4

गणितीय आगमन का सिद्धान्त
(Principle of Mathematical Induction)

4.01 परिचय (Introduction)

हम गणित के व्यापक परिणामों की सहायता से विशेष गणितीय परिणाम प्राप्त करते हैं जैसे

व्यापक कथनः किसी संख्या के अंको के योग 3 से भाजित है तो संख्या 3 से भाजित होती है।

विशेष कथनः 210, 3 से भाजित है।

$\because$ संख्या 210 के अंको का योग $=2+1+0=3$ यह 3 से भाजित है।

$\therefore$ अतः संख्या 210 भी 3 से भाजित है।

इस उदाहरण में एक व्यापक गणितीय परिणाम की सहायता से एक विशिष्ट गणितीय परिणाम को निगमित किया गया है। इस तरह किसी गणितीय परिणाम को प्राप्त करना गणितीय निगमन है।

इसके विपरित हम निम्न विशेष गणितीय परिणामों की विवेचना करते हैं:

$$1=\frac{1.2}{2}$$

$$1+2=\frac{2.3}{2}$$

$$1+2+3=\frac{3.4}{2}$$

$$1+2+3+4=\frac{4.5}{2}$$

उपरोक्त विशेष परिणामों की विवेचना से हम एक व्यापक गणितीय परिणाम की ओर प्रेरित होते हैं कि

$$1+2+\ldots+n=\frac{n.(n+1)}{2}, \text{ जहाँ } n\in N$$

या

प्रथम n प्राकृत संख्याओं का योग $\dfrac{n(n+1)}{2}$ होता है।

आगमन विशेष स्थिति के गणितीय परिणामों को व्यापक परिणाम में परिवर्तन करने का प्रक्रम है। परन्तु उपर्युक्त विधि से प्राप्त गणितीय परिणाम हमेशा सत्य हो, आवश्यक नहीं है क्योंकि ये परिणाम कुछ विशेष स्थितियों से प्रेरित परिणाम है। जैसे n^2+n+41 में $n=1,2,\ldots,39$ रखने पर अभाज्य संख्याएँ प्राप्त होती परन्तु $n=40$ रखने पर अभाज्य संख्या प्राप्त नहीं होती हैं। अतः कुछ परिणामों को आधार मानकर व्यापक परिणाम नहीं निकाला जा सकता। अतः व्यापक परिणाम स्थापित करने के लिए एक निश्चित प्रक्रिया का अनुसरण करना आवश्यक होता है। यह निश्चित प्रक्रम जिसे गणितीय आगमन सिद्धान्त कहते हैं, निम्नानुसार हैः

गणितीय आगमन का सिद्धान्त

इस सिद्धान्त के अनुसार कोई कथन $P(n)$, n के सभी प्राकृत मानों के लिए सत्य है यदि

(i) P(1) सत्य है, अर्थात् दिया कथन $n=1$ के लिए सत्य है। तथा

(ii) P(m) सत्य है, तो P(m+1) भी सत्य होगा।

अर्थात् दिया गया कथन एक प्राकृत संख्या $n=m$ के लिए सत्य है तो यह $n=m+1$ के लिए भी कथन सत्य होगा।

सिद्धान्त का प्रथम चरण मात्र तथ्य का कथन है। इस चरण में हम दर्शाते हैं कि दिया गया कथन $n=1$ के लिए सत्य है। परन्तु यदि दिया गया कथन $n\geq i$ के लिए सत्य है तो हम इस चरण में $n=1$ के स्थान पर $n=i$ के लिए कथन सत्य है, दर्शाएँगे।

सिद्धान्त का द्वितीय चरण आगमन चरण (induction step) है। इस चरण में हम कथन को एक प्राकृत संख्या $n=m$ के लिए सत्य मान लेते हैं तथा यह सिद्ध करते हैं कि कथन $n=m+1$ के लिए भी सत्य है। उदाहणार्थ

(i) $P(n)=3^{2n}-1$, जहाँ $n\in N$, 8 से भाज्य है। (ii) $P(n)=2+4+...+2n=n(n+1)$, जहाँ $n\in N$.

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 1. गणितीय आगमन सिद्धान्त से सिद्ध कीजिएः

$$1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\text{ जहाँ } n\in N .$$

हलः हमें सिद्ध करना है कि

$$1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\text{ जहाँ } n\in N \tag{1}$$

(1) में $n=1$ रखने पर, वामपक्ष $=1^2=1$ तथा दक्षिण पक्ष $=\frac{1.2.3}{6}=1$

$\therefore$ वाम पक्ष = दक्षिण पक्ष

अतः कथन (1), $n=1$ के लिए सत्य है।

माना कि उपर्युक्त कथन (1), $n=m$ के लिए सत्य है, अर्थात्

$$1^2+2^2+...+m^2=\frac{m(m+1)(2m+1)}{6} \tag{2}$$

अब हमें सिद्ध करना है कि कथन (1) $n=m+1$ के लिए भी सत्य होगा, अर्थात्

$$1^2+2^2+...+m^2+(m+1)^2=\frac{m+1\{(m+1)+1\}\{2(m+1)+1\}}{6} \tag{3}$$

(3) का वाम पक्ष $=1^2+2^2+...+m^2+(m+1)^2$

$$=\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}+(m+1)^2 \qquad \text{[(2) के प्रयोग से]}$$

$$=\frac{m(m+1)(2m+1)+6(m+1)^2}{6}$$

$$=\frac{(m+1)(2m^2+7m+6)}{6}$$

$$=\frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6}$$

$$=\frac{(m+1)\{(m+1)+1\}\{2(m+1)+1\}}{6}$$

= दक्षिण पक्ष

अतः कथन (1), $n=m+1$ के लिए भी सत्य है। फलतः गणितीय आगमन सिद्धान्त से दिया गया कथन प्रत्येक प्राकृत संख्या के लिए सत्य हैं।

उदाहरण 2. गणितीय आगमन सिद्धांत से सिद्ध कीजिएः

$$1.2+2.3+...+n.(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}, \text{ जहाँ } n \in N.$$

हलः हमें सिद्ध करना है कि

$$1.2+2.3+...+n.(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}, \text{ जहाँ } n \in N. \qquad (1)$$

(1) में $n=1$ रखने पर, वाम पक्ष $=1.2=2$

तथा दक्षिण पक्ष $=\frac{1.2.3}{3}=2$

$\therefore$ वाम पक्ष = दक्षिण पक्ष

अतः कथन (1), $n=1$ के लिए सत्य है।

माना कि उपर्युक्त कथन (1), $n=m$ के लिए सत्य है, अर्थात्

$$1.2+2.3+...+m(m+1)=\frac{m(m+1)(m+2)}{3} \qquad (2)$$

अब हमें सिद्ध करना है कि यह कथन $n=m+1$ के लिए भी सत्य होगा, अर्थात्

$$1.2+2.3+...+m(m+1)+(m+1)(m+2)=\frac{(m+1)\{(m+1)+1\}\{(m+1)+2\}}{3} \qquad (3)$$

(3) का वाम पक्ष $=1.2+2.3+...+m(m+1)+(m+1)(m+2)$

$=\frac{m(m+1)(m+2)}{3}+(m+1)(m+2)$ [(2) के प्रयोग से]

$=(m+1)(m+2)\left(\frac{m}{3}+1\right)$

$=\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{3}$

$=\frac{(m+1)\{(m+1)+1\}\{(m+1)+2\}}{3}$

= दक्षिण पक्ष

अतः कथन (1), $n=m+1$ के लिए भी सत्य है। फलतः गणितीय आगमन सिद्धान्त से दिया गया कथन प्रत्येक n के लिए सत्य है।

उदाहरण 3. गणितीय आगमन सिद्धांत से सिद्ध कीजिएः

$$\frac{1}{2.5}+\frac{1}{5.8}+\frac{1}{8.11}+...+\frac{1}{(3n-1).(3n+2)}=\frac{n}{6n+4}, n\in N$$

हलः हमें सिद्ध करना है कि

$$\frac{1}{2.5}+\frac{1}{5.8}+\frac{1}{8.11}+...+\frac{1}{(3n-1).(3n+2)}=\frac{n}{6n+4}, n\in \mathrm{N} \qquad (1)$$

(1) में $n=1$ रखने पर, वाम पक्ष $=\frac{1}{2.5}=\frac{1}{10}$ तथा दक्षिण पक्ष $=\frac{1}{6+4}=\frac{1}{10}$

$\therefore$ वाम पक्ष = दक्षिण पक्ष

अतः कथन (1), $n=1$ के लिए सत्य है।

माना कि उपर्युक्त कथन (1), $n = m$ के लिए सत्य है, अर्थात्

$$\frac{1}{2.5}+\frac{1}{5.8}+\ldots+\frac{1}{(3m-1).(3m+2)}=\frac{m}{6m+4} \tag{2}$$

अब हमें सिद्ध करना है कि यह कथन $n = m+1$ के लिए भी सत्य होगा, अर्थात्

$$\frac{1}{2.5}+\frac{1}{5.8}+\ldots+\frac{1}{(3m-1)(3m+2)}+\frac{1}{(3m+2)(3m+5)}=\frac{m+1}{6(m+1)+4} \tag{3}$$

(3) का वाम पक्ष

$$=\frac{1}{2.5}+\frac{1}{5.8}+\ldots+\frac{1}{(3m-1).(3m+2)}+\frac{1}{(3m+2).(3m+5)}$$

$$=\frac{m}{6m+4}+\frac{1}{(3m+2).(3m+5)} \qquad [(2) \text{ के प्रयोग से}]$$

$$=\frac{1}{(3m+2)}\left(\frac{m}{2}+\frac{1}{3m+5}\right)=\frac{1}{(3m+2)}\left\{\frac{3m^2+5m+2}{2(3m+5)}\right\}$$

$$=\frac{1}{3m+2}\frac{(3m+2)(m+1)}{2(3m+5)}=\frac{(m+1)}{2(3m+5)}=\frac{m+1}{6m+10}$$

$$=\frac{m+1}{6(m+1)+4}$$

= दक्षिण पक्ष

अतः कथन (1), $n = m+1$ के लिए भी सत्य है। फलतः गणितीय आगमन सिद्धान्त से दिया गया कथन प्रत्येक n के लिए सत्य है।

उदाहरण 4. गणितीय आगमन सिद्धान्त से सिद्ध कीजिए:

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n}\right)=n+1, \text{ जहाँ } n \in N .$$

हल : हमें सिद्ध करना है कि

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n}\right)=n+1, \text{ जहाँ } n \in N . \tag{1}$$

कथन (1) में $n = 1$ रखने पर

वाम पक्ष $= 1 + 1 = 2$

दक्षिण पक्ष $= 1 + 1 = 2$

अतः कथन (1), $n = 1$ के लिए सत्य है।

माना कि कथन (1), $n = m$ के लिए सत्य है, अर्थात्

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{m}\right)=m+1 \tag{2}$$

अब हमें सिद्ध करना है कि कथन (1), $n = m+1$ के लिए भी सत्य है, अर्थात्

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{m}\right)\left(1+\frac{1}{m+1}\right)=(m+1)+1 \tag{3}$$

(3) का वाम पक्ष

$$\left\{\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{m}\right)\right\}\left(1+\frac{1}{m+1}\right)=(m+1)\left(1+\frac{1}{m+1}\right)$$ [(2) के प्रयोग से]

$$=(m+1)\frac{m+2}{m+1}=(m+1)+1= \text{दक्षिण पक्ष}$$

अतः कथन (1), $n=m+1$ के लिए भी सत्य है जबकि कथन (1), $n=m$ के लिए सत्य हो। फलतः गणितीय आगमन सिद्धान्त से कथन (1) प्रत्येक n के लिए सत्य है।

उदाहरण 5. गणितीय आगमन सिद्धान्त से सिद्ध कीजिए कि $n^2>2n$, जहाँ $n\geq 3$

हल : हमें सिद्ध करना है कि

$$n^2>2n,\quad n\geq 3 \tag{1}$$

$\because$ कथन (1) को $n\geq 3$ के लिए सिद्ध करना है अतः प्रथम हम दर्शाएँगे कि कथन (1) में $n=3$ के लिए सत्य है।

कथन (1) में $n=3$ रखने पर

वाम पक्ष $=3^2=9$

दक्षिण पक्ष $=2\times 3=6$

$\therefore$ वाम पक्ष > दक्षिण पक्ष

अतः कथन (1), $n=3$ के लिए सत्य है।

अब माना कि कथन (1), $n=m$ के लिए सत्य है, अर्थात्

$$m^2>2m \tag{2}$$

हम सिद्ध करेंगे कि यह कथन $n=m+1$ के लिए भी सत्य होगा, अर्थात्

$$(m+1)^2>2(m+1) \tag{3}$$

(3) का वाम पक्ष $=(m+1)^2=m^2+2m+1$

$>2m+2m+1=2(m+1)+2m-1$ [(2) के प्रयोग से]

$>2(m+1)$

$\therefore$ वाम पक्ष > दक्षिण पक्ष

अतः कथन (1), $n=m+1$ के लिए भी सत्य है। अतः गणितीय आगमन सिद्धान्त से कथन (1), प्रत्येक $n\geq 3$ के लिए सत्य है।

उदाहरण 6. गणितीय आगमन सिद्धान्त से सिद्ध कीजिए कि

x^n-y^n, $x-y$ से भाज्य है, जहाँ $n\in N$.

हल : हमें सिद्ध करना है कि

x^n-y^n, $x-y$ से भाज्य है, जहाँ $n\in N$, अर्थात्

$x^n-y^n=k(x-y)$, जहाँ $n\in N$ तथा k, x और y में एक बहुपद है। (1)

(1) में $n=1$ रखने पर, वाम पक्ष $=x^1-y^1$

$=1(x-y)$

$=k(x-y)$ [यहाँ $k=1\in Z$]

= दक्षिण पक्ष

अतः कथन (1), $n=1$ के लिए सत्य है।

माना कि उपर्युक्त कथन, $n = m$ के लिए सत्य है, अर्थात्

$x^m - y^m = k_1(x-y)$, जहाँ k_1, x तथा y में एक $(m-1)$ घात का बहुपद है। (2)

अब हमें सिद्ध करना है कि यह कथन $n = m+1$ के लिए भी सत्य होगा, अर्थात्

$x^{m+1} - y^{m+1} = k_2(x-y)$, जहाँ k_2, x तथा y में m घात का एक बहुपद है। (3)

(3) का वाम पक्ष $= x^{m+1} - y^{m+1}$

$$= x^{m+1} - x^m y + x^m y - y^{m+1} = x^m(x-y) + y(x^m - y^m)$$

$$= x^m(x-y) + y.k_1(x-y) = (x^m + k_1 y)(x-y)$$ [(2) के प्रयोग से]

$= k_2(x-y)$, जहाँ k_2, x तथा y में घात का बहुपद है।

= दक्षिण पक्ष

अतः कथन (1), $n = m+1$ के लिए भी सत्य है।

फलतः गणितीय आगमन सिद्धान्त से दिया गया कथन प्रत्येक n के लिए सत्य है।

उदाहरण 7. गणितीय आगमन सिद्धान्त से सिद्ध कीजिए:

$$\sin\theta + \sin 3\theta + \ldots + \sin(2n-1)\theta = \frac{\sin^2 n\theta}{\sin\theta}, n \in N.$$

हल : हमें सिद्ध करना है कि

$$\sin\theta + \sin 3\theta + \ldots + \sin(2n-1)\theta = \frac{\sin^2 n\theta}{\sin\theta}, n \in \mathrm{N} . \tag{1}$$

(1) में $n = 1$ रखने पर, वाम पक्ष $= \sin\theta$ तथा दक्षिण पक्ष $= \dfrac{\sin^2\theta}{\sin\theta} = \sin\theta$

$\therefore$ वाम पक्ष = दक्षिण पक्ष

अतः कथन (1), $n = 1$के लिए सत्य है।

माना कि उपर्युक्त कथन $n = m$ के लिए सत्य है, अर्थात्

$$\sin\theta + \sin 3\theta + \ldots + \sin(2m-1)\theta = \frac{\sin^2 m\theta}{\sin\theta} \tag{2}$$

अब हमें सिद्ध करना है कि यह कथन $n = m+1$ के लिए भी सत्य होगा, अर्थात्

$$\sin\theta + \sin 3\theta + \ldots + \sin(2m-1)\theta + \sin(2m+1)\theta = \frac{\sin^2(m+1)\theta}{\sin\theta} \tag{3}$$

(3) का वाम पक्ष

$$= \sin\theta + \ldots + \sin(2m-1)\theta + \sin(2m+1)\theta$$

$$= \frac{\sin^2 m\theta}{\sin\theta} + \sin(2m+1)\theta = \frac{1}{\sin\theta}\left\{\sin^2 m\theta + \sin\theta.\sin(2m+1)\theta\right\}$$ [(2) के प्रयोग से]

$$= \frac{1}{\sin\theta}\left[\sin^2 m\theta + \frac{1}{2}\left\{\cos 2m\theta - \cos(2m+2)\theta\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{\sin\theta}\left[\sin^2 m\theta + \frac{1}{2}\left\{1 - 2\sin^2 m\theta - 1 + 2\sin^2(m+1)\theta\right\}\right]$$

$= \dfrac{\sin^2(m+1)\theta}{\sin\theta} =$ दक्षिण पक्ष

अतः कथन (1), $n = m+1$ के लिए भी सत्य है।

फलतः गणितीय आगमन सिद्धान्त से दिया गया कथन प्रत्येक n के लिए सत्य है।

उदाहरण 8. गणितीय आगमन सिद्धान्त से सिद्ध कीजिए कि

$10^{2n-1}+1$, 11 से भाज्य है, जहाँ $n \in N$.

हल : माना दिया गया कथन $P(n)$ है, अर्थात् $P(n): 10^{2n-1}+1, 11$ से भाज्य है।

$n=1$ के लिए

$P(1): 10^{2-1}+1=11$ जो कि 11 से भाज्य है।

अर्थात् कथन $P(n), n=1$ के लिए सत्य है।

माना दिया गया कथन $P(n), n=m$ के लिए सत्य है अर्थात्

$$10^{2m-1}+1=11k,\ k \in N \qquad (1)$$

अब हम सिद्ध करेंगे कि कथन $P(n),\ n=m+1$ के लिए भी सत्य है जबकि $P(m)$ सत्य हो।

$$\begin{aligned} 10^{2(m+1)-1}+1 &= 10^{2m+2-1}+1 \\ &= 10^2 10^{2m-1}+10^2-99 \\ &= 100\left(10^{2m-1}+1\right)-99 \\ &= 100\times 11k-99 \qquad [(1) \text{ के प्रयोग से}] \\ &= 11(100k-9) \end{aligned}$$

अर्थात् $10^{2(m+1)-1}+1$, 11 से भाज्य है।

इस प्रकार, कथन $P(m+1)$ सत्य है जबकि $P(m)$ सत्य है इसलिए गणितीय आगमन सिद्धान्त से $P(n)$ प्रत्येक धन पूर्णांक के लिए सत्य है।

अर्थात् $10^{2n-1}+1$, 11 से भाज्य हैं जबकि $n \in N$

प्रश्नमाला 4.1

1. यदि कथन $P(n):(n+3)<2^{n+3}$ है, तो $P(4)$ लिखिए।
2. यदि कथन $P(n): 1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$ है, तो $P(4)$ की सत्यता की जाँच कीजिए।
3. $1+(1+3)+(1+3+5)+\ldots$ का nवाँ पद लिखिए।
4. $1.4.7+2.5.8+3.6.9+\ldots$ का nवाँ पद लिखिए।

सभी $n \in N$ के लिए गणितीय आगमन सिद्धान्त से सिद्ध कीजिए:

5. $1+3+\ldots+(2n-1)=n^2$
6. $1+4+\ldots+(3n-2)=\dfrac{n(3n-1)}{2}$
7. $1.3+3.5+\ldots+(2n-1)(2n+1)=\dfrac{n\left(4n^2+6n-1\right)}{3}$
8. $1.3+2.4+\ldots+n(n+2)=\dfrac{n(n+1)(2n+7)}{6}$

9. $1.2.3+2.3.4+...+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

10. $\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+...\frac{2}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{n}{3(2n+3)}$

11. $1^3+2^3+...+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

12. $1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+...+\frac{1}{1+2+...+n}=\frac{2n}{n+1}$

13. $1+5+5^2+...+5^{n-1}=\frac{5^n-1}{4}$

14. $\left(1+\frac{3}{1}\right)\left(1+\frac{5}{4}\right)\left(1+\frac{7}{9}\right)...\left(1+\frac{2n+1}{n^2}\right)=(n+1)^2$

15. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$

16. $1.3+2.3^2+...+n3^n=\frac{(2n-1)3^{n+1}+3}{4}$

17. $2^n>n$

18. $(1+x)^n\geq 1+nx,\ x>0$

19. $1+2+...+n<\frac{1}{8}(2n+1)^2$

20. $x^{2n}-y^{2n}$, $(x+y)$ से भाज्य है।

21. $2^{3n}-1$, 7 से भाज्य है।

22. $10^n+3.4^{n+2}+5$, 9 से भाज्य है।

23. 41^n-14^n, 27 से भाज्य है।

24. $(2n+7)<(n+3)^2$

25. $1^2+2^2+...+n^2>\frac{n^3}{3}$

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 4.1

1. $7<2^7$ 2. सत्य है 3. $1+3+...+(2n-1)$ 4. $n(n+3)(n+6)$