{1, 2, 5, 6\}$

$B = \{5, 2, 6, 1\}$

তেনেহ'লে $A = B$

A আৰু B সমান নহ'লে $A \neq B$ ৰ দ্বাৰা সূচোৱা হয়।

টোকা ঃ যদি $A = B$ হয় তেনেহ'লে $A \sim B$ হ'ব।

আনহাতে $A \sim B$ হ'লে $A = B$ নহ'বও পাৰে।

উদাহৰণ 3ঃ তলৰ কোনবোৰ সংহতি সসীম আৰু কোনেবোৰ অসীম নিৰ্ণয় কৰা

(i) $A = \{x : x \in z$ আৰু $x^2 - 7x + 12 = 0\}$

(ii) $B = \{x : x \in$ z আৰু x^2 অযুগ্ম সংখ্যা$\}$

(iii) $D = \{x : x \in z$ আৰু $x^2 = 64\}$

(iv) $E = \{x : x \in z$ আৰু $x < 3\}$

সমাধান ঃ

(i) $A = \{x : x \in z$ আৰু $x^2 - 7x + 12 = 0\}$ হ'লে

$A = \{3, 4\}$

$\therefore$ A সসীম সংহতি।

(ii) $B = \{x : x \in$ z আৰু x^2 অযুগ্ম সংখ্যা$\}$ হ'লে

$B = \{.... -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, ...\}$

$\therefore$ B এটা সসীম সংহতি।

(iii) $D = \{x : x \in z$ আৰু $x^2 = 64\}$ হ'লে

$D = \{-8, 8\}$

$\therefore$ D এটা সসীম সংহতি।

(iv) $E = \{x : x \in z$ আৰু $x < 3\}$ হ'লে

$E = \{.... -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$

$\therefore$ E এটা অসীম সংহতি।

উদাহৰণ 4 ঃতলৰ কোনযোৰ সংহতি সমতুল্য আৰু কোনযোৰ সমান নিৰ্ণয় কৰা।

A = {x : x ইংৰাজী 'flow' শব্দৰ এটা বৰ্ণ}

B = {x : x ইংৰাজী 'follow' শব্দৰ এটা বৰ্ণ}

L = {x : x ইংৰাজী 'later' শব্দৰ এটা বৰ্ণ}

M = {x : x ইংৰাজী 'circle' শব্দৰ এটা বৰ্ণ}

সমাধান ঃ ইয়াত A = {f, l, o, w}

B = {f, o, l, w}

L = {l, a, t, e, r}

M = {c, i, r, l, e}

$\therefore$ A = B আৰু L ~ M

সংহতিৰ বীজগণিতীয় প্ৰক্ৰিয়া (Operation on Sets) ঃ

বাস্তৱ সংখ্যাৰ ক্ষেত্ৰত যিদৰে যোগ (+), বিয়োগ (–), পূৰণ (×) আৰু হৰণ (÷) চাৰিটা বীজগণিতীয় প্ৰক্ৰিয়া প্ৰয়োগ কৰি দুটা বাস্তৱ সংখ্যা লগ লগাব পাৰি, ঠিক তেনেদৰে দুটা সংহতিৰ ক্ষেত্ৰত মিলন ($\cap$) ছেদন ($\cup$) আৰু অন্তৰ (–) তিনিটা প্ৰক্ৰিয়াৰ দ্বাৰা যিকোনো দুটা সংহতিৰ মৌলসমূহ লগ লগাই এটা নতুন সংহতি গঠন কৰিব পাৰি।

3.1.6.1 দুটা সংহতিৰ মিলন (Union of two sets) ঃ

ধৰা হ'ল, A আৰু B দুটা সংহতি। তেনেহ'লে সংহতি A নাইবা সংহতি B কমপক্ষেও এটা সংহতিত থকা মৌলৰে গঠিত সংহতিকেই A আৰু B ৰ মিলন বোলা হয় আৰু ইয়াক A$\cup$B প্ৰতীকেৰে সূচোৱা হয়।

$\therefore$ A $\cup$ B = {x | $x \in$ A নাইবা $x \in$B}

টোকা ঃ

(i) $x \in$A নাইবা $x \in$Aৰ অৰ্থ হ'ল x মৌলটো A ত আছে বা B ত আছে বা দুয়োটাতে আছে।

(ii) $x \in$ A$\cup$B $\Rightarrow$ $x \in$A বা $x \in$B

(iii) $x \notin$A$\cup$B $\Rightarrow$ $x \notin$A আৰু $x \notin$B

(iv) A$\cup$B = B$\cup$A

(v) A$\cup$A = A

উদাহৰণ স্বৰূপে ঃ যদি A = {a, b, c, d, e}

আৰু B = {b, e, g, f}

তেনেহ'লে A$\cup$B = {a, b, c, d, e, f, g}

3.1.6.2 সংহতিৰ ছেদন (Intersection of two sets) ঃ

ধৰা হ'ল, A আৰু B দুটা সংহতি। তেনেহ'লে সংহতি A আৰু B দুয়োটা সংহতিতে থকা উমৈহতীয়া মৌলৰে গঠিত সংহতিক A আৰু B ৰ, ছেদন বোলা হয় আৰু ইয়াক সূচাবলৈ $A \cap B$ প্ৰতীক ব্যৱহাৰ কৰা হয়।

$\therefore$ $A \cap B = \{x \mid x \in A$ আৰু $x \in B\}$

টোকা ঃ

(i) $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ আৰু $x \in B$

(ii) $x \notin A \cap B \Rightarrow x \notin A$ বা $x \notin B$.

(iii) $A \cap B = B \cap A$

(iv) $A \cap A = A$

উদাহৰণস্বৰূপে ঃ

যদি $A = \{a, b, c, d, e\}$

আৰু $B = \{b, e, f, g\}$ হয়

তেনেহ'লে, $A \cap B = \{b, e\}$

3.1.6.3 সংহতিৰ অন্তৰ (Difference of two sets) ঃ

ধৰা হ'ল, A আৰু B দুটা সংহতি। যিবোৰ মৌল কেৱল A ত থাকে কিন্তু B ত নাথাকে সেই মৌলবোৰেৰে গঠিত সংহতিক A আৰু B ৰ অন্তৰ বোলা হয় আৰু ইয়াক A – B প্ৰতীকেৰে সূচোৱা হয়।

ঠিক সেইদৰে যিবোৰ মৌল কেৱল B ত থাকে কিন্তু A ত নাথাকে তাক B আৰু A অন্তৰ বোলা হয় আৰু B – A প্ৰতীকেৰে সূচোৱা হয়।

$\therefore$ $A - B = \{x : x \in A$ কিন্তু $x \notin B\}$

আকৌ $B - A = \{x : x \in B$ কিন্তু $x \notin A\}$

উদাহৰণস্বৰূপে ঃ

যদি $A = \{a, \underline{\underline{b}}, c, d, \underline{\underline{e}}\}$

আৰু $B = \{\underline{\underline{b}}, \underline{\underline{e}}, f, g\}$

তেনেহ'লে, $A - B = \{a, c, d\}$

আৰু $B - A = \{f, g\}$

টোকা ঃ

দুটা সংহতি A আৰু B ৰ অন্তৰ নিৰ্ণয় কৰিবলৈ প্ৰথমে A আৰু B দুয়োটাতে থকা মৌলসমূহ চিন দি লোৱা হয়। তাৰ পিছত A – B নিৰ্ণয় কৰিবলৈ A সংহতিৰ বাকী মৌলবোৰ আৰু B – A ৰ বাবে B সংহতিৰ বাকী মৌলবোৰ লিখিব লাগে।

মন্তব্য ঃ $A - B \neq B - A$

3.1.6.4 সংহতিৰ প্ৰতিসম অন্তৰ (Symmetric Difference of two sets) ঃ

দুটা সংহতিৰ প্ৰতিসম অন্তৰ $A \Delta B$ প্ৰতীকেৰে বুজোৱা হয় আৰু

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

উদাহৰণস্বৰূপে ঃ

যদি $A = \{a, \underline{\underline{b}}, c, d, \underline{\underline{e}}\}$

$B = \{\underline{\underline{b}}, \underline{\underline{e}}, f, g\}$

তেনেহ'লে $A \Delta B = (A - B) \cap (B - A)$

$= \{a, c, d\} \cup \{f, g\}$

$= \{a, c, d, f, g\}$

3.1.7 ৰিক্ত সংহতিৰ ধাৰণা (Concept of null set) ঃ

ওপৰৰ আলোচনাৰ পৰা দেখা যায় যে দুটা সংহতিৰ ছেদনে এটা নতুন সংহতি গঠন কৰে।

ধৰা হ'ল, $A = \{2, 6, 9\}$

$B = \{4, 5\}$

$\therefore$ সংহতিৰ ছেদনৰ সূত্ৰ মতে $A \cap B$ এটা সংহতিয়েই হ'ব। কিন্তু এই ক্ষেত্ৰত A আৰু B সংহতিৰ কোনো উমৈহতীয়া মৌল নাই। গতিকে দেখা গ'ল যে আমি এনে এটা সংহতি পাব পাৰোঁ য'ত এটাও মৌল নাথাকে। কিন্তু এই কথা সংহতিৰ প্ৰাথমিক সূত্ৰৰ বিপৰীতধৰ্মী। কাৰণ সংহতি গঠন হ'বলৈ তাত কিছুমান উপাদান থাকিব লাগিব।

গতিকে গণিতজ্ঞসকলে এই ধৰণৰ সংহতিক এটি বিশেষ ধৰণৰ সংহতি হিচাপে চিহ্নিত কৰি ৰিক্ত সংহতি বুলি নামকৰণ কৰিছে অৰ্থাৎ এটা সংহতিত যদি এটাও উপাদান নাথাকে তাক ৰিক্ত সংহতি বোলা হয় আৰু ইয়াক গ্ৰীক বৰ্ণমালাৰ ϕ (ফাই) আখৰৰ দ্বাৰা সূচিত কৰা হয়।

তালিকাকৰণ পদ্ধতিৰে ৰিক্ত সংহতিক { } দ্বাৰা সূচোৱা হয়।

উদাহৰণস্বৰূপে ঃ

(i) 9 আৰু 11 ৰ মাজত থকা অযুগ্ম সংখ্যাৰ সংহতি।

(ii) 5 আৰু 6 ৰ মাজত থকা অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি।

(iii) 2 তকৈ ডাঙৰ মৌলিক সংখ্যাৰ সংহতি।

অসংলগ্ন সংহতি (Disjoint Set) ঃ যিকোনো দুটা সংহতি A আৰু B ক অসংলগ্ন সংহতি বোলা হয় যদিহে $A \cap B = \phi$ হয়। অৰ্থাৎ সিহঁতৰ কোনো উমৈহতীয়া মৌল নাথাকে।

উদাহৰণ স্বৰূপে ঃ

ধনাত্মক আৰু ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি দুটা অসংলগ্ন যিহেতু এনে কোনো অখণ্ড সংখ্যা নাই যিটো দুয়োটা সংহতিতে থাকে।

3.1.8 উপসংহতি আৰু অধিসংহতি (Subsets and Supersets) ঃ

যদি A আৰু B এনে দুটা সংহতিয়ে A ৰ প্ৰতিটো মৌল B সংহতিত থাকে তেনেহ'লে A ক B ৰ উপসংহতি বোলা হয় আৰু ইয়াক $A \subseteq B$ ৰ দ্বাৰা সূচোৱা হয়।

আকৌ A সংহতি B ৰ উপসংহতি হ'লে A ক B ৰ অধিসংহতি বোলা হয় আৰু ইয়াক $B \supseteq A$ ৰ দ্বাৰা সূচোৱা হয়।

উদাহৰণস্বৰূপে ঃ

যদি $A = \{1, 3, 4, 7\}$

$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ হয়

$A \subseteq B$ আৰু $B \supseteq A$

টোকা ঃ

(i) যদি A সংহতিত এনে এটা মৌল থাকে যিটো B সংহতিও নাই তেনেহ'লে A, B ৰ উপসংহতি নহয় আৰু ইয়াক $A \not\subseteq B$ ৰ দ্বাৰা সূচোৱা হয়।

উদাহৰণস্বৰূপে ঃ

$A = \{1, 2, 5, 6\}$

আৰু $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ হ'লে

$A \not\subseteq B$ কিয়নো $6 \in A$ কিন্তু $6 \notin B$

(ii) দুটা সংহতি A আৰু B ক সমান বোলা হয় যদিহে $A \subseteq B$ আৰু $B \subseteq A$

আনহাতে $A = B$ হ'লে

$A \subseteq B$ আৰু $B \subseteq A$ হয়

3.1.9 প্ৰকৃত উপসংহতি (Proper Subset) ঃ

ধৰা হ'ল, A আৰু B দুটা সংহতি। যদি A সংহতিৰ প্ৰতিটো মৌল B সংহতিও থাকে আৰু B সংহতিত কমপক্ষেও এনে এটা মৌল আছে যিটো A সংহতিত নাই তেনেহ'লে B ক A ৰ প্ৰকৃত উপসংহতি বোলা হয় আৰু ইয়াক $A \subset B$ ৰ দ্বাৰা সূচোৱা হয়।

উদাহৰণ স্বৰূপে ঃ $N \subset I$

যʼত N = স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ সংহতি

I = অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি

টোকা ঃ

(i) এটা সংহতি প্ৰকৃতি উপসংহতি নহʼলে ইয়াক অপ্ৰকৃত উপসংহতি (Improper subset) বোলা হয়।

(ii) প্ৰতিটো সংহতি নিজেই নিজৰ উপসংহতি কিন্তু অপ্ৰকৃত উপসংহতি।

(iii) ৰিক্ত সংহতি ϕ প্ৰত্যেক সংহতিৰ এটা প্ৰকৃত উপসংহতি।

(iv) প্ৰতিটো সংহতি A ৰ কমপক্ষেও দুটা উপসংহতি থাকে— এটা হʼল ϕ আৰু আনটো A। ইয়াৰ ভিতৰত ϕ প্ৰকৃত উপসংহতি আৰু A অপ্ৰকৃত উপসংহতি।

(v) ৰিক্ত সংহতি ϕ ৰ কোনো প্ৰকৃত উপসংহতি নাই।

3.1.10 উপসংহতিৰ সংখ্যা ঃ

যদি এটা সংহতিৰ মৌল সংখ্যা n হয় তেনেহʼলে সেই সংহতিৰ উপসংহতিৰ সংখ্যা 2^n হয়।

3.1.11 সংহতিৰ সংহতি (Family of Set or Class of Set) ঃ

যদি এটা সংহতিৰ প্ৰতিটো মৌল নিজেই একোটা সংহতি হয় তেনেহʼলে সেই সংহতিক সংহতিৰ সংহতি বোলা হয়।

উদাহৰণস্বৰূপে ঃ

এখন সমতলৰ ওপৰত থকা ৰেখাসমূহে এটা সংহতিৰ শ্ৰেণী গঠন কৰে কিয়নো প্ৰতিডাল ৰেখাই হʼল কিছুমান বিন্দুৰ সংহতি।

3.1.12 ঘাত সংহতি (Power Set) ঃ

এটা সংহতি A ৰ উপসংহতিৰ সংহতিটোক ঘাত সংহতি বোলা হয় আৰু ইয়াক সূচাবলৈ P(A) ব্যৱহাৰ কৰা হয়।

উদাহৰণস্বৰূপে ঃ

যদি $A = \{1, 2, 3\}$

তেনেহʼলে $P(A) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\},$

$\{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

টোকা ঃ

যদি $n(A) = K$

তেনেহʼলে $n[P(A)] = 2^K$

3.1.13 সাৰ্বজনীন সংহতি (Universal Set) ঃ

সংহতিৰ বিষয়ে আলোচনা কৰোঁতে যদি আলোচ্য সংহতিবোৰ এটা নিৰ্দিষ্ট সংহতিৰ উপসংহতি হয়, তেনেহ'লে সেই নিৰ্দিষ্ট সংহতিটোক সাৰ্বজনীন সংহতি বোলা হয় আৰু ইয়াক ইংৰাজী বৰ্ণমালাৰ $\cup$ আখৰৰ দ্বাৰা সূচোৱা হয়।

উদাহৰণস্বৰূপে ঃ

যদি $A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{2, 4, 5, 6\}$

আৰু $C = \{1, 3, 6, 8, 9\}$ হয়

তেনেহ'লে $\cup = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

A, B, C সংহতিৰ সাৰ্বজনীন সংহতি

ঠিক সেইদৰে

$\cup_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$\cup_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$

... ইত্যাদি সংহতিও আলোচ্য সংহতিৰ বাবে সাৰ্বজনীন সংহতি হ'ব।

টোকা ঃ গতিকে দেখা গ'ল যে সাৰ্বজনীন সংহতি একক (unique) নহয়। আলোচ্য সংহতিৰ বাবে অসংখ্য সাৰ্বজনীন সংহতি থাকিব পাৰে।

3.1.14 পূৰক সংহতি (Complement of a Set) ঃ

ধৰা হ'ল, A সংহতিৰ বাবে সাৰ্বজনীন সংহতি $\cup$। যিবোৰ মৌল $\cup$ সংহতিত আছে কিন্তু A সংহতিত নাই সেইবোৰ মৌলৰে গঠন হোৱা সংহতিক A ৰ পূৰক সংহতি বোলা হয় আৰু A' ইয়াক বা A^c ৰ দ্বাৰা সূচোৱা হয়।

$\therefore\ A' = \{x \mid x \in \cup$ কিন্তু $x \notin A\}$

$= \cup - A$

উদাহৰণ স্বৰূপে ঃ

যদি $\cup = \{1, 2, 3, ..., 10\}$

আৰু $A = \{2, 4, 5, 7, 8\}$

তেনেহ'লে $A' = \{1, 3, 6, 9, 10\}$

টোকা ঃ

(i) $A \cup A' = \cup$

(ii) $A \cap A' = \phi$

(iii) $(A')' = A$

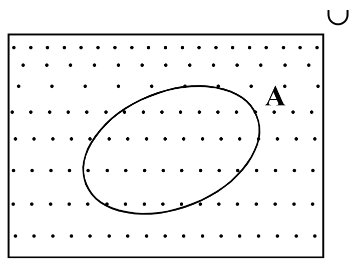
(iv) $\cup' = \phi$

(v) $\phi' = \cup$

3.1.15 ভেনৰ চিত্ৰ (Venn Diagram) ঃ

কেতিয়াবা গণিতৰ কিছুমান বিমূৰ্ত (Abstract) ধাৰণা চিত্ৰৰ দ্বাৰা অতি সহজে উপস্থাপন কৰিব পাৰি। পোনপ্ৰথমে ছুইজাৰলেণ্ডৰ গণিতজ্ঞ ইউলাৰে (Euler) সংহতি একোটাক এটা বন্ধ বক্ৰৰে আগুৰা ক্ষেত্ৰৰে আৰু ইয়াৰ মৌলবোৰক তাত থকা বিন্দুৰে নিৰ্দেশ কৰিব পাৰি বুলি ধাৰণা এটা দিছিল। পিছত ব্ৰিটিছ ন্যায়শাস্ত্ৰবিদ জন ভেনে এই ধাৰণাৰ ব্যৱহাৰ কৰিবলৈ ল'লে। সেইবাবে তেওঁৰ নাম অনুসৰি এই ধৰণৰ চিত্ৰক ভেনচিত্ৰ বোলে।

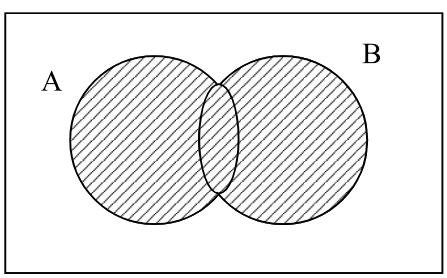
ভেনৰ চিত্ৰ অনুসৰি সাৰ্বজনীন সংহতিক এটা আয়তক্ষেত্ৰ আৰু তাৰ মৌলবোৰক তাত থকা বিন্দুৰে নিৰ্দেশ কৰা হয়।



সংহতিৰ মিলন আৰু ছেদন ঃ

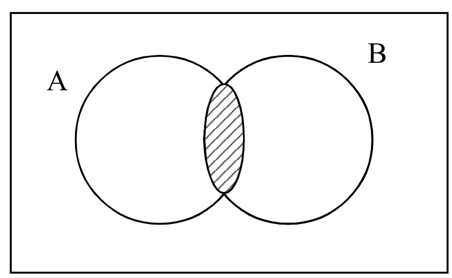
ভেনৰ চিত্ৰৰ দ্বাৰা সংহতিৰ মিলন আৰু ছেদন চিত্ৰ 3.1.15(a) আৰু 3.1.15(b) ৰ চিহ্নিত অংশৰ দ্বাৰা বুজোৱা হয়।

A∪B



3.1.15(a)

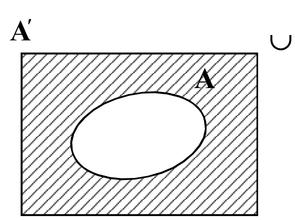
A∩B



3.1.15(b)

পূৰক সংহতি ঃ

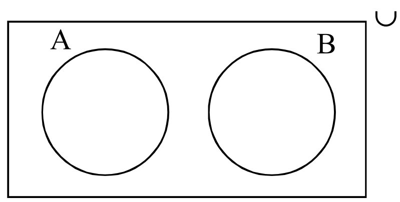
ভেনৰ চিত্ৰৰ দ্বাৰা A ৰ পূৰক সংহতি A′ বুজাবলৈ A ৰ বাহিৰে সাৰ্বজনীন সংহতি ∪ ৰ বাকী অংশ [চিত্ৰ 3.1.15.(c) ৰ চিহ্নিত অংশ] সূচোৱা হয়।



3.1.15(C)

অবিভক্ত সংহতি **Disjoint set** ঃ

A আৰু B দুটা অবিভক্ত সংহতি তলত দিয়া ধৰণে ভেনৰ চিত্ৰৰ দ্বাৰা [চিত্ৰ 3.1.15 (d)] সূচোৱা হয়।

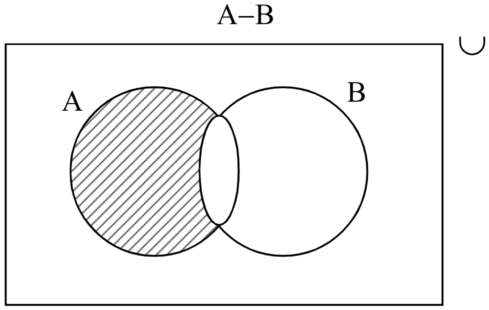


3.1.15(d)

অন্তৰ ঃ

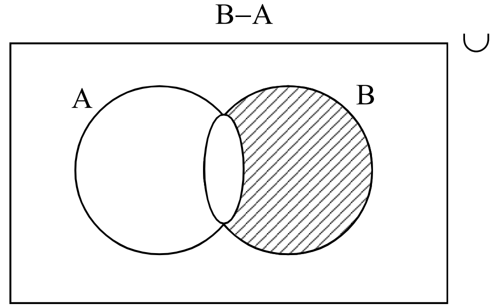
A আৰু B ৰ অন্তৰ অৰ্থাৎ $A - B$ আৰু B আৰু A ৰ অন্তৰ অৰ্থাৎ $B - A$ ক্ৰমে 3.1.15 (e) আৰু 3.1.15(f) ৰ চিহ্নিত অংশৰ দ্বাৰা সূচোৱা হয়।

A–B



3.1.15(e)

B–A



3.1.15(f)

ভেনচিত্ৰৰ সহায়ত প্ৰমাণ কৰা সম্বন্ধ ঃ

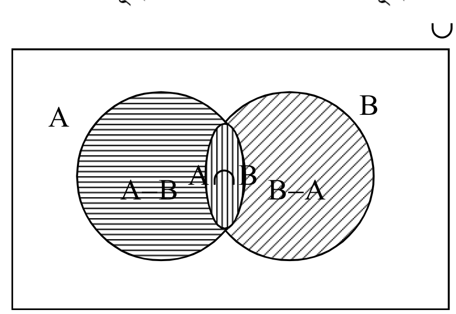
ধৰা হ'ল, A আৰু B এনে দুটা সংহতি যাৰ কিছুমান উমৈহতীয়া মৌল আছে।

$A \cup B$ সংহতিৰ মৌলসমূহ গণনা কৰোঁতে $A \cap B$ অংশত থকা সমূহ এবাৰ A ৰ মৌলসমূহ আৰু দ্বিতীয়বাৰ B ৰ মৌলসমূহ গণনা কৰোঁতে ধৰা হয়।

$\therefore$ $\boxed{n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)}$

যদি $A \cap B = \phi$ হয়, তেনেহ'লে

$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$



3.1.15(g)

ভেনৰ চিত্ৰৰ পৰা আমি পাওঁ যে—

(i) $n(A) = n(A - B) + n(A \cap B)$

(ii) $n(B) = n(B - A) + n(A \cap B)$

(iii) $n(A \cap B) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A)$

3.1.16 সংহতিৰ বীজগণিতীয় প্ৰক্ৰিয়াৰ ধৰ্মসমূহ (Laws of Algebra of Sets) ঃ

সংহতিৰ বীজগণিতীয় প্ৰক্ৰিয়াসমূহে কিছুমান ধৰ্ম মানি চলে আৰু এই ধৰ্মসমূহ যিকোনো সংহতিৰ বাবেই সত্য।

(a)

(i) $A \cup A = A$ (ii) $A \cap A = A$

(b)

(i) $A \cup \phi = A$ (ii) $A \cap \phi = \phi$

(iii) $A \cup \cup = \cup$ (iv) $A \cap \cup = A$

(b) ক্ৰম বিনিয়ম ধৰ্ম (Commutative law)

(i) $A \cup B = B \cup A$

(ii) $A \cap B = B \cap A$

(d) সংযোগ বিধি (Associative)

(i) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(ii) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(e) বিতৰণ বিধি (Distributive Law) ঃ

(i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(ii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(f) দি মৰ্গেনৰ সূত্ৰ ঃ

(i) $(A \cap B)' = A' \cap B'$

(ii) $(A \cap B)' = A' \cap B'$

ব্যাখ্যামূলক উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ 5 ঃ তলৰ কোনবোৰ সমষ্টি সংহতি নিৰ্ণয় কৰা

(i) 50 তকৈ সৰু যুগ্ম সংখ্যাৰ সমষ্টি।

(ii) ভাৰতৰ বিখ্যাত লিখকৰ সমষ্টি।

(iii) তোমাৰ মহাবিদ্যালয়ৰ চকী-মেজৰ সমষ্টি।

(iv) পৃথিৱীৰ দীঘল নদীৰ সমষ্টি।

সমাধান ঃ

(i) আৰু (ii) সংহতি

কিন্তু (ii) আৰু (iv) সংহতি নহয় কাৰণ সংহতি হ'ব লাগিলে মৌলবোৰ সুসংজ্ঞাবদ্ধ হ'ব লাগিব।

উদাহৰণ 6 ঃ তলৰ সংহতিবোৰ তালিকাভুক্তিকৰণ আৰু সংহতি গঠন পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি লিখা

(i) $x^2 - 7x - 30 = 0$ সমীকৰণৰ মূলৰ সংহতি

(ii) 'Mathematics' শব্দৰ বৰ্ণবোৰৰ সংহতি

(iii) 25 তকৈ সৰু মৌলিক সংখ্যাৰ সংহতি।

(iv) দুটা অংকৰে গঠিত সংখ্যাৰ সংহতি যিবোৰত অংক দুটাৰ যোগফল 7 হয়।

(v) যিবোৰ অখণ্ড সংখ্যাৰ বৰ্গ 30 তকৈ সৰু সেইবোৰৰ সংহতি।

সমাধান ঃ

(i) $x^2 - 7 - 30 = 0$ ক সমাধান কৰি পাওঁ —

$(x - 10)(x + 3) = 0$

$\Rightarrow$ x = 10 বা – 3

$\therefore$ $A = \{10, -3\} = \{x \mid x^2 - 7x - 30 = 0\}$

(ii) A = {m, a, t, h, e, i, c, s}

= {x | x হ'ল 'mathematics' শব্দৰ এটা বৰ্ণ}

(iii) A = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23}

= {x | x, 25 তকৈ সৰু এটা মৌলিক সংখ্যা}

(iv) A = {16, 61, 25, 52, 43, 34, 70}

= {x | x এটা দুটা অংকবিশিষ্ট সংখ্যা আৰু অংক দুটাৰ যোগফল 7}

(v) A = {– 5, – 4, – 3, – 2, – 1, 0, 1, 2, 3, 4, 5}

উদাহৰণ 7 ঃ তলৰ কোনবোৰ ৰিক্ত সংহতি কাৰণ সহ দৰ্শোৱা।

(i) 23 আৰু 29 মাজৰ মৌলিক সংখ্যাৰ সংহতি।

(ii) $x^2 - 8x - 20 = 0$ সমীকৰণৰ ধনাত্মক মূলৰ সংহতি।

(iii) 2 তকৈ ডাঙৰ যুগ্ম মৌলিক সংখ্যাৰ সংহতি।

(iv) $x^2 - 5 = 0$ সমীকৰণৰ পৰিমেয় মূলৰ সংহতি।

(v) $\{x \mid 5 < x < 6, x \in N\}$

সমাধান ঃ

(i) 23 আৰু 29 ৰ মাজৰ মৌলিক সংখ্যাৰ সংহতি = ϕ। কাৰণ 23 আৰু 29 ৰ মাজত থকা 24, 25, 26, 27, 28 মৌলিক সংখ্যা নহয়।

(ii) $x^2 - 8x - 20 = 0$

$\Rightarrow$ $(x - 10)(x + 2) = 0$

$\Rightarrow$ $x = 10$ or $- 2$

$\therefore$ $x^2 - 8x - 20 = 0$ সমীকৰণ ধনাত্মক মূলৰ সংহতি। = $\{10\}$ ই ৰিক্ত সংহতি নহয়।

(iii) 2 তকৈ ডাঙৰ যুগ্ম মৌলিক সংখ্যাৰ সংহতি = ϕ কাৰণ 2 তকৈ ডাঙৰ সকলো যুগ্ম সংখ্যাৰে 2 এটা উৎপাদক।

(iv) $x^2 - 5 = 0$

$\Rightarrow$ $x^2 - 5 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5}$ ই পৰিমেয় সংখ্যা নহয়।

$\therefore$ $x^2 - 5 = 0$ সমীকৰণৰ পৰিমেয় মূলৰ সংহতি = ϕ.

(v) $\{x \mid 5 < x < 6, x \in N\} = \phi$ কাৰণ 5 আৰু 6 ৰ মাজত কোনো স্বাভাৱিক সংখ্যা নাই।

উদাহৰণ 8 ঃ তলৰ কোনবোৰ উক্তি শুদ্ধ আৰু কোনবোৰ অশুদ্ধ কাৰণ সহ দৰ্শোৱা —

(i) $\{1, 2, 3\} \subset \{1, 3, 5, 7\}$

(ii) $\{3, 4\} \in \{1, 2, \{3, 4\}, 5\}$

(iii) $\phi \subset A$

(iv) $\{3\} \in \{1, 3, 5\}$

(v) {o, u) $\subset$ {x | x ইংৰাজী বৰ্ণমালাৰ এটা স্বৰবৰ্ণ।

সমাধান ঃ

(i) অশুদ্ধ কাৰণ $2 \notin \{1, 3, 5, 7\}$

(ii) শুদ্ধ কাৰণ $\{1, 2, \{3, 4\}, 5\}$ সংহতিৰ এটা মৌল $\{3, 4\}$

(iii) শুদ্ধ কাৰণ ϕ প্ৰতি সংহতিৰ এটা প্ৰকৃত উপসংহতি

(iv) অশুদ্ধ কাৰণ $\{1, 3, 5\}$ সংহতিৰ $\{3\}$ এটা মৌল নহয়।

(v) শুদ্ধ, কাৰণ $\{o, u\} \subset \{a, e, i, o, u\}$

উদাহৰণ 9 ঃ তলৰ কোনবোৰ সংহতি অবিভক্ত নিৰ্ণয় কৰা।

(i) $\{1, 2, 3, 4\}$ আৰু {x | x এটা স্বাভাৱিক সংখ্যা আৰু $4 \leq x \leq 6$}

(ii) {a, e, i} আৰু {b, c, d}

(iii) $A = \{x \mid 5 < x < 9, x \in N\}$

$B = \{x \mid x^2 - 16 = 0\}$

সমাধান ঃ

(i) দিয়া আছে $A = \{1, 2, 3, 4\}$

ইয়াত $B = \{4, 5, 6\}$

$\therefore\ A \cap B = \{4\} \neq \phi$

$\therefore$ A আৰু B অবিভক্ত সংহতি নহয়

(ii) ইয়াত $\{a, e, i\} \cap \{b, c, d\} = \phi$

$\therefore$ এই দুটা অবিভক্ত সংহতি

(iii) $A = \{6, 7, 8\}$

$B = \{-4, 4\}$

$\therefore\ A \cap B = \phi$

$\therefore$ A আৰু B অবিভক্ত সংহতি

উদাহৰণ 10 ঃ যদি $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$

$B = \{7, 9, 11, 13\}$

$C = \{11, 13, 15\}$

$D = \{15, 17\}$

তেনেহ'লে তলৰ সংহতিবোৰ নিৰ্ণয় কৰা

(i) $A \cap C$

(ii) $A \cap (B \cap D)$

(iii) $(A \cap B) \cup (C \cup D)$

(iv) $(A \cup D) \cap (B \cup C)$

(v) $(A - B) \cup (C - D)$

সমাধান ঃ

দিয়া আছে

$A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$

$B = \{7, 9, 11, 13\}$

$C = \{11, 13, 15\}$

$D = \{15, 17\}$

(i) $A \cap C = \{3, 5, 7, 9, 11\} \cap \{11, 13, 15\}$

$= \{11\}$

(ii) $A \cap (B \cup D) = \{3, 5, 7, 9, 11\} \cap \{7, 9, 11, 13, 15, 17\}$

$= \{7, 9, 11\}$

(iii) $(A \cap B) \cup (C \cup D)$

$= \{7, 9, 11\} \cup \{11, 13, 15, 17\}$

$= \{7, 9, 11, 13, 15, 17\}$

(iv) $\{A \cup D\} \cap (B \cup C)$

$= \{3, 5, 7, 9, 11, 15, 17\} \cap \{7, 9, 11, 13, 15\}$

$= \{7, 9, 11\}$

(v) $(A - B) \cup (C - D)$

$= \{3, 5\} \cup \{11, 13\}$

$= \{3, 5, 11, 13\}$

উদাহৰণ 11 ঃ যদি $\cup = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

$A = \{a, c, e, g\}$

$B = \{d, e, f, g\}$

$C = \{a, f, g, h\}$

তেনেহ'লে তলৰ সংহতিবোৰ নিৰ্ণয় কৰা

(i) $(A - B)'$

(ii) $A' \cap (B' - C')$

(iii) $(A - B)' \cup (B - C)'$

দেখুওৱা যে (iv) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

সমাধান ঃ

দিয়া আছে

$\cup = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

$A = \{a, c, e, g\}$

$B = \{d, e, f, g\}$

$C = \{a, f, g, h\}$

(i) $(A - B)' = \{a, c\}' = \{b, d, e, f, g, h\}$

(ii) ইয়াত $(B' - C')$

$= \{a, b, c, h\} - \{b, c, d, e\}$

$= \{a, h\}$

$\therefore A' \cap (B' - C')$

$= \{b, d, f, h\} \cap \{a, h\}$

$= \{h\}$

(iii) $(A - B)' \cup (B - C)'$

$= \{a, c\}' \cup \{d, e\}'$

$= \{b, d, e, f, g, h\} \cup \{a, b, c, f, g, h\}$

$= \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

(iv) L.H.S. $= (A \cap B)'$

$= \{e, g\}'$

$= \{a, b, c, d, f, h\}$

R.H.S $= A' \cap B'$

$= \{b, d, f, h\} \cup \{a, b, c, h\}$

$= (a, c, d, f, h\}$

$\therefore (A \cap B)' = A' \cup B'$

উদাহৰণ 12 ঃ তলৰ সংহতিবোৰ ভেনচিত্ৰৰ সহায়ত দেখুওৱা

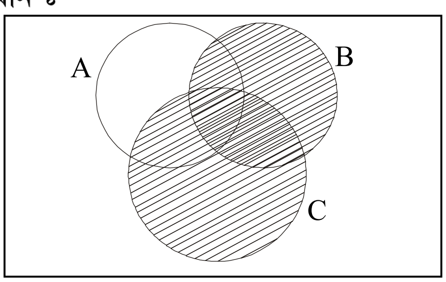
(i) $A - (B \cup C)$

(ii) $(A - B)'$

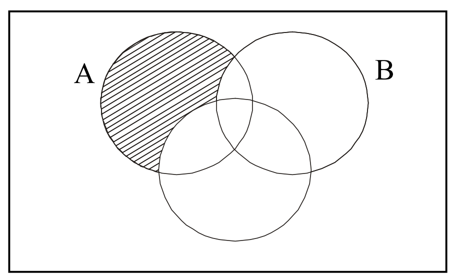
(iii) $A \subset (B \cap C)$, $B \subset C$, $C \neq B$, $C \neq A$

সমাধান ঃ

(i)

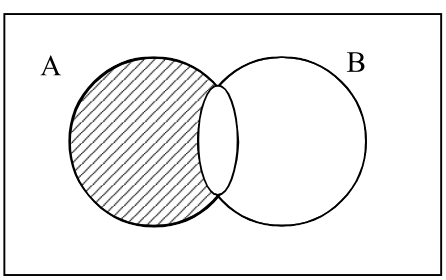


$B \cup C =$



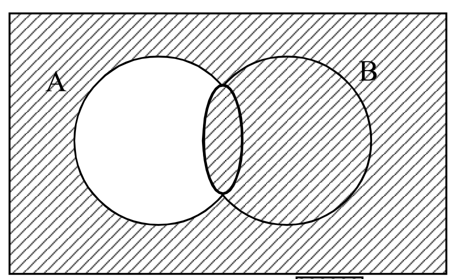
$\therefore A - (B \cup C) =$

(ii)



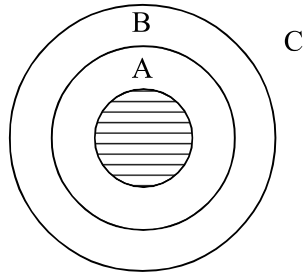
A–B

$\cup$



$(A-B)' =$

(iii)



$A\subset(B\cap C)$, $B\subset C$, $C\neq B$ $B\neq A$ =

উদাহৰণ 13 ঃ এটা শ্ৰেণীত থকা 35 জন ছাত্ৰ-ছাত্ৰীৰ সকলো ছাত্ৰ-ছাত্ৰীয়ে ব'ৰ্ণভিটা বা হৰলিক্স খায়। যদি 25 জনে ব'ৰ্ণভিটা আৰু 16 জনে হৰলিক্স খায়, তেনেহ'লে কিমান জন ছাত্ৰ-ছাত্ৰীয়ে দুয়োবিধ পানীয় খায়?

সমাধান ঃ

ধৰা হ'ল,

B = ব'ৰ্ণভিটা খোৱা ছাত্ৰ-ছাত্ৰীৰ সংহতি

H = হৰলিক্স খোৱা ছাত্ৰ-ছাত্ৰীৰ সংহতি

$\therefore$ $n(B) = 25$, $n(H) = 16$

আৰু $n(B\cup H) = 35$ [$\because$ বা শব্দটো আছে]

আমি $n(B\cap H)$ নিৰ্ণয় কৰিব লাগে

আমি জানো যে

$$n(B\cap H) = n(B) + n(H) - n(B\cap H)$$

$$\Rightarrow \quad 35 = 25 + 16 - n(B\cap H)$$

$$\Rightarrow \quad n(B\cap H) = 41 - 35 = 6$$

$\therefore$ দুয়োবিধ পানীয় খোৱা ছাত্ৰ-ছাত্ৰীৰ সংখ্যা = 6

উদাহৰণ 14 ঃ 600 টা পৰিয়াল বাস কৰা এখন নগৰৰ 150 টা পৰিয়ালে 'আসাম ট্ৰিবিউন', 225 টা পৰিয়ালে 'আমাৰ অসম' আৰু 100 টা পৰিয়ালে দুয়োখন বাতৰি কাকত পঢ়ে। কেইটা পৰিয়ালে—

(i) কেৱল 'আসাম ট্ৰিবিউন' পঢ়ে?

(ii) কেৱল 'আমাৰ অসম' পঢ়ে?

(iii) এখনো বাতৰি কাকত নপঢ়ে, নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ

ধৰা হ'ল,

A = আসাম ট্ৰিবিউন পঢ়া পৰিয়ালৰ সংহতি

B = আমাৰ অসম পঢ়া পৰিয়ালৰ সংহতি

দিয়া আছে $n(\cup) = 600$

$n(A) = 150$

$n(B) = 225$

$n(A\cap B) = 100$

(i) আজি জানো যে

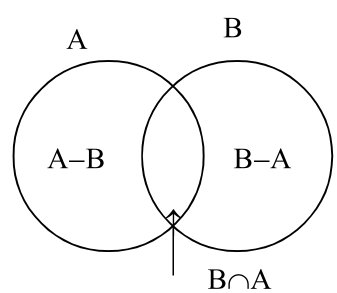
$$n(A\cup B) = n(A) + n(B) - n(A\cap B)$$
$$= 150 + 225 - 100$$
$$= 375 - 100$$
$$= 275$$

∴ এখনো বাতৰি কাকত নপঢ়া পৰিয়ালৰ সংখ্যা

$$= n(A'\cap B')$$
$$= n(A\cup B)'$$
$$= n(\cup) - n(A\cup B)$$
$$= 600 - 275 = 325$$

(ii) কেৱল আসাম ট্ৰিবিউন পঢ়া পৰিয়ালৰ সংখ্যা

$$= n(A - B)$$
$$= n(A) - n(A\cap B)$$
$$= 150 - 100 = 50$$



(iii) কেৱল আমাৰ অসম পঢ়া পৰিয়ালৰ সংখ্যা

$$= n(B) - n(A\cap B)$$
$$= 225 - 100 = 125$$

সাৰাংশ (Summary)

* সংহতি হ'ল সুসংজ্ঞাবদ্ধ বস্তুৰ গোট।
* এটাও মৌল নথকা সংহতিক ৰিক্ত সংহতি বোলে।
* এটা সংহতিৰ মৌলবোৰ গণনা কৰিব পাৰিলে তাক সসীম সংহতি আৰু গণনা কৰিব নোৱাৰিলে তাক অসীম সংহতি বোলে।
* দুটা সংহতিত সমান সংখ্যক মৌল থাকিলে সিহঁতক সমতুল্য সংহতি বোলে।
* দুটা সংহতিৰ মৌলবোৰ একে হ'লে সিহঁতক সমান সংহতি বোলে।
* যদি A সংহতিৰ প্ৰতিটো মৌল B সংহতিত থাকে তেনেহ'লে A ক B ৰ উপসংহতি বোলে।
* S সংহতিৰ উপসংহতিৰে গঠিত সংহতিক ইয়াৰ ঘাত-সংহতি বোলা হয় আৰু ইয়াক P(S) ৰ দ্বাৰা সূচোৱা হয়।
* যদি A আৰু B দুটা সংহতি হয় তেনেহ'লে A বা B ৰ মৌলবোৰ লৈ গঠিত হোৱা সংহতিক A আৰু B সংহতিৰ মিলন বোলা হয়। আৰু ইয়াক $A \cup B$ ৰ দ্বাৰা সূচোৱা হয়।
* যদি A আৰু B দুটা সংহতি হয়, তেনেহ'লে A আৰু B দুয়োটা সংহতিৰ উমৈহতীয়া মৌলৰে গঠিত সংহতি A আৰু B ৰ ছেদন বোলা হয় আৰু ইয়াক $A \cap B$ ৰ দ্বাৰা সূচোৱা হয়।
* A আৰু B দুটা সংহতি হ'লে, যিবোৰ মৌল কেৱল A সংহতিত থাকে কিন্তু B সংহতিত নাথাকে সেইবোৰ মৌলৰে গঠিত সংহতিক A আৰু B ৰ অন্তৰ বোলা হয় আৰু ইয়াক $A - B$ ৰ দ্বাৰা সূচোৱা হয়।
* A যদি সংহতিৰ বাবে $\cup$ সাৰ্বজনীন সংহতি হয়, তেনেহ'লে যিবোৰ মৌল A ত নাথাকে কিন্তু $\cup$ ত থাকে সেইবোৰ মৌলৰে গঠিত সংহতিক A ৰ পূৰক সংহতি বোলা হয় আৰু ইয়াক A' ৰে সূচোৱা হয়।
* যিকোনো দুটা সংহতি A আৰু B ৰ বাবে $(A \cup B)' = A' \cap B'$ আৰু $(A \cap B)' = A \cup B'$
* A আৰু B দুটা সংহতি হ'লে—

  (i) $n(A \cap B) = n(A) + n(B)$; যদি $A \cap B = \phi$

  (ii) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ যদি $A \cap B \neq \phi$

প্ৰশ্নমালা 3.1

1. তলৰ কোনবোৰ সংহতি হয় আৰু কোনবোৰ সংহতি নহয়, কাৰণ সহ উত্তৰ লিখা।
   (i) তোমাৰ মহাবিদ্যালয়ৰ অধ্যাপকসকল
   (ii) 100 তকৈ সৰু মৌলিক সংখ্যাসমূহ
   (iii) অসমৰ প্ৰথিতযশা সাহিত্যিকসকল।
   (iv) ড° ভবেন্দ্ৰনাথ শইকীয়া ৰচিত উপন্যাসসমূহ।
   (v) অসমৰ এঘাৰজন বিখ্যাত ক্ৰিকেট খেলুৱৈ।

2. তলৰ সংহতিসমূহ তালিকাভুক্তিকৰণ আৰু সংহতি গঠন প্ৰক্ৰিয়াৰ দ্বাৰা প্ৰকাশ কৰা।
   (i) 'Engineering' শব্দৰ আখৰবোৰৰ সংহতি।
   (ii) যিবোৰ স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ বৰ্গ 50 তকৈ সৰু সেইবোৰৰ সংহতি
   (iii) $4x^2 - 8x + 3 = 0$ সমীকৰণৰ মূলৰ সংহতি
   (v) 24 ৰ মৌলিক উৎপাদকৰ সংহতি
   (v) $\frac{n}{n+1}, n \in N$, ৰূপৰ ভগ্নাংশৰ সংহতি
   (vi) যিবোৰ দুটা অংকবিশিষ্ট সংখ্যাৰ অংক দুটাৰ যোগফল 6 সেইবোৰৰ সংহতি

3. তলৰ কোনবোৰ সংহতি সসীম আৰু কোনবোৰ অসীম নিৰ্ণয় কৰা।
   (i) $\{x : x \in N, x^2 - 5x - 14 = 0\}$
   (ii) $\{x : 3x - 1 = 0\}$
   (iii) {x : x হ'ল -1 আৰু 0 ৰ মাজৰ এটা বাস্তৱ সংখ্যা}
   (iv) {x : x হ'ল গুৱাহাটী বিশ্ববিদ্যালয়ৰ এজন স্নাতক ডিগ্ৰীধাৰী}
   (v) যুগ্ম মৌলিক সংখ্যাৰ সংহতি
   (vi) 30 তকৈ সৰু অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি

4. তলৰ কোনবোৰ সমতুল্য আৰু কোনবোৰ সমান সংহতি নিৰ্ণয় কৰা
   A = {x : x হ'ল 'loyal' শব্দৰ এটা বৰ্ণ}
   B = {x : x হ'ল 'wolf' শব্দৰ এটা বৰ্ণ}
   C = {x | x হ'ল 'alloy' শব্দৰ এটা বৰ্ণ}
   D = {x : x হ'ল 10 তকৈ সৰু এটা মৌলিক সংখ্যা}

5. তলৰ কোনবোৰ ৰিক্ত সংহতি নিৰ্ণয় কৰা।

(i) 2 ৰে বিভাজ্য অযুগ্ম স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ সংহতি।

(ii) $A = \{x : x \in N, x < 5$ আৰু $x > 9\}$

(iii) $B = \{x : x$ হ'ল $x^2 + 4 = 0$ সমীকৰণৰ এটা বাস্তৱ মূল$\}$

(iv) $\alpha = \{x : x + 8 = 8\}$

6. তলৰ খালী ঠাইবোৰত $\subset$ বা $\not\subset$ চিন বহোৱা।

(i) $\{4, 5, 6\}$.... $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(ii) $\{c, e, g\}$ ... $\{a, b, c, d, e\}$

(iii) $\{x : x$ প্ৰাক্‌বিশ্ববিদ্যালয় দ্বিতীয় বাৰ্ষিকৰ ছাত্ৰ$\}$

$\{x : x$ স্নাতক তৃতীয় বৰ্ষৰ ছাত্ৰ$\}$

(iv) $\{x : x$ এটা মৌলিক সংখ্যা$\}$ ...

$\{x : x$ এটা অখণ্ড সংখ্যা$\}$

(v) $\{x : x$ এটা বৰ্গক্ষেত্ৰ$\}$ .... $\{x : x$ এটা ৰম্বচ$\}$

(vi) $\{x : x$ এটা সমবাহু ত্ৰিভুজ$\}$ .... $\{x : x$ এটা সমকোণী ত্ৰিভুজ$\}$

(vii) $\{x : x$ এটা বৃত্ত$\}$ .... $\{x : x$ 2 একক ব্যাসাৰ্দ্ধ বিশিষ্ট এটা বৃত্ত$\}$

7. তলৰ কোনবোৰ উক্তি সত্য আৰু কোনবোৰ অসত্য নিৰ্ণয় কৰা।

(i) $\{2\} \subset \{1, 2, 4\}$

(ii) $\{a, b\} \subset \{x : x$ ইংৰাজী বৰ্ণমালাৰ স্বৰবৰ্ণ$\}$

(iii) $\{1, 4\} \in \{1, 4, 6, 9\}$

(iv) $\{x : x + 8 = 8\} = \phi$

(v) $\{a\} \in \{a, b, \{a\}, \{e\}\}$

(vi) $\{\phi\} \subset \{p, q, s\}$

8. তলৰ কোনবোৰ উক্তি অসত্য আৰু কিয় অসত্য উল্লেখ কৰা

দিয়া আছে $A = \{a, b, \{c, d\}, e\}$

(i) $\{c, d\} \subset A$

(ii) $\{c, d\} \in A$

(iii) $\{a, b, e\} \in A$

(iv) $\phi \subset A$

(v) $a \subset A$

(vi) $\{\{c, d\}, e\} \subset A$

9. তলৰ কোনবোৰ একক সংহতি?

(i) $\{x : x \in R, 2x^2 - x = 0\}$

(ii) $\{x : x \in N, 7x = 9$

(iii) $\{x : x^2 = 36\}$

(iv) $\{x : 2x^2 - 9x - 5 = 0, x \in N\}$

10. যদি $A = \{x : x$ এটা অখণ্ড সংখ্যা, $| \leq x \leq 12\}$

$B = \{x : x$ হ'ল 20 তকৈ সৰু মৌলিক সংখ্যা$\}$

$C = \{x : x$ হ'ল 15 তকৈ সৰু স্বাভাৱিক সংখ্যা$\}$

তেনেহ'লে তলৰ সংহতিবোৰ নিৰ্ণয় কৰা

(i) $A \cap B \cap C$

(ii) $A - (B \cap C)$

(iii) $B \Delta C$

(iv) $C - B$

(v) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

(vi) $(A - B) \cup (B - C)$

11. তলৰ কোনযোৰ সংহতি অবিভক্ত নিৰ্ণয় কৰা

(i) $A = \{x : x \in N, 5 < x < 9\}$

$B = \{x : x^2 - 4x - 12 = 0\}$

(ii) $L = \{x : x$ এটা মৌলিক সংখ্যা আৰু $x \leq 5\}$

$M = \{x : x^2 - 16x + 63 = 0\}$

(iii) $C = \{x : x$ ইংৰাজী স্বৰবৰ্ণৰ এটা বৰ্ণ$\}$

$D = \{x : x$ ইংৰাজী বৰ্ণমালাৰ শেষৰ 5 টা আখৰ$\}$

12. তলৰ সংহতিবোৰৰ ক্ষেত্ৰত $A \cap B$ নিৰ্ণয় কৰা।

(i) $A = \{c, d, e, f\}$ $B = \{d, f, g, h\}$

(ii) $A = \{x : x$ এটা যুগ্ম সংখ্যা, $x < 8\}$

$B = \{x : x$ এটা যুগ্ম মৌলকি সংখ্যা$\}$

(iii) $A = \{x : 5 < x < 10\}$
$B = \{x : 4 < x < 9\}$

13. যদি $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
$A = \{2, 3, 5, 7\}$
$B = \{1,4, 7, 8\}$
$C = \{2, 3, 6, 8, 9\}$ সংহতিৰ বাবে সাৰ্বজনীন সংহতি হয়,
তেনেহ'লে তলৰ সংহতিবোৰ নিৰ্ণয় কৰা।

(i) $B \cap (A - C)$

(ii) $A' \cap (B - C)'$

(iii) $A' \cap (B \Delta C)$

(iv) $B' \cap (A' - C')$

14. যদি $A = \{a, b, c, d\}$
$B = \{b, d, f, h\}$
আৰু $C = \{c, d, e, f\}$ হয়
তেনেহ'লে প্ৰমাণ কৰা যে—

(i) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(ii) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

(iii) $A - (A - B) = A \cap B$

(iv) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (B \cap C)$

15. যদি S = এটা হোষ্টেলৰ আবাসীৰ সংহতি
F = হোষ্টেলৰ মাছ খোৱা আবাসীৰ সংহতি
M = হোষ্টেলৰ মাংস খোৱা আবাসীৰ সংহতি
আৰু G = হোষ্টেলৰ কণী খোৱা আবাসীৰ সংহতি
তেনেহ'লে তলৰ সংহতিবোৰ বাক্যৰে প্ৰকাশ কৰা

(i) F' (ii) $(M \cap G)'$ (iii) $F \cup M$

(iv) $M \setminus G$ (v) $S - (M \cup G)$

16. তলৰ সম্বন্ধবোৰ ভেনচিত্ৰৰ সহায়ত প্ৰমাণ কৰা।

(i) $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$

(ii) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

(iii) $(A' \cup B') = A \cap B$

17. এটা শ্ৰেণীৰ 100 জন ছাত্ৰৰ প্ৰতিজনেই বাণিজ্যিক গণিত বা অৰ্থনীতি এই দুটা বিষয়ৰ কমপক্ষেও এটা বিষয় ল'ব লাগে। যদি 75 জন ছাত্ৰই বাণিজ্যিক গণিত আৰু 60 জনে অৰ্থনীতি লয়, তেনেহ'লে কিমানজন ছাত্ৰই

(i) দুয়োটা বিষয় লয়।

(ii) কেৱল বাণিজ্যিক গণিত লয়

(iii) কেৱল অৰ্থনীতি লয়— তাৰ সংখ্যা নিৰ্ণয় কৰা।

18. এটা ক্লাবৰ 100 জন সদস্যৰ 40 জনে ফুটবল আৰু 30 জনে ভলীবল নেখেলে। আনহাতে 45 জন সদস্যই দুয়োবিধ খেলে। কিমানজন সদস্যই—

(i) কেৱল ফুটবল খেলে?

(ii) কেৱল ভলীবল খেলে?

আৰু

(iii) দুয়োবিধ খেলেই নেখেলে— নিৰ্ণয় কৰা।

19. এটা অনুষ্ঠানলৈ 150 জন লোকক নিমন্ত্ৰণ কৰা হৈছিল। তাৰ ভিতৰত 90 জনে কেৱল আপেলৰ ৰস, 20 জনে কেৱল আমৰ ৰস আৰু 30 জনে দুয়োবিধ পানীয় গ্ৰহণ কৰে। কিমানজন অতিথিয়ে এবিধো পানীয় গ্ৰহণ নকৰিলে নিৰ্ণয় কৰা।

20. এখন সভাত উপস্থিত থকা প্ৰতিজন লোকেই ইংৰাজী বা অসমীয়াৰ ভিতৰত কমপক্ষেও এটা ভাষা ক'ব পাৰে। যদি 100 জন লোকে অসমীয়া, 50 জনে ইংৰাজী আৰু 25 জনে দুয়োটা ভাষাই ক'ব পাৰে তেনেহ'লে সভাখনত উপস্থিত থকা লোকৰ সংখ্যা নিৰ্ণয় কৰা।

উত্তৰমালা 3.1

1. (i), (ii), (iv) – সংহতি হয়,

   (iii), (v) → সংহতি নহয়

2. (i) {e, n, g, i, r}

   $\{x \mid x$ হ'ল 'engineering' শব্দৰ এটা বৰ্ণ$\}$

   (ii) {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

   $\{x : x \in \mathrm{N}, x^2 < 50\}$

(iii) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}$

$\{x : x$ হ'ল $4x^2 - 8x + 3 = 0$ সমীকৰণৰ এটা মূল$\}$

(iv) $\{1, 3\}$

$\{x : x$ হ'ল 24 ৰ এটা মৌলিক উৎপাদক$\}$

(v) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5} \ldots\ldots\right\}$

$\left\{x : x = \frac{n}{n+1}, n \in N\right\}$

(vi) $\{15, 51, 24, 42, 33, 60\}$

$\{x : x = 10k + l, l + k = 6, l, k \in \mathrm{N}\}$

3. (i), (ii), (iv), (v) – সসীম সংহতি

(iii), (vi) – অসীম সংহতি

4. A = {l, o, y, a}

B = {w, o, l, f}

C = {a, l, o, y}

D = {2, 3, 5, 7}

$\therefore$ A = C, A ~ B, A ~ C, A ~ D

B ~ C, B ~ D, C ~ D

5. (i), (ii), (iii) $\rightarrow$ ৰিক্ত সংহতি

6. (i) $\subset$ (ii) $\not\subset$ (iii) $\not\subset$ (iv) $\subset$

(v) $\subset$ (vi) $\not\subset$ (vii) $\not\subset$

7. (i), (v) – শুদ্ধ

(ii), (iii), (iv), (vi) – অশুদ্ধ

8. (i) অশুদ্ধ কাৰণ $\{c, d\} \in A$

(iii) অশুদ্ধ কাৰণ $\{a, b, c\} \subset A$

(v) অশুদ্ধ কাৰণ $a \in A$

9. (ii), (iv)

10. (i) {3, 5, 7, 11}
    (ii) {4, 6, 8, 10, 12}
    (iii) {1, 2, 9, 17, 19}
    (iv) {1, 9}
    (v) {1, 2, 3, 5, 7, 9, 11}
    (vi) {1, 2, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 17, 19}

11. (i) $L \cap M = \phi$, L আৰু M অসংযোগী সংহতি
    (ii) $C \cap D = \phi$, C আৰু D অসংযোগী সংহতি

12. (i) {d, f}
    (ii) {2}
    (iii) $\{x \mid 5 < x < 8\}$

13. (i) {7}
    (ii) {6, 8, 9}
    (iii) {1, 4, 6, 9}
    (iv) {6, 9}

15. (i) মাছ নোখোৱা আবাসীৰ সংহতি।
    (ii) কণী আৰু মাংস দুয়োবিধেই নোখোৱা আবাসীৰ সংহতি।
    (iii) মাছ আৰু মাংস দুয়োবিধ খোৱা আবাসীৰ সংহতি।
    (iv) কেৱল মাংস খোৱা কিন্তু কণী নোখোৱা আবাসীৰ সংহতি।
    (v) মাংস আৰু কণী দুয়োবিধেই নোখোৱা আবাসীৰ সংহতি।

17. (i) 35 (ii) 40 (iii) 25

18. (i) 15 (ii) 25 (iii) 15

19. 10

20. 125

3.2 নিৰ্ণায়ক (Determination)

3.2.1 পাতনি (Introduction) ঃ

গণিতশাস্ত্ৰত নিৰ্ণায়কৰ আৰম্ভণি একঘাতৰ সহসমীকৰণৰ সমাধানৰ সৈতেই জড়িত যদিও বৰ্তমান অইন বহুতো ক্ষেত্ৰতে নিৰ্ণায়ক ব্যৱহৃত হৈছে। দেখা যায় যে অনেক জটিল ৰাশি যিবোৰৰ সৰলীকৰণৰ বাবে দীঘলীয়া গণনাৰ প্ৰয়োজন সেইবোৰ নিৰ্ণায়কৰ সহায়ত প্ৰকাশ কৰিলে সহজেই সমাধান কৰিব পাৰি।

তলৰ সমীকৰণ দুটা (অজ্ঞাত ৰাশিদ্বয় x আৰু y) বিবেচনা কৰা যাওক—

$$a_1x + b_1y = d_1 \text{ .... } (1)$$

$$a_2x + b_2y = d_2 \text{ .... } (2)$$

যদি $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ হয়, (1) আৰু (2)

সমাধান কৰি পাওঁ—

$$x = \frac{b_2d_1 - b_1d_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

আৰু $$y = \frac{\mathrm{a_1d_2 - a_2d_1}}{\mathrm{a_1b_2 - a_2b_1}}$$

বীজগণিতীয় ৰাশি $(a_1b_2 - a_2b_1)$ ক তলৰ ধৰণেও প্ৰকাশ কৰিব পাৰি ঃ

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ ক এটা দ্বিতীয় মাত্ৰাৰ নিৰ্ণায়ক বোলা হয়। অৰ্থাৎ চাৰিটা সংখ্যাক শাৰী (Raw) আৰু স্তম্ভৰ (Column) আকাৰত দুটা উলম্ব ৰেখাৰ মাজত সজালে তাক দ্বিতীয় মাত্ৰাৰ নিৰ্ণায়ক বোলা হয়। অনুভূমিকভাৱে থকা ৰাশিবোৰে শাৰী (Row) আৰু উলম্বভাৱে থকা ৰাশিবোৰে স্তম্ভ (Column) গঠন কৰে।

প্ৰথম স্তম্ভ	**দ্বিতীয় স্তম্ভ**	
a_1	b_1	→ প্ৰথম শাৰী
a_2	b_2	→ দ্বিতীয় শাৰী

ইয়াত a_1, a_2, b_1, b_2 ক নিৰ্ণায়কটোৰ মৌল (element) বোলা হয়। a_1 b_2, a_2, b_1 ক নিৰ্ণায়কৰ পদ (terms) আৰু $(a_1b_2 - a_2b_1)$ ক ইয়াৰ মান বোলা হয়।

এটা নিৰ্ণায়কৰ প্ৰথম মৌল আৰু অন্তিম মৌল সংযোগ কৰি টনা ৰেখাডালৰ ওপৰত থকা মৌলসমূহক তাৰ বিকৰ্ণ মৌল (diagonal element) বোলা হয়।

যিডাল ৰেখাৰ ওপৰত এই বিকৰ্ণ মৌলসমূহ অৱস্থিত হয়, তাক নিৰ্ণায়কৰ মুখ্য কৰ্ণ (principal diagonal) বোলা হয়।

উদাহৰণস্বৰূপে ঃ $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \longrightarrow$ নিৰ্ণায়কৰ মুখ্য কৰ্ণ

a_1 আৰু a_2 হ'ল বিকৰ্ণ মৌল।

টোকা ঃ

(i) এটা নিৰ্ণায়কত সদায় সমান সংখ্যক শাৰী আৰু স্তম্ভহে থাকে।

(ii) এটা নিৰ্ণায়ক সাধাৰণতে Δ বা D ৰ দ্বাৰা সূচোৱা হয়।

3.2.2 দ্বিতীয় মাত্ৰাৰ নিৰ্ণায়কৰ মান নিৰ্ণয় (Expansion of dertermination of second order) ঃ

দেখা যায় যে দ্বিতীয় মাত্ৰাৰ নিৰ্ণায়ক

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ ৰ মান হয় $a_1b_2 - a_2b_1$

$\therefore$ দ্বিতীয় মাত্ৰাৰ নিৰ্ণায়কৰ মান

= ইয়াৰ মুখ্য কৰ্ণত অৱস্থিত মৌল দুটাৰ পূৰণফল – বাকী থকা মৌল দুটাৰ পূৰণফল

টোকা ঃ

এটা দ্বিতীয় মাত্ৰাৰ নিৰ্ণায়কত 2^2 সংখ্যক মৌল থাকে আৰু ইয়াক বিস্তৃত কৰি আমি দুটা পদ পাওঁ।

উদাহৰণস্বৰূপে ঃ

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = 4 \times 2 - 5 \times (-6) = 8 + 30 = 38$$

3.2.3 তৃতীয় মাত্ৰাৰ নিৰ্ণায়ক (Third order determinant) ঃ

যদি আমি নটা সংখ্যা a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 ক তিনিটা শাৰী আৰু তিনিটা স্তম্ভত সজাওঁ তেনেহ'লে এটা তৃতীয় মাত্ৰাৰ নিৰ্ণায়ক পোৱা যায়। উদাহৰণস্বৰূপে

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

হ'ল এটা তৃতীয় মাত্ৰাৰ নিৰ্ণায়ক।

এটা তৃতীয় মাত্ৰাৰ নিৰ্ণায়ক 3^2 সংখ্যক মৌলৰে গঠিত আৰু ইয়াক বিস্তৃত কৰিলে $|\underline{3}$ সংখ্যক পদ (term) পোৱা যায়।

টোকা ঃ

(i) গতিকে দেখা যায় যে n^2 সংখ্যক মৌলক n টা শাৰী আৰু n টা স্তম্ভত সজালে আমি এটা n মাত্ৰাৰ নিৰ্ণায়ক পাওঁ আৰু ইয়াক বিস্তৃত কৰি $|\underline{n}$ সংখ্যক পদ পোৱা যায়।

(ii) ইয়াত আমাৰ আলোচনা দ্বিতীয় আৰু তৃতীয় মাত্ৰাৰ নিৰ্ণায়কতেই সীমিত ৰাখিম।

3.2.4 অণুৰাশি আৰু সহৰাশি (Minor and Cofactors) ঃ

এটা নিৰ্ণায়কৰ কোনো এটা মৌলৰ অণুৰাশি হ'ল সেই মৌলটো থকা শাৰী আৰু স্তম্ভ বাদ দি পোৱা নিৰ্ণায়কটো।

ধৰা হ'ল, $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

এটা তৃতীয় মাত্ৰাৰ নিৰ্ণায়ক।

ধৰা হ'ল, a_1 ৰ অণুৰাশি উলিয়াব লাগে। এই মৌলটো প্ৰথম শাৰী আৰু প্ৰথম স্তম্ভত আছে।

$\therefore$ a_1 ৰ অণুৰাশি $= \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = b_2c_3 - b_3c_2$

সেইদৰে b_2 ৰ অণুৰাশি $= \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$$= a_1c_3 - a_3c_1$$

গতিকে এটা তৃতীয় মাত্ৰাৰ নিৰ্ণায়কৰ অণুৰাশি এটা দ্বিতীয় মাত্ৰাৰ নিৰ্ণায়ক হ'ব।

নিৰ্ণায়কৰ কোনো মৌলৰ সহৰাশি

$= (-1)^{R+C} \times$ মৌলটোৰ অণুৰাশি ইয়াত R আৰু C য়ে ক্ৰমে মৌলটো থকা শাৰী আৰু স্তম্ভৰ সংখ্যা বুজায়।

সাধাৰণতে কোনো মৌলৰ সহৰাশি বুজাবলৈ সেই মৌলৰ অনুৰূপ বৰফলাৰ আখৰেৰে বুজোৱা হয়। ওপৰৰ নিৰ্ণায়কত a_1 ৰ সহৰাশি A_1, b_2 ৰ সহৰাশি B_2 ৰ দ্বাৰা বুজোৱা হয়।

$$\therefore\ a_1 \text{ ৰ সহৰাশি} = A_1 = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= +\ (b_2c_3 - b_3c_2)$$

$$b_2 \text{ ৰ সহৰাশি} = B_2 = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= +\ (a_1c_3 - a_3c_1)$$

$$c_2 \text{ ৰ সহৰাশি} = C_2 = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= -\ (a_1b_3 - a_3b_1)$$

টোকা ঃ

এটা দ্বিতীয় মাত্ৰাৰ নিৰ্ণায়কৰ প্ৰতিটো মৌলৰ সহৰাশি মাত্ৰ এটা মৌলহে হ'ব।

উদাহৰণস্বৰূপে $\triangle = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ ৰ

ক্ষেত্ৰত

$$a_1 \text{ ৰ সহৰাশি} = A_1 = (-1)^{1+1}\ b_2 = b_2$$

$$b_1 \text{ ৰ সহৰাশি} = B_1 = (-1)^{1+2}\ a_2 = -\ a_2$$

3.2.5 তৃতীয় মাত্ৰাৰ নিৰ্ণায়কৰ মান (Value of a determinant of order 3) ঃ

এটা তৃতীয় মাত্ৰাৰ নিৰ্ণায়কৰ মান নিৰ্ণয়ৰ পদ্ধতি এনেধৰণৰ—

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + b_1(a_2b_3 - a_3b_2)$$

$$= a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1$$

ইয়াত A_1, B_1, C_1 ক্ৰমে a_1, b_1 আৰু c_1 মৌলৰ সহৰাশি।

ইয়াত আমি প্ৰথম শাৰীৰ মৌলৰ সহায়ত নিৰ্ণায়কটোৰ মান নিৰ্ণয় কৰিছোঁ।

আকৌ প্ৰথম স্তম্ভৰ মৌলৰ সহায়ত নিৰ্ণায়কটো বিস্তৃত কৰি পাওঁ।

$$a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_1 - b_3c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_1 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$$

$$= a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1$$

$$= \Delta$$

$\therefore$ তৃতীয় মাত্ৰাৰ নিৰ্ণায়কৰ মান নিৰ্ণয় কৰিবলৈ কোনো এটা শাৰী বা স্তম্ভৰ প্ৰতিটো মৌলক অনুৰূপ সহৰাশিৰে পূৰণ কৰি সেই পূৰণফলসমূহ যোগ কৰিব লাগে।

উদাহৰণস্বৰূপে ঃ $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -6 \\ 1 & -2 & 5 \\ 0 & -7 & 2 \end{vmatrix}$

$$= 4\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -7 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (-6)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= 4(-4 + 35) - 3(2 - 0) - 6(-7 - 0)$$

$$= 124 - 6 + 42 = 160$$

3.2.6 নিৰ্ণায়কৰ ধৰ্ম (Properties of determinant) ঃ

এতিয়া আমি নিৰ্ণায়কৰ কিছুমান ধৰ্মৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিবলৈ ওলাইছোঁ। এই ধৰ্মসমূহ ব্যৱহাৰ কৰি আমি যিকোনো শাৰী বা স্তম্ভৰ গৰিষ্ঠসংখ্যক মৌলক শূন্যলৈ পৰিৱৰ্তন কৰি ল'ব পাৰোঁ আৰু তাৰ ফলত নিৰ্ণায়কৰ মান নিৰ্ণয় সুচল হৈ পৰে।

এই ধৰ্মসমূহ যিকোনো মাত্ৰাৰ নিৰ্ণায়কৰ ক্ষেত্ৰত প্ৰযোজ্য যদিও ইয়াত আমাৰ আলোচনা তৃতীয় মাত্ৰাৰ নিৰ্ণায়কৰ পৰ্যন্ত সীমাবদ্ধ থাকিব।

ধৰ্ম 1 ঃ কোনো নিৰ্ণায়কৰ শাৰীবোৰ স্তম্ভলৈ আৰু স্তম্ভবোৰ শাৰীলৈ পৰিৱৰ্তিত কৰিলে ইয়াৰ মানৰ কোনো পৰিৱৰ্তন নহয়।

সত্যাপণ (Verification) ঃ

ধৰা হ'ল, $$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

প্ৰথম শাৰীৰ মৌলৰ সহায়ত বিস্তৃত কৰি পাওঁ—

$$\Delta = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$$

শাৰীবোৰ স্তম্ভ আৰু স্তম্ভবোৰ শাৰীলৈ পৰিৱৰ্তিত কৰি পাওঁ

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

প্ৰথম স্তম্ভৰ মৌলৰ সহায়ত বিস্তৃত কৰি পাওঁ—

$$\Delta_1 = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$$

$$\therefore \Delta = \Delta_1$$

টোকা ঃ

এই ধৰ্ম সাংকেতিকভাৱে $R \longleftrightarrow C$ ৰ সহায়ত প্ৰকাশ কৰা হয়।

ধৰ্ম 2 ঃ কোনো নিৰ্ণায়কৰ দুটা ওচৰা-উচৰি শাৰী (বা স্তম্ভ) সাল-সলনি কৰিলে নিৰ্ণায়কটোৰ সাংখ্যিক মান একেই থাকে, মাথোঁ চিনহে সলনি হয়।

সত্যাপণ (Verification) ঃ

ধৰা হ'ল, $$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

প্ৰথম শাৰীৰ মৌলৰ সহায়ত বিস্তৃত কৰি পাওঁ—

$$\Delta_1 = a_1 (b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$$

প্ৰথম আৰু তৃতীয় শাৰীৰ সলনা-সলনি কৰি পাওঁ

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

তৃতীয় শাৰীৰ মৌলৰ সহায়ত বিস্তৃত কৰি পাওঁ

$$\Delta_1 = a_1(b_2c_3 - c_3b_2) - a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_2c_1 - b_1c_2)$$

$$= -[a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)]$$

$$\therefore \quad \Delta_1 = -\Delta$$

টোকা ঃ

এই ধৰ্ম সাংকেতিকভাৱে এনেধৰণে প্ৰকাশ কৰা হয়।

$R_i \longleftrightarrow R_j$ যদি i তম শাৰী আৰু j তম শাৰী সলনা-সলনি কৰা হয়।

$C_i \longleftrightarrow C_j$ যদি i তম স্তম্ভ আৰু j তম স্তম্ভ সলনা-সলনি কৰা হয়।

ধৰ্ম 3 ঃ কোনো নিৰ্ণায়কৰ দুটা শাৰী (বা স্তম্ভ) সমান হ'লে নিৰ্ণায়কটোৰ মান শূন্য হয়।

সত্যাপণ (Verification) ঃ

ধৰা হ'ল, $$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}$$

ইয়াত R_1 আৰু R_3 সলনা-সলনি কৰি ধৰ্ম 2 ৰ সহায়ত পাওঁ

$$\Delta = -\Delta$$

$$\Rightarrow \quad 2\Delta = 0$$

$$\Rightarrow \quad \Delta = 0$$

ধৰ্ম 4 ঃ কোনো নিৰ্ণায়কৰ কোনো শাৰীৰ (বা স্তম্ভৰ) প্ৰত্যেক মৌলক এটা স্থিৰ ৰাশিৰে পূৰণ কৰিলে, নিৰ্ণায়কটোক সেই ৰাশিৰে পূৰণ কৰা হয়।

সত্যাপণ ঃ ধৰা হ'ল $$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1$$

য'ত A_1, B_1, C_1 যথাক্রমে a_1, b_1 আৰু c_1 ৰ সহৰাশি।

ধৰা হ'ল, k এটা বাস্তৱ সংখ্যা আৰু $k \neq 0$

স্পষ্টতঃ
$$\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ ka_2 & kb_2 & kc_2 \\ ka_3 & kb_3 & kc_3 \end{vmatrix}$$

$$= ka_1A_1 + kb_1B_1 + kc_1C_1$$
$$= k(a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1)$$
$$= k\Delta$$

মন্তব্য ঃ এই ধৰ্মৰ সহায়ত এটা নিৰ্ণায়কৰ কোনো শাৰী (বা স্তম্ভৰ) মৌলসমূহৰ যদি এটা সাধাৰণ গুণিতক k থাকে তেনেহ'লে তাক নিৰ্ণায়কৰ বাহিৰলৈ উলিয়াই আনিব পাৰি।

ধৰ্ম 5 ঃ কোনো নিৰ্ণায়কৰ কোনো শাৰীৰ (বা স্তম্ভৰ) প্ৰতিটো মৌল দুটা ৰাশিৰ যোগফল হ'লে, নিৰ্ণায়কটোক একে ঘাতৰ দুটা নিৰ্ণায়কৰ যোগফল হিচাপে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি।

সত্যাপণ (verification) ঃ

ধৰা হ'ল,
$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \alpha_1A_1 + \beta_1B_1 + \gamma_1C_1$$

এতিয়া
$$\begin{vmatrix} a_1+\alpha_1 & b_1+\beta_1 & c_1+\gamma_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= (a_1 + \alpha_1)\ A_1 + (b_1 + \beta_1)\ B_1 + (c_1 + \gamma_1)C_1$$

$$= (a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1) + (\alpha_1A_1 + \beta_1B_1 + \gamma_1C_1)$$
$$= \Delta_1 + \Delta_2$$

টোকা ঃ

সেইদৰে আমি দেখুৱাব পাৰোঁ যে কোনো নিৰ্ণায়কৰ কোনো শাৰীৰ (স্তম্ভৰ) প্ৰতিটো মৌল n টা ৰাশিৰ যোগফল হ'লে, নিৰ্ণায়কটোক একে ঘাতৰ n টা নিৰ্ণায়কৰ যোগফল হিচাপে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি।

ধৰ্ম 6ঃ কোনো নিৰ্ণায়কৰ কোনো শাৰীৰ (বা স্তম্ভৰ) অনুৰূপ মৌলৰ স্থিৰ গুণিতকেৰে বৰ্ধিত বা হ্ৰাস কৰিলে নিৰ্ণায়কৰ মানৰ কোনো পৰিৱৰ্তন নহয়।

সত্যাপণ (Verification) ঃ

ধৰা হ'ল, $$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

এটা নিৰ্ণায়ক আৰু $k \neq 0$ এটা বাস্তৱ সংখ্যা।

দ্বিতীয় শাৰীৰ মৌলকেইটাক k ৰে পূৰণ কৰি পূৰণফলক প্ৰথম শাৰীৰ অনুৰূপ মৌলৰ লগত যোগ দি, আমি নতুন নিৰ্ণায়কটো পাওঁ—

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 + ka_2 & b_1 + kb_2 & c_1 + kc_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

এতিয়া ধৰ্ম 5 প্ৰয়োগ কৰি পাওঁ

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ka_2 & kb_2 & kc_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = k \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \Delta + k \times 0 \quad [\because R_1 = R_2]$$
$$= \Delta$$

টোকা ঃ

ওপৰৰ ধৰ্মটোত $k = -1$ ল'লে পাম

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 & c_1 - c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

গতিকে কোনো নিৰ্ণায়কৰ এটা শাৰী (বা স্তম্ভ)ৰ মৌলৰ পৰা আন এটা শাৰী (বা স্তম্ভৰ) অনুৰূপ স্থানৰ মৌলবোৰ বিয়োগ কৰিলেও নিৰ্ণায়কটোৰ মান সলনি নহয়।

টোকা ঃ

এই ধৰ্ম সাংকেতিকভাৱে এনেধৰণে প্ৰকাশ কৰা হয়—

$R_i \to R_i \pm kR_j$

বা

$C_i \to C_i \pm kC_j$

অৰ্থাৎ R_i(বা C_j)ৰ মৌলসমূহক k ৰে পূৰণ কৰি সেই পূৰণফলকেইটা R_i (C_i বা) ৰ মৌলকেইটাৰ লগত + বা – কৰি R_i (বা C_i) ত বহুৱাব লাগে।

ব্যাখ্যামূলক উদাহৰণ (Worked Out Example) ঃ

উদাহৰণ 1 ঃ $\begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 6 & 7 & 0 \\ 2 & 8 & -3 \end{vmatrix}$ নিৰ্ণায়কৰ

মান নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ $\begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 6 & 7 & 0 \\ 2 & 8 & -3 \end{vmatrix}$

$$= 3\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 8 & -3 \end{vmatrix} - (-4)\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}$$

$= 3(-21 - 0) + 4(-18 - 0) + 5(48 - 14)$

$= -63 - 72 + 170 = 35$

উদাহৰণ 2 ঃ x ৰ কি মানৰ বাবেৰড

$$\begin{vmatrix} 3 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

সমাধান ঃ দিয়া আছে $\begin{vmatrix} 3 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$

$$\Rightarrow 3 - x^2 = 3 - 8$$

$$\Rightarrow x^2 = 8$$

$$\Rightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$$

উদাহৰণ 3 ঃ বিস্তৃত নকৰাকৈ প্ৰমাণ কৰা যে

(i) $$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -10 \\ -3 & 9 & 15 \\ 7 & -2 & -35 \end{vmatrix} = 0$$

সমাধান ঃ বাওঁপক্ষ = $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -10 \\ -3 & 9 & 15 \\ 7 & -2 & -35 \end{vmatrix}$

$$= -5\begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -3 & 9 & -3 \\ 7 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$ [c_3 ৰ পৰা উলিয়াই নিলে]

$$= -5 \times 0 \; [\because C_1 = c_3]$$

= 0 = সোঁপক্ষ

(ii) $$\begin{vmatrix} 3 & -6 & 7 \\ 7 & -2 & 11 \\ 1 & -8 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

সমাধান ঃ বাওঁপক্ষ $= \begin{vmatrix} 3 & -6 & 7 \\ 7 & -2 & 11 \\ 1 & -8 & 5 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 3 & -6 & 7 \\ 4 & 4 & 4 \\ -2 & -2 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1 \end{matrix}$$

$$= 4 \times (-2) \begin{vmatrix} 3 & -6 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

[R_2 ৰ পৰা 4 আৰু R_3 ৰ পৰা – 2 উলিয়াই নিয়া হ'ল]

$= -8 \times 0 \quad [\because R_2 = R_3]$

= 0 = সোঁপক্ষ

(iii) $$\begin{vmatrix} 1 & p & q+r \\ 1 & q & r+p \\ 1 & r & p+q \end{vmatrix} = 0$$

বাওঁপক্ষ = $$\begin{vmatrix} 1 & p & q+r \\ 1 & q & r+p \\ 1 & r & p+q \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & p & p+q+r \\ 1 & q & p+q+r \\ 1 & r & p+q+r \end{vmatrix} = c_3 \to c_3 + c_2$$

$$= (p+q+r) \begin{vmatrix} 1 & p & 1 \\ 1 & q & 1 \\ 1 & r & 1 \end{vmatrix}$$ [c_3 ৰ পৰা $(p+q+r)$ উলিয়াই নিয়া হ'ল]

$= (p+q+r) \times 0 \quad [\because C_1 = c_2]$

= 0 = সোঁপক্ষ

4. দেখুওৱা যে $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix} = xy$

সমাধান ঃ বাওঁপক্ষ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -y \\ 0 & x & -y \\ 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} R_1 \to R_1 - R_3 \\ R_2 \to R_2 - R_3 \end{matrix}$$

$$= -y \begin{vmatrix} 0 & x \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -y(0 - x)$$

$= xy =$ সোঁপক্ষ

5. **প্ৰমাণ কৰা যে**

$$\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$$

বাওঁপক্ষ = $\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \end{vmatrix}$

$$= abc \begin{vmatrix} -a & b & c \\ a & -b & c \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

[R_1, R_2, R_3 ৰ পৰা a, b, c উলিয়াই নিয়া হ'ল]

$$= (abc)\ (abc)\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

[C_1, C_2, C_3 ৰ পৰা a, b, c ৰ পৰা উলিয়াই নিয়া হ'ল]

$$= a^2b^2c^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} C_1 \to C_1 + C_3 \\ C_2 \to C_2 - C_3 \end{matrix}$$

$= a^2b^2c^2(4 - 0)$
$= 4a^2b^2c^2$ সোঁপক্ষ

6. দেখুওৱা যে

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$= (a + b + c)^3$

সমাধান ঃ

বাওঁপক্ষ $= \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1 \to \\ R_1 + R_2 + R_3 \end{matrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -b-c-a & 0 \\ 2c & 0 & -c-a-b \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} C_2 \to C_2 - C_1 \\ C_3 \to C_3 - C_1 \end{matrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} -b-c-a & 0 \\ 0 & -c-a-b \end{vmatrix}$$

$= (a + b + c)[(-1)^2(a + b + c)^2 - 0]$

$= (a + b + c)^3 =$ সোঁপক্ষ

7. সমাধান কৰা

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$$

সমাধান ঃ দিয়া আছে $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x+2 & 1 & 1 \\ x+2 & x & 1 \\ x+2 & 1 & x \end{vmatrix} = 0 \quad C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$$

$$\Rightarrow (x+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (x+2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x-1 & 0 \\ 1 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{matrix} C_2 \to C_2 - C_1 \\ C_3 \to C_3 - C_1 \end{matrix}$$

$\Rightarrow (x - 2)(x- 1)^2 = 0$

$\Rightarrow (x + 2) = 0$ বা, $(x - 1)^2 = 0$

$\Rightarrow x = -2$ বা, $x = 1, 1$

$\therefore x = -2, 1, 1$ উত্তৰ

3.2.7 ক্ৰেমাৰৰ পদ্ধতিৰ দ্বাৰা সমীকৰণৰ সমাধান (Solution of Equations using Creamer's Rule) ঃ

গেব্ৰিয়েল ক্ৰেমাৰে ৰৈখিক সহসমীকৰণৰ সমাধানৰ বাবে নিৰ্ণায়কৰ ব্যৱহাৰৰ দ্বাৰা এটি সৰল প্ৰণালী আগবঢ়াইছে।

ধৰা হ'ল, ৰৈখিক সমীকৰণকেইটা হ'ল—

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

ধৰা হ'ল,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

ইয়াত Δ_x, Δ_y, Δ_z নিৰ্ণায়ক কেইটা নিৰ্ণায়ক Δ ৰ প্ৰথম, দ্বিতীয় আৰু তৃতীয় স্তম্ভত ক্ৰমে (d_1, d_2, d_3) বহুৱাই পোৱা হৈছে।

ইয়াত

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & d_1 \\ d_2 & b_2 & d_2 \\ d_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1x + b_1x + c_1z & b_1 & c_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z & b_2 & c_2 \\ a_3 + b_3y + c_3z & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1x + b_1 + c_1 \\ a_2x + b_2 + c_2 \\ a_3x + b_3 + c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1y + b_1 + c_1 \\ b_2y + b_2 + c_2 \\ b_3y + b_3 + c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1z + b_1 + c_1 \\ c_2z + b_2 + c_2 \\ c_3z + b_3 + c_3 \end{vmatrix}$$

$$= x \begin{vmatrix} a_1 + b_1 + c_1 \\ a_2 + b_2 + c_2 \\ a_3 + b_3 + c_3 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} b_1 + b_1 + c_1 \\ b_2 + b_2 + c_2 \\ b_3 + b_3 + c_3 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} c_1 + b_1 + c_1 \\ c_2 + b_2 + c_2 \\ c_3 + b_3 + c_3 \end{vmatrix}$$

$$= x.\Delta + y.0 + z.0$$

$$\Rightarrow \Delta_x = x.\Delta$$

$$\Rightarrow x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$$

ঠিক সেইদৰে $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$, $z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$

$\therefore$ ক্ৰেমাৰৰ পদ্ধতি অনুসৰি

$$\frac{x}{\Delta_x} = \frac{y}{\Delta_y} = \frac{z}{\Delta_z} = \frac{1}{\Delta}; \Delta \neq 0$$

টোকা ঃ

(1) যদি $\Delta \neq 0$ সমীকৰণ প্ৰণালী সুসংগত (consistent) আৰু সমাধান অদ্বিতীয় (unique)

(2) যদি $\Delta = 0$ কিন্তু Δ_x, Δ_y, Δ_z ৰ কমপক্ষেও (atleast) এটা শূন্য (0) নহয়, সমীকৰণ প্ৰণালী অসুসংগত আৰু ইয়াৰ কোনো সমাধান নাই।

মন্তব্য ঃ ইয়াত আমি কেৱল সেইবোৰ সমীকৰণ প্ৰণালীহে আলোচনা কৰিম যাৰ বাবে $\Delta \neq 0$

ব্যাখ্যামূলক উদাহৰণ (Illustrative Example) ঃ

উদাহৰণ 8 ঃ ক্ৰেমাৰৰ পদ্ধতিৰে সমাধান কৰা

$$2x + 3y = 13$$
$$x + 7y = 23$$

সমাধান ঃ ইয়াত $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 3 = 11 \neq 0$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 13 & 3 \\ 23 & 7 \end{vmatrix} = 91 - 69 = 22$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} z & 13 \\ 1 & 23 \end{vmatrix} = 46 - 13 = 33$$

$$\therefore \quad x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{22}{11} = 2$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{33}{11} = 3$$

উদাহৰণ 9 ঃ ক্ৰেমাৰৰ পদ্ধতিৰে সমাধান কৰা

$$x + 2y + 3z - 6 = 0$$
$$2x + 4y - 7 = -z$$
$$3x + 2y + 9z - 14 = 0$$

সমাধান ঃ [**টোকা ঃ** মন কৰিবলগীয়া যে আমি নিৰ্ণায়কবোৰ গঠন কৰাৰ আগতে ধ্ৰুৱক পদকেইটা সোঁপক্ষলৈ আৰু x, y, z বিশিষ্ট পদকেইটা বাওঁপক্ষলৈ স্থানান্তৰিত কৰি ল'ব লাগিব।

ইয়াত $x + 2y + 3z = 6$

$$2x + 4y + z = 7$$
$$3x + 2y + 9z = 14$$

$$\therefore \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= 1(36 - 2) - 2(18 - 3) + 3(4 - 12)$$
$$= 34 - 30 - 24 = -20 \neq 0$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & 1 \\ 14 & 2 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= 6(36 - 2) - 2(63 - 14) + 3(14 - 56)$$
$$= 204 - 98 - 126 = -20$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 7 & 1 \\ 3 & 14 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= 1(63 - 14) - 6(18 - 3) + 3(28 - 21)$$
$$= 49 - 90 + 21 = -20$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 14 \end{vmatrix}$$

$$= 1(56 - 14) - 2(28 - 21) + 6(4 - 12)$$
$$= 42 - 14 - 48 = -20$$

$$\therefore\ x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-20}{-20} = 1$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-20}{-20} = 1$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-20}{-20} = 1$$

উত্তৰ ঃ $x = 1,\ y = 1,\ z = 1$

উদাহৰণ 10 ঃ সমাধান কৰা

$$3x + y + z - 10 = 0$$
$$x + y - z = 0$$
$$5x - 9y = 1$$

সমাধান ঃ ইয়াত $3x + y + z = 10$

$x + y - z = 0$

$5x - 9y + 0.z = 1$

$$\therefore\ \Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 5 & -9 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 3(0 - 9) - 1(0 + 5) + 1(-9 - 5)$$
$$= -27 - 5 - 14 = -46$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -9 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 10(0 - 9) - 1(0 + 1) + 1(0 - 1)$$
$$= - 90 - 1 - 1 = - 92$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 10 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 3(0 + 1) - 10(0 + 5) + 1(0 - 1)$$
$$= - 3 - 50 + 1 = - 46$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & -9 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3(1 + 0) - 1(1 - 0) + 10(- 9 - 5)$$
$$= - 3 - 1 - 140$$
$$= - 138$$

$$\therefore\ x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-92}{-46} = 2$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-46}{-46} = 1$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-138}{-46} = 3$$

$x = 2,\ y = 1,\ z = 3$

সাৰাংশ (Summary)

* $|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$

* $|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$

* এটা নিৰ্ণায়কৰ a_{ij} মৌলৰ অনুৰাশি হ'ল সেই মৌলটো অৱস্থিত শাৰী আৰু স্তম্ভ বাদ দি পোৱা নিৰ্ণায়ক M_{ij}।
* $n(n \geq 2)$ মাত্ৰাবিশিষ্ট নিৰ্ণায়কৰ অনুৰাশি $(n - 1)$ মাত্ৰাবিশিষ্ট এটা নিৰ্ণায়ক।
* এটা নিৰ্ণায়কৰ a_{ij} মৌলৰ সহৰাশি হ'ল A_{ij} আৰু $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$
* এটা শাৰী বা স্তম্ভৰ মৌলবোৰক অইন এটা শাৰী বা স্তম্ভৰ অনুৰূপ সহৰাশিৰে পূৰণ কৰি সেই পূৰণফলবোৰ যোগফল শূন্য হয়।
* কোনো শাৰী বা স্তম্ভৰ মৌলসমূহ অইন এটা শাৰী বা স্তম্ভৰ অনুৰূপ সহৰাশিৰে পূৰণ কৰি পূৰণফলবোৰ যোগ কৰিলে নিৰ্ণায়কটোৰ মান পোৱা যায়।
* এটা নিৰ্ণায়কৰ শাৰীবোৰ স্তম্ভলৈ আৰু স্তম্ভবোৰ শাৰীলৈ পৰিৱৰ্তিত কৰিলে নিৰ্ণায়কটোৰ মান একেই থাকে।
* এটা নিৰ্ণায়কৰ যিকোনো দুটা শাৰী বা স্তম্ভৰ স্থান পৰস্পৰ সাল-সলনি কৰিলে নিৰ্ণায়কটোৰ মান একেই থাকে কিন্তু চিহ্ন সলনি হয়।
* যিকোনো দুটা শাৰী বা স্তম্ভ একে হ'লে নিৰ্ণায়কৰ মান শূন্য হ'ব।
* যিকোনো এটা শাৰী বা স্তম্ভৰ মৌলসমূহক এটা বাস্তৱ সংখ্যা $k(k \neq 0)$ ৰে পূৰণ কৰিলে নিৰ্ণায়কটোক সেই ৰাশিটোৰে পূৰণ কৰা বুজায়।
* কোনো নিৰ্ণায়কৰ কোনো শাৰীৰ বা স্তম্ভৰ প্ৰতিটো মৌল দুটা ৰাশিৰ যোগফল হ'লে নিৰ্ণায়কটোক একে মাত্ৰাৰ দুটা নিৰ্ণায়কৰ যোগফল হিচাপে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি।
* কোনো নিৰ্ণায়কৰ কোনো শাৰীৰ বা স্তম্ভৰ প্ৰতিটো মৌল আন কোনো শাৰীৰ (বা স্তম্ভৰ) অনুৰূপ মৌলৰ স্থিৰ গুণিতকেৰে বৰ্ধিত বা হ্ৰাস কৰিলে, নিৰ্ণায়কৰ মানৰ কোনো পৰিৱৰ্তন নহয়।

* যদি $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$

$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$

$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$ হয়

আৰু $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$\Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$ হয়

তেনেহ'লে ক্রেমাৰৰ পদ্ধতি অনুসাৰে

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}; y = \frac{\Delta y}{\Delta}, z = \frac{\Delta z}{\Delta}$$

প্ৰশ্নমালা 3.2

1. (i) $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ নিৰ্ণায়কৰ – 2 আৰু

4 ৰ অনুৰাশিৰ মান লিখা

(ii) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 6 & -3 \end{vmatrix}$ নিৰ্ণায়কৰ 3 আৰু

– 5 ৰ সহৰাশি লিখা

2. $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 6 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ নিৰ্ণায়কৰ দ্বিতীয় শাৰীৰ

মৌলসমূহৰ সহৰাশি নিৰ্ণয় কৰা

3. তলৰ নিৰ্ণায়ককেইটাৰ প্ৰথম স্তম্ভৰ মৌলসমূহৰ অনুৰাশি আৰু সহৰাশি লিখা

(i) $\begin{vmatrix} 5 & 17 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$

(ii) $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$

4. মান নিৰ্ণয় কৰা

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

5. বিস্তৃত নকৰাকৈ প্ৰমাণ কৰা যে তলত দিয়া প্ৰতিটো নিৰ্ণায়কৰ মান শূন্য হয়।

(i) $\begin{vmatrix} 6 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -10 & 5 & 2 \end{vmatrix}$

(ii) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 9 & 6 & -12 \\ 31 & 16 & 19 \end{vmatrix}$

(iii) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ 10 & 13 & 16 \end{vmatrix}$

(iv) $\begin{vmatrix} 1 & 1^2 & 2^2 \\ 2 & 2^2 & 4^2 \\ 3 & 3^2 & 6^2 \end{vmatrix}$

(v) $\begin{vmatrix} \frac{1}{a} & a & bc \\ \frac{1}{b} & b & ca \\ \frac{1}{c} & c & ab \end{vmatrix}$

(vi) $\begin{vmatrix} 0 & c & b \\ -c & 0 & a \\ -b & -a & 0 \end{vmatrix}$

(vii) $\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix}$

6. তলৰ নিৰ্ণায়কবোৰত x ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(i) $\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 28$

(ii) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$

(iii) $\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 9$

7. বিস্তৃত নকৰাকৈ প্ৰমাণ কৰা যে

(i) $\begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$

(ii) $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2-yz \\ 1 & y & y^2-zx \\ 1 & z & z^2-xy \end{vmatrix} = 0$

(iii) $$\begin{vmatrix} bc & a^2 & a^2 \\ b^2 & ca & b^2 \\ c^2 & c^2 & ab \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} bc & ab & ca \\ ab & ca & bc \\ ca & bc & ab \end{vmatrix}$$

8. প্ৰমাণ কৰা যে

(i) $$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)$$

(ii) $$\begin{vmatrix} 1+x & y & z \\ x & 1+y & z \\ x & y & 1+z \end{vmatrix} = 1+x+y+z$$

(iii) $$\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$$

(iv) $$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ca & ab \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$$

(v) $$\begin{vmatrix} x+y & z & z-x \\ y+z & x & x-y \\ z+x & y & y-z \end{vmatrix} = x^3+y^3+z^3-3xyz$$

(vi) $$\begin{vmatrix} 0 & ab^2 & ac^2 \\ a^2b & 0 & bc^2 \\ a^2c & b^2c & 0 \end{vmatrix} = 2a^3b^3c^3$$

(vii) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$$

(viii) $$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 \end{vmatrix} = a_1a_2a_3\left(1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}\right)$$

9. সমাধান কৰা

(i) $$\begin{vmatrix} 3-x & -6 & 3 \\ -6 & 3-x & 3 \\ 3 & 3 & -6-x \end{vmatrix} = 0$$

(ii) $\begin{vmatrix} x+a & b & c \\ c & x+b & a \\ a & b & x+c \end{vmatrix} = 0$

10. ক্রেমাৰৰ পদ্ধতিৰে সমাধান কৰা

(i) $3x + 4y = 2$

$9x + 16y = -1$

(ii) $2x + 3y = 5$

$3x - 2y = 1$

(iii) $x + 2z = 7$

$3x + 4y = 11$

$3y - 5z = -9$

(iv) $\frac{2}{x} - \frac{1}{y} = 8$

$\frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 5$

(v) $x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 22$

$5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5$

$9x_1 + 8x_2 - 3x_3 = 16$

(vi) $x - y = 1$

$x + z = -6$

$x + y + 2z = 3$

উত্তৰমালা 3.2

1. (i) অণুৰাশি = 5; – 5

   (ii) সহৰাশি = 30 ; 22

2. 2য় শাৰীৰ মৌলৰ সহৰাশি—

   2, 5, – 2

3. (i) অণুৰাশি = – 1, 17; সহৰাশি = – 1, – 17

   (ii) অণুৰাশি = $ab^2 - ac^2$; $a^2b - bc^2$; $a^2c - b^2c$

   সহৰাশি = $ab^2 - ac^2$; $bc^2 - a^2b$; $a^2c - b^2c$

4. 13

6. (iii) $x = 3$ (ii) $x = 1, 1$ (i) $x = 2, -\dfrac{17}{7}$

9. (i) $x = 0, 9$ বা -9

   (ii) $x = 0,$ বা $-(a + b + c)$

10. (i) $x = \dfrac{1}{3},\ y = \dfrac{1}{4}$

    (ii) $x = 1, y = 1$

    (iii) $x = 1, y = 2, z = 3$

    (iv) $x = \dfrac{1}{3},\ y = -\dfrac{1}{2}$

    (v) $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$

    (vi) $x = -2, y = -3, z = -4$