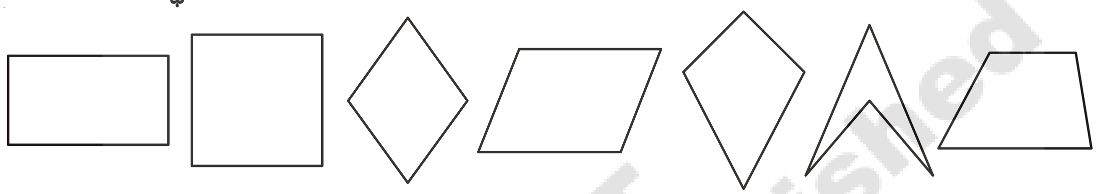
చతుర్భుజాలు 12

చతుర్భుజాల గురించి మీరు ఆరోతరగతిలో నేర్చుకున్నారు. చతుర్భుజాల రకాలు, వాటి ధర్మాలను గురించి ఇప్పుడు నేర్చుకుంటారు.

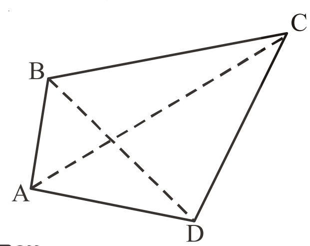
12.0 చతుర్భుజాలు



ఈ పటాలన్నింటిలోనూ మీరు గమనించిన ఉమ్మడి ధర్మమేది?

(సూచన : భుజాల సంఖ్య, కోణాల సంఖ్య, శీర్షాల సంఖ్య, సంవృత పటమా? వివృత పటమా?)

అందువల్ల నాలుగు భుజాలు, నాలుగు కోణాలు, నాలుగు శీర్షాలు ఉండే సంవృత పటాన్ని చతుర్భుజం అంటారు.



ABCD చతుర్భుజంలో

(i) నాలుగు భుజాలుంటాయి. $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ మరియు $\overline{DA}$

(ii) నాలుగు శీర్షాలు A, B, C మరియు D.

(iii) నాలుగు కోణాలు $\angle ABC$, $\angle BCD$, $\angle CDA$ మరియు $\angle DAB$ ఉంటాయి.

(iv) చతుర్భుజంలో ఎదురెదురు శీర్షాలను కలిపే రేఖాఖండాలను చతుర్భుజ కర్ణాలు అంటారు. చతుర్భుజం ABCD కి AC మరియు BD లను కర్ణాలు అంటారు.

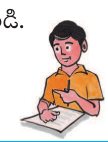
(v) ఉమ్మడి శీర్షం ఉండే రెండు భుజాలను 'పక్క పక్క భుజాలు' లేదా ఆసన్న భుజాలు అంటారు.. ABCD చతుర్భుజంలో AB, BC లు పక్క పక్క భుజాలు. 'వాటి ఉమ్మడి శీర్షం' B.

(vi) ఉమ్మడి భుజం ఉండే రెండు కోణాలను పక్క పక్క కోణాలు లేదా ఆసన్న కోణాలు అంటారు. అందువల్ల $\angle ABC$, $\angle BCD$ లు పక్కపక్క కోణాలు, BC ఉమ్మడి భుజం.

ఇవి చేయండి

(i) ABCD చతుర్భుజంలో మిగిలిన ఆసన్న భుజాల జతలను, వాటి ఉమ్మడి శీర్షాలను కనుక్కోండి.

(ii) చతుర్భుజం ABCD లో మిగిలిన ఆసన్నకోణాల జతలు, వాటి ప్రక్క జతలను కనుక్కోండి.



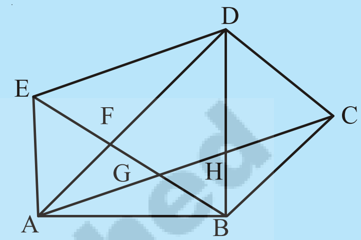
©SCERT not to be republished

(vii) చతుర్భుజిలో ఉమ్మడి శీర్షం లేని రెండు భుజాలను ఎదురెదురు భుజాలు లేదా అభిముఖ భుజాలు అంటారు. ABCD చతుర్భుజంలో AB, CD మరియు AD, BC లు ఎదురెదురు భుజాల జతలు.

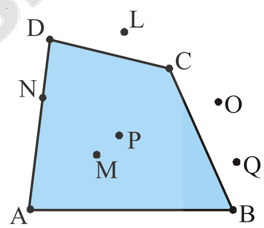
(viii) చతుర్భుజంలో ఉమ్మడి భుజంలేని రెండు కోణాలను ఎదురెదురుకోణాలు లేదా అభిముఖ కోణాలు అంటారు. ABCD చతుర్భుజంలో ∠BAD, ∠DCB మరియు ∠ADC, ∠CBA ఎదురెదురు కోణాల జతలు.

ప్రయత్నించండి.

పక్కనున్న చిత్రంలో ఎన్ని చతుర్భుజాలు ఉన్నాయి? వాటిని పేర్కొనండి.



12.1 చతుర్భుజంలో అంతర, బాహ్యబిందువులు



చతుర్భుజం ABCD లో అంతరంగా ఉన్న బిందువులు ఏవి?

చతుర్భుజానికి బాహ్యంగా ఉన్న బిందువు లేవి?

చతుర్భుజంపై ఉన్న బిందువు లేవి?

చతుర్భుజం లోపల అంతరంగా P, M బిందువులున్నాయి. బాహ్యంగా L, O మరియు Q అనే బిందువులున్నాయి. చతుర్భుజంపై N, A, B, C మరియు D అనే బిందువులున్నాయి.

చతుర్భుజ అంతరంలో మీకు వీలైనన్ని బిందువులను గుర్తించండి.

చతుర్భుజానికి బాహ్యంగా మీకు వీలైనన్ని బిందువులను గుర్తించండి.

చతుర్భుజ అంతరంలో ఎన్ని బిందువులుంటాయని మీరు భావిస్తున్నారు?

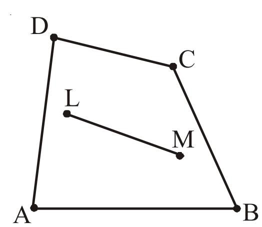
12.2 కుంభాకార, పుటాకార చతుర్భుజాలు

చతుర్భుజం అంతరంలో L మరియు M బిందువులను గుర్తించండి. L, M లను కలుపు రేఖా ఖండము పూర్తిగా చతుర్భుజం అంతరం లోనే ఉంది. చతుర్భుజం అంతరంలోని ఏవేని రెండు బిందువులను కలిపే రేఖాఖండం పూర్తిగా చతుర్భుజ అంతరంలోనే ఉంటే ఆ చతుర్భుజిని కుంభాకార బహుభుజి అంటారు.

ఒక రేఖా ఖండం చివరి బిందువులు అంతరంగా ఉంటూ రేఖా ఖండంలో కొంత భాగము చతుర్భుజ బాహ్యంలో ఉండునట్లు ఏవేని రెండు బిందువులను నీవు గుర్తించగలవా?

ఇది సాధ్యం కాదని మీరు తెలుసుకుంటారు.

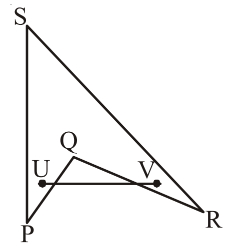
ఇప్పుడు మరో చతుర్భుజం PQRS ని చూద్దాం.



పటం 1

© SCERT not to be republished

చతుర్భుజం PQRS కి అంతర్గతంగా U, V అనే ఏవైనా రెండు బిందువులను గుర్తించండి. ఈ బిందువులను కలిపే రేఖా ఖండం చతుర్భుజానికి బాహ్యంగా ఉందా?



చతుర్భుజం PQRSలో ఇలాంటి మరిన్ని రేఖాఖండాలను మీరు ఏర్పరచగలరా?

చతుర్భుజం PQRS లో రెండు బిందువులను కలిపే రేఖా ఖండాలు చతుర్భుజానికి అంతరంగా ఉండేలా ఏర్పరచగలరా? ఇది కూడా సాధ్యమేనని మీరు కనుక్కొంటారు.

చతుర్భుజంలో అంతరంగా ఉన్న బిందువులను కలిపే రేఖాఖండాలన్ని చతుర్భుజానికి అంతరంగా ఉంటాయి. కాబట్టి చతుర్భుజం ABCD ని కుంభాకార చతుర్భుజం అంటారు.

చతుర్భుజంలో అంతరంగా ఉన్న బిందువులను కలిపే రేఖాఖండాలన్నీ చతుర్భుజానికి అంతరంగా ఉండే అవకాశం లేదు కాబట్టి చతుర్భుజం PQRS ను పుటాకార చతుర్భుజం అంటారు.

ప్రయత్నించండి.

1.

(i) చతుర్భుజం EFGH కుంభాకార చతుర్భుజమా?

(ii) చతుర్భుజం TUVW పుటాకార చతుర్భుజమా?

(iii) చతుర్భుజం EFGH. కి రెండు కర్ణాలు గీయండి. అవి రెండూ పరస్పరం ఖండించుకుంటాయా?

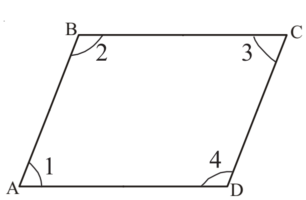
(iv) చతుర్భుజం TUVW కు రెండు కర్ణాలు గీయండి. అది రెండూ పరస్పరం ఖండించుకుంటాయా?

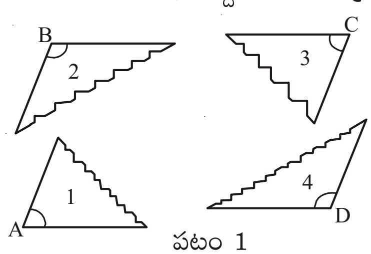
కుంభాకార చతుర్భుజ కర్ణాలు రెండూ పరస్పరం చతుర్భుజానికి అంతరంగా ఖండించుకుంటాయని; పుటాకార చతుర్భుజ కర్ణాలు రెండూ పరస్పరం చతుర్భుజానికి బాహ్యంగా ఖండించుకుంటాయని మీరు కనుక్కొంటారు.

12.3 చతుర్భుజంలోని కోణాల మొత్తం

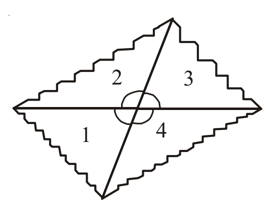
కృత్యం 1

ఒక కార్డ్‌బోర్డ్ ముక్కను తీసుకోండి. దానిపై ABCD చతుర్భుజాన్ని గీయండి. పటం -1 లో చూపినట్లు దాన్ని 4 ముక్కలు చేయండి. $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4$ లు ఒకే బిందువు. వద్ద కలిసేలా చిత్రం (2) లో చూపినట్లు అమర్చండి.





పటం 1



పటం 2

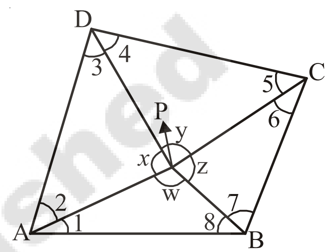
© SCERT not to be republished

$\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ మరియు $\angle 4$ ల మొత్తం 360^0 కు సమానం అవుతుందా? (ఒక బిందువు వద్ద కోణాల మొత్తం)
చతుర్భుజంలోని కోణాల మొత్తం 360^0.

(గమనిక : $\angle 1, \angle 2, \angle 3$ మొదలైన కోణాల కొలతలను $m\angle 1, m\angle 2, m\angle 3$ మొదలైన విధంగా చూపాలి.)

ఈ ఫలితాన్ని వేరేవిధాలుగా కూడా రాబట్టవచ్చు.

1. చతర్భుజం ABCD లో అంతరంగా ఉండే బిందువు P అనుకోండి. శీర్షాలు A, B, C మరియు D లకు Pని కలపండి. చిత్రంలోని ΔPAD ని పరిగణనలోకి తీసుకోండి.



$m\angle 2 + m\angle 3 = 180° - x$ .... (1)

ఇదేవిధంగా ΔPDC లో, $m\angle 4 + m\angle 5 = 180° - y$ .... (2)

ΔPCB లో $m\angle 6 + m\angle 7 = 180° - z$ మరియు .... (3)

ΔPBA లో $m\angle 8 + m\angle 1 = 180° - w$. .... (4)

(త్రిభుజ కోణాల మొత్తం సూత్రం)

(1), (2), (3) మరియు (4) లను కలుపగా

$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 4 + m\angle 5 + m\angle 6 + m\angle 7 + m\angle 8$

$= 180° - x + 180° - y + 180° - z + 180° - w$

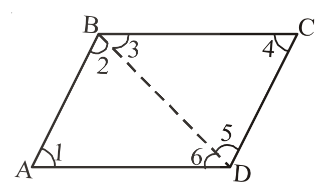
$= 720° - (x + y + z + w)$

($x + y + z + w = 360°$; ఒక బిందువు వద్ద కోణాల మొత్తం)

$= 720° - 360° \quad = 360°$

కాబట్టి చతుర్భుజంలోని కోణాల మొత్తం $360°$.

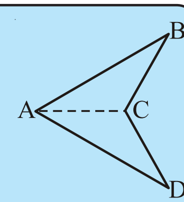
2. ABCD చతుర్భుజాన్ని తీసుకోండి. దీన్ని ఒక కర్ణం గీయడం ద్వారా రెండు త్రిభుజాలుగా విభజించండి. 1, 2, 3, 4, 5, 6 అనే కోణాలు ఏర్పడతాయి.



త్రిభుజ కోణాల మొత్తం సూత్రం సహాయంతో $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D$ ల మొత్తం $360°$ ఎలా అవుతుందో మీరు సులువుగా కనుక్కోగలరు.

ప్రయత్నించండి.

చతర్భుజం కుంభాకారం కాకపోతే ఏం జరుగుతుంది? చతుర్భుజం ABCD ని రెండు త్రిభుజాలుగా విభజించి అంతరకోణాల మొత్తం కనుక్కోండి. పుటాకార చతుర్భుజ అంతరకోణాల మొత్తం ఎంత?



© SCERT not to be republished

ఉదాహరణ 1 : చతుర్భుజంలోని 3 కోణాలు 55°, 65° మరియు 105° నాలుగో కోణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన : చతుర్భుజంలోని నాలుగు కోణాల మొత్తం = 360°.

ఇచ్చిన 3 కోణాల మొత్తం $= 55° + 65° + 105° = 225°$

కాబట్టి నాలుగో కోణం $= 360° – 225° = 135°$

ఉదాహరణ 2 : చతుర్భుజంలో రెండు కోణాలు 80°, 120°. మిగతా రెండు కోణాలు సమానం అయితే ఆ రెండు కోణాలను కనుక్కోండి.

సాధన : చతుర్భుజంలోని నాలుగు కోణాల మొత్తం = 360°.

ఇచ్చిన రెండుకోణాల మొత్తం $= 80° + 120° = 200°$

కాబట్టి మిగతా రెండు కోణాల మొత్తం $= 360° – 200° = 160°$

ఈ రెండు కోణాలు సమానం

కాబట్టి ఒక్కో కోణం $= 160° \div 2 = 80°$

ఉదాహరణ 3 : చతుర్భుజంలోని కోణాలు $x°$, $(x – 10)°$, $(x + 30)°$ మరియు $2x°$ అయిన ఆ కోణాలను కనుక్కోండి.

సాధన : చతుర్భుజంలోని కోణాల మొత్తం $= 360°$

కాబట్టి, $x + (x – 10) + (x + 30) + 2x = 360°$

$5x + 20 = 360°$

$x = 68°$

కాబట్టి ఆ నాలుగు కోణాలు $= 68°$; $(68–10)°$; $(68+30)°$; $(2×68)°$

$= 68°, 58°, 98°$ మరియు $136°$.

ఉదాహరణ 4 : చతుర్భుజ కోణాలు 3 : 4 : 5 : 6 నిష్పత్తిలో ఉంటే ఆ కోణాలను కనుక్కోండి.

సాధన : చతుర్భుజంలోని 4 కోణాల మొత్తం = 360°

కోణాల నిష్పత్తి = 3 : 4 : 5 : 6

కాబట్టి ఆ కోణాలు = $3x$, $4x$, $5x$ మరియు $6x$.

$3x + 4x + 5x + 6x = 360^0$

$18x = 360^0$

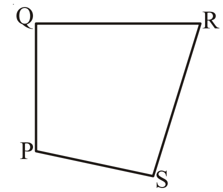
$$x = \frac{360}{18} = 20$$

కాబట్టి ఆ కోణాలు $= 3 \times 20^0; 4 \times 20^0; 5 \times 20^0; 6 \times 20^0$

$= 60°, 80°, 100°$ మరియు $120°$

అభ్యాసం - 1

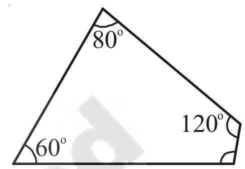
1. చతుర్భుజం PQRS లో



(i) భుజాలు, కోణాలు, శీర్షాలు, కర్ణాలను పేర్కొనండి

(ii) ఆసన్న భుజాలు, ఆసన్న కోణాలు, అభిముఖ భుజాలు, అభిముఖ కోణాల జతలను పేర్కొనండి.

2. చతుర్భుజంలోని 3 కోణాలు 60°, 80°, 120° అయితే నాలుగో కోణాన్ని కనుక్కోండి.



3. చతుర్భుజంలోని కోణాలు 2 : 3 : 4 : 6 నిష్పత్తిలో ఉన్నాయి. ఒక్కోకోణం కొలత కనుక్కోండి.

4. చతుర్భుజంలోని 4 కోణాలు సమానం అయితే ఒక్కోదాన్ని కనుక్కోండి. మీ నోటు పుస్తకంలో ఈ చతుర్భుజాన్ని గీయండి.

5. ఒక చతుర్భుజంలో కోణాలు $x°$, $(x + 10)°$, $(x + 20)°$, $(x + 30)°$ అయితే ఆ కోణాలను కనుక్కోండి.

6. చతుర్భుజ కోణాలు 1 : 2 : 3 : 6 నిష్పత్తిలో ఉండవు. ఎందువల్ల? కారణాలు తెలపండి.

(సూచన : ఈ చతుర్భుజ పటాన్ని గీయడానికి ప్రయత్నించండి)

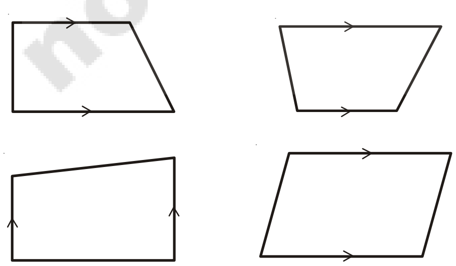
© SCERT not to be republished

12.4 చతుర్భుజాల రకాలు

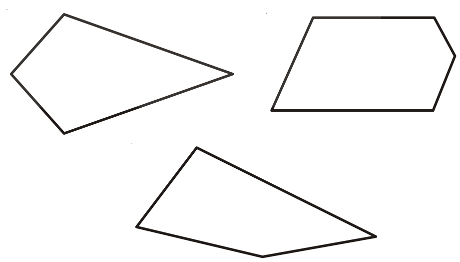
భుజాలు, కోణాల స్వభావం ఆధారంగా చతుర్భుజాలకు విభిన్నమైన పేర్లున్నాయి.

12.4.1 ట్రెపీజియం (సమలంబ చతుర్భుజం)

ఒక జత సమాంతర భుజాలు ఉండే చతుర్భుజాన్ని 'ట్రెపీజియం' అంటారు.



ఇవి ట్రెపీజియాలు



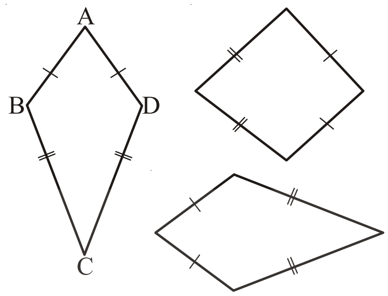
ఇవి ట్రెపీజియాలు కావు

గమనిక : బాణం గుర్తులు సమాంతర రేఖలను సూచిస్తాయి.

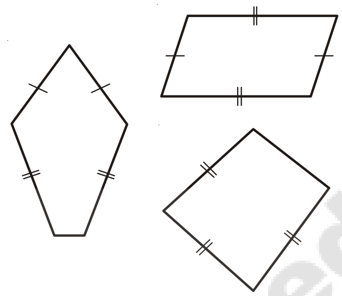
రెండో సమితిలోని పటాలు ట్రెపీజియాలు కావు ఎందువల్ల?

12.4.2 గాలిపటం (KITE)

చతుర్భుజాలలో కొన్ని, గాలిపటాల ఆకారంలో ఉంటాయి. కింది పటాల్లో సమాన పొడవులను ఒకే విధమైన గుర్తులతో సూచించబడినవి. ఉదాహరణకు AB = AD మరియు BC = CD.



ఇవి గాలిపటాలు



ఇవి గాలిపటాలు కావు

రెండో సమితిలోని రూపాలు గాలిపటాలు ఎందువల్ల కావు?

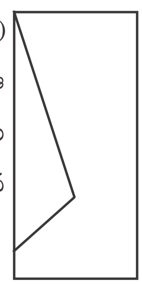
పరిశీలించండి.

(i) గాలిపటానికి 4 భుజాలున్నాయి. (చతుర్భుజం)

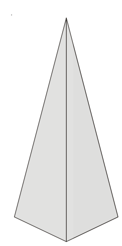
(ii) సమాన కొలతలుండే భుజాల జతలు రెండు వేర్వేరుగానూ, ఆసన్న భుజాలు గానూ ఉంటాయి.

కృత్యం 2 :

మందం కలిగిన ఒక కాగితాన్ని తీసుకోండి. మధ్యలోకి మడవండి. చిత్రం (1) లో చూపించినట్లు వేర్వేరు కొలతలు గల రెండు రేఖాఖండాలను గీయండి. ఆ రేఖా ఖండాల వెంబడి కత్తిరించి చిత్రం (2) లో చూపినట్టు కాగితం ముక్కలను తెరవండి. ఇప్పుడు గాలిపటం ఆకారం సిద్ధం. గాలిపటానికి సౌష్టవ రేఖలుంటాయా?



పటం 1



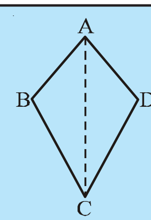
పటం 2

గాలిపటం కర్ణాలను మడవండి. ఆ కర్ణాలు లంబకోణం వద్ద ఖండించుకుంటాయా లేదా తెలుసుకునేందుకు మూలమట్టాలను ఉపయోగించండి.

గాలిపటం కర్ణాలు రెండూ సమాన పొడవులో ఉంటాయా? కాగితాన్ని మడవడం లేదా కొలవడం ద్వారా కర్ణాలు పరస్పరం ఖండించుకుంటాయో లేదో పరిశీలించండి.

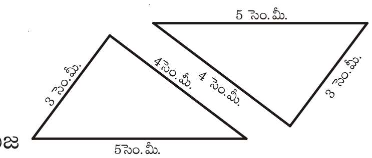
ప్రయత్నించండి.

గాలిపటం ABCD లో ΔABC, ΔADC లు సర్వసమానాలని నిరూపించండి.



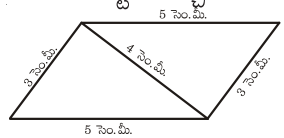
© SCERT not to be republished

12.4.3 సమాంతర చతుర్భుజం



కృత్యం 3 :

3 సెం.మీ., 4 సెం.మీ., 5 సెం.మీ. భుజాలుగా ఉండే రెండు సమాన త్రిభుజ రూపాలను తీసుకోండి. వాటిని కింది పటంలో చూపినట్టు అమర్చండి.

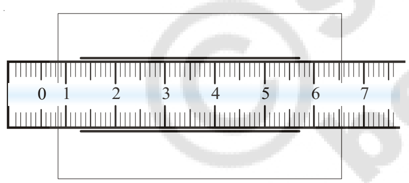


సమాంతర చతుర్భుజం ఏర్పడుతుంది. ఇక్కడ సమాంతర భుజాలేవి? సమాంతర భుజాలు సమానంగా ఉంటాయా? ఇవే త్రిభుజాలతో మరో రెండు సమాంతర చతుర్భుజాలను రూపొందించవచ్చు. వాటిని కనుగొనండి.

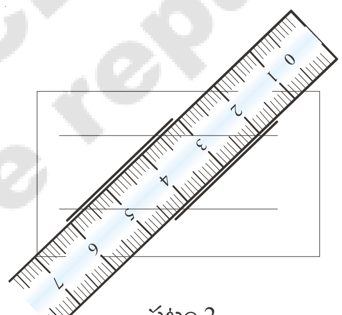
రెండు జతల ఎదురెదురు భుజాలు సమాంతరంగా ఉండే చతుర్భుజమే సమాంతర చతుర్భుజం.

కృత్యం 4 :

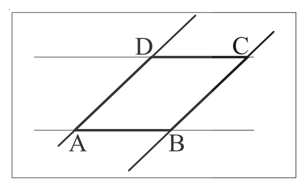
ఒక కొలబద్దను తీసుకోండి. దాన్ని కాగితంపై ఉంచి దాని అంచుల వెంబడి చిత్రం (1)లో చూపినట్లు రెండు రేఖలను గీయండి. కొలబద్దను ఆ రేఖలపై చిత్రం (2)లో చూపినట్లు ఉంచండి. దాని అంచుల వెంబడి మరో రెండు రేఖలను గీయండి.



పటం 1



పటం 2



పటం 3

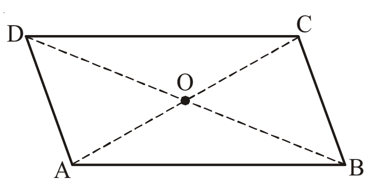
చిత్రం (3)లో ఎదురెదురుగా ఉన్న భుజాలు సమాంతరాలు. ఇది సమాంతర చతుర్భుజం.

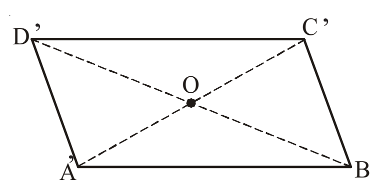
12.4.3 (అ) సమాంతర చతుర్భుజ ధర్మాలు

సమాంతర చతుర్భుజ భుజాలు

కృత్యం 5 :

ABCD, A'B'C'D' అనే రెండు ఏకరీతి సమాంతర చతుర్భుజ రూపాలను కత్తిరింపబడినవి తీసుకోండి. వీలైతే వేర్వేరు రంగులు కలిగినవి తీసుకోండి.





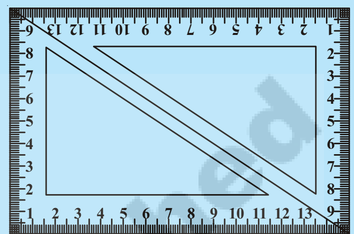
©SCERT not to be republished

పేరు తప్ప $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$ రెండూ ఒకేవిధంగా ఉంటాయి. అదే విధంగా మిగతా భుజాలు కూడా ఉంటాయి. $\overline{DC}$ పై $\overline{A'B'}$ ను ఉంచండి. ఇవి రెండూ ఏకీభవిస్తూ $\overline{A'B'}$, $\overline{DC}$ ల పొడవులు సమానమా? అదే విధంగా $\overline{AD}$, $\overline{B'C'}$ భుజాలను పరిశీలించండి. మీరేం కనుక్కుంటారు?

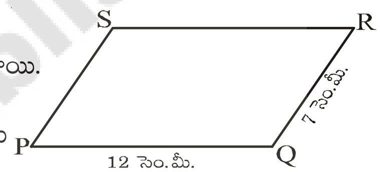
ఈ రెండు సందర్భాల్లోనూ భుజాలు సమానమని మీరు తెలుసుకుంటారు. అందువల్ల **సమాంతర చతుర్భుజంలో ఎదురెదురు భుజాలు సమాన పొడవుతో ఉంటాయి.** సమాంతర చతుర్భుజ భుజాలను కొలచినా మీకు ఇవే ఫలితాలొస్తాయి.

ప్రయత్నించండి.

30°, 60°, 90° కొలతలు ఉండే ఏకరీతి మూలమట్టాలను రెండు జతలు తీసుకోండి. పక్క చిత్రంలో చూపినట్లు సమాంతర చతుర్భుజం ఏర్పడేలా పక్కపక్కన అమర్చండి. ఈ ధర్మాన్ని సరిచూసేందుకు ఇది సహాయకారిగా ఉందా?



ఉదాహరణ 5 : సమాంతర చతుర్భుజం PQRS పరిధి కనుక్కోండి.



సాధన : సమాంతర చతుర్భుంలో ఎదురెదురు భుజాలు సమాన పొడవుతో ఉంటాయి.

దత్తాంశం ప్రకారం PQ= SR = 12 సెం.మీ మరియు QR = PS = 7 సెం.మీ

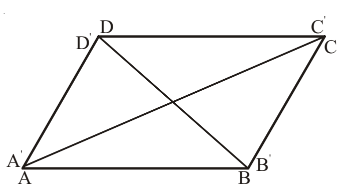
కాబట్టి పరిధి = PQ + QR + RS + SP

= 12 సెం.మీ + 7 సెం.మీ + 12 సెం.మీ + 7 సెం.మీ = 38 సెం.మీ

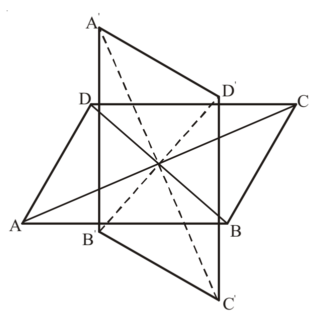
సమాంతర చతుర్భుజ కోణాలు

కృత్యం 6 :

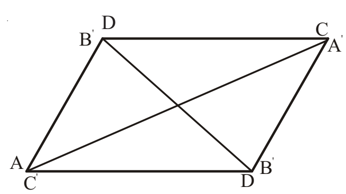
సమాంతర చతుర్భుజం ABCD ని ట్రేసింగ్ షీట్‌పై కాపీ చేయండి. A'B'C'D' గా గుర్తించండి. చిత్రం– (1)లో చూపినట్లు A'B'C'D' ని ABCD పై ఉంచండి. కర్ణాలు కలిసేచోట ఈ రెండింటినీ గుండుసూదితో కలపండి. పారదర్శక షీటును చిత్రం – (2) లో చూపినట్లు 90° భ్రమణం చేయించండి. అదే దిశలో సమాంతర చతుర్భుజాన్ని 90° భ్రమణం చేయించండి. చిత్రం – (3)లో చూపినట్లు రెండు సమాంతర చతుర్భుజాలు ఏకీభవిస్తాయి. C బిందువుపై A' బిందువు, A పై C' బిందువు ఉంటాయని మీరు గమనిస్తారు. అదేవిధంగా D పై B' మరియు B పై D' చిత్రం (3)లో చూపినట్లు ఉంటాయి.



పటం 1



పటం 2



పటం 3

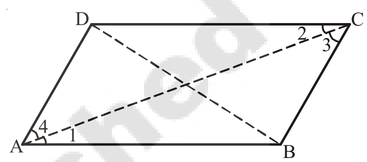
A, C కోణాల కొలతల గురించి ఇది ఏమన్నా తెలుపుతుందా? B, D కోణాల కొలతలను పరిశీలించి, మీ పరిశీలనలను పేర్కొనండి.

సమాంతర చతుర్భుజ ఎదురెదురు కోణాలు సమాన కొలతలతో ఉంటాయని మీరు తెలుసుకుంటారు.

ప్రయత్నించండి.

$30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ కొలతల మూలమట్టాల జతలను తీసుకొనండి. గతంలో చేసినట్టే సమాంతర చతుర్భుజాలను రూపొందించండి. పైన పేర్కొన్న ధర్మాన్ని నిరూపించేందుకు ఈ చిత్రం మీకేమైనా సహాయపడుతుందా?

తార్కిక వాదనలతో ఈ ఆలోచనను బలపరచవచ్చు.

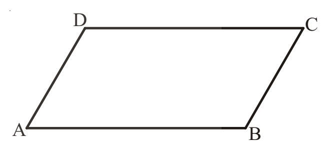


సమాంతర చతుర్భుజం ABCD కర్ణాలు AC, BD అయితే $\angle 1 = \angle 2$ మరియు $\angle 3 = \angle 4$ (ఏకాంతర కోణాల ధర్మం)

$\Delta ABC, \Delta CDA$ లు $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ సరూపాలు

కాబట్టి $\angle B = \angle D$

ఇదేవిధంగా, $\Delta ABD \cong \Delta CDB$, కాబట్టి $\angle A = \angle C$.



అందువల్ల సమాంతర చతుర్భుజ ఎదురెదురు కోణాలు సమానంగా ఉంటాయి.

సమాంతర చతుర్భుజ ఆసన్న కోణాలను పరిశీలిద్దాం. సమాంతర చతుర్భుజం ABCD లో DC||AB, DA తిర్యగ్రేఖ. కాబట్టి $\angle A, \angle D$ ఆసన్న కోణాలు, పరస్పరం సంపూరకాలు.

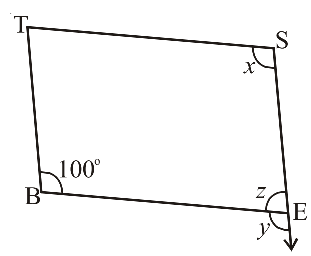
$\angle A, \angle B$ లు కూడా పరస్పర సంపూరకాలే. ఎందువల్ల?

ADΔBC ; BA త్రిర్యగ్రేఖ. అందువల్ల $\angle A, \angle B$ ఆసన్న కోణాలు.

ఇది చేయండి.

పైన ఇచ్చిన ABCD సమాంతర చతుర్భుజంలో మరో రెండు జతల సంపూరక కోణాలను గుర్తించండి.

ఉదాహరణ 6 : BEST ఒక సమాంతర చతుర్భుజం. x, y, z విలువలు కనుక్కోండి.



సాధన : $\angle S, \angle B$ కి అభిముఖ కోణం.

కాబట్టి $x = 100^0$ (అభిముఖ కోణాల నియమం)

$y = 100^0$ (సాదృశ్య కోణాలు)

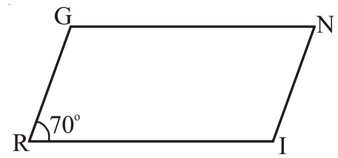
$z = 80^0$ ($\angle y, \angle z$ రేఖీయ జత కాబట్టి)

సమాంతర చతుర్భుజంలో ఆసన్న కోణాలు సంపూరకాలు. పై ఉదాహరణ నుండి కూడా ఈ పరిశీలన చేయవచ్చు.

©SCERT not to be republished

ఉదాహరణ 7 : సమాంతర చతుర్భుజం RING లో m $\angle R = 70°$, అయితే మిగతా కోణాలను కనుక్కోండి.

సాధన : దత్తాంశ ప్రకారం $\angle R = 70°$



$\angle N = 70°$ అవుతుంది.

(సమాంతర చతుర్భుజ అభిముఖ కోణాలు)

$\angle R, \angle I$ లు సంపూరక కోణాలు కాబట్టి

$\angle I = 180° - 70° = 110°$

$\angle G, \angle I,$ లు సమాంతర చతుర్భుజ అభిముఖ కోణాలు కాబట్టి $\angle G = 110°$ కాబట్టి

$\angle R = \angle N = 70°$ మరియు $\angle I = \angle G = 110°$

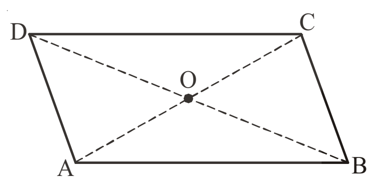
ప్రయత్నించండి.

పై ఉదాహరణలో $\angle I$, $\angle G$ లను మరేదైనా ఇతర పద్ధతిలో కనుక్కోవచ్చా?

సూచన : చతుర్భుజ కోణాల మొత్తానికి సూత్రం.

12.4.3. (అ) సమాంతర చతుర్భుజ కర్ణాలు

కృత్యం : 7

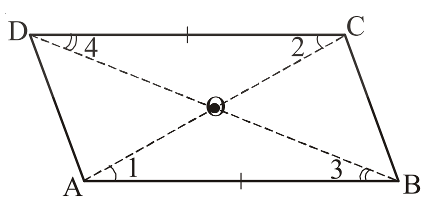


ABCD సమాంతర చతుర్భుజ నమూనా (cut-out) ను తీసుకోండి. కర్ణాలు, AC, BDలు 'O' వద్ద ఖండిస్తాయనుకోండి.

మడతపెట్టి A పై C ని ఉంచడం ద్వారా AC మధ్యబిందువు కనుక్కోండి. ఈ మధ్య బిందువు 'O' ఉందా?

కర్ణం AC ని కర్ణం DB 'O' బిందువు వద్ద సమద్విఖండన చేస్తుందా? మీ స్నేహితులతో చర్చించండి.

DB మీద మధ్య బిందువు ఎక్కడ ఉండునో తెలుసుకోవడానికి ఈ కృత్యాన్ని మళ్ళీ చేయండి.



సమాంతర చతుర్భుజ కర్ణాలు పరస్పరం సమద్విఖండన చేసుకొంటాయి.

కో.భు.కో. సరూపతననుసరించి ఈ ధర్మాన్ని నిరూపించడం కష్టమేమీ కాదు.

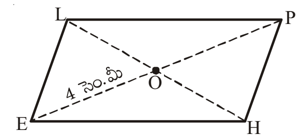
$\Delta AOB \cong COD$ (కో.భు.కో. నియమాన్ని ఇక్కడ ఎలా ఉపయోగిస్తాం)?)

దీని నుండి $AO = CO$; $BO = DO$ అవుతాయి.

© SCERT not to be republished

ఉదాహరణ 8 : HELP ఒక సమాంతర చతుర్భుజం. OE = 4 సెం.మీ. కర్ణాల సమద్విఖండన బిందువు O. PE కంటే HL 5 సెం.మీ. ఎక్కువ. OH ని కనుక్కోండి.

సాధన : OE = 4 సెం.మీ. అయితే OP = 4 సెం.మీ. (ఎందుకు?)



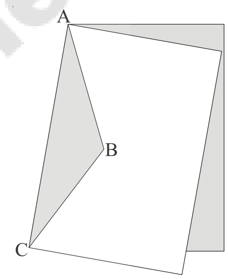
PE కంటే HL 5 సెం.మీ. ఎక్కువ.

కాబట్టి HL = 8 + 5 = 13 సెం.మీ.

అందువల్ల $OH = \frac{1}{2} \times 13 = 6.5$ సెం.మీ.

12.4.4 రాంబస్ (సమచతుర్భుజం) (RHOMBUS)

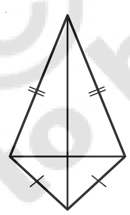
మీరు గతంలో చేసిన గాలిపటం తయారీని జ్ఞప్తికి తెచ్చుకోండి. ABC వెంబడి కత్తిరించి, తెరిస్తే గాలిపటం తయారౌతుంది. AB, BC రేఖల పొడవులు వేర్వేరుగా ఉంటాయి. AB = BCని గీస్తే మీరు పొందే పటమే రాంబస్ లేదా సమచతుర్భుజం.



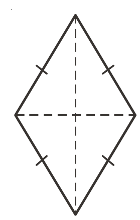
రాంబస్ కట్

సమచతుర్భుజంలోని భుజాలన్నీ సమానంగా ఉంటాయి. గాలిపటం ఇలా ఉండదు.

సమచతుర్భుజంలోని ఎదురెదురు భుజాలు సమాంతరంగా ఉంటాయి. కాబట్టి ఇది సమాంతర చతుర్భుజం కూడా అవుతుంది. కాబట్టి సమచతుర్భుజానికి సమాంతర చతుర్భుజం, గాలిపటాల ధర్మాలన్నీ వర్తిస్తాయి. ఆ ధర్మాలను జాబితా రూపంలో తయారు చేయండి. ఈ అధ్యాయం చివర ఉండే జాబితాతో సరిచూసుకోండి.



గాలి పటం



రాంబస్

సమచతుర్భుజ కర్ణాలు పరస్పరం లంబ సమద్విఖండన చేసుకొంటాయి.

కృత్యం 8 :

సమచతుర్భుజ నమూనాను తీసుకోండి. మడత పెట్టడం ద్వారా ఖండన బిందువు కర్ణాల మధ్య బిందువు అవుతుందేమో సరిచూడండి. మూలమట్టాల చివరల ద్వారా అవి లంబకోణం వద్ద ఖండిస్తాయేమో సరిచూడండి.

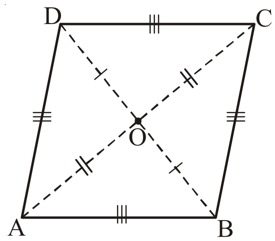
తార్కిక సోపానాలతో ఈ ధర్మాన్ని సరిచూడండి.

ABCD ఒక సమచతుర్భుజం. ఇది ఒక సమాంతర చతుర్భుజం కూడా కావడం వల్ల కర్ణాలు పరస్పరం సమద్విఖండన చేసుకొంటాయి.

కాబట్టి OA = OC ; OB = OD.

© SCERT not to be republished

$\angle AOD = \angle COD = 90^\circ$ అని నిరూపించాలి.



భు.భు.భు. సరూప ధర్మాన్ని అనుసరించి

$\Delta AOD \cong \Delta COD$

కాబట్టి $\angle AOD = \angle COD$

$\angle AOD$ మరియు $\angle COD$ రేఖీయయుగ్మం కావడం వల్ల $\angle AOD = \angle COD = 90^\circ$

సమచతుర్భుజ కర్ణాలు పరస్పరం లంబ సమద్విఖండన చేసుకొంటాయి.

12.4.5 దీర్ఘ చతురస్రం (RECTANGLE)

సమాన కోణాలతో ఉండే సమాంతర చతుర్భుజమే దీర్ఘచతురస్రం.

ఈ నిర్వచనానికి పూర్తి అర్థం ఏంటి? మీ స్నేహితులతో చర్చించండి.

దీర్ఘ చతురస్రం సమాన కోణాలతో ఉంటే ప్రతికోణం విలువ ఎంత?

ప్రతికోణం విలువ x° అయితే $4x^\circ = 360^\circ$ (ఎందువల్ల?)

కాబట్టి $x^\circ = 90^\circ$

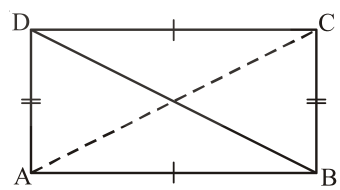
అందువల్ల దీర్ఘచతురస్రంలోని ప్రతికోణం లంబకోణం.

కాబట్టి ప్రతి కోణం లంబకోణం ఉండే సమాంతర చతుర్భుజమే దీర్ఘ చతురస్రం.

దీర్ఘ చతురస్రం కూడా సమాంతర చతుర్భుజమే కాబట్టి దీర్ఘ చతురస్రంలో ఎదురెదురు భుజాలు సమానంగా ఉంటాయి; కర్ణాలు పరస్పరం సమద్విఖండన చేసుకొంటాయి.

సమాంతర చతుర్భుజంలో కర్ణాలు వేర్వేరు పొడవుల్లో ఉండవచ్చు (సరిచూడండి); కానీ దీర్ఘచతురస్రంలోని కర్ణాలు సమాన పొడవుల్లో ఉండడం గమనార్హం.

నిరూపణ సులువు –



ABCD దీర్ఘచతురస్రమైతే $\Delta ABC \cong \Delta BAD$

ఎందుకంటే $AB = AB$

$BC = AD$ (ఎందువల్ల?)

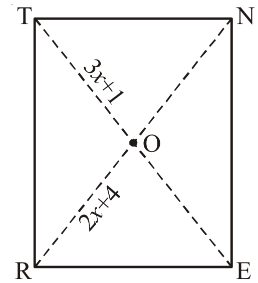
$m\angle A = m\angle B = 90^\circ$ (ఎందువల్ల?)

కాబట్టి భు.కో.భు. సరూపధర్మాన్ని అనుసరించి $\Delta ABC \cong \Delta BAD$; $AC = BD$

కాబట్టి దీర్ఘచతురస్రంలో కర్ణాలు సమానంగా ఉంటాయి.

©SCERT not to be republished

ఉదాహరణ 9 : RENT ఒక దీర్ఘ చతురస్రం. దీని కర్ణాలు 'O' వద్ద సమద్విఖండన చేసుకొంటాయి. OR = $2x + 4$, OT = $3x + 1$ అయితే x ను కనుక్కోండి.



సాధన : కర్ణం TE లో సగం OT. కర్ణం RN లో సగం OR

కర్ణాలు రెండూ సమానం (ఎందువల్ల?)

కాబట్టి వాటి సగాలు కూడా సమానం

కాబట్టి $3x + 1 = 2x + 4$

లేదా $x = 3$

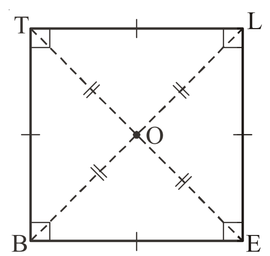
12.4.6 చతురస్రం

ఆసన్న భుజాలు సమానంగా ఉండే దీర్ఘచతురస్రాన్ని 'చతురస్రం' అంటారు.

అంటే దీర్ఘ చతురస్ర నియమాలన్ని పాటిస్తూ 'అన్ని భుజాలు సమానం' అనే నియమాన్ని చతురస్రం అదనంగా పాటిస్తుంది. దీర్ఘచతురస్రంలాగా చతురస్రంలోనూ కర్ణాలు సమానంగా ఉంటాయి.

దీర్ఘచతురస్రంలో కర్ణాలు పరస్పరం లంబంగా ఉండాల్సిన అవసరంలేదు. (సరిచూడండి) కానీ చతురస్రం విషయంలో ఇది సరికాదు.

నిరూపిద్దాం –



BELT ఒక చతురస్రం. కాబట్టి BE = EL = LT = TB

ΔBOE మరియు ΔLOE లను పరిశీలిస్తే,

OB=OL (ఎందుకు?)

OE ఉమ్మడి భుజం

కాబట్టి, భు.భు.భు. సరూప నియమం ప్రకారం $\Delta BOE \cong \Delta LOE$

కాబట్టి $\angle BOE = \angle LOE$

కానీ $\angle BOE + \angle LOE = 180^\circ$ (ఎందువల్ల?)

$$\angle BOE = \angle LOE = \frac{180}{2} = 90^\circ$$

కాబట్టి చతురస్ర కర్ణాలు పరస్పరం లంబ సమద్విఖండన చేసుకుంటాయి.

చతురస్రంలో కర్ణాలు

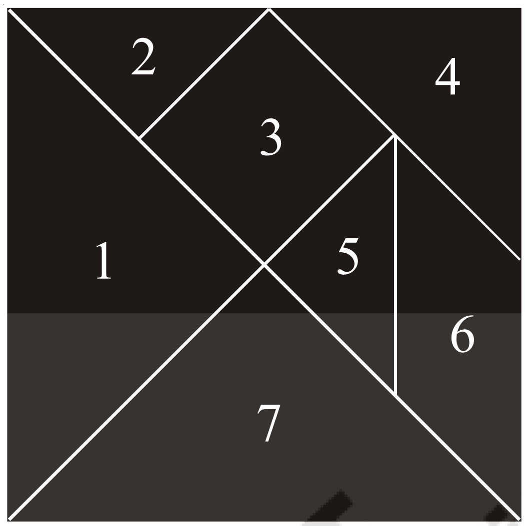
(i) **సమద్వి ఖండన చేసుకొంటాయి. (దీర్ఘచతురస్ర ధర్మం)**

(ii) **సమానంగా ఉంటాయి. (దీర్ఘచతురస్ర ధర్మం)**

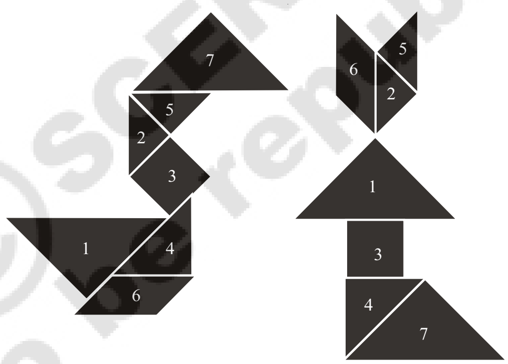
(iii) **పరస్పరం లంబంగా ఉంటాయి.**

© SCERT not to be republished

12.5 టాన్‌గ్రామ్‌తో చిత్రాలను రూపొందించడం



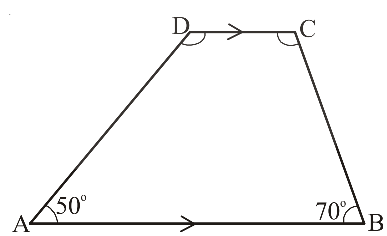
టాన్‌గ్రామ్ ముక్కలను అన్నింటినీ ఉపయోగించి ట్రెపీజియం, సమాంతర చతుర్భుజం, దీర్ఘచతురస్రం, చతురస్రాలను నిర్మించండి.



© SCERT not to be republished

ఈ ముక్కలన్నీ ఉపయోగించి మీరు వీలైనన్ని ఆకారాలను నిర్మించండి. పైన రెండు ఉదాహరణలిచ్చాం.

ఉదాహరణ 10 : ట్రెపీజియం ABCD లో CD కి AB సమాంతరంగా ఉంటుంది. $\angle A = 50°$, $\angle B = 70°$. అయితే $\angle C$ మరియు $\angle D$ లను కనుక్కోండి.



సాధన : CD కి AB సమాంతరం కాబట్టి

$\angle A + \angle D = 180°$

(తిర్యగ్రేఖకు ఒకేవైపుఉన్న అంతరకోణాలు)

కాబట్టి $\angle D = 180° - 50° = 130°$

అదేవిధంగా $\angle B + \angle C = 180°$

కాబట్టి $\angle C = 180° - 70° = 110°$

ఉదాహరణ 11 : సమాంతర చతుర్భుజంలోని రెండు ఆసన్న కోణాలు 3 : 2 నిష్పత్తిలో ఉంటే ఆ కోణాలను కనుక్కోండి.

సాధన : సమాంతర చతుర్భుజంలోని ఆసన్న కోణాలు సంపూరకాలు

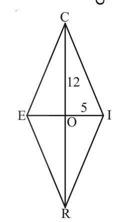
వాటి మొత్తం $= 180^\circ$

ఆసన్నకోణాల నిష్పత్తి $= 3:2$

కాబట్టి కోణాలు $= 180 \times \frac{3}{5} = 108^\circ$ మరియు

$= 180 \times \frac{2}{5} = 72^\circ$

ఉదాహరణ 12 : RICE ఒక సమ చతుర్భుజం. కర్ణాల ఖండన బిందువు 'O' OE, OR లకు కనుక్కోండి. మీ పరిశీలనలను నిరూపించండి.



సాధన : సమ చతుర్భుజ కర్ణాలు పరస్పరం సమద్విఖండన చేసుకొంటాయి.

OE = OI , OR = OC

కాబట్టి OE = 5 , OR = 12

అభ్యాసం - 2

1. సత్యమో, అసత్యమో తెలపండి.

(i) దీర్ఘచతురస్రాలన్నీ చతురస్రాలు ( )

(ii) సమచతుర్భుజాలన్నీ సమాంతర చతుర్భుజాలు ( )

(iii) చతురస్రాలన్నీ సమచతుర్భుజాలు, మరియు దీర్ఘచతురస్రాలు ( )

(iv) చతురస్రాలన్నీ సమాంతర చతుర్భుజాలు కావు. ( )

(v) గాలిపటాలన్నీ సమచతుర్భుజాలే ( )

(vi) సమచతుర్భుజాలన్నీ గాలిపటాలే ( )

(vii) సమాంతర చతుర్భుజాలన్నీ ట్రెపీజియాలే ( )

(viii) చతురస్రాలన్నీ ట్రెపీజియాలే ( )

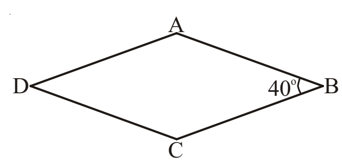
2. చతురస్రం ఎలా?

(i) చతుర్భుజం అవుతుందో తెలపండి. (ii) సమాంతర చతుర్భుజం అవుతుందో తెలపండి.

(iii) సమచతుర్భుజం అవుతుందో తెలపండి. (iv) దీర్ఘచతురస్రం అవుతుందో తెలపండి.

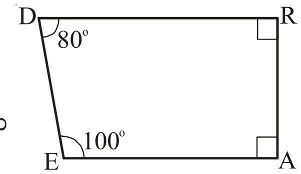
3. సమచతుర్భుజం ABCD లో $\angle CBA = 40^\circ$

మిగతా కోణాలను కనుక్కోండి.



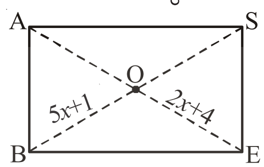
©SCERT not to be republished

4. ఒక సమాంతర చతర్భుజంలోని ఆసన్న కోణాలు x°, $(2x + 30)^\circ$ సమాంతర చతుర్భుజంలోని అన్నికోణాలను కనుక్కోండి.



5. DEAR ఒక ట్రెపీజియం ఎందువల్ల అవుతుందో వివరించండి. ఏరెండు భుజాలు సమాంతరంగా ఉన్నాయి?

6. BASE ఒక దీర్ఘచతురస్రం. దాని కర్ణాలు O వద్ద సమద్విఖండన చేసుకుంటాయి. $OB = 5x+1$, $OE = 2x+ 4$ అయితే x ను కనుక్కోండి.



7. $\angle A = 70^\circ$, $\angle C = 65^\circ$ అయితే ABCD సమాంతర చతుర్భుజం అవుతుందా? కారణం తెలపండి.

8. సమాంతర చతుర్భుజంలోని రెండు ఆసన్న భుజాలు 5:3 నిష్పత్తిలో ఉన్నాయి. దాని పరిధి 48cm. అయితే దాని భుజాల కొలతలను కనుక్కోండి.

9. చతుర్భుజ కర్ణాలు పరస్పరం లంబంగా ఉంటే ఆ చతుర్భుజం సమ చతుర్భుజం అవుతుందా? మీ సమాధానాన్ని బలపర్చేందుకు చిత్రపటాన్ని గీయండి.

10. ABCD ట్రెపీజియంలో $AB \parallel DC$. $\angle A = \angle B = 30^\circ$ అయితే మిగతా రెండు కోణాలను కనుక్కోండి.

11. ఖాళీలు పూరించండి.

(i) రెండు ఆసన్న భుజాలు సమానంగా ఉండే సమాంతర చతుర్భుజం ______________.

(ii) ఒక కోణం 90°, రెండు ఆసన్న భుజాలు సమానంగా ఉండే సమాంతర చతుర్భుజం ______________.

(iii) ట్రెపీజియం ABCD లో $AB \parallel DC$. $\angle D = x^\circ$ అయితే $\angle A =$ ____________.

(iv) సమాంతర చతుర్భుజంలోని ప్రతి కర్ణం దాన్ని __________ త్రిభుజాలుగా విభజిస్తుంది.

(v) సమాంతర చతుర్భుజం ABCD లో కర్ణాలు AC, BD లు O వద్ద ఖండించుకుని AO = 5 సెం.మీ అయితే AC = __________ సెం.మీ

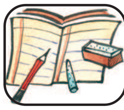
(vi) సమ చతుర్భుజం ABCD లో కర్ణాలు 'O' వద్ద ఖండించుకుంటే $\angle AOB =$ __________ డిగ్రీలు

(vii) ABCD సమాంతర చతుర్భుజమైతే $\angle A - \angle C =$ __________ డిగ్రీలు

(viii) దీర్ఘచతురస్రం ABCD లో కర్ణం AC = 10సెం.మీ అయితే రెండవ కర్ణం BD = _______ సెం.మీ

(ix) ABCD చతురస్రంలో కర్ణం AC గీయబడింది. $\angle BAC =$ ___________ డిగ్రీలు

© SCERT not to be republished



మనం నేర్చుకున్నవి

1. నాలుగు రేఖాఖండాలతో సంవృతమైన చిత్రాన్ని 'చతుర్భుజం' అంటారు.
2. ప్రతి చతుర్భుజం తలాన్ని అంతర, బాహ్య, హద్దు తలాలుగా విభజిస్తుంది.
3. ప్రతి చతుర్భుజంలో ఒక జత కర్ణాలుంటాయి.
4. చతుర్భుజంలో అంతరంగా కర్ణాలు ఉంటే ఆ చతుర్భుజం కుంభాకార చతుర్భుజం. కర్ణాలలో ఏదైనా చతుర్భుజానికి అంతరంగా లేకపోతే దాన్ని పుటాకార చతుర్భుజం అంటారు.
5. చతుర్భుజ అంతరకోణాల మొత్తం $360°$.
6. చతుర్భుజాల ధర్మాలు

చతుర్భుజం	ధర్మాలు
సమాంతర చతుర్భుజం : ఎదురెదురు భుజాల జతలు రెండూ సమాంతరంగా ఉండే చతుర్భుజం	(1) ఎదురెదురు భుజాలు సమానం (2) ఎదురెదురు కోణాలు సమానం (3) కర్ణాలు పరస్పరం సమద్విఖండన చేసుకుంటాయి.
సమ చతుర్భుజం : అన్ని భుజాలు సమానంగా ఉండే సమాంతర చతుర్భుజం	(1) సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క అన్ని ధర్మాలు (2) కర్ణాలు పరస్పరం లంబంగా ఉంటాయి.
దీర్ఘచతురస్రం : అన్నీ లంబకోణాలుండే సమాంతర చతుర్భుజం	(1) సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క అన్ని ధర్మాలు (2) ప్రతి కోణమూ లంబకోణం (3) కర్ణాలు సమానం
చతురస్రం : భుజాలు సమానంగా ఉండే దీర్ఘచతురస్రం	(1) సమాంతర చతుర్భుజ, సమ చతుర్భుజ, దీర్ఘచతురస్రం యొక్క అన్నిధర్మాలు (2) భుజాలన్ని సమానం
గాలిపటం : వరుస భుజాలు సమానంగా ఉండే జత భుజాలు కలిగిన చతుర్భుజం	(1) కర్ణాలు పరస్పరం లంబంగా ఉంటాయి. (2) కర్ణాలు సమాన కొలతల్లో ఉండవు. (3) కర్ణాలు పరస్పరం సమద్విఖండన చేసుకుంటాయి.
ట్రెపీజియం : ఒక జత భుజాలు సమాంతరంగా ఉండే చతుర్భుజం	(1) ఎదురెదురు భుజాలు సమాంతరంగా ఉండే ఒక జతను కలిగి ఉంటుంది.

© SCERT not to be republished