అధ్యాయము

6

శ్రేఢులు

(Progressions)

6.1 పరిచయం

ప్రకృతిలో చాలా వస్తువులు అమరికలను పాటించడం మనం గమనించే వుంటాము. ఉదాహరణకు ప్రొద్దు తిరుగుడు పువ్వులోని పూలరెక్కలు, తేనెతుట్టెలోని రంధ్రాలు, మొక్కజొన్న కంకిలోని విత్తనాలు, అనాస (pineapple) మరియు దేవదారు (pine) పండ్లమీద సర్పిలాకారాలు.

పై ప్రతీ ఉదాహరణలోని అమరికను గమనించారా? సహజ సిద్ధమైన ఇలాంటి అమరికలు పునరావృతం అవుతాయి గానీ పురోగమించే విధంగా వుండవు. ప్రొద్దు తిరుగుడు పువ్వులో ఒకే రకమైన రెక్కలు ఒకే దూరంలో పెరుగుతాయి. తేనెతుట్టెలోని షడ్భుజాకార రంధ్రాలన్నీ షడ్భుజాకారంలో సౌష్టవంగా వుంటాయి. అదేవిధంగా అనాసపండు మీది సహజసిద్ధమైన సర్పిలాకార అమరికలను మనం గమనించవచ్చు.

నిత్యజీవితంలో ఎదురయ్యే ఇలాంటి మరికొన్ని అమరికలను పరిశీలిద్దాం.

(i) $4, 4^2, 4^3, 4^4, 4^5, 4^6$ ..... విలువల యొక్క ఒకట్ల స్థానంలోని అంకెలు వరుసగా

4, 6, 4, 6, 4, 6, ...

(ii) మేరి బ్యాంకు ఉద్యోగాల అర్హత పరీక్షకు సన్నద్ధమౌతుంది. అందులో భాగంగా అమరికల మీద సమస్యలను సాధిస్తూ వుంది. వానిలో ఒక సమస్య ఈ క్రింది విధంగా ఉంది.

1, 2, 4, 8, 10, 20, 22 ....

(iii) ఉష ఒక ఉద్యోగానికి దరఖాస్తు చేసింది. ఆమె నెలకు ₹ 8000/– చొప్పున మరియు సంవత్సరమునకు ₹ 500 పెంచే విధంగా వున్న ఉద్యోగంలో నియమితురాలైంది. అయిన ఆమె జీతం మొదటి, రెండవ, మూడవ .... సంవత్సరాలలో నెలకు 8000, 8500, 9000 .....

(iv) ఒక నిచ్చెన మెట్ల యొక్క పొడవు క్రింద నుంచి పైకి క్రమంగా 2 సెం.మీ. తగ్గుతూ వుంది. క్రింద నుంచిమొదటి మెట్టు యొక్క పొడవు 45 సెం.మీ అయిన క్రింద నుంచి క్రమంగా మొదటి, రెండవ, మూడవ .... ఎనిమిదవ మెట్ల పొడవులు వరుసగా 45, 43, 41, 39, 37, 35, 33, 31.

పై సంఖ్యల అమరికలలోని పదాల మధ్య మీరేమైనా సంబంధాన్ని గమనించారా ?

ఉదాహరణ (i) లో రెండు సంఖ్యలు 4 మరియు 6 అదే క్రమంలో పునరావృతమవుతున్నాయి.

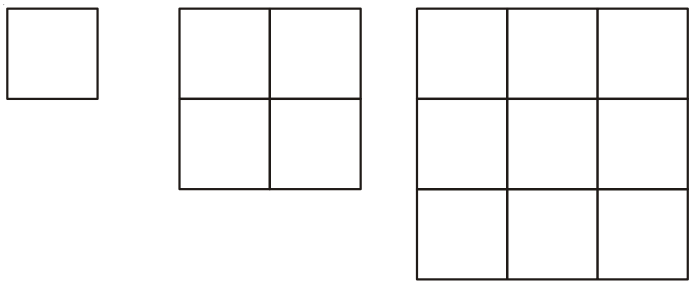
ఉదాహరణ (ii) లోని అమరికను కనుగొనుటకు ప్రయత్నించండి. ఉదాహరణ (iii), (iv) లలోని అమరికలలో సంఖ్యలు క్రమంగా స్థిరంగా పురోగమిస్తూ వున్నాయి. జాబితా 8000, 8500, 9000, ... లో ప్రతీ పదము (మొదటి పదం తప్ప) దాని ముందున్న పదమునకు 500 ను కలపటం వల్ల వస్తున్నాయి. అదేవిధంగా జాబితా 45, 43, 41, ... లో ప్రతీ పదం (మొదటి పదం తప్ప) దాని ముందున్న పదమునకు '-2' ను కలపటం వల్ల వస్తుంది. ఇలాంటి పురోగమన అమరికలు మరికొన్నింటిని మనం చూద్దాం.

(a) ఒక సేవింగ్ స్కీములో సొమ్ము మూడు సం॥లకు ఒకసారి $\frac{5}{4}$ రెట్లు పెరుగుతుంది. ఈ స్కీములో ₹ 8000 ను పెట్టుబడిగా పెట్టిన 3, 6, 9 మరియు 12 సం॥ల తరువాత వచ్చే మొత్తం సొమ్ము వరుసగా

10000, 12500, 15625, 19531.25.

(b) 1, 2, 3, ... యూనిట్లు భుజాలుగా గల చతురస్రాలలోని యూనిట్ చతురస్రాల సంఖ్య వరుసగా

$1^2, 2^2, 3^2, ...$

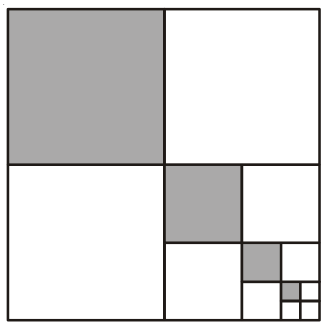


(c) హేమ తన కూతురు మొదటి పుట్టిన రోజు ₹ 1000 లను తన కూతురు యొక్క డబ్బుల పెట్టెలో వుంచింది. ప్రతీ సం॥ము ఈ విధంగా వుంచే సొమ్ము ₹ 500 పెంచుతూ పోయిన మొదటి, రెండవ, మూడవ, నాల్గవ ..... పుట్టిన రోజున పెట్టెలో వుంచే సొమ్ము వరుసగా

1000, 1500, 2000, 2500, ...

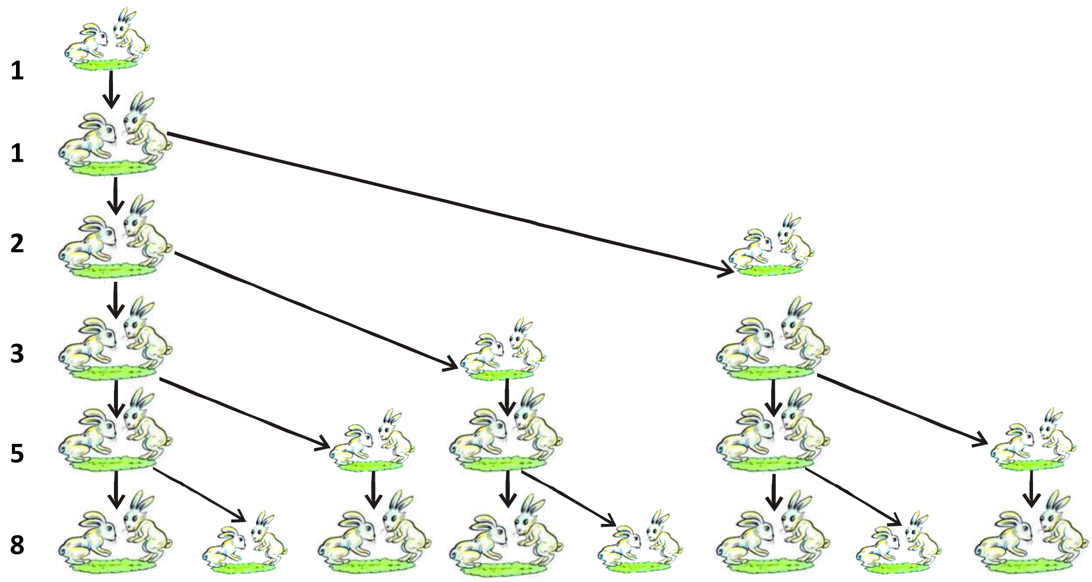
(d) ఈ క్రింద ఇవ్వబడిన పటంలో షేడ్ చేయబడిన చతురస్రభాగాల విలువలు భిన్న రూపంలో వరుసగా

$\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \frac{1}{256}, ...$



(e) ఒక కుందేళ్ళ జంట రెండవ నెల నుంచి ప్రతి నెల మరిఒక కుందేళ్ళ జంటను ఉత్పత్తి చేస్తుందనుకొనుము. ఇలా ఉత్పత్తి అయిన కుందేల్ల జంట కూడా తిరిగి రెండవ నెల నుంచి ప్రతినెల ఇంకొక కుందేళ్ళ జంటను ఉత్పత్తి చేస్తుందనుకొనుము. మొదటి నెలలో ఒకేఒక జంట వుందనుకొని ఏ కుందేళ్ళ జంట చనిపోలేదని భావిస్తే 1, 2, 3, 4, 5, 6,....., వ నెలలో వుండే కుందేళ్ళ జంటల సంఖ్యలు వరుసగా

1, 1, 2, 3, 5, 8



పై ఉదాహరణలలో మనం కొన్ని అమరికలను గమనించగలం. కొన్నింటిలో ప్రతీ పదము దాని ముందువున్న పదానికి ఒక స్థిర పదాన్ని కలవటం వల్ల లభిస్తాయి. కొన్నింటిలో ప్రతీ పదమును ఒక స్థిర పదంచే గుణించటం వల్ల తరువాత పదాలను పొందగలం. మరికొన్నింటిలో వరుస సంఖ్యల వర్గాలను గమనించగలం.

ఈ అధ్యాయంలో ప్రతీ పదము దాని ముందున్న పదానికి ఒక స్థిర పదాన్ని కలపటం వల్ల లభించే అమరికలను, మరియు ప్రతీ పదమును ఒక స్థిరపదముచే గుణించడం వల్ల తరువాత పదాలను పొందే అమరికలను వాని యొక్క n వ పదాలను మరియు n పదాల మొత్తాలను గురించి చర్చిస్తాం.

చరిత్ర : 400 సం॥లకు పూర్వమే బాబిలోనియన్లకు అంకశ్రేఢి, గుణశ్రేఢులను గురించి తెలిసినట్లుగా ఆధారాలున్నాయి. బోథెస్ను (570 AD) ప్రకారము ఈ శ్రేఢులను గురించి పూర్వపు గ్రీకు రచయితలకు తెలిసినట్లుగా అర్థమౌతుంది. మొట్టమొదటిసారి ప్రముఖ భారతీయ ప్రాచీన గణితవేత్త ఆర్యభట్ట (క్రీ.శ. 470) మొదటిసారి మొదటి సహజ సంఖ్యల వర్గాల మొత్తము, ఘనాల మొత్తమునకు సూత్రాలను ఇచ్చినట్లుగా తన రచన ఆర్యభట్టీయం (క్రీ.శ 499) నుంచి తెలుస్తుంది. ఇంకా అంకశ్రేఢిలో p వ పదం నుంచి nవ పదం వరకూ గల పదాల మొత్తమును కనుగొనుటకు అవసరమైన సూత్రమును ఈయన ఇవ్వటం జరిగింది. బ్రహ్మగుప్తుడు, (క్రీ.శ.598) మహావీర (క్రీ.శ.850) మరియు భాస్కర (క్రీ.శ. 1114-1185) వంటి ప్రాచీన భారతీయ గణితవేత్తలు మొదటి సహజసంఖ్యల వర్గాల మొత్తము మరియు ఘనాల మొత్తంలను గురించి చర్చించినట్లుగా తెలుస్తుంది.

6.2 అంకశ్రేఢులు

క్రింది సంఖ్యల జాబితాలను పరిశీలించండి.

(i) 1, 2, 3, 4, . . .

(ii) 100, 70, 40, 10, . . .

(iii) – 3, –2, –1, 0, . . .

(iv) 3, 3, 3, 3, . . .

(v) –1.0, –1.5, –2.0, –2.5, . . .

జాబితాలోని ప్రతీ సంఖ్యను ఒక పదం అంటాం.

ఇచ్చిన పదాల ఆధారంగా ప్రతి జాబితాలో తరువాత పదమును రాయగలరా? రాయగలిగితే ఎలా రాయగలరు? బహుశా అమరికలోని నియమం ఆధారంగా రాయగలరు. ఆ నియమం ఏమిటో పరిశీలిద్దాం.

(i)లో ప్రతి పదము (మొదటి పదం తప్ప) దాని ముందున్న పదానికంటే '1' ఎక్కువ

(ii)లో ప్రతి పదము, దాని ముందున్న పదము కంటే 30 తక్కువ.

(iii) లో ప్రతి పదము, దాని ముందున్న పదానికి '1' కలపటం వల్ల వస్తుంది.

(iv) లో అన్ని పదాలు 3యే. అనగా ప్రతీ పదము దాని ముందున్న పదానికి సున్న ('0') కలపటం వల్ల వస్తుంది.

(v)లో ప్రతి పదము దాని ముందు వున్న పదానికి '– 0.5' ను కలపటం వల్ల (అనగా 0.5 ను తీసివేయటం వల్ల) వస్తుంది.

పై అన్ని జాబితాలలో ప్రతి జాబితాలోను ప్రతి పదము, దాని ముందున్న పదానికి ఒక స్థిర సంఖ్యను కలపటం వల్ల గానీ లేదా తీసివేయటం వల్లగానీ వస్తున్నాయి. ఇలాంటి సంఖ్యల జాబితాను అంకశ్రేఢి అంటాము.

ప్రయత్నించండి

(i) క్రింది వానిలో ఏవి అంకశ్రేఢులు? ఎందుకు?

(a) 2, 3, 5, 7, 8, 10, 15, ...

(b) 2, 5, 7, 10, 12, 15......

(c) –1, –3, –5, –7, ...

(ii) ఏవైనా మూడు అంకశ్రేఢులను రాయుము ?

6.2.1 అంకశ్రేఢి అనగా నేమి ?

పై పరిశీలనల దృష్ట్యా "ఒక సంఖ్యల జాబితాలో మొదటి పదం తప్ప మిగిలిన అన్ని పదాలు వాని ముందున్న పదానికి ఏదో ఒక స్థిర సంఖ్యను కలపటం వల్ల వస్తూ వుంటే ఆ జాబితాను అంకశ్రేఢి అంటాము".

కలిపే స్థిరసంఖ్యను సామాన్య భేదము లేదా పదాంతరము అంటాము. ఇది **ధనాత్మకము లేదా ఋణాత్మకము లేదా సున్న** కావచ్చు.

ఒక అంకశ్రేఢిలోని మొదటి పదము a_1, రెండవ పదమును a_2, . . ., nవ పదమును a_n మరియు సామాన్య భేదము d అనుకొనిన అంకశ్రేఢి : $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$.

మరియు, $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_n - a_{n-1} = d$.

మరిన్ని అంకశ్రేఢులను పరిశీలిద్దాం.

(a) ఒక పాఠశాలలో ప్రార్థనా సమయంలో వరుసగా నిలబడిన విద్యార్థుల ఎత్తులు (సెం.మీ.లలో) 147 , 148, 149, . . ., 157.

(b) ఒక పట్టణములో జనవరి మాసంలో ఒక వారంలో నమోదైన కనిష్ఠ ఉష్ణోగ్రతల ఆరోహణ క్రమము

$$-3.1, -3.0, -2.9, -2.8, -2.7, -2.6, -2.5$$

(c) ₹ 1000 ల అప్పు 5% సొమ్మును ప్రతీ నెల చెల్లిస్తున్న, ప్రతి నెల చివర ఇంకనూ చెల్లించవలసిన సొమ్ము 950, 900, 850, 800, . . ., 50.

(d) ఒక పాఠశాలలో 1 నుంచి 12 వ తరగతి వరకూ ప్రతి తరగతిలో అత్యధిక మార్కులు సాధించిన వారికి ఇచ్చే బహుమతుల విలువ వరుసగా 200, 250, 300, 350, . . ., 750.

(e) 10 నెలలో ప్రతి నెలలో ₹ 50 లు చొప్పున పొదుపు చేసిన ప్రతి నెల చివరలో వుండే మొత్తం సొమ్ము వరుసగా 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500.

ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి

1. పైన పేర్కొనబడిన ప్రతి జాబితా ఏవిధంగా A.P. అవుతుందో ఆలోచించుము ? మీ మిత్రునిలో చర్చించుము?
2. పైన ఇవ్వబడిన ప్రతి జాబితాకు సామాన్యభేదంను కనుగొనుము? సామాన్యభేదం ఎప్పుడు ధనాత్మకమో ఆలోచించుము ?
3. సామాన్య భేదం ఒక చిన్న ధనాత్మక విలువ వుండేటట్లు ఒక AP ని తయారుచేయుము.
4. సామాన్య భేదం ఒక పెద్ద ధనాత్మక విలువగా వుండేటట్లు ఒక అంకశ్రేఢిని తయారు చేయుము?
5. సామాన్య భేదం ఋణాత్మకంగా వుండేటట్లు ఒక A.Pని రాయుము.

అంకశ్రేఢి యొక్క సామాన్య రూపము : అంకశ్రేఢులన్నింటిని ఈ క్రింది రూపంలో రాయవచ్చని మీరు గమనించే వుంటారు.

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, \dots$$

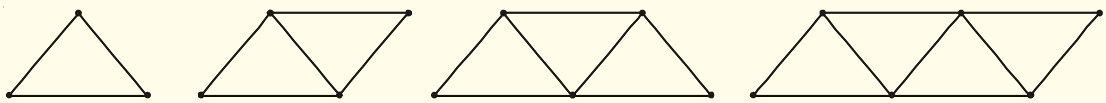
దీనినే అంకశ్రేఢి యొక్క సాధారణ రూపము అంటాం. ఇందులో 'a' మొదటి పదము, d సామాన్య భేదం లేదా పదాంతరము.

ఉదాహరణకు 1, 2, 3, 4, 5, ... లో మొదటి పదం ఒకటి మరియు సామాన్యభేదం కూడా ఒకటియే.

అదే విధంగా 4, 6, 8, 10, ... లో మొదటి పదం ఎంత? సామాన్య భేదం ఎంత?

కృత్యము

(i) అగ్గిపుల్లల సహాయంతో క్రింది ఆకారాలను ఏర్పరచుము ?



(ii) ప్రతి ఆకారానికి కావలసిన అగ్గి పుల్లల సంఖ్యను వరుసగా రాయుము?

(iii) జాబితాలో రెండో వరుస సంఖ్యల మధ్యగల భేదం ఒకే విధంగా (స్థిరంగా) వుందా?

(iv) ఈ సంఖ్యల జాబితా ఒక అంకశ్రేఢి అవుతుందా?

6.2.2 అంకశ్రేఢి ఆధారపడే అంశాలు

6.2.1 శీర్షిక (a) నుంచి (e) వరకూ ఇవ్వబడిన జాబితాలన్నీ కూడా పరిమిత సంఖ్యలో పదాలను కలిగి వున్నాయి. ఇలాంటి అంకశ్రేఢులను పరిమిత అంకశ్రేఢులు అంటారు. వీనిలో చివరి పదము వుంటుంది. అయితే 6.2 శీర్షికలో (i) నుంచి (v) వరకూఇవ్వబడిన జాబితాలలో పదాల సంఖ్య అపరిమితము. ఇలాంటి అంకశ్రేఢులను అనంత అంకశ్రేఢులు అంటాం. దీనిలో చివరి పదము వుండదు.

ఇవి చేయండి

పరిమిత అంకశ్రేఢికి 3 ఉదాహరణలు, అనంత అంకశ్రేఢికి 3 ఉదాహరణలు ఇమ్ము.

ఒక అంకశ్రేఢిని గురించి తెలియాలంటే మనకు ఏమేమి అవసరము! ఈ శ్రేఢి యొక్క మొదటి పదము తెలిస్తే సరిపోతుందా? లేదా సామాన్యభేదం తెలిస్తే సరిపోతుందా?

అయితే ఒక అంకశ్రేఢి గురించి తెలియాలంటే లేదా దానిని పూర్తి చేయాలంటే మనకు రెండూ - అనగా దాని మొదటి పదము 'a' మరియు సామాన్యభేదం 'd' తెలియాలని మనం గమనించగలం. ఉదాహరణకు మొదటి పదము a విలువ 6 మరియు సామాన్యభేదం d విలువ 3 అయిన అంకశ్రేఢి :

$$6, 9,12, 15, \ldots$$

మరియు మొదటి పదము $a = 6$; సామాన్య భేదం $d = -3$ అయిన

అంకశ్రేఢి : $6, 3, 0, -3, \ldots$

అదేవిధంగా

$a = -7$, $d = -2$, అయిన అంకశ్రేఢి $-7, -9, -11, -13, \ldots$

$a = 1.0$, $d = 0.1$, అయిన అంకశ్రేఢి $1.0, 1.1, 1.2, 1.3, \ldots$

$a = 0$, $d = 1\frac{1}{2}$, అయిన అంకశ్రేఢి $0, 1\frac{1}{2}, 3, 4\frac{1}{2}, 6, \ldots$

$a = 2$, $d = 0$, అయిన అంకశ్రేఢి $2, 2, 2, 2, \ldots$

అనగా a, d విలువలు తెలిసిన మనం అంకశ్రేఢిని రాయగలం.

ఇంకొక మార్గమును ప్రయత్నిద్దాం. ఒకవేళ సంఖ్యల జాబితా ఇస్తే అది అంకశ్రేఢి అవుతుందా? లేదా? అని ఎలా కనుగొంటాం ? ఉదాహరణకు

$$6, 9, 12, 15, \ldots,$$

మొదటగా మనం రెండు వరుస సంఖ్యల భేదంను కనుగొందాం.

$$a_2 - a_1 = 9 - 6 = 3,$$

అదే విధంగా $a_3 - a_2 = 12 - 9 = 3,$

$$a_4 - a_3 = 15 - 12 = 3$$

అనగా $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_n - a_3 \ldots = 3$

ఇచ్చిన ఏ రెండు వరుస సంఖ్యల భేదమైనా స్థిరంగా వుంది. అనగా ఏ సందర్భంలో నైనా దాని విలువ మూడే. అందువల్ల ఇచ్చిన సంఖ్యల జాబితా ఒక అంకశ్రేఢి అవుతుంది. దీనిలో మొదటి పదము $a = 6$ మరియు సామాన్య భేదం $d = 3$.

మరిఒక జాబితా : $6, 3, 0, -3, \ldots,$ ను పరిశీలిద్దాం.

ఇచ్చట $a_2 - a_1 = 3 - 6 = -3,$

$$a_3 - a_2 = 0 - 3 = -3$$

$$a_4 - a_3 = -3 - 0 = -3$$

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = -3$$

అనగా ఇది కూడా ఒక అంకశ్రేఢియే. దీనిలో మొదటి పదము $a = 6$, మరియు సామాన్య భేదం $d = -3$.

అంటే ఒక సంఖ్యల జాబితాలో రెండు వరుస సంఖ్యల భేదం స్థిరమైన అది ఒక అంకశ్రేఢి అవుతుంది. అనగా సాధారణంగా $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ఒక అంకశ్రేఢి అయిన

$$d = a_{k+1} - a_k$$

ఇచ్చట a_{k+1}, a_k లు వరుసగా $(k + 1)$ మరియు k పదాలు మరియు $k \geq 1$

$1, 1, 2, 3, 5, \ldots.$ సంఖ్యల జాబితాను పరిశీలించండి. దీనిలో రెండు వరుస పదాల మధ్య భేదం స్థిరంగా (ఒకే విధంగా) లేదు. అందువల్ల ఇది అంకశ్రేఢి కాదు.

గమనిక : అంకశ్రేఢి $6, 3, 0, -3, \ldots,$లో d ని కనుగొనుటకు మనము 3 నుంచి 6ను తీసివేసినాము. అంతేకానీ 6 నుంచి 3ను కాదు. అనగా $(k + 1)$వ పదము చిన్నదైనప్పటికీ దీని నుంచే k వ పదమును తీసివేయాలి. ఇంకా ఒక అంకశ్రేఢిలో d ని కనుగొనుటకు $a_2 - a_1, a_3 - a_2, \ldots.$ లను అన్నింటిని కనుగొనవలసిన అవసరం లేదు. వానిలో ఏదైనా ఒకదాని విలువను కనుగొంటే సరిపోతుంది.

ఇవి చేయండి

1. ఏదైనా ఒక అంకశ్రేఢిని తీసుకొనుము?
2. జాబితాలోని ప్రతి పదమునకు ఏదైనా ఒక స్థిర సంఖ్యను కలుపుము ? ఫలిత సంఖ్యలను జాబితా రూపంలో రాయుము?
3. అదే విధంగా అంకశ్రేఢిలో ప్రతి పదము నుంచి ఏదైనా ఒక స్థిర సంఖ్యను తీసివేసి ఫలిత సంఖ్యలను జాబితాగా రాయుము?
4. అంకశ్రేఢిలోని ప్రతి పదమును ఏదైనా ఒక స్థిర సంఖ్యచే గుణించి ఫలిత సంఖ్యలను జాబితాగా రాయుము? మరియు అంకశ్రేఢిలోని ప్రతి పదమును ఏదైనా ఒక స్థిర సంఖ్యచే భాగించి ఫలిత సంఖ్యలను జాబితాగా రాయుము.

5. క్రొత్తగా ఏర్పడిన జాబితాలన్ని అంకశ్రేఢులు అవుతాయేమో పరిశీలించుము?

6. చివరగా నీ అభిప్రాయం ఏమిటి?

ఇపుడు కొన్ని ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ-1. అంకశ్రేఢి $\frac{1}{4}, \frac{-1}{4}, \frac{-3}{4}, \frac{-5}{4}$ ...., లో మొదటి పదము a ను సామాన్య భేదం d లను కనుగొనుము?

సాధన : ఇచ్చుట $a = \frac{1}{4}$ మరియు $d = \frac{-1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{-1}{2}$

ఇచ్చినది అంకశ్రేఢి అని తెలుసు కనుక d ని కనుగొనుటకు $a_2 - a_1$ ను మాత్రమే ఉపయోగించాము.

ఉదాహరణ-2. క్రింది వానిలో ఏవి అంకశ్రేఢులు? ఒకవేళ అంకశ్రేఢి అయితే తరువాత వచ్చే రెండు పదాలను కనుగొనుము?

(i) 4, 10, 16, 22, . . . (ii) 1, – 1, – 3, – 5, . . .(iii) – 2, 2, – 2, 2, – 2, . . .

(iv) 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, . . . (v) $x, 2x, 3x, 4x$ ......

సాధన : (i) ఇచ్చుట $a_2 - a_1 = 10 - 4 = 6$

$a_3 - a_2 = 16 - 10 = 6$

$a_4 - a_3 = 22 - 16 = 6$

అనగా $a_{k+1} - a_k$ విలువ ప్రతీసారి స్థిరము / సమానము.

ఇచ్చిన జాబితా ఒక అంకశ్రేఢి అవుతుంది. దీని సామాన్య భేదం $d = 6$.

జాబితాలో తరువాత వచ్చే రెండు పదాలు : 22 + 6 = 28 మరియు 28 + 6 = 34.

(ii) $a_2 - a_1 = -1 - 1 = -2$

$a_3 - a_2 = -3 - (-1) = -3 + 1 = -2$

$a_4 - a_3 = -5 - (-3) = -5 + 3 = -2$

అనగా $a_{k+1} - a_k$ విలువ ప్రతిసారి స్థిరము లేదా సమానము.

ఇచ్చిన జాబితా ఒక అంకశ్రేఢి అవుతుంది. దీని సామాన్య భేదం $d = -2$.

జాబితాలో తరువాత వచ్చే రెండు పదాలు

$$-5 + (-2) = -7 \text{ మరియు } -7 + (-2) = -9$$

(iii) $a_2 - a_1 = 2 - (-2) = 2 + 2 = 4$

$a_3 - a_2 = -2 - 2 = -4$

ఇచ్చుట $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$, అనగా ఇచ్చిన సంఖ్యల జాబితా అంకశ్రేఢిని ఏర్పరచదు.

(iv) $a_2 - a_1 = 1 - 1 = 0$

$a_3 - a_2 = 1 - 1 = 0$

$a_4 - a_3 = 2 - 1 = 1$

ఇచ్చుట, $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 \neq a_4 - a_3$.

అనగా ఇచ్చిన సంఖ్యల జాబితా అంకశ్రేఢిని ఏర్పరచదు.

(v) $a_2 - a_1 = 2x - x = x$

$a_3 - a_2 = 3x - 2x = x$

$a_4 - a_3 = 4x - 3x = x$

ఇచ్చుట అన్ని సందర్భాలలో $a_{k+1} - a_k$ సమానము. కనుక ఇచ్చిన జాబితా ఒక అంకశ్రేఢి అవుతుంది. తరువాతి రెండు పదాలు : $4x + x = 5x$ మరియు $5x + x = 6x$.

అభ్యాసము - 6.1

1. ఈ క్రింది సంఘటనలలో ఏ సంఘటనలో ఏర్పడే సంఖ్యల జాబితా అంకశ్రేఢి అవుతుంది? ఎందుకు?

   (i) ఒక టాక్సీకి మొదటి గంట ప్రయాణానికి ₹ 20 చొప్పున తరువాత ప్రతి గంటకు ₹ 8 చొప్పున చెల్లించవలసి వున్న ప్రతి కిలోమీటరుకు చెల్లించవలసిన సొమ్ము.

   (ii) ఒక వాక్యూమ్ పంపు సిలెండరులో వుండే గాలి నుంచి $\frac{1}{4}$ వంతు తీసివేయును. అయిన ప్రతిసారీ సిలెండరులో మిగిలి వుండే గాలి పరిమాణము.

   (iii) ఒక బావిని తవ్వడానికి మొదట మీటరుకు ₹ 150 వంతున ఆపై ప్రతి మీటరుకు ₹ 50 వంతున చెల్లించాలి. అయిన ప్రతి మీటరుకు చెల్లించవలసిన సొమ్ము.

   (iv) ఒక బ్యాంకులో ₹10000 లను సంవత్సరానికి 8 శాతం చక్రవడ్డీ ప్రకారం పొదుపు చేసిన ప్రతి సంవత్సరము చివరలో ఖాతాలో వుండే సొమ్ము.

2. అంకశ్రేఢుల యొక్క మొదటి పదము a మరియు సామాన్యభేదం d విలువలు క్రింద ఇవ్వబడినవి. అయిన శ్రేఢిలోని మొదటి నాలుగు పదాలను కనుగొనుము?

(i) $a = 10, d = 10$ (ii) $a = -2, d = 0$

(iii) $a = 4, d = -3$ (iv) $a = -1, d = \frac{1}{2}$

(v) $a = -1.25, d = -0.25$

3. క్రింద ఇవ్వబడిన అంకశ్రేఢులకు మొదటి పదమును, సామాన్య భేదంను కనుగొనుము ?

(i) $3, 1, -1, -3, \ldots$ (ii) $-5, -1, 3, 7, \ldots$

(iii) $\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{9}{3}, \frac{13}{3}, \ldots$ (iv) $0.6, 1.7, 2.8, 3.9, \ldots$

4. క్రింది జాబితాలలో ఏవి అంకశ్రేఢులు? ఒకవేళ అంకశ్రేఢి అయిన సామాన్య భేదం d ను, తరువాత నచ్చే మూడు పదాలను కనుగొనుము?

(i) $2, 4, 8, 16, \ldots$ (ii) $2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \ldots$

(iii) $-1.2, -3.2, -5.2, -7.2, \ldots$ (iv) $-10, -6, -2, 2, \ldots$

(v) $3, 3+\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}, 3+3\sqrt{2}, \ldots$ (vi) $0.2, 0.22, 0.222, 0.2222, \ldots$

(vii) $0, -4, -8, -12, \ldots$ (viii) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \ldots$

(ix) $1, 3, 9, 27, \ldots$ (x) $a, 2a, 3a, 4a, \ldots$

(xi) $a, a^2, a^3, a^4, \ldots$ (xii) $\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{18}, \sqrt{32}, \ldots$

(xiii) $\sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{9}, \sqrt{12}, \ldots$

6.3 అంకశ్రేఢి యొక్క n వ పదము

శీర్షిక 6.1లో చర్చించిన 'ఉష' విషయాన్ని మరి ఒకసారి పరిశీలిద్దాం. ఈమెను నెలకు ₹ 8000 చొప్పున మరియు సంవత్సరమునకు ₹ 500 చొప్పున పెంచే విధంగా వున్న ఉద్యోగంలో నియమించటం జరిగింది. అయితే ఉద్యోగంలో చేరిన తరువాత 5 వ సం॥ములో ఆమె జీతం ఎంత వుండవచ్చు. దీనికి సమాధానం కనుగొనాలంటే ముందు ఉద్యోగంలో చేరిన తరువాత రెండవ సంవత్సరములో ఆమె జీతమును కనుగొనాలి.

అది ₹ (8000 + 500) = ₹ 8500.

ఇదే విధంగా 3వ, 4వ, 5వ సం॥లలో ఆమె జీతమును ముందు సంవత్సరములో వున్న జీతానికి ₹ 500 కలపటం ద్వారా కనుగొనవచ్చు.

∴ 3వ సం॥లో ఆమె జీతము = ₹ (8500 + 500)

= ₹ (8000 + 500 + 500)

= ₹ (8000 + 2 × 500)

= ₹ [8000 + **(3 – 1)** × 500] (3వ సంవత్సరము)

= ₹ 9000

4వ సం॥లో ఆమె జీతము = ₹ (9000 + 500)

= ₹ (8000 + 500 + 500 + 500)

$= ₹\ (8000 + 3 \times 500)$

$= ₹\ [8000 + \mathbf{(4 - 1)} \times 500]$ (4వ సంవత్సరము)

$= ₹\ 9500$

5వ సం॥లో ఆమె జీతము $= ₹\ (9500 + 500)$

$= ₹\ (8000+500+500+500 + 500)$

$= ₹\ (8000 + 4 \times 500)$

$= ₹\ [8000 + \mathbf{(5 - 1)} \times 500]$ (5వ సంవత్సరము)

$= ₹\ 10000$

పై వాని నుంచి ఒక సంఖ్యల జాబితా ఏర్పడటం మనం గమనించవచ్చును. అది క్రింది విధంగా వుంటుంది.

8000, 8500, 9000, 9500, 10000, . . .

ఇది ఒక అంకశ్రేఢి.

పై అమరిక ఆధారంగా 6 వ, 15వ సం॥లలో ఆమె యొక్క జీతమును కనుగొనగలమా? ఆమె ఒకవేళ 25 సంవత్సరముల పాటు అదే ఉద్యోగంలో కొనసాగితే 25 వ సంవత్సరములో ఆమె జీతమును కనుగొనగలమా? ప్రతి సంవత్సరము ఆమె జీతమును ముందున్న సంవత్సరములో ఆమె జీతానికి ₹ 500 కలపటం ద్వారా కనుగొనవచ్చు. అయితే దీనిని వీలైనంత తక్కువ సమయంలో వీలైనంత సులభంగా కనుగొనగలమా? పై ప్రక్రియలలో జీతమును కనుగొనే విధానం మనకు కొంత అవగాహన అయినది కనుక దానిని ఉపయోగిద్దాం.

15వ సంవత్సరములో జీతము = 14వ సం॥ములు జీతము + ₹ 500

$$= ₹\left[8000 + \underbrace{500 + 500 + 500 + \ldots + 500}_{13\ \text{సార్లు}}\right] + ₹500$$

$= ₹\ [8000 + 14 \times 500]$

$= ₹\ [8000 + \mathbf{(15 - 1)} \times 500] = ₹\ 15000$

అనగా మొదటి జీతం + (15 – 1) × సంవత్సరమునకు పెరిగేది.

అదేవిధంగా 25వ సంవత్సరములో ఆమె జీతం

$₹\ [8000 + \mathbf{(25 - 1)} \times 500] = ₹\ 20000$

= మొదటి జీతం + **(25 – 1)** × సంవత్సరమునకు పెరిగేది

ఈ ఉదాహరణ ఒక అంకశ్రేఢిలో 15వ పదమును, 25వ పదమును రాయుటకు కావలసిన ఒక సులువు పద్ధతిని ఇచ్చింది. ఇదే పద్ధతిని ఉపయోగించి ఒక అంకశ్రేఢి యొక్క n వ పదమును కనుగొందాం.

$a_1, a_2, a_3, \ldots$ అనే ఒక అంకశ్రేఢిని తీసుకుందాం.

దీనిలో మొదటి పదం $a_1 = a$ మరియు సామాన్యభేదం $= d$ అనుకుందాం.

$\therefore$ **రెండవ** పదం $a_2 = a + d = a + \mathbf{(2 - 1)}\, d$

మూడవ పదం $a_3 = a_2 + d = (a + d) + d = a + 2d = a + \mathbf{(3 - 1)}\, d$

నాల్గవ పదం $a_4 = a3 + d = (a + 2d) + d = a + 3d = a + \mathbf{(4 - 1)}\, d$

. . . .

. . . .

పై అమరిక ఆధారంగా ***n*** వ పదం $a_n = a + (n - 1)\, d$ అని చెప్పవచ్చు.

అనగా మొదటి పదం ***a***, సామాన్య భేదం ***d*** గా వుంటే అంకశ్రేఢి యొక్క ***n***వ పదము

$a_n = a + (n - 1)\, d.$

$\boldsymbol{a_n}$ ను అంకశ్రేఢి యొక్క సాధారణ పదము అనికూడా అంటాం.

ఒక అంకశ్రేఢిలో *m* పదాలున్న *m*వ పదము చివరి పదం అవుతుంది. దీనిని కొన్నిసార్లు '***l***' చేత కూడా సూచిస్తారు.

అంకశ్రేఢిలో పదాలను కనుగొనుట : పై సూత్రమును ఉపయోగించి ఒక అంకశ్రేఢిలోని వివిధ పదాలను కనుగొనవచ్చు.

కొన్ని ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ-3. 5, 1, –3, –7 . . .అంకశ్రేఢిలో 10వ పదమును కనుగొనుము.

సాధన : ఇచ్చుట, $a = 5$, $d = 1 - 5 = - 4$ మరియు $n = 10$.

$a_n = a + (n - 1)\, d$ నుంచి

$$a_{10} = 5 + (10 - 1)\,(-4) = 5 - 36 = -31$$

$\therefore$ అంకశ్రేఢిలో 10వ పదము = – 31.

ఉదాహరణ-4. 21, 18, 15, . . . అంకశ్రేఢిలో ఎన్నవ పదము '– 81' అవుతుంది?

ఏదైనా ఒక పదము '0' అవుతుందా? నీ సమాధానమునకు కారణాలిమ్ము ?

సాధన : ఇచ్చుట $a = 21$, $d = 18 - 21 = - 3$ మరియు $a_n = - 81$,

$$a_n = a + (n - 1)\, d,$$
$$- 81 = 21 + (n - 1)(- 3)$$
$$- 81 = 24 - 3n$$
$$- 105 = - 3n$$
$$\therefore \quad n = 35$$

అనగా పై అంకశ్రేఢిలో 35వ పదము – 81 అవుతుంది.

తరువాత $a_n = 0$ అయ్యే విధంగా n ను కనుగొనాలి.

$$\Rightarrow 21 + (n - 1)\,(-3) = 0,$$
$$3(n - 1) = 21$$
$$n = 8$$

అనగా అంకశ్రేఢిలో 8వ పదము సున్నా అవుతుంది.

ఉదాహరణ-5. 3వ పదము 5; 7 వ పదము 9గా వుండునట్లు ఒక అంకశ్రేఢిని కనుగొనుము.

సాధన :

$$a_3 = a + (3 - 1)\, d = a + 2d = 5 \qquad (1)$$

$$a_7 = a + (7 - 1)\, d = a + 6d = 9 \qquad (2)$$

సమీకరణాలు (1) మరియు (2) ల నుంచి

$$a = 3, d = 1$$

$\therefore$ కావలసిన అంకశ్రేఢి : 3, 4, 5, 6, 7, . . .

ఉదాహరణ-6. 5, 11, 17, 23, . . . జాబితాలో 301 వుంటుందో లేదో కనుగొనుము?

సాధన : ఇచ్చుట

$a_2 - a_1 = 11 - 5 = 6$, $a_3 - a_2 = 17 - 11 = 6$, $a_4 - a_3 = 23 - 17 = 6$

అనగా $k = 1, 2, 3,....$ లకు $(a_{k+1} - a_k)$ స్థిరము.

$\therefore$ ఇవ్వబడిన సంఖ్యల జాబితా ఒక అంకశ్రేఢి అవుతుంది.

ఈ అంకశ్రేఢిలో $a = 5$ మరియు $d = 6$

ఇక 301 ఈ జాబితాలో వుంటుందో? వుండదో ? కనుగొనాలి. దీనిని నిర్ణయించుటకు 301 ఈ జాబితాలో nవ పదంగా వుందనుకుందాం. అనగా $a_n = 301$.

అయితే

$$a_n = a + (n - 1)\, d \text{ అని మనకు తెలుసు.}$$

$$\therefore \quad 301 = 5 + (n - 1) \times 6$$

లేదా $\quad 301 = 6n - 1$

$$\therefore \quad n = \frac{302}{6} = \frac{151}{3}$$

అయితే n ఒక ధన పూర్ణ సంఖ్య కావలెను (ఎందుకు?)

కనుక 301ఇచ్చిన జాబితాలో వుండదు.

ఉదాహరణ-7. 3 చే భాగించబడే రెండంకెల సంఖ్యలు ఎన్ని?

సాధన : 3 చే భాగించబడే రెండంకెల సంఖ్యల జాబితా :

$$12, 15, 18, . . . , 99$$

ఇది ఒక అంకశ్రేఢియేనా? అవును. ఇచ్చుట, $a = 12$, $d = 3$, $a_n = 99$.

$a_n = a + (n-1)\,d$ అని మనకు తెలుసు.

$99 = 12 + (n-1) \times 3$

$87 = (n-1) \times 3$

$n - 1 = \frac{87}{3} = 29$

$n = 29 + 1 = 30$

అనగా 3చే భాగించబడే రెండంకెల సంఖ్యలు 30 గలవు.

ఉదాహరణ-8. 10, 7, 4, . . ., – 62 అంకశ్రేఢిలో చివరి నుంచి 11వ పదమును కనుగొనుము?

సాధన : ఇచ్చుట, $a = 10$, $d = 7 - 10 = -3$, $l = -62$,

చివరి నుంచి 11వ పదమును కనుగొనవలెనన్న ముందుగా శ్రేఢిలో ఎన్ని పదాలు వున్నవో కనుగొనవలెను. అయితే

$l = a + (n-1)\,d$ అని మనకు తెలుసు.

$-62 = 10 + (n-1)(-3)$

$-72 = (n-1)(-3)$

$n - 1 = 24$

$n = 25$

అనగా ఇవ్వబడిన అంకశ్రేఢిలో 25 పదాలు వుంటాయి.

అంటే చివరి నుంచి 11వ పదము మొదటి నుంచి 15వ పదం అవుతుంది. (14వ పదం కాదు ఎందుకు?)

$\therefore\ a_{15} = 10 + (15-1)(-3) = 10 - 42 = -32$

చివరి నుంచి 11వ పదము = – 32.

గమనిక : పై శ్రేఢిలో 11వ పదము; – 62 మొదటి పదంగా, సామాన్య భేదం 3 గా గల శ్రేఢిలో 11వ పదము సమానము.

ఉదాహరణ-9. ₹ 1000 లకు సంవత్సరానికి 8% బారు వడ్డీ ప్రకారము ప్రతి సంవత్సరానికి అయ్యే వడ్డీని కనుగొనుము? ఈ వడ్డీల జాబితా ఒక అంకశ్రేఢి అవుతుందా? ఒకవేళ అంకశ్రేఢి అయితే 30 వ సం॥ము చివర అయ్యే వడ్డీని కనుగొనుము?

సాధన : బారువడ్డీని కనుగొనుటకు సూత్రము $\frac{P \times R \times T}{100}$ అని మనకు తెలుసు.

1వ సం॥ము చివర అయ్యే వడ్డీ $= ₹\ \frac{1000 \times 8 \times 1}{100} = \text{Rs } 80$

2వ సం॥ము చివర అయ్యే వడ్డీ $= ₹\ \frac{1000 \times 8 \times 2}{100} = ₹160$

3వ సం॥ము చివర అయ్యే వడ్డీ $= ₹ \dfrac{1000 \times 8 \times 3}{100} = ₹\ 240$

ఈ విధంగా 4వ, 5వ .... సం॥ల చివర అయ్యే వడ్డీలకు కనుగొనవచ్చు. అనగా 1వ, 2వ, 3వ, . . .సం॥ల చివర అయ్యే వడ్డీల విలువ వరుసగా

$$80, 160, 240, \ldots$$

పై జాబితాలో రెండు వరుస పదాల బేధము 80 స్థిరము కనుక ఇది ఒక అంకశ్రేఢి అవుతుంది.

ఇచ్చట $a = 80;\ d = 80.$

అనగా 30 సం॥ల చివర అయ్యే వడ్డీని కనుగొనవలెనన్న మనము a_{30}ని కనుగొనవలె.

$\therefore \quad a_{30} = a + (30 - 1)\, d = 80 + 29 \times 80 = 2400$

$\therefore$ 30 సం॥ముల చివర అయ్యే వడ్డీ = ₹ 2400.

ఉదాహరణ-10. ఒక పూలపాదులో మొదటి వరుసలో 23 గులాబీ చెట్లు రెండవ వరుసలో 21, మూడవ వరుసలో 19 ...... వున్నాయి. చివరి వరుసలో 5 చెట్లు వున్న ఎన్ని వరుసలలో గులాబీ చెట్లు కలవు?

సాధన : 1వ, 2వ, 3వ, . . ., చివరి వరుసలోని చెట్ల సంఖ్య వరుసగా

$$23, 21, 19, \ldots, 5$$

ఇది ఒక అంకశ్రేఢి (ఎందుకు ?).

పూలపాదులోని వరుసల సంఖ్య n అనుకొనిన

$a = 23,\ d = 21 - 23 = -2,\ a_n = 5$

$\therefore \quad a_n = a + (n - 1)\, d$

$5 = 23 + (n - 1)(-2)$

$\Rightarrow \quad -18 = (n - 1)(-2)$

$\Rightarrow \quad n = 10$

$\therefore$ పూల పాదులోని వరుసల సంఖ్య = 10.

అభ్యాసము - 6.2

1. మొదటి పదము a, సామాన్య బేధము d, nవ పదము a_n అయిన క్రింది పట్టికను పూరింపుము.

S. No.	a	d	n	a_n
(i)	7	3	8	. . .
(ii)	– 18	. . .	10	0

(iii)	. . .	– 3	18	– 5
(iv)	– 18.9	2.5	. . .	3.6
(v)	3.5	0	105	. . .

2. కనుగొనుము

   (i) 10, 7, 4 ...... అంకశ్రేఢిలో 30వ పదము.

   (ii) $-3, \frac{-1}{2}, 2, \ldots$.. అంకశ్రేఢిలో 11వ పదము.

3. క్రింది వానిని కనుగొనుము.

   (i) $a_1 = 2;\ a_3 = 26$ అయిన a_2 ను కనుగొనుము

   (ii) $a_2 = 13;\ a_4 = 3$ అయిన a_1, a_3 లను కనుగొనుము

   (iii) $a_1 = 5;\ a_4 = 9\frac{1}{2}$ అయిన a_2, a_3 లను కనుగొనుము

   (iv) $a_1 = -4;\ a_6 = 6$ అయిన a_2, a_3, a_4, a_5 లను కనుగొనుము

   (v) $a_2 = 38;\ a_6 = -22$ అయిన a_1, a_3, a_4, a_5 లను కనుగొనుము

4. 3, 8, 13, 18, . . . అంకశ్రేఢిలో ఎన్నవ పదము 78 అవుతుంది?

5. క్రింద ఇవ్వబడిన అంకశ్రేఢులలోని పదాల సంఖ్యను కనుగొనుము?

   (i) 7, 13, 19, . . . , 205 (ii) $18, 15\frac{1}{2}, 13, \ldots, -47$

6. 11, 8, 5, 2 . . .అంకశ్రేఢిలో '–150' ఒక పదంగా వుంటుందో లేదో పరిశీలించుము/కనుగొనుము?

7. ఒక అంకశ్రేఢిలో 11వ పదము 38 మరియు 16వ పదము 73 అయిన 31వ పదమును కనుగొనుము?

8. ఒక అంకశ్రేఢిలో 3వ, 9 వ పదాలు వరుసగా 4, – 8 అయిన ఎన్నవ పదము '0' (సున్నా) అవుతుంది?

9. ఒక అంకశ్రేఢిలో 17వ పదము 10వ పదంకంటే 7 ఎక్కువ. అయిన సామాన్య భేదం ఎంత?

10. రెండు అంకశ్రేఢుల సామాన్య భేదం సమానము. వాని 100వ పదాల మధ్య భేదం 100 అయిన వాని 1000వ పదాల మధ్య భేదం మెంత?

11. 7 చే భాగించబడే మూడంకెల సంఖ్యలు ఎన్ని కలవు?

12. 10 మరియు 250 ల మధ్యగల 4 యొక్క గుణిజాల సంఖ్యను కనుగొనుము?

13. 63, 65, 67, ... మరియు 3, 10, 17, . . . అంకశ్రేఢుల nవ పదాలు సమానము అయిన n విలువను కనుగొనుము?

14. 3 వ పదము 16 గా ; 7వ పదము, 5వ పదము కంటే 12 ఎక్కువ వుండునట్లుగా ఒక అంకశ్రేఢిని కనుగొనుము?

15. 3, 8, 13, . . ., 253 అంకశ్రేఢి యొక్క చివర నుంచి 20వ పదమును కనుగొనుము?

16. ఒక అంకశ్రేఢిలో 4వ, మరియు 8వ పదాల మొత్తము 24 మరియు 6వ, 10వ పదాల మొత్తము 44 అయిన మొదటి మూడు పదాలను కనుగొనుము?

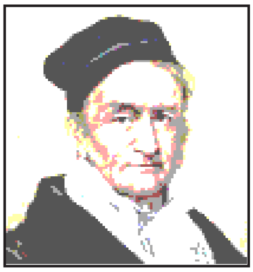
17. సుబ్బారావు 1995 వసం॥లో నెలకు ₹ 5000 జీతంతో ఉద్యోగంలో చేరాడు. అతని జీతము సం॥మునకకు ₹ 200 పెరిగిన అతని జీతము ఏ సం॥ములలో ₹ 7000 అవుతుంది?

6.4 ఒక అంకశ్రేఢిలో మొదటి n పదాల మొత్తము

శీర్షిక 6.1 లో చర్చించిన హేమ విషయాన్ని మరియొక సారి పరిశీలిద్దాం. ఈమె తన కూతురు మొదటి పుట్టినరోజున ₹ 1000 లు రెండవ పుట్టిన రోజున ₹1500, మూడవ పుట్టిన రోజున ₹2000.... ఒక డబ్బులు పెట్టెలో వుంచుతూ పోయింది. అయితే ఆమె కూతురు యొక్క 21 వ పుట్టిన రోజు అనంతరము డబ్బుల పెట్టెలోని సొమ్ము మొత్తం ఎంత వుంటుంది?

ఇచ్చట మొదటి, రెండవ, మూడవ ..... పుట్టిన రోజున పెట్టెలో వుంచిన సొమ్ము విలువలు వరుసగా 1000, 1500, 2000, . . . ఇలా 21వ పుట్టిన రోజు వరకూ కొనసాగించబడింది. 21వ పుట్టిన రోజు అనంతరం పెట్టెలోని మొత్తం సొమ్మును కనుగొనవలెనన్న పై జాబితాలో 21 పదాలను వరుసగా రాసి వాని మొత్తమును కనుగొనవలసి వుంటుంది. ఈ విధంగా చేయటం సమయం వృధా చేయటమే కాకుండా కష్టమైనదిగా మీరు భావించటం లేదా? దీనిని తక్కువ సమయంలో సులభంగా చేయలేమా?

6.4.1 'గాస్' పదాల మొత్తం కనుగొన్న విధానం



కార్ల్ ఫ్రెడరిక్ గాస్ **(1777-1855)** ప్రఖ్యాత జర్మన్ గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు

గాస్ 10 సం॥ల వయస్సులో సాధించిన ఒక సమస్యను ఇపుడు మనము పరిశీలిద్దాం. ఇతను 10సం॥ల వయస్సులో వున్నపుడు 1 నుంచి 100 వరకూ గల అన్ని సంఖ్యల మొత్తం ఎంత? అని ఇతనిని ప్రశ్నించటం జరిగింది. ఇతను దానికి సమాధానంగా 5050 అని చెప్పినాడు. అతను ఏవిధంగా సమాధానం చెప్పాడో ఊహించగలరా ?

అతను దానిని ఈ క్రింది విధంగా రాసాడు.

$$S = 1 + 2 + 3 + . . . + 99 + 100$$

తిరిగి అతను దీనినే తిరిగి క్రింద విధంగా రాసాడు.

$$S = 100 + 99 + . . . + 3 + 2 + 1$$

అతను ఈ రెండింటినీ కూడి సూక్ష్మీకరించి ఫలితమును ఈ క్రింది విధంగా కనుగొన్నాడు.

$$2S = (100 + 1) + (99 + 2) + . . . + (3 + 98) + (2 + 99) + (1 + 100)$$

$$= 101 + 101 + . . . + 101 + 101 \text{ (100 సార్లు)}$$

(దీనిని ఆలోచించుము మరియు సరిచూడుము)

$$S = \frac{100\times101}{2} = 5050, \quad \text{మొత్తము} = 5050.$$

6.4.2 అంకశ్రేఢిలో n పదాల మొత్తము

మనం కూడా $a, a+d, a+2d, \ldots$ శ్రేఢిలో n పదాల మొత్తాన్ని కనుగొనుటకు గాస్ పద్ధతినే పాటిద్దాం.

పై శ్రేఢి యొక్క nవ పదము a_n అనుకొనిన, $a_n = a + (n-1)d$

పై శ్రేఢిలో మొదటి n పదాల మొత్తము S_n అనుకొనిన

$$S_n = a + (a+a) + (a+2d) + \ldots + a + (n-1)d$$

$$S_n = (a + (n-1)d) + (a + (n-2)d + \ldots + a$$

కూడగా $2S_n = (2a + (n-1)d) + (2a + (n-1)d) + \ldots. + (2a + (n-1)d)$ (n సార్లు)

$$= n(2a + (n-1)d)$$

$$\therefore\ S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = \frac{n}{2}[a + a + (n-1)d]$$

$$= \frac{n}{2}\ [\text{మొదటిపదం} + n\text{వ పదం}] = \frac{n}{2}(a + a_n)$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] \qquad [\because a_n = a + (n-1)d]$$

ఒక అంకశ్రేఢిలో మొదటి పదము, చివరి పదములు మాత్రమే తెలిసి సామాన్య భేదం తెలియునపుడు

$S_n = \frac{n}{2}(a + a_n)$ సూత్రమును ఉపయోగించి S_nను సులభంగా కనుగొనవచ్చు.

హేమ కూతురు యొక్క సొమ్ము

తిరిగి మన ప్రశ్నకు పరిశీలిద్దాం.

హేమ కూతురు యొక్క 1వ, 2వ, 3వ, 4వ, . . ., పుట్టిన రోజున పెట్టెలో వుంచే సొమ్ము వరుసగా 1000, 1500, 2000, 2500, . . .,

ఇది ఒక అంకశ్రేఢి. మనము హేమ కూతురు యొక్క 21వ పుట్టినరోజు అనంతరము పెట్టెలోని మొత్తం సొమ్మును కనుగొనాలి.

ఇచ్చుట, $a = 1000$, $d = 500$ మరియు $n = 21$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d],$$

$$S = \frac{21}{2}[2 \times 1000 + (21-1) \times 500]$$

$$= \frac{21}{2}[2000 + 10000]$$

$$= \frac{21}{2}[12000] = 126000$$

21వ పుట్టిన రోజు అనంతరము పెట్టెలోని మొత్తం సొమ్ము = ₹ 1,26,000.

S బదులుగా S_n ను వాడుదాం. దీనివల్ల ఎన్ని పదాల మొత్తం మనం కనుగొంటున్నామో తెలుస్తుంది. మొదటి 20 పదాల మొత్తమును కనుగొనుటకు మనం S_{20} ని వాడతాం. మనం అంకశ్రేఢిలో మొదటి n పదాల మొత్తాన్ని కనుగొనుటకు ఉపయోగించే సూత్రములో నాలుగు రాశులు కలవు. అవి S_n, a, d మరియు n. వీనిలో ఏవైనా మూడు రాశుల విలువలు తెలిపిన నాల్గవ రాశిని కనుగొనగలం.

గమనిక : ఒక అంకశ్రేఢిలో మొదటి n పదాల మొత్తం నుంచి మొదటి $(n-1)$ పదాల మొత్తాన్ని తీసివేసిన ఆశ్రేఢి యొక్క nవ పదము వస్తుంది. అనగా $a_n = S_n - S_{n-1}$.

ఇవి చేయండి

క్రింద ఇవ్వబడిన ప్రతి అంకశ్రేఢిలో పేర్కొన్న పదాల మొత్తమును కనుగొనుము.

(i) 16, 11, 6 .....; 23 పదాలు (ii) $-0.5, -1.0, -1.5, ...;$ 10 పదాలు

(iii) $-1, \frac{1}{4}, \frac{3}{2}.....,$ 10 పదాలు

కొన్ని ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ-11. ఒక అంకశ్రేఢిలో మొదటి పదం 10 మరియు మొదటి 14 పదాల మొత్తము 1050 అయిన 20వ పదమును కనుగొనుము.

సాధన : ఇచ్చుట $S_n = 1050; n = 14, a = 10$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

$$1050 = \frac{14}{2}[2a+13d] = 140+91d$$

$$910 = 91\,d$$

$$\therefore\ d = 10$$

$$\therefore\ a_{20} = 10 + (20-1) \times 10 = 200$$

ఉదాహరణ-12. 24, 21, 18, . . . అంకశ్రేఢిలో ఎన్ని పదాలను తీసుకున్న వాని మొత్తం 78 అవుతుంది?

సాధన : ఇచ్చుట, $a = 24$, $d = 21 - 24 = -3$, $S_n = 78$. n యొక్క విలువను కనుగొనాలి.

$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$ అని మనకు తెలుసు

$$78 = \frac{n}{2}[48+(n-1(-3)] = \frac{n}{2}[51-3n]$$

$$3n^2 - 51n + 156 = 0$$

$$\Rightarrow \quad n^2 - 17n + 52 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (n-4)(n-13) = 0$$

$$\therefore \quad n = 4 \text{ or } 13$$

n యొక్క రెండు విలువలను పరిగణలోనికి తీసుకోవచ్చు. అనగా పదాల సంఖ్య = 4 లేదా 13.

గమనించిన అంశాలు

1. ఇచ్చుట 4 పదాల మొత్తము = 13 పదాల మొత్తము = 78.
2. ఈ శ్రేఢిలో 5వ పదం నుంచి 13వ పదం వరకూ గల పదాల మొత్తం సున్నా (0). ఎందుకనగా ఇచ్చట సామాన్యభేధము యొక్క విలువ ఋణాత్మకము. దీనివల్ల కొన్ని పదాలు ధనాత్మకము, మరికొన్ని పదాలు ఋణాత్మకం అవుతూ ఫలితం శూన్యం కావచ్చు.

ఉదాహరణ-13. క్రింది వాని మొత్తాలను కనుగొనుము.

(i) మొదటి 1000 ధనపూర్ణ సంఖ్యలు (ii) మొదటి n ధన పూర్ణసంఖ్యలు

సాధన :

(i) $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 1000$ అనుకొనుము.

$S_n = \frac{n}{2}(a+l)$ ను ఉపయోగించిన

$$S_{1000} = \frac{1000}{2}(1+1000) = 500 \times 1001 = 500500$$

మొదటి 1000 ధనపూర్ణ సంఖ్యల మొత్తం = 500500.

(ii) $S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$ అనుకొనుము.

ఇచ్చుట $a = 1$ మరియు చివరి పదము $l = n$.

$$\therefore S_n = \frac{n(1+n)}{2} \quad (\text{లేదా}) \quad S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

అనగా మొదటి n ధన పూర్ణ సంఖ్యల మొత్తం $\boldsymbol{S_n = \frac{n(n+1)}{2}}$

ఉదాహరణ-14. $a_n = 3 + 2n$ ను n వ పదంగా కలిగిన శ్రేఢి యొక్క మొదటి 24 పదాల మొత్తాన్ని కనుగొనుము?

సాధన :

$$a_n = 3 + 2n,$$

$$a_1 = 3 + 2 = 5$$

$$a_2 = 3 + 2 \times 2 = 7$$

$$a_3 = 3 + 2 \times 3 = 9$$

$\vdots$

సంఖ్యల జాబితా : 5, 7, 9, 11, . . .

ఇచ్చుట, $7 - 5 = 9 - 7 = 11 - 9 = 2$ ....

అనగా ఈ జాబితా ఒక అంకశ్రేఢి. దీని మొదటి పదం $a = 5$, సామాన్య బేధము $d = 2$.

$$S_{24} = \frac{24}{2}[2 \times 5 + (24-1) \times 2] = 12(10+46) = 672$$

ఇచ్చిన శ్రేఢిలో 24 పదాల మొత్తము = 672.

ఉదాహరణ-15. ఒక టెలివిజన్ తయారీ కంపెనీ 3వ సం॥లో 600 టెలివిజన్లను 7వ సం॥ము 700 సెట్లను తయారు చేసింది. ఇది తయారీ చేసే టెలివజన్ల సంఖ్య ప్రతీ సం॥ము స్థిరంగా పెరుగుతూ వుంటే

(i) 1వ సం॥లలో అది తయారు చేసిన టెలివిజన్ల్ సంఖ్య

(ii) 10వ సం॥వ అది తయారు చేసిన టెలివిజన్ సంఖ్య

(iii) మొదటి 7 సం॥ సంవత్సరాలలో అది తయారు చేసిన మొత్తం సెట్ల సంఖ్యను కనుగొనుము?

సాధన : (i) ప్రతి సంవత్సరము తయారుచేసే టెలివిజన్ సెట్ల సంఖ్య ఒక స్థిర విలువతో పెరుగుతూ వుంటే 1వ, 2వ, 3వ, . . ., సం॥లలో తయారయ్యే టెలివిజన్ సెట్ల సంఖ్యల జాబితా ఒక అంకశ్రేఢిని ఏర్పరుస్తుంది.

n వ సం॥లో తయారుచేసే టెలివిజన్ సెట్ల సంఖ్యను a_n అనుకొనిన

$a_3 = 600$ మరియు $a_7 = 700$ గా ఇవ్వబడినది.

$\Rightarrow$ $a + 2d = 600$

మరియు $a + 6d = 700$

పై సమీకరణాలను సాధించిన $d = 25$ మరియు $a = 550$ వచ్చును.

$\therefore$ మొదటి సం॥లో తయారైన టెలివిజన్ సెట్ల సంఖ్య = 550.

(ii) $a_{10} = a + 9d = 550 + 9 \times 25 = 775$

అనగా 10 వ సం॥లో తయారుచేసిన టెలివిజన్ల్ సంఖ్య = 775.

(iii)
$$S_7 = \frac{7}{2}[2 \times 550 + (7-1) \times 25]$$
$$= \frac{7}{2}[1100 + 150] = 4375$$

మొదటి 7 సం॥లలో తయారైన మొత్తం టెలివిజన్ల్ సంఖ్య = 4375.

అభ్యాసము - 6.3

1. క్రింది అంకశ్రేఢులలో పేర్కొన్న పదాల మొత్తాలను కనుగొనుము?

(i) 2, 7, 12, . . ., 10 పదాలు. (ii) –37, –33, –29, . . ., 12 పదాలు.

(iii) 0.6, 1.7, 2.8, . . ., 100 పదాలు. (iv) $\frac{1}{15}, \frac{1}{12}, \frac{1}{10}$, ..., పదాలు.

2. క్రింది వాని మొత్తాలను కనుగొనుము?

(i) $7+10\frac{1}{2}+14+....+84$ (ii) 34 + 32 + 30 + . . . + 10

(iii) –5 + (–8) + (–11) + . . . + (–230)

3. ఒక అంకశ్రేఢిలో

(i) $a = 5, d = 3, a_n = 50$ అయిన n మరియు S_n లను కనుగొనుము ?
(ii) $a = 7, a_{13} = 35$ అయిన d ని మరియు S_{13} ను కనుగొనుము?
(iii) $a_{12} = 37, d = 3$ అయిన a ను మరియు S_{12} ను కనుగొనుము?
(iv) $a_3 = 15, S_{10} = 125$ అయిన d మరియు a_{10} ను కనుగొనుము?
(v) $a = 2, d = 8, S_n = 90$ అయిన n మరియు a_n ను కనుగొనుము?
(vi) $a_n = 4, d = 2, S_n = –14$ అయిన n మరియు a ను కనుగొనుము ?
(vii) $l = 28$, S = 144 మరియు పదాల సంఖ్య 9 అయిన a కనుగొనుము ?

4. ఒక అంకశ్రేఢిలో మొదటి చివరి పదాలు వరుసగా 17 మరియు 350. సామాన్య భేదం 9 అయిన శ్రేఢిలోని పదాల సంఖ్యను, పదాల మొత్తమును కనుగొనుము?

5. ఒక అంకశ్రేఢిలో 2వ, 3వ పదాలు వరుసగా 14 మరియు 18 అయిన 51 పదాల మొత్తమును కనుగొనుము?

6. ఒక అంకశ్రేఢిలో మొదటి 7 పదాల మొత్తము 49 మరియు 17 పదాల మొత్తము 289 అయిన మొదటి n పదాల మొత్తమును కనుగొనుము?

7. a_n క్రింది విధంగా నిర్వచించబడితే $a_1, a_2, . . ., a_n$, అంకశ్రేఢి అవుతుందని చూపండి. మరియు మొదటి 15 పదాల మొత్తమును కనుగొనండి.

(i) $a_n = 3 + 4n$ (ii) $a_n = 9 – 5n$

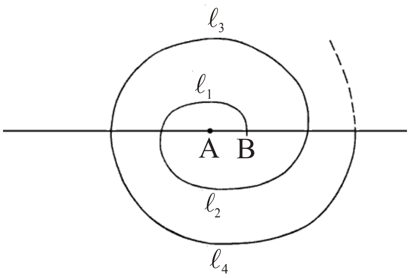
8. ఒక అంకశ్రేఢిలో మొదటి n పదాల మొత్తము $4n – n^2$ అయిన మొదటి పదం ఎంత? (S_1విలువే మొదటి పదము అవుతుందని గుర్తుకు తెచ్చుకోండి) మొదటి రెండు పదాల మొత్తం ఎంత ? రెండవ పదము ఎంత? అదేవిధంగా 3వ పదమును, 10వ పదమును మరియు nవ పదమును కనుగొనుము?

9. 6 చే భాగించబడే మొదటి 40 ధనపూర్ణ సంఖ్యల మొత్తమును కనుగొనుము?

10. ఒక పాఠశాలలో విద్యావిషయక సంబంధిత విషయాలలో అత్యున్నత ప్రతిభ కనపరిచిన వారికి మొత్తం 700 రూపాయలకు 7 బహుమతులు ఇవ్వాలని భావించారు. ప్రతి బహుమతి విలువ దాని ముందున్న దానికి ₹ 20 తక్కువ అయిన ప్రతి బహుమతి విలువను కనుగొనుము?

11. ఒక పాఠశాల ఆవరణలో పర్యావరణ పరిరక్షణకు విద్యార్థులు చెట్లు నాటాలని భావించారు. ప్రతి సెక్షను విద్యార్థులు వారు చదువుతున్న తరగతి సంఖ్యకు సమానమైన చెట్లను అనగా 1వ తరగతి చదువుచున్న ఒక సెక్షన్ విద్యార్థులు 1 చెట్టును, రెండవ తరగతి చదువుచున్న ఒక సెక్షన్ విద్యార్థులు 2చెట్లను నాటాలని ఈ విధంగా 12వ తరగతి వరకూ చేయాలని నిర్ణయించుకున్నారు. అయితే ప్రతి తరగతిలో మూడు సెక్షన్లు వున్న మొత్తం నాటిన చెట్లు ఎన్ని?

12. అర్ధ వృత్తాలచే ఒక సర్పిలాకారము తయారుచేయబడింది. పటంలో చూపిన విధంగా అర్ధవృత్తాల కేంద్రాలు A వద్ద ప్రారంభించబడి A, B ల మధ్య మారుతూ వున్నాయి. అనగా మొదటి అర్ధవృత్త కేంద్రము A, రెండవ అర్ధవృత్త కేంద్రము B మూడవ అర్ధవృత్త కేంద్రము A ...... మరియు అర్ధవృత్తాల వ్యాసార్ధాలు వరుసగా 0.5 సెం.మీ, 1.0 సెం.మీ, 1.5 సెం.మీ, 2.0 సెం.మీ, . . . ఈ విధంగా మొత్తం 13 అర్ధవృత్తాలు వున్న సర్పిలం మొత్తం పొడవు ఎంత? ($\pi = \frac{22}{7}$)



[**సూచన :** వరుస అర్ధవృత్తాల పొడవులు $l_1, l_2, l_3, l_4, \ldots$ మరియు వీని కేంద్రాలు వరుసగా A, B, A, B, ...]

13. 200 చెక్క మొద్దులను క్రింది పటంలో చూపిన విధంగా అమర్చారు. అన్నింటి కంటే క్రింద వున్న వరుసలో 20 చెక్క మొద్దులను, దానిపై 19 మొద్దులను, దానిపైన 18 మొద్దులను ..... అమర్చిన మొత్తం 200 మొద్దులను అమర్చుటకు ఎన్ని వరుసలు కావాలి? అన్నింటికంటే పైన వున్న వరుసలో ఎన్ని చెక్క మొద్దులు కలవు ?

14. బంతి మరియు బకెట్ ఆటలో, ప్రారంభంలో ఒక బకెట్ దానికి 5మీ. దూరంలో ఒక బంతి వుంచబడినవి. మొత్తం 10 బంతులలో మిగిలిన బంతులు ఒకదానికొకటి 3మీ. దూరంలో పటంలో చూపిన విధంగా అమర్చబడినవి. ఆటలో పాల్గొనే వ్యక్తి మొదట బకెట్ వద్ద నుంచి బయలుదేరి మొదటి బంతివద్దకు పోయి

దానిని తీసుకొని వెనుకకు వచ్చి బకెట్‌లో వేయాలి. తరువాత తిరిగి బకెట్ నుంచి బయలుదేరి రెండవ బంతి వద్దకు పోయి దానిని తీసుకొని వచ్చి బకెట్‌లో వేయాలి. ఈ విధంగా అన్ని బంతులను బకెట్‌లో వేయవలెనన్న ఆ వ్యక్తి పరిగెత్తవలసిన మొత్తం దూరం ఎంత?

[**సూచన :** మొదటి, రెండవ బంతులను తీసుకొని రావడానికి ఆట ఆడే వ్యక్తి పరిగెత్తవలసి దూరము వరుసగా $2 \times 5 + 2 \times (5 + 3)$]

6.5 గుణశ్రేఢులు

క్రింది జాబితాలను పరిశీలించండి.

(i) 30, 90, 270, 810 .....

(ii) $\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \frac{1}{256}$.....

(iii) 30, 24, 19.2, 15.36, 12.288

పై ప్రతి జాబితాలో తరువాత వచ్చే పదమును రాయగలమా?

(i)లో ప్రతి పదమును (మొదటి పదం తప్ప) దాని ముందువున్న పదమును 3చే గుణించటం వల్ల పొందవచ్చు.

(ii) లో ప్రతిపదమును(మొదటి పదం తప్ప)దాని ముందువున్న పదమును $\frac{1}{4}$ చే గుణించటం వల్ల పొందవచ్చు.

(iii) ప్రతి పదమును (మొదటి పదం తప్ప)దాని ముందున్న పదమును 0.8చే గుణించటం వల్ల పొందవచ్చు.

పై ప్రతి జాబితాలో ప్రతి పదమును (మొదటి పదం తప్ప) దాని ముందున్న పదమును ఒక స్థిర సంఖ్యచే గుణించటం వల్ల పొందగలుగుతున్నాము. ఇలాంటి సంఖ్యల జాబితాను గుణశ్రేఢి అంటాము. ఆ స్థిర సంఖ్యను సామాన్య నిష్పత్తి 'r' అంటాము. అనగా పైన ఉదహరించిన (i), (ii), (iii) లలో సామాన్య నిష్పత్తి వరుసగా $3, \frac{1}{4}, 0.8$.

గుణశ్రేఢిలోని మొదటి పదమును a చేత, సామాన్య నిష్పత్తిని ' r ' చేత సూచిస్తే రెండవ పదమును పొందవలెనన్న మొదటి పదము a ను సామాన్యనిష్పత్తి r చేత గుణించవలెను.

$\therefore$ రెండవ పదము = ar

అదే విధంగా మూడవ పదము = $ar \cdot r = ar^2$

a, ar, ar^2 ..... ను గుణశ్రేఢి యొక్క సాధారణ రూపము అంటాం.

పై గుణశ్రేఢిలో ఏదైనా ఒక పదము, దాని ముందున్న పదానికి గల నిష్పత్తి 'r'.

అనగా $$\frac{ar}{a} = \frac{ar^2}{ar} = \dots\dots\dots = r$$

ఒకవేళ ఒక గుణశ్రేఢిలోని మొదటి పదమును a_1 చేత, రెండవ పదమును a_2 చేత ..... nవ పదమును a_n చేత సూచిస్తే

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots\dots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = r$$

$\therefore$ $a_1, a_2, a_3 \dots a_n \dots$ ఒక గుణశ్రేఢి కావలెనన్న ప్రతి పదము శూన్యేతరము అవుతూ

$\frac{a_n}{a_{n-1}} = r$ కావలెను.

ఇచ్చుట n ఏదైనా ఒక సహజసంఖ్య మరియు $n \geq 2$.

ఇవి చేయండి.

క్రింది వానిలో గుణశ్రేఢులు కానివేవో కనుగొనుము?

1. 6, 12, 24, 48, ...
2. 1, 4, 9, 16, ...
3. 1, −1, 1, −1, ...
4. −4, −20, −100, −500, ...

గుణశ్రేఢులకు మరికొన్ని ఉదాహరణలు :

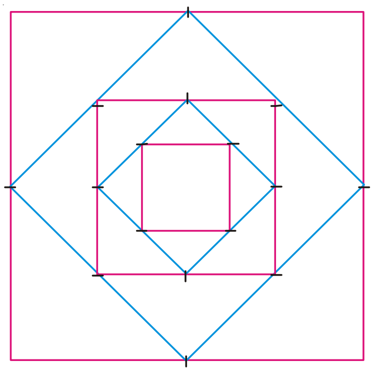
(i) ఒక వ్యక్తి తన నలుగురు మిత్రులకు విడివిగా ఉత్తరాలు రాసి, వారిని కూడా ప్రతి ఒక్కరు మరి నలుగురు వేరు వేరు వ్యక్తులకు ఇదే ఉత్తరాన్ని రాసి పంపించమని కోరాడు. ఈ గొలుసు ఇదేవిధంగా కొనసాగించబడితే మొదటి, రెండవ, మూడవ, నాల్గవ, ... స్థాయిలోని ఉత్తరాల సంఖ్య వరుసగా

1, 4, 16, 256 ....

(ii) ₹ 500 లను సంవత్సరమునకు 10 శాతం చక్రవడ్డీ ప్రకారం ఒక బ్యాంక్‌లో పొదుపు చేసిన మొదటి, రెండవ, మూడవ .... సం॥ల చివర దాని మొత్తం విలువలు వరుసగా

550, 605, 665.5 ......

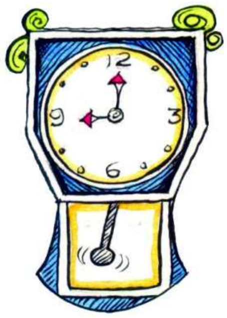
(iii) పటంలో చూపిన విధంగా మొదటి చతురస్రం యొక్క భుజాల మధ్య బిందువులను కలపటం వల్ల రెండవ చతురస్రము యొక్క భుజాల మధ్యబిందువులను కలపటం వల్ల మూడవ చతురస్రము ఏర్పడినవి. ఇదే విధానమును అనంతముగా కొనసాగించబడింది. మొదటి చతురస్రభుజము 16 సెం.మీ. అయిన మొదటి, రెండవ, మూడవ, నాల్గవ ..... చతురస్రాల వైశాల్యాలు వరుసగా



256, 128, 64, 32, ...

(iv) ఒక గడియారం యొక్క లోలకం మొదటి డోలనంలో చేసిన వక్రం/ చాపం పొడవు 18 సెం.మీ. తరువాత ప్రతి డోలనంలో ఏర్పడే చాపం పొడవు దాని ముందు డోలనంలో ఏర్పడ్డ చాపం పొడవులో 0.9 వ వంతు వుండును. అయిన మొదటి, రెండవ, మూడవ, నాల్గవ .... డోలనాలలో ఏర్పడు చాపాల పొడవులు వరుసగా

18, 16.2, 14.58, 13.122......



ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి

1. పైన చర్చించిన ప్రతి జాబితా ఎందుకు గుణశ్రేఢి అవుతుందో వివరించుము?
2. ఒక గుణశ్రేఢిని నిర్ణయించుటకు కావలసిన అంశాలేమిటి?

ఇప్పుడు మొదటి పదము a, సామాన్య నిష్పత్తి r, తెలిసినపుడు ఒక గుణశ్రేఢిని ఎలా నిర్మించాలో మరియు ఇచ్చిన సంఖ్యల జాబితా గుణశ్రేఢి అవుతుందో లేదో ఎలా నిర్ణయిస్తామో చూద్దాం.

ఉదాహరణ-16. మొదటి పదము $a = 3$, సామాన్య నిష్పత్తి $r = 2$ అయిన గుణశ్రేఢిని రాయుము ?

సాధన : మొదటి పదం 'a' కనుక దానిని సులభంగా రాయవచ్చు.

తరువాత గుణశ్రేఢిలో ప్రతి పదము, దాని ముందున్న పదమును, సామాన్య నిష్పత్తిచే గుణించటం వల్ల పొందవచ్చు. అనగా రెండవ పదము కావలెనన్న మనము మొదటి పదము $a = 3$ ను సామాన్య నిష్పత్తి $r = 2$ చే గుణించవలెను.

$\therefore$ రెండవ పదము $= ar = 3 \times 2 = 6$

అదే విధంగా మూడవ పదము = రెండవ పదము × సామాన్యనిష్పత్తి

$= 6 \times 2 = 12$

ఇదే విధానాన్ని కొనసాగిస్తే ఏర్పడే గుణశ్రేఢి :

3, 6, 12, 24,..... .

ఉదాహరణ-17. $a = 256$, $r = \dfrac{-1}{2}$ అయిన గుణశ్రేఢిని రాయుము ?

సాధన : గుణశ్రేఢి సాధారణ రూపము $= a, ar, ar^2, ar^3, ...$

$$= 256, 256\left(\frac{-1}{2}\right), 256\left(\frac{-1}{2}\right)^2, 256\left(\frac{-1}{2}\right)^3$$

$$= 256, -128, 64, -32 ......$$

ఉదాహరణ-18. గుణశ్రేఢి $25, -5, 1, \dfrac{-1}{5}$ యొక్క సామాన్య నిష్పత్తిని కనుగొనుము.

సాధన : ఒక గుణశ్రేఢిలో మొదటి, రెండవ, మూడవ .... పదాలు వరుసగా a_1, a_2, a_3 .... అయిన సామాన్య నిష్పత్తి $r = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{a_3}{a_2} = ...$

ఇచ్చుట $a_1 = 25$, $a_2 = -5$, $a_3 = 1$ కనుక.

సామాన్య నిష్పత్తి $r = \dfrac{-5}{25} = \dfrac{1}{-5} = \dfrac{-1}{5}$.

ఉదాహరణ-19. క్రింది జాబితాలలో ఏవి గుణశ్రేఢులు అవుతాయి ?

(i) 3, 6, 12, ...

(ii) 64, –32, 16,

(iii) $\dfrac{1}{64}, \dfrac{1}{32}, \dfrac{1}{8}, ...$

సాధన : (i) $a_1, a_2, a_3, ...a_n$ ..... లు గుణశ్రేఢి కావలెనన్న పదాలన్ని సున్నాలు కాకూడదు మరియు

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = ... \frac{a_n}{a_{n-1}} = r$$

ఇచ్చుట అన్నీ సున్నా కానీ పదాలే. ఇంకా

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{6}{3} = 2$$

మరియు $\frac{a_3}{a_2} = \frac{12}{6} = 2$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = 2$$

అనగా ఇవ్వబడిన జాబితా ఒక గుణశ్రేఢిని ఏర్పరుస్తుంది. దీని సామాన్యనిష్పత్తి = 2.

(ii) అన్ని పదాలు సున్నా కానీ పదాలే, మరియు

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{-32}{64} = \frac{-1}{2}$$

మరియు $\frac{a_3}{a_1} = \frac{16}{-32} = \frac{-1}{2}$

$$\therefore \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{-1}{2}$$

అనగా ఇవ్వబడిన జాబితా ఒక గుణశ్రేఢిని ఏర్పరుస్తుంది. దీని సామాన్య నిష్పత్తి = $\frac{-1}{2}$.

(iii) అన్ని పదాలు సున్నా కాని పదాలే. మరియు

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{1}{32}}{\frac{1}{64}} = 2$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{32}} = 4$$

ఇచ్చుట $\frac{a_2}{a_1} \neq \frac{a_3}{a_2}$

అనగా ఇవ్వబడిన సంఖ్యల జాబితా గుణశ్రేఢిని ఏర్పరచదు.

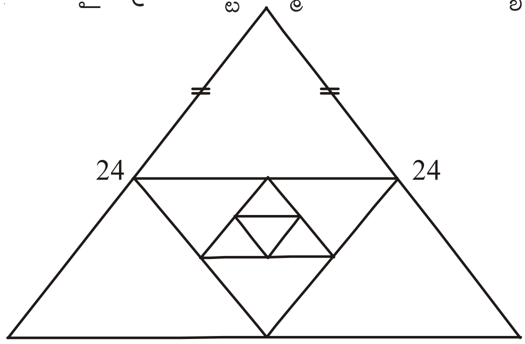
అభ్యాసము - 6.4

1. ఈ క్రింది సంఘటనలలో ఏర్పడే సంఖ్యల జాబితాలలో ఏవి గుణశ్రేఢులను ఏర్పరుస్తాయి?

(i) షర్మిల యొక్క మొదటి సం॥ము జీతము 5,00,000/- ఆ తరువాత ప్రతి సం॥ము ముందున్న సం॥ము యొక్క జీతములో 10% పెరుగుతుంది.

(ii) 30 మెట్లు వున్న ఒక మెట్ల వంతెనలో అన్నింటి కంటే క్రింద వున్న మెట్టు నిర్మాణానికి 100 ఇటుకలు అవసరం. ఆ పై ప్రతి పైమెట్టు నిర్మాణానికి దాని క్రింద మెట్టు నిర్మాణానికి కావలసిన వాని కంటే 2 ఇటుకల తక్కువ అవసరమైన ప్రతి మెట్టు నిర్మాణానికి అవసరమయ్యే ఇటుకల సంఖ్యల జాబితా.

(iii) 24 సెం.మీ భుజం పొడవుగల ఒక సమబాహు త్రిభుజము, యొక్క భుజాల మధ్య బిందువులను కలపటం వల్ల రెండవ త్రిభుజము, దాని భుజాల మధ్య బిందువులను కలపటం వల్ల మూడవ త్రిభుజమేర్పడును. ఈ విధానాన్ని అనంతంగా కొనసాగిస్తే మొదటి, రెండవ, మూడవ .... త్రిభుజాల చుట్టుకొలతలు.



2. గుణశ్రేఢి యొక్క మొదటి పదము a, సామాన్యనిష్పత్తి r లు క్రింద ఇవ్వబడ్డాయి. అయిన మొదటి మూడు పదాలను రాయుము?

(i) $a = 4 \quad r = 3$ (ii) $a = \sqrt{5} \quad r = \frac{1}{5}$

(iii) $a = 81 \quad r = \frac{-1}{3}$ (iv) $a = \frac{1}{64} \quad r = 2$

3. క్రింది వానిలో ఏవి గుణశ్రేఢులు? గుణశ్రేఢి అయితే తరువాత వచ్చే మూడు పదాలను రాయుము?

(i) 4, 8, 16 ..... (ii) $\frac{1}{3}, \frac{-1}{6}, \frac{1}{12}.....$

(iii) 5, 55, 555, ... (iv) −2, −6, −18 .....

(v) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}.....$ (vi) $3, -3^2, 3^3, ...$

(vii) $x, 1, \frac{1}{x},.....$ (viii) $\frac{1}{\sqrt{2}}, -2, \frac{8}{\sqrt{2}}.....$

(ix) 0.4, 0.04, 0.004, ...

4. $x, x + 2, x + 6$ లు ఒక గుణశ్రేఢిలో మూడు వరుస పదాలైన x విలువను కనుగొనుము ?

6.6 గుణశ్రేఢి యొక్క n వ పదము

ఒక సమస్యను పరిశీలిద్దాం. ప్రతి గంటకు 3 రెట్లు అయ్యే ఒక బ్యాక్టీరియా కల్చర్‌లో మొదటి గంటలో 30 బ్యాక్టీరియాలు వున్న 4వ గంట సమయంలో వుండే బ్యాక్టీరియాల సంఖ్య ఎంత ?

దీనికి సమాధానం కొరకు మొదట రెండవ గంటలో బ్యాక్టీరియాల సంఖ్యను కొనుగొందాం.

ప్రతి గంటకు 3 రెట్లు అవుతుంది కనుక

రెండవ గంటలో బ్యాక్టీరియా సంఖ్య = 3 × మొదటి గంటలోని బ్యాక్టీరియా సంఖ్య

$= 3 \times 30 = 30 \times 3^1$

$= 30 \times 3^{(2-1)}$

$= 90$

మూడవ గంటలో బ్యాక్టీరియా సంఖ్య = 3 × రెండవ గంటలోని బ్యాక్టీరియా సంఖ్య

$= 3 \times 90 \qquad = 30 \times (3\times3)$

$= 30 \times 3^2 \qquad = 30 \times 3^{(3-1)}$

$= 270$

నాల్గవ గంటలో బ్యాక్టీరియా సంఖ్య = 3 × మూడవ గంటలో బ్యాక్టీరియా సంఖ్య

$= 3 \times 270 \qquad = 30 \times (3\times3\times3)$

$= 30 \times 3^3 \qquad = 30 \times 3^{(4-1)}$

$= 810$

ఇచ్చట మనం ఒక సంఖ్యల జాబితాను పొందటం గమనించగలం. అది

30, 90, 270, 810, ...

పై జాబితా ఒక గుణశ్రేఢి (ఎందుకు ?)

పై అమరిక నుంచి 20 గంటల సమయములో వుండే బ్యాక్టీరియా సంఖ్యను కనుగొనగలవా ?

పై విధానాన్ని అనుసరించి లేదా పై అమరిక ఆధారంగా సులభంగా మనం 20 గం॥ల సమయంలో వుండే బ్యాక్టీరియా సంఖ్యను క్రింది విధంగా కనుగొనగలం.

$$= 30 \times \underbrace{(3 \times 3 \times \ldots \times 3)}_{19 \text{ సార్లు}}$$

$$= 30 \times 3^{19} \qquad = 30 \times 3^{(20-1)}$$

ఈ ఉదాహరణ నుంచి మనం సులభంగా 25వ పదమును, 35వ పదమును ఇంకా n వ పదమును కూడా కనుగొనలం.

a_1, a_2, a_3 ..... ఒక గుణశ్రేఢి మరియు దీని సామాన్య నిష్పత్తిని r అనుకుందాం.

రెండవ పదం $a_2 = ar = ar^{(2-1)}$

మూడవ పదం $a_3 = a_2 \times r = (ar) \times r = ar^2 = ar^{(3-1)}$

నాల్గవ పదం $a_4 = a_3 \times r = ar^2 \times r = ar^3 = ar^{(4-1)}$

....

....

పై అమరిక నుంచి n వ పదము $a_n = ar^{n-1}$ అని నిర్ధారించగలము.

అనగా మొదటి పదము a, సామాన్య నిష్పత్తి r గా గల ఒక గుణశ్రేఢి యొక్క nవ పదము $a_n = ar^{n-1}$.

ఇపుడు కొన్ని ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ-20. $\frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}$....... గుణశ్రేఢి యొక్క 20వ పదమును మరియు nవ పదమును కనుగొనుము?

సాధన : ఇచ్చుట $a = \frac{5}{2}$ మరియు $r = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{2}} = \frac{1}{2}$

$$\therefore \quad a_{20} = ar^{20-1} = \frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{19} = \frac{5}{2^{10}}$$

మరియు $$a_n = ar^{n-1} = \frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{5}{2^n}$$

ఉదాహరణ-21. 2, $2\sqrt{2}$, 4 ..... గుణశ్రేఢిలో ఎన్నవ పదము 128 అవుతుంది?

సాధన : ఇచ్చుట $a = 2$ $r = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

nవ పదము = 128 అనుకొనిన

$$a_n = ar^{n-1} = 128$$

$$2.(\sqrt{2})^{n-1} = 128$$

$$(\sqrt{2})^{n-1} = 64$$

$$(2)^{\frac{n-1}{2}} = 2^6$$

$$\Rightarrow \quad \frac{n-1}{2} = 6$$

$$\therefore \quad n = 13.$$

అనగా 13వ పదము 128 అవుతుంది.

ఉదాహరణ-22. ఒక గుణశ్రేఢిలో 3వ పదము 24 మరియు 65 వ పదము 192 అయిన 10వ పదమును కనుగొనుము?

సాధన : ఇచ్చుట $a_3 = ar^2 = 24$ ...(1)

$a_6 = ar^5 = 195$ ...(2)

(2) ను (1) భాగించగా $\dfrac{ar^5}{ar^2} = \dfrac{195}{24}$

$$\Rightarrow \quad r^3 = 8 = 2^3$$

$$\Rightarrow \quad r = 2$$

r విలువను (1)లో ప్రతిక్షేపించి సూక్ష్మీకరించగా $a = 6.$

$\therefore \; a_{10} = ar^9 = 6(2)^9 = 3072.$

అభ్యాసము -6.5

1. క్రింద ఇవ్వబడిన ప్రతిగుణశ్రేఢికి సామాన్యనిష్పత్తిని, n వ పదమును కనుగొనుము ?

   (i) $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}.........$ (ii) $2, -6, 18, -54$

   (iii) $-1, -3, -9, -18$ .... (iv) $5, 2, \frac{4}{5}, \frac{8}{25}.........$

2. 5, 25, 125, ... అనే గుణశ్రేఢి యొక్క 10వ, nవ పదాలను కనుగొనుము ?

3. క్రింది గుణశ్రేఢిలలో పేర్కొన్న పదాలను కనుగొనుము?

   (i) $a_1 = 9;\ r = \frac{1}{3};$ అయిన a_7 (ii) $a_1 = -12;\ r = \frac{1}{3};$ అయిన a_6

4. (i) 2, 8, 32, ... గుణశ్రేఢిలో ఎన్నవ పదము 512 అవుతుంది ?

   (ii) $\sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}$ ...... గుణశ్రేఢిలో ఎన్నవ పదము 729 అవుతుంది ?

   (iii) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}$..... గుణశ్రేఢిలో ఎన్నవ పదము $\frac{1}{2187}$ అవుతుంది ?

5. ఒక గుణశ్రేఢి యొక్క 8వ పదము 192 మరియు సామాన్య నిష్పత్తి 2 అయిన 12వ పదమును కనుగొనుము?

6. ఒక గుణశ్రేఢిలో నాల్గవ పదము $\frac{2}{3}$ మరియు 7వ పదము $\frac{16}{81}$ అయిన ఆ శ్రేఢిని కనగొనుము ?

7. 162, 54, 18 ..... గుణశ్రేఢి మరియు $\frac{2}{81}, \frac{2}{27}, \frac{2}{9}$.... గుణశ్రేఢుల n వ పదాలు సమానము అయిన n విలువను కనుగొనుము ?

ఐచ్ఛిక అభ్యాసము
[ఇది పరీక్ష కొరకు ఉద్దేశించినది కాదు]

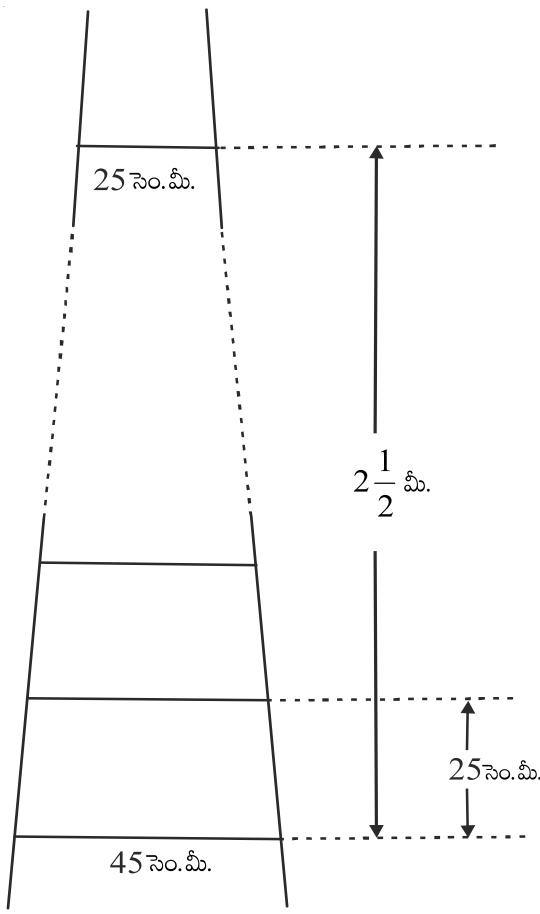
1. 121, 117, 113, . . ., అంకశ్రేఢిలో ఎన్నవ పదము మొదటి ఋణపదము అవుతుంది.

   [**సూచన :** $a_n < 0$ అయ్యే విధంగా n విలువ కనుగొనుము]

2. ఒక అంకశ్రేఢిలో 3వ, 7వ పదాల మొత్తము 6 మరియు వాని లబ్దము 8 అయిన మొదటి 16 పదాల మొత్తము కనుగొనుము ?

3. ఒక నిచ్చెనకు 25 మెట్లు కలవు. మెట్ల యొక్క పొడవు క్రింద నుంచి పైకి ఏకరీతిన తగ్గుతూ వుంచి, క్రింద నుంచి మొదటి మెట్టు పొడవు 45 సెం.మీ. మరియు పైనుంచి మొదటి మెట్టు పొడవు 25 సెం.మీ. ఈ రెండింటి మధ్య దూరము $2\frac{1}{2}$ మీ. అయిన అన్ని మెట్ల తయారీకి కావలసిన చెక్క పొడవు ఎంత?)

   [**సూచన :** మెట్ల సంఖ్య = $\frac{250}{25}+1$]

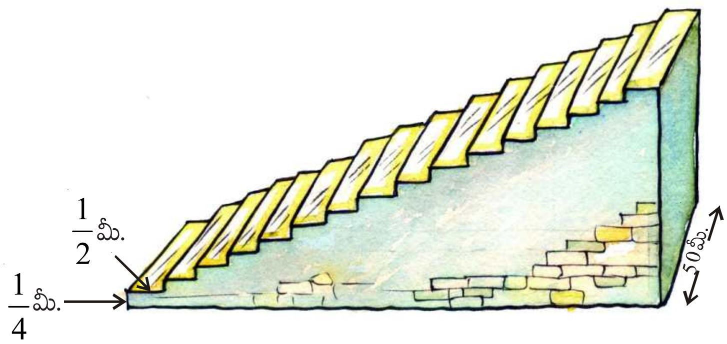


4. కొన్ని ఇండ్లు ఒక వరుసలో కలవు. దీనికి 1 నుంచి 49 వరకూ సంఖ్యలను కేటాయించటం జరిగింది. ఏదైనా ఒక ఇంటికి కేటాయించిన సంఖ్యను x అనుకొంటే; ఈ ఇంటికి ముందు (Preceeding) వున్న ఇండ్ల సంఖ్యల మొత్తము, తరువాత వున్న ఇండ్ల సంఖ్యల మొత్తము సమానం అయ్యే విధంగా ఆ ఇంటి సంఖ్య x వ్యవస్థితమని చూపండి? మరియు x విలువను కనుగొనుము.

   [**సూచన :** $S_{n-1} = S_{49} - S_n$]

5. క్రింది పటములు చూపిన విధంగా ఒక ఫుట్‌బాల్ గ్రౌండ్‌లో 15 మెట్లు గల ఒక మెట్ల సోపానము కలదు. దీనిలో ప్రతి మెట్టు పొడవు 50 మీ. మరియు వెడల్పు $\frac{1}{2}$ మీ. మొదటి మెట్టు భూమి నుంచి $\frac{1}{4}$ మీ. ఎత్తులో మరియు ప్రతి మెట్టు దాని ముందున్న మెట్టుకు $\frac{1}{4}$ మీ. ఎత్తులో వున్న ఆ మెట్ల సోపానాన్ని నిర్మించడానికి కావలసిన కాంక్రీట్ యొక్క ఘనపరిమాణమును కనుగొనుము ?

[**సూచన :** మొదటి సోపానం నిర్మించుటకకు కావల్సిన కాంక్రీటు ఘనపరిమాణం = $\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times 50$ మీ.^{3}]



6. ఒక పనిని పూర్తి చేయుటకు 150 మంది కూలీలను నియమించారు. అయితే రెండవ రోజు వారితో 4 గురు పనిలోకి రావటం మానుకున్నారు. మూడవ రోజు మరి నలుఇగురు మానుకున్నారు. ప్రతిరోజూ ఈ విధంగా జరగటం వల్ల ఆ పని పూర్తి కావడానికి అనుకున్న రోజుల కంటే 8 రోజులు ఎక్కువ అవసరం అయ్యింది. అయిన ఆ పని పూర్తి కావడానికి పట్టిన మొత్తం రోజు ఎన్ని ?

[సూచన : ప్రారంభంలో పని పూర్తి కావడానికి అవసరమయ్యే రోజుల సంఖ్యను 'x' అనుకొంటే

$$150x = \frac{x+8}{2}[2\times150+(x+8-1)(-4)]$$

[జవాబు: $x = 17 \Rightarrow x + 8 = 17 + 8 = 25$]

7. ఒక యంత్రము వెల Rs. 5,00,000/-. మొదటి సంవత్సరము దీని వెలలో తగ్గుదల 15%, రెండవ సంవత్సరము $13\frac{1}{2}$%, మూడవ సం॥ము 12%.... ఈ విధానము కొనసాగించబడిన 10 సంవత్సరముల అనంతరము దాని వెల ఎంత? ఇవ్వబడిన శాతాలన్నీ ప్రారంభవెల పైననే పేర్కొనడం జరిగింది.

[సూచన : మొత్తం తగ్గుదల = $15 + 13\frac{1}{2} + 12 + ...$ 10 పదాలు

$$S_n = \frac{10}{2}[30-13.5] = 82.5\%$$

$\therefore$ 10 సం॥ అనంతరము దాని వెల $=100 - 82.5 = 17.5$ (అనగా 5,00,000 లో 17.5%)

మనం ఏమి చర్చించాం

ఈ అధ్యాయంలో మనము చర్చించిన అంశాలు

1. ఒక సంఖ్యల జాబితాలో మొదటి పదము తప్ప మిగిలిన పదాలు అనన్ని వాని ముందున్న పదాలకు ఒక స్థిర సంఖ్యను కలపటం వల్ల ఏర్పడుతూ వుండే ఆ జాబితాను అంకశ్రేఢి అంటారు. కలిపే స్థిర సంఖ్యను సామాన్యభేధము అంటారు.

   AP లో పదాలు వరుసగా $a, a + d, a + 2d, a + 3d, \ldots$

2. $a_1, a_2, a_3, \ldots$ సంఖ్యల జాబితాలో $a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \ldots,$ విలువలు సమానమైన అనగా $a_{k+1} - a_k$ విలువ స్థిరమైన ఆ జాబితాను అంకశ్రేఢి అంటాము.

3. మొదటి పదము a గా, పదాంతరము d గా గల ఒక అంకశ్రేఢిలో n వ పదము $a_n = a + (n - 1) d$.

4. అంకశ్రేఢిలో మొదటి n పదాల మొత్తము

$$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

5. ఒక అంకశ్రేఢిలో చివరి పదాల మొత్తము l అయిన పదాల మొత్తము

$S = \frac{n}{2}(a + l)$. ఇచ్చు n పదాల సంఖ్య.

6. ఒక సంఖ్యల జాబితాలో మొదటి పదము తప్ప మిగిలిన పదాలు అన్నీ వాని ముందున్న పదాలను ఒక స్థిర సంఖ్యచే గుణించటం వల్ల ఏర్పడుతూ వుంటే ఆ జాబితాను గుణశ్రేఢి అంటారు. ఆ స్థిర సంఖ్యను సామాన్య నిష్పత్తి అంటారు.

7. మొదటి పదము a, సామాన్య నిష్పత్తి r గా గల గుణశ్రేఢిలో nవ పదము $a_n = ar^{n-1}$.