अध्याय 13

ज्यामितीय रचनाएँ
[GEOMETRICAL CONSTRUCTIONS]

FELXYT

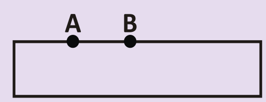
परिचय (Introduction)

ज्यामितीय रचना करने से तात्पर्य परकार और रूलर की सहायता से माप कर ज्यामितीय आकृतियाँ बनाना है। ज्यामितीय रचना के द्वारा हम ज्यामिति की कई अवधारणाओं, संबंधों व उपपत्तियों को अनुभव कर सकते हैं और उनके बारे में सोच सकते हैं। हम उन अवधारणाओं का उपयोग कर ऐसी ज्यामिति रचनाएँ करेंगे जो हमने पढ़ी है। रचित करने के साथ–साथ कुछ रचनाओं का विश्लेषण भी करेंगे जिससे हम ये समझ सकेंगे कि ये रचनाएँ किस तरह की जाती हैं और क्यों? इस बात को समझने के लिए हम दिए गए सवालों के अनुसार रचनाओं को बनाते समय उनके बारे में सोचेंगे व चर्चा करेंगे।

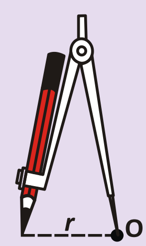
गणित में तर्क, प्रमाण (proof) आदि को ध्यान में रखकर सवाल हल किए जाते है। सवाल हल करना और यह देखना कि क्या कोई सवाल एक से ज्यादा तरीके से हल किया जा सकता है। कौनसा तरीका ज्यादा उपयुक्त और आसान जैसी बातें सोचना महत्वपूर्ण है। यह सवाल करना व सोचना हमारी तार्किक और सृजनात्मक क्षमता का विकास करता है।

अभी तक आपने स्केल और चाँदे की सहायता से निश्चित माप के रेखाखंड और कोण बनाए हैं। इस अध्याय में हम परकार और रूलर के उपयोग से रचना करेंगे।

रूलर का रचना में उपयोग : हम जानते हैं कि किन्हीं दो बिंदुओं A और B दोनों से गुजरने वाली सिर्फ एक सरल रेखा खींची जा सकती है (अभिगृहीत)। हम रूलर का उपयोग रेखा AB, रेखाखंड AB या किरण AB बनाने के लिए कर सकते हैं।



परकार का रचना करने में उपयोग : वृत्त की परिभाषा से हम जानते हैं कि एक निश्चित बिंदु और त्रिज्या से केवल एक वृत्त बनाया जा सकता है। यहाँ हम परकार का उपयोग वृत्त या चाप बनाने के लिए करेंगे।



आइए, कुछ ज्यामितीय रचनाएँ करते हैं–

रचना–1 : समान कोण की रचना करना

एक कोण दिया गया है, हमें उसके बराबर एक दूसरे कोण की रचना करनी है। यह काम हम कैसे करेंगे? एक तो यह कर सकते हैं कि एक चाँदे की मदद से कोण को माप लें। फिर उसके बराबर कोण बना लें। लेकिन यदि हमारे पास कोण मापने का कोई उपकरण नहीं है तो हम क्या करेंगे? आइए देखें –

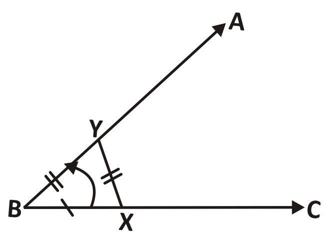
पद–1 इस रचना पर काम करने से पहले हमें निम्न सवालों पर सोचने से मदद मिलेगी–

1. *सवाल में क्या जानकारी दी गई है, इसे कैसे करना होगा और दी गई जानकारियों में से कौन–सी उपयोगी है?*

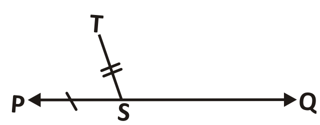
   हमें एक कोण दिया है और हमें इसके बराबर कोण की रचना करनी है।

   यदि दिया गया कोण ABC है तो एक कोण RPQ की रचना इस प्रकार करनी है कि $\angle RPQ = \angle ABC$ हो।

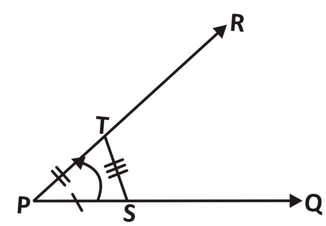
2. *दी गई जानकारियों के आधार पर रचना करते समय किन ज्यामितीय अवधारणाओं का उपयोग हो सकता है?*



आकृति – 1



आकृति – 2



आकृति – 3

हमें पता है कि यदि हम किसी किरण को एक स्थिति से दूसरी स्थिति तक घुमाते हैं तो उस घुमाव का मान ही कोण होता है। किरण BC को BA तक घुमाने पर हमें कोण ABC प्राप्त होता है। (आकृति–1)

यदि एक किरण PQ बनाएँ और उसे इतना घुमाएँ जितना BC को BA तक घुमाया गया है। लेकिन यह होगा कैसे?

यदि BC और BA पर क्रमशः दो बिंदु X,Y इस प्रकार लें कि BX=BY और PQ पर बिंदु S इस प्रकार लें कि BX=PS (आकृति–2)

अब B और X के सापेक्ष Y की जो स्थिति है वैसी ही स्थिति पर एक बिंदु (मान लें T) P और S के सापेक्ष ढूँढ़ लिया जाए तो किरण PT, BY के संगत होगी। (आकृति–3)

यह बिंदु T, PS त्रिज्या के चाप पर S से XY दूरी पर स्थित होगा।

यदि PT को मिलाते हुए PR किरण खींची जाए तो $\angle TPS$, $\angle YBX$ (या $\angle ABC$)के बराबर होगा।

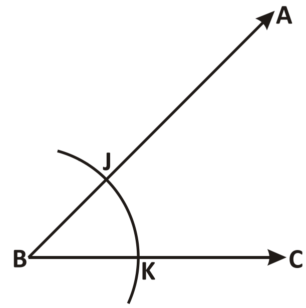
पद–2 : कच्चा चित्र बनाने के बाद चरणबद्ध रूप से ज्यामिति रचना की जा सकती है।

रचना के चरण :–

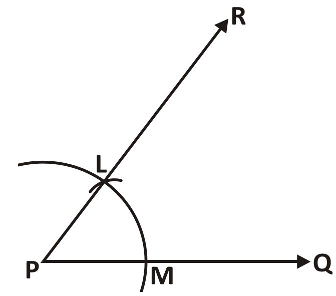
1. एक बिंदु P लेते हैं। P से एक किरण PQ खींचते हैं। यह किरण नये कोण की एक भुजा होगी।
2. अब दिए गए कोण ABC के शीर्ष B से किसी भी माप का एक चाप काटते हैं जो BA को J पर और BC को K पर प्रतिच्छेद करता है। (आकृति–4) देखिए।
3. अब हम इसी माप का चाप बिन्दु P से काटते हैं जो किरण PQ को M पर प्रतिच्छेद करता है। (आकृति–5)
4. अब बिंदु K से KJ का माप लेते हैं और बिन्दु M से इसी माप का एक चाप, पहले वाले चाप पर काटते हैं और प्रतिच्छेद बिन्दु को L नाम देते हैं। (आकृति–5)
5. अब हम P से L को जोड़ते हुए एक किरण PR खींचते हैं।

$\angle RPQ$ अभीष्ट कोण है।

$\angle RPQ = \angle ABC$



आकृति – 4



आकृति – 5

पद–3 **रचित आकृति को जाँचना–** रचित आकृति सवाल में दी गई जानकारी के अनुसार है या नहीं, इसे हम माप के अलावा प्रमाण के माध्यम से भी जाँच सकते हैं।

आइए, अब देखें कि क्या प्राप्त कोण दिए हुए कोण के बराबर है?

इसके लिए हम दोनों के चित्रों के संदर्भित कोणों को लेते हुए त्रिभुज बनाते हैं। बिन्दु M को L से और K को J से जोड़ें जिससे ΔPML और ΔBKJ बन जाएँगे।

यदि हम ΔPML और ΔBKJ को देखें तो पाएँगे कि–

$PM = BK$ (रचना से),

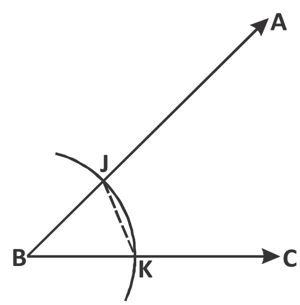
$ML = KJ$ (रचना से)

$PL = BJ$ (रचना से)

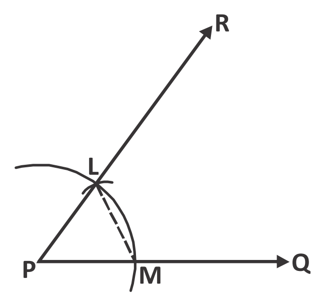
इसलिए $\Delta PML \cong \Delta BKJ$ (SSS सर्वांगसमता से)

अतः $\angle LPM = \angle JBK$

इस प्रकार $\angle RPQ = \angle ABC$



आकृति – 6

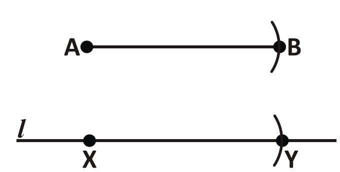


आकृति – 7

उदाहरण–1. दिए गए रेखाखंड के बराबर एक रेखाखंड की रचना करें।

हल :

पद–1 हमें एक रेखाखण्ड AB दिया गया है। एक ऐसे रेखाखंड की रचना करनी है जो AB के बराबर हो।



आकृति – 8

पद–2 : रचना के चरण :–

1. एक रेखा खींचें, इसे l मानें।
2. l पर कोई भी बिन्दु X चुनें।
3. अब परकार पर AB के बराबर त्रिज्या लें। X को केन्द्र मानकर, रेखा l पर चाप बनाएँ और कटान बिन्दु को Y नाम दें।

   रेखाखंड XY, रेखाखंड AB के सर्वांगसम है।

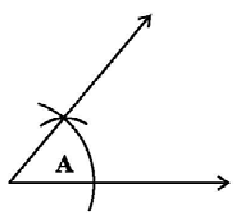
पद–3 : प्रमाण :–

यहाँ हमने AB को त्रिज्या लेकर और केन्द्र 'X' से चाप बनाया। इसलिए XY=AB

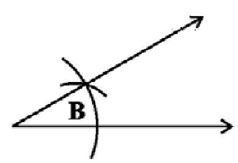
उदाहरण–2. दो कोण दिए गए हैं। एक ऐसे कोण की रचना करें जिसकी माप दिए हुए दोनों कोणों के योगफल के बराबर हो।

हल : रचना–1 का उपयोग करते हुए $\angle A$ के सर्वांगसम कोण $\angle LON$ बनाएँ। इसी तरह OL को एक भुजा मानते हुए $\angle MOL$ बनाएँ जो $\angle B$ के सर्वांगसम हो।

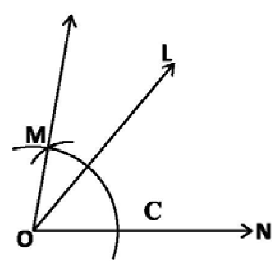
यानी $\angle LON + \angle MOL = \angle A + \angle B$



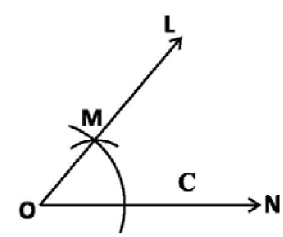
आकृति – 9



आकृति – 10



आकृति – 11



आकृति – 12

करके देखें

1. उदाहरण–2 में की गई रचना के चरण विस्तार से स्वयं लिखिए।
2. 30° और 90° माप के कोण बनाइए। बताइए कि यह कैसे बनाया?
3. भुजा की कोई भी माप लेते हुए एक समबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए।
4. एक न्यूनकोण बनाइए और एक ऐसे कोण की रचना कीजिए जिसका मान पहले बनाए गए न्यूनकोण के मान से दोगुना हो।

रचना–2 : समांतर रेखा की रचना करना

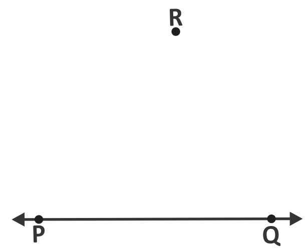
हम यहाँ एक सरल रेखा के बाहर स्थित बिंदु से उस रेखा के समांतर रेखा खींचना चाहते हैं। हमने जिन पदों में पहली रचना की है आइए उन्हीं पदों का उपयोग करते हुए समांतर रेखा की रचना करते हैं।

पद–1 : रचना शुरू करने से पहले निम्नलिखित सवालों पर सोचना :–

1. *सवाल में क्या जानकारी दी गई है? किस क्रम में इनका उपयोग करना है? क्या रचना करनी है? किस क्रम में करनी है?*

   दी गई जानकारी में से कौन–सी उपयोगी है और कौन सी नहीं?

   यहाँ हमें एक रेखा दी गई है और एक बिंदु। यह बिंदु दी गई रेखा के बाहर स्थित है। हमें उस बिंदु से समांतर रेखा की रचना करनी है। आकृति – 13



आकृति – 13

2. *दी गई जानकारी के आधार पर रचना करते समय किन ज्यामितीय अवधारणाओं का उपयोग करना होगा?*

   हमें पता है कि यदि एक तिर्यक रेखा दो रेखाओं को प्रतिच्छेद करे और उन पर बने संगत कोण बराबर हों तो दोनों रेखाएँ समांतर होती हैं।

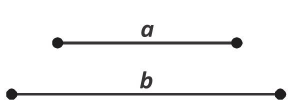
   तो हम दिए गए बिंदु से तिर्यक रेखा की रचना कर सकते हैं जो दी गई रेखा को प्रतिच्छेद करे

   तिर्यक रेखा और दी गई रेखा के बीच बने कोण के बराबर कोण, बिंदु पर बनाएँ तो प्राप्त रेखा दी गई रेखा के समांतर होगी।

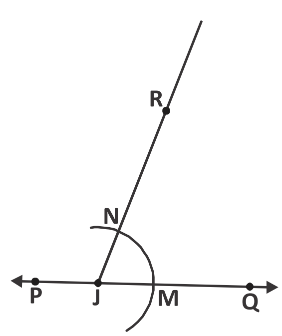
पद–2 : एकत्रित जानकारी के आधार पर कच्चा चित्र बनाकर सोचना कि अपेक्षित आकृति का कौन–कौन सा हिस्सा हमें ज्ञात हो गया है। आकृति की रचना के लिए हमें और क्या चाहिए। फिर अंत में चरणबद्ध रूप से ज्यामिति रचना करना।

रचना के चरण :

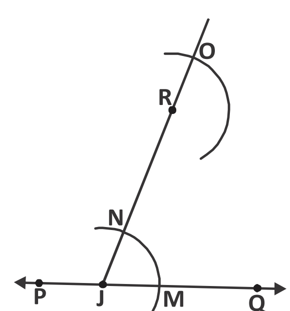
एक रेखा PQ और एक बिंदु R दिए गए हैं।



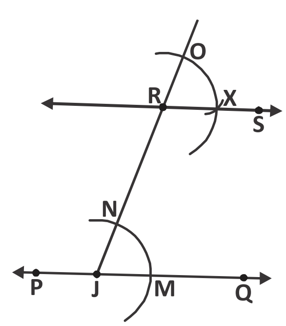
आकृति – 14



आकृति – 15



आकृति – 16



आकृति – 17

हमें PQ के समांतर एक रेखा की रचना करनी है जो R से गुजरती हो।

1. R से एक तिर्यक रेखा खींचे हैं जो PQ को किसी बिंदु J पर प्रतिच्छेद करे। हमें पता है कि यदि संगत कोण बराबर हो तो रेखाएँ समांतर होती हैं।

2. अब हम बिंदु J से किसी भी माप का एक चाप काटते हैं जो PQ को M और JR को N पर प्रतिच्छेद करती है। (आकृति–15)

3. अब इसी माप का एक चाप बिंदु R से बनाते हैं जो JR को O पर प्रतिच्छेद करती है। (आकृति–16)

4. अब MN की माप लेकर बिंदु O से एक चाप काटते हैं जो पहले बनाए गए चाप को X पर प्रतिच्छेद करता है।

अब हम बिंदु R से X को जोड़ते हुए एक रेखा RS खींचते हैं

इस प्रकार, रेखा PQ के समांतर रेखा RS होगी। (आकृति–17)

पद–3: रची हुई आकृति को जाँचना : यह देखना कि रची हुई आकृति अपेक्षित आकृति के अनुसार है या नहीं।

प्रमाण – रचे हुए चित्र को देखें–

चूँकि $\angle ORX = \angle RJM$ (संगत कोण)

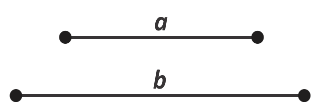
तो हम कह सकते हैं कि $RS \parallel PQ$

प्रश्नावली–1

1. कॉपी पर 'a' और 'b' दो रेखाखण्ड बनाएँ। अब निर्देशानुसार रेखाखंडों की रचना करें।

(a) $a + b$ (b) $b - a$

(c) $2b + a$ (d) $3a - b$



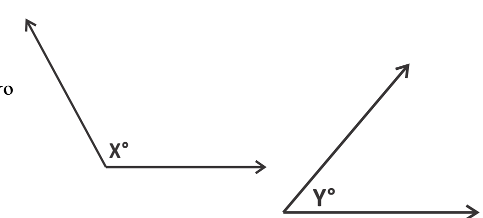
2. परकार और रूलर की सहायता से इन मापों के कोण बनाएँ– 15^o, 45^o, 105^o, 75^o

3. दो कोण X^o (अधिककोण) और Y^o (न्यूनकोण) दिए हैं–

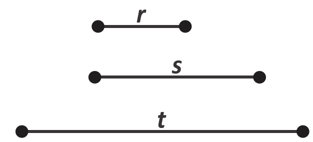
निम्नलिखित मापों के कोण बनाएँ –

(a) $X^o - Y^o$ (b) $X^o + Y^o$

(c) $(180 - X)^o$ (d) $2Y^o$



4. आपको तीन निश्चित मापों 'r', 's' और 't' के रेखाखंड दिए गए हैं।



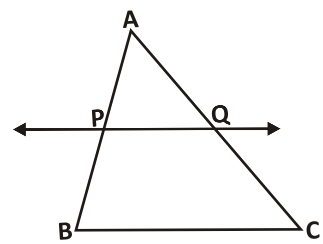
(a) क्या इन रेखाखंडों से त्रिभुज की रचना संभव है? यदि हाँ तो त्रिभुज बनाएँ।

(b) क्या s, t व r + t से त्रिभुज बन पाएगा?

5. एक त्रिभुज ABC की रचना कीजिए। अब शीर्ष A से भुजा BC के समांतर एक रेखा की रचना कीजिए। शीर्ष A पर बने कोणों के योग और त्रिभुज के सभी कोणों के योग की जाँच कीजिए।

रचना – 3 : दिये गये अनुपात में रेखाखंड की रचना

इस रचना के लिए हम थेल्स प्रमेय का उपयोग करेंगे। समरूप त्रिभुज में आपने थेल्स प्रमेय पढ़ा होगा जिसके अनुसार, ''यदि किसी त्रिभुज में एक भुजा के समांतर कोई ऐसी रेखा खींची जाए जो बाकी दोनों भुजाओं को काटे, तो यह समांतर रेखा दोनों भुजाओं को बराबर अनुपात में विभाजित करेगी।''



आकृति – 18

दिए गए त्रिभुज ABC में PQ और BC समांतर हैं, तो थेल्स प्रमेय से हम कह सकते हैं कि $\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC}$ (आकृति–18)

यदि $AP = \frac{1}{3}AB$, तो थेल्स प्रमेय से हम कह सकते हैं कि $AQ = \frac{1}{3}AC$

उदाहरण–3. दिए गए रेखाखंड AB पर एक बिंदु C ढूँढ़िए जिसमें AC:AB = 2:3

हल :

पद 1 : हमें एक रेखाखंड AB दिया हुआ है और हमें उस पर एक बिंदु C इस तरह प्राप्त करना है कि AC : AB = 2 : 3

यानी रेखाखंड AC का माप, रेखाखंड AB (दिए गए रेखाखंड) का $\frac{2}{3}$ होगा। (आकृति–19)

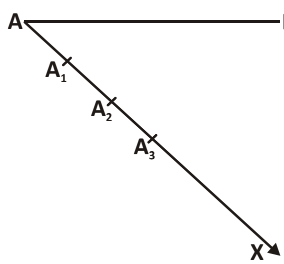
सोचें कि रचना कैसे करेंगे : चूँकि AC : AB = 2 : 3

आकृति – 19

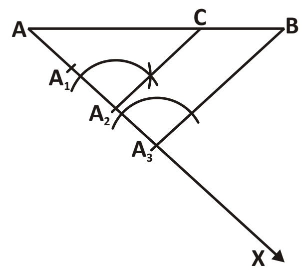
AB को 3 बराबर भागों में विभाजित करें और उसमें दो भाग लें तो वह पूरे रेखाखंड के $\frac{2}{3}$ के बराबर होगा।

हमें यह पता है कि किसी त्रिभुज में एक भुजा के समांतर रेखा अन्य दोनों भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करती है। आकृति –21

तो क्यों न AB के साथ न्यूनकोण बनाती हुई एक किरण खींचें जिस पर 3 बराबर भाग लिए जा सकें। अब 2:3 अनुपात को ध्यान में रखकर तीसरे बिंदु को B से मिलाएँ और इसी के समांतर दूसरे बिंदु से एक रेखा खींचें।



आकृति – 20



आकृति – 21

पद 2 : रचना के चरण

1. बिंदु A से कोई भी न्यूनकोण बनाते हुए एक किरण AX खींचते हैं।
2. AX पर 3 बराबर चाप काटें। इन्हें AA_1, A_1A_2, A_2A_3 नाम देते हैं।

   $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$
3. अब A_3 से B को मिलाएँ और A_2 से A_3B के समांतर रेखा खींचें जो AB को 'C' पर प्रतिच्छेद करती है।

   AC अभीष्ट रेखाखंड है, चूँकि $AC : AB = 2 : 3$

पद 3 : प्रमाण : हम ज्यामिति रचना के आधार पर कैसे कह सकते हैं कि $\frac{AC}{AB} = \frac{2}{3}$

ΔABA_3 और ΔACA_2 में $A_2C \| A_3B$ (रचना से)

थेल्स प्रमेय से हम कह सकते हैं कि,

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AA_2}{AA_3} \quad \cdots (1)$$

रचना से हमें ज्ञात है कि,

$\frac{AA_2}{AA_3} = \frac{2}{3}$ (चूँकि AA_3 तीन बराबर भागों में विभाजित है।)

अतः $\frac{AC}{AB} = \frac{AA_2}{AA_3} = \frac{2}{3}$

उदाहरण–4. एक ऐसे रेखाखंड की रचना कीजिए जो कि दिए गए रेखाखंड के माप का $\frac{3}{2}$ हो।

हल :

पद 1 : हमें रेखाखंड AB दिया है, एक बिंदु C लेना है जिससे

$AC : AB = 3 : 2$

पिछले उदाहरण में बिंदु C दोनों बिंदुओं A और B के बीच में स्थित था। इस उदाहरण में बिंदु C ऐसा है कि $AC : AB = 3 : 2$ इसलिए बिंदु C रेखाखंड AB के बाहर स्थित होगा। जब रेखाखंड AC रेखाखंड AB से बड़ा होगा तभी AB का $\frac{3}{2}$ गुना हो सकेगा।

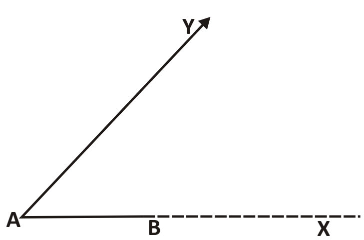
पद 2 : रचना के चरण :

1. बिंदु A से न्यूनकोण बनाते हुए एक किरण AY खींचें और रेखाखंड AB को X तक बढ़ाएँ। (AB को X तक इसलिए बढ़ाया क्योंकि हमें एक ऐसा बिंदु C चाहिए जिससे $AC:AB = 3:2$)

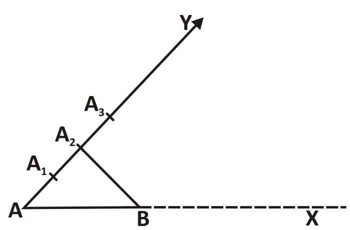
2. AY पर 3 बराबर चाप काटें उन्हें A_1, A_2, A_3 नाम दें।

3. अब A_2 को B से जोड़ें और A_3 से A_2B के समांतर रेखा खींचें जो AX को C पर काटे।

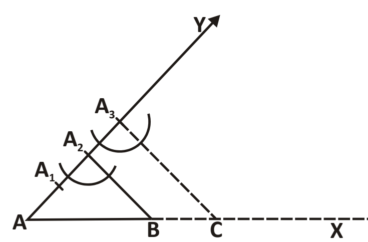
अभीष्ट बिन्दु C, AX पर इस प्रकार है कि $\frac{AC}{AB} = \frac{3}{2}$



आकृति – 22



आकृति – 23



आकृति – 24

पद 3 : प्रमाण : क्या हम ज्यामिति रचना के आधार पर कह सकते हैं कि $\frac{AC}{AB} = \frac{3}{2}$?

ΔACA_3 और ΔABA_2 में

$A_2B \parallel A_3C$ (रचना से)

$\therefore \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AA_3}{AA_2}$ ··· (1) (थेल्स प्रमेय से)

रचना से हमें यह पता है कि,

$$\frac{AA_3}{AA_2} = \frac{3}{2}$$

अतः समीकरण (1) से $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{3}{2}$

इस रचना में हमें रेखा खण्ड AC मिला है जो दी गई रेखा खण्ड AB से एक निश्चित अनुपात में बड़ा है। $AC = \dfrac{3}{2}AB$ या हम यह भी कह सकते हैं कि बिंदु 'C' रेखाखण्ड AB को 3 : 2 में विभाजित करता है।

FEVU1G

समरूप त्रिभुज की रचना

हम जानते हैं कि समरूप बहुभुज में संगत कोण बराबर होते हैं और संगत भुजाएँ समान अनुपात में होती हैं।

समरूपता की यही दो कसौटियाँ त्रिभुज पर भी लागू होती हैं।

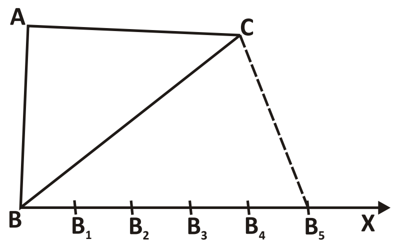
रचना – 4 : दिए गए त्रिभुज ABC के समरूप एक त्रिभुज की रचना करें जिसकी भुजाएँ त्रिभुज ABC की संगत भुजाओं के $\dfrac{3}{5}$ हो।

पद 1 : हमें त्रिभुज ABC दिया गया है जिसके समरूप त्रिभुज की रचना करनी है। हमें पता है कि समरूप त्रिभुज में संगत कोण बराबर और संगत भुजाएँ समानुपातिक होती हैं। यहाँ अनुपात $\dfrac{3}{5}$ दिया है। पहले की गई रचनाओं का उपयोग करते हुए समरूप त्रिभुज बनाते हैं।

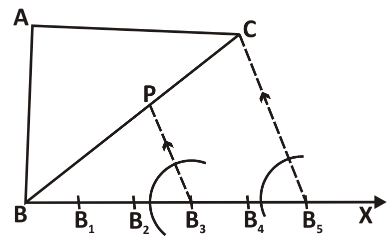
पद 2 : रचना के चरण

1. बिंदु B से A के दूसरी ओर एक न्यूनकोण बनाते हुए एक किरण BX खींचें।

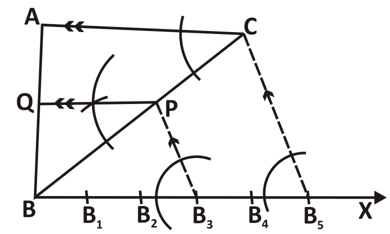
2. अब BX पर 5 बराबर चाप काटें और उन्हें क्रमशः B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 नाम दें।
   इसससे हमें $BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B_5$ प्राप्त होते हैं।



आकृति – 25



आकृति – 26



आकृति – 27

3. अब B_5 से C मिलाएँ और B_3 से B_5C के समांतर एक रेखा खींचें जो BC को P पर प्रतिच्छेद करे।
4. अब P से AC के समांतर एक रेखा खींचें जो AB को Q पर प्रतिच्छेद करे।

QBP अभीष्ट त्रिभुज है।

पद 3 : प्रमाणः

कैसे जाँचें कि ΔQBP और ΔABC, समरूप त्रिभुज हैं?

एक तरीका तो यह होगा कि हम दोनों त्रिभुज की भुजाओं को माप लें और देखें कि संगत भुजाएँ समानुपातिक हैं या नहीं।

दूसरा समरूपता के अभिगृहीत (कोण–कोण–कोण समरूपता) से सिद्ध करके देखें–

ΔQBP और ΔABC में,

$\angle QBP = \angle ABC$ (उभयनिष्ठ कोण)

$\angle PQB = \angle CAB$ (संगत कोण) (रचना से $PC \| CA$)

$\angle BPQ = \angle BCA$ (संगत कोण) (रचना से $PC \| CA$)

अतः $\Delta QBP \sim \Delta ABC$ (कोण–कोण–कोण समरूपता)

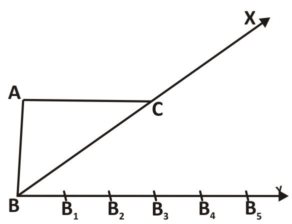
यानी $\dfrac{QB}{AB} = \dfrac{BP}{BC} = \dfrac{QP}{AC}$

$\dfrac{BP}{BC} = \dfrac{3}{5}$ (रचना से BC, 5 बराबर भाग हैं और BP, 3 बराबर भाग हैं)

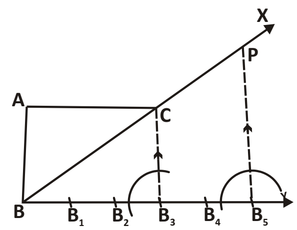
$BP = \dfrac{3}{5} BC$

$\therefore\ QP = \dfrac{3}{5}\ AC$ और $QB = \dfrac{3}{5}\ AB$

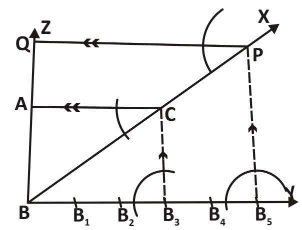
उदाहरण–5. दिए गए त्रिभुज ABC के समरूप एक त्रिभुज की रचना करें जिसकी भुजाएँ त्रिभुज ABC की संगत भुजाओं के $\frac{5}{3}$ हों।



आकृति – 28



आकृति – 29



आकृति – 30

पद 1 : हमें एक त्रिभुज ABC दिया गया है। इसके समरूप एक त्रिभुज की रचना करनी है जिसकी भुजाएँ त्रिभुज ABC की संगत भुजाओं के $\frac{5}{3}$ हों।

पद 2 : रचना के चरण :

1. बिंदु B से A के दूसरी ओर एक न्यूनकोण बनाते हुए एक किरण BY खींचें । BC और BA को आगे बढ़ाते हुए क्रमशः किरण BX व BZ खींचें।

2. अब BY पर 5 बराबर भाग लें उन्हें BB_1, B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4, B_4B_5 नाम दें।

3. अब B_3 से C को मिलाएँ। B_5 से B_3C के समांतर एक रेखा खींचें जो BX को P पर प्रतिच्छेद करे।

4. अब P से AC के समांतर एक रेखा खींचें जो BZ को Q पर प्रतिच्छेद करे।

   QBP अभीष्ट त्रिभुज है।

FF5Q34

समरूप चतुर्भुज की रचना

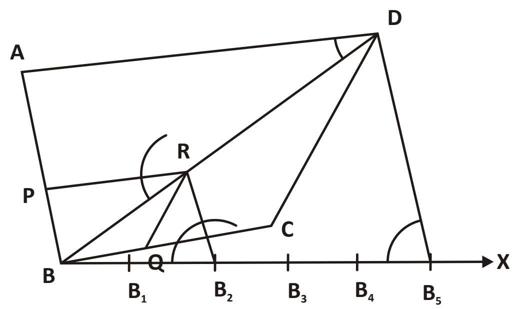
जिस तरह हमने एक समरूप त्रिभुज की रचना की है आइए उसी तरह एक समरूप चतुर्भुज की रचना करते हैं।

हमें एक चतुर्भुज ABCD दिया है। एक ऐसे समरुप चतुर्भुज की रचना करनी है जिसकी प्रत्येक भुजा की माप चतुर्भुज ABCD की संगत भुजाओं के माप का $\frac{2}{5}$ हो।

पद 1 : हमें एक चतुर्भुज ABCD दिया गया है और इसके समरूप एक चतुर्भुज की रचना करनी है जिसकी भुजाओं की माप दिए गए चतुर्भुज की संगत भुजाओं की $\frac{2}{5}$ हो। यहाँ भी समरूप त्रिभुज के समान ही रचना होती है। एक बात ध्यान रखने योग्य है कि पहले हम विकर्ण (diagonal) की रचना करते हैं।

पद 2 : रचना के चरण :

1. बिन्दु B से A के दूसरी ओर एक न्यूनकोण बनाते हुई किरण BX की रचना करें।
2. अब BX पर 5 बराबर भाग लें इन्हें BB_1, B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4, B_4B_5 नाम दें।
3. अब B_5 से D को मिलाएँ और B_2 से B_5D के समांतर एक रेखा खींचें जो BD को R पर प्रतिच्छेद करती हो।
4. अब R से AD के समांतर एक रेखा खींचें जो AB को P पर प्रतिच्छेद करती हो।
5. इसी प्रकार R से CD के समांतर एक रेखा खींचें जो BC को Q पर प्रतिच्छेद करती हो।



आकृति – 31

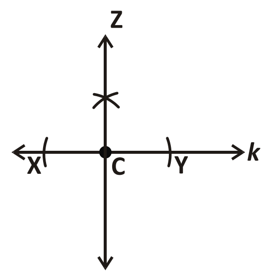
इस प्रकार, PBQR अभीष्ट चतुर्भुज प्राप्त होता है।

लंब खींचना

उदाहरण–6. रेखा k के बिंदु C पर लंब खींचें।

हल : पद 1 : हमें रेखा k पर बिंदु C पर एक लंब खींचना है।

आकृति – 32



आकृति – 33

पद 2 : रचना के चरण

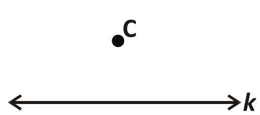
1. C को केन्द्र मानें और उसके दोनों ओर कोई भी माप लेकर k पर चाप काटें। कटान बिंदु को X और Y मानें।
2. CX के माप से ज्यादा त्रिज्या लें X और Y को केन्द्र मानकर, रेखा के एक ओर चाप खींचें। ये दोनों चाप एक दूसरे को किसी बिन्दु पर काटेंगे।
3. C से इस कटान बिन्दु को मिलाते हुए रेखा CZ खींचें।

   CZ रेखा k पर लंब है जो, बिंदु C से गुजरता है।

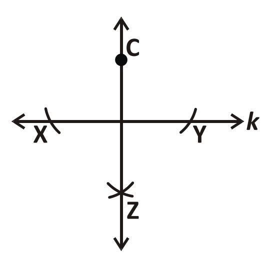
उदाहरण–7. बिंदु C रेखा k के बाहर है। k पर लंब की रचना करें जो C से गुजरता हो।

हल : (संकेत)–पहले बिंदु C को केन्द्र मानें और उससे बराबर दूरी पर बिंदु X, Y प्राप्त करें। फिर बिंदु X और Y को केन्द्र मानकर बिंदु Z प्राप्त करें।

इस रचना के चरण विस्तार से स्वयं लिखें।



आकृति – 34



आकृति – 35

करके देखें

1. 5.8 सेमी. का रेखाखंड AB खींचिए और उस पर बिंदु C इस तरह लीजिए कि AC:CB = 3:4 हो। जाँचिए कि AC:CB = 3:4 है या नहीं।

2. एक रेखाखण्ड की रचना कीजिए जो किसी रेखाखण्ड AB का $\frac{7}{5}$ गुना हो।

3. एक त्रिभुज PQR बनाइए जिसमें QR = 6 सेमी. PQ = 5 सेमी. और $\angle PQR = 60°$ हो। इस त्रिभुज के समरूप एक त्रिभुज ABC बनाइए, जिसमें $AB = \frac{2}{5}$ PQ हो।

4. एक त्रिभुज ABC बनाइए जिसमें BC = 5.5 सेमी. $\angle ABC = 75°$ और $\angle ACB = 45°$ हो। इस त्रिभुज के समरूप एक त्रिभुज XYZ बनाइए जिसमें $YZ = \frac{5}{4}$ BC हो।

प्रश्नावली – 2

1. एक समरूप त्रिभुज की रचना कीजिए जो कि दिए गए त्रिभुज का $\frac{3}{5}$ गुना हो।

2. एक समबाहु त्रिभुज PQR की रचना कीजिए। साथ ही एक और त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसमें $PQ = \frac{3}{4}$ AB हो।

3. एक त्रिभुज PQR की रचना कीजिए। साथ ही एक और त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसमें $AB = \frac{2}{3}$ PQ हो।

4. दो समरूप त्रिभुजों की रचना कीजिए। एक त्रिभुज दूसरे त्रिभुज का $\frac{4}{3}$ गुना हो।

अभी तक आपने समरूप त्रिभुज से जुड़ी हुई रचनाओं का अध्ययन किया है। अब हम पिछली कक्षाओं में पढ़ी हुई अवधारणाओं का उपयोग कर कुछ और रचनाएँ करेंगे।

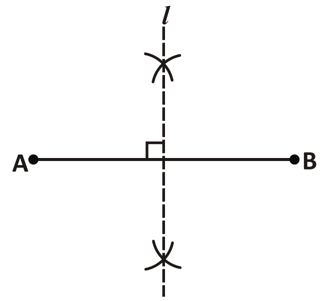
लंब समद्विभाजक

लंब समद्विभाजक (Perpendicular bisector) : यह वह रेखा है जो किसी दिए गए रेखाखंड पर समकोण बनाते हुए उसे दो बराबर भागों में बाँटती है।

लंब समद्विभाजक की रचना

1. दिया हुआ रेखाखण्ड AB बनाएँ।

2. परकार की भुजाओं को इतना फैलाइए कि उसका फैलाव दिए हुए रेखाखंड की लंबाई के आधे से अधिक हो।
3. अब परकार की नोंक को बिंदु A पर रखकर रेखाखंड के दोनों ओर चाप काटें, फिर बिंदु B पर परकार रखकर यही प्रक्रिया दोहराएँ।
4. चापों के कटान बिंदुओं को स्केल की सहायता से मिलाएँ।



आकृति – 36

यह रेखा 'ℓ', रेखाखंड AB का लंब समद्विभाजक है।

क्या लंब समद्विभाजक का प्रत्येक बिंदु, बिंदु A और B से समान दूरी पर होता है?

आइए देखें –

लंब समद्विभाजक पर कोई बिंदु O लें। इस बिंदु को रेखाखंड के दोनों अंत बिंदुओं A और B से मिलाएँ। अब त्रिभुज AOD और BOD में,

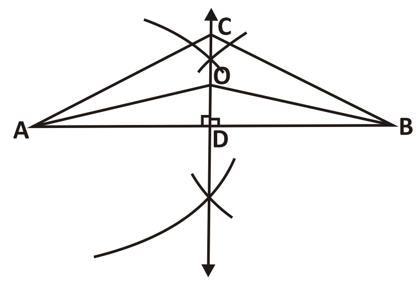
$AD = DB$ (D, AB का मध्य बिंदु है।)

$\angle ODA = \angle ODB$ (समकोण)

$OD = OD$ (उभयनिष्ठ)

$\therefore \Delta AOD \cong \Delta BOD$ (SAS सर्वांगसमता से)

तो $OA = OB$



आकृति – 37

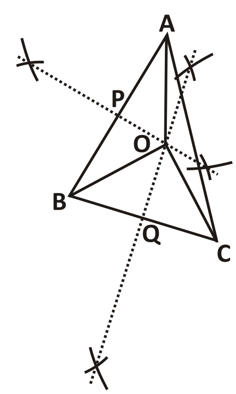
लंब समद्विभाजक पर स्थित प्रत्येक बिंदु, बिंदु A और B से समान दूरी पर होगा।

त्रिभुज की कुछ और रचनाएँ

पद 1 : हमें एक त्रिभुज दिया गया है। अब एक ऐसे वृत्त की रचना करनी है जो त्रिभुज के तीनों शीर्षों A, B और C से होकर गुजरता है।

सोचें कि रचना कैसे करेंगे :

चूँकि वृत्त त्रिभुज के तीनों शीर्षों से गुजरता है इसलिए हम कह सकते हैं कि वृत्त का केंद्र तीनों शीर्षों से समान दूरी पर होगा। हमें यह भी पता है कि लंब समद्विभाजक पर स्थित कोई भी बिंदु भुजा के शीर्षों से समान दूरी पर होता है। त्रिभुज ABC की भुजा AB के लंब समद्विभाजक पर स्थित सभी बिंदु जो शीर्ष A और B से समान दूरी पर होंगे। इसी प्रकार भुजा BC के लंब समद्विभाजक पर भी स्थित सभी बिंदु शीर्ष B और C से समान दूरी पर होंगे।

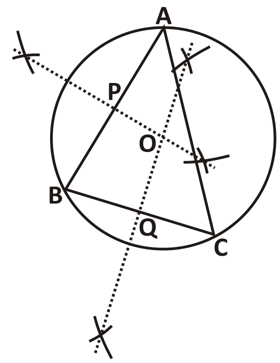


आकृति – 38

मान लें कि दोनों ही लंब समद्विभाजक किसी बिंदु पर प्रतिच्छेद करते हैं और उस बिंदु को हम 'O' नाम देते हैं। चूँकि बिंदु O दोनों ही लंब समद्विभाजक पर स्थित हैं अतः $OA = OB = OC$ अब O को केंद्र लेकर और OA को त्रिज्या लेकर एक वृत्त बनाते हैं। क्या बनाया गया वृत्त तीनों शीर्षों से होकर गुजरता है?

आइए देखें –

पद 2 : रचना के चरण :



आकृति – 39(i)

1. एक त्रिभुज ABC बनाएँ ।
2. भुजा AB और BC पर लंब समद्विभाजक खींचें जो क्रमशः AB को P पर और BC को Q पर प्रतिच्छेद करते हों। दोनों लंब समद्विभाजक बिन्दु 'O' पर प्रतिच्छेद करेंगे।
3. अब O को केंद्र लेकर और OA के माप की त्रिज्या लेकर एक वृत्त बनाएँ। आकृति में आप देख सकते हैं कि यह वृत्त तीनों शीर्षों से गुजरता है।

पद 3 : प्रमाण :

कैसे पता करें वृत्त त्रिभुज के शीर्ष A, B और C से गुजरता है?

त्रिभुज AOP और त्रिभुज BOP में,(आकृति – 39(ii))

$AP = PB$ (क्यों?)

$\angle OPA = \angle OPB$ (क्यों?)

$OP = OP$ (उभयनिष्ठ)

अतः त्रिभुज $AOP \cong BOP$

इससे हम कह सकते हैं कि,

$OA = OB$ .... (i)

आकृति – 39(ii)

इसी तरह त्रिभुज $BOQ \cong COQ$

$\therefore OB = OC$ .... (ii)

(i) और (ii) से हम कह सकते हैं कि,

$OA = OB = OC$

यानी केन्द्र O, बिंदु A, B और C से समान दूरी पर है, तो OA को त्रिज्या लेकर बनाया गया वृत्त B और C से भी जाएगा।

किसी त्रिभुज की भुजाओं के लंब समद्विभाजक जिस बिंदु पर मिलते हैं, उसे त्रिभुज का परिकेन्द्र कहते हैं। यहाँ बिंदु O, त्रिभुज ABC का परिकेन्द्र है और A, B, C से गुजरने वाला वृत्त परिवृत्त है।

कोण समद्विभाजक

दिए गए कोण को दो बराबर कोणों में विभाजित करें।

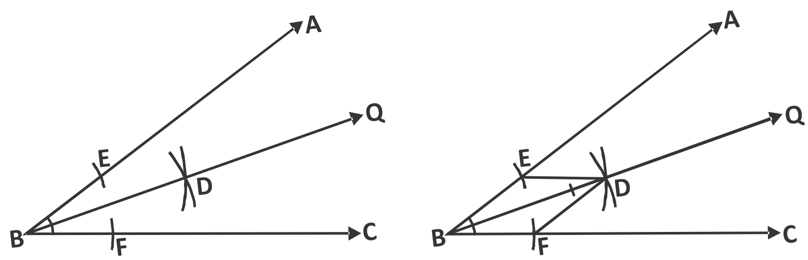
हल :

पद 1 : एक कोण ABC दिया गया है। हमें एक ऐसी किरण की रचना करनी है जो $\angle ABC$ को दो बराबर कोणों में विभाजित करे।

सोचें कि यह किस तरह किया जा सकता है। हमें पता है कि कोण समद्विभाजक वह रेखा होती है जो किसी कोण को दो बराबर भाग में विभाजित करती है, अतः दोनों कोण बराबर होते हैं। यदि हम दो त्रिभुजों की रचना इस तरह करें कि कोण समद्विभाजक दोनों त्रिभुजों की उभयनिष्ठ भुजा हो और दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हों। (यहाँ BE = BF और DE = DF)। तब SSS से दोनों प्राप्त त्रिभुज सर्वांगसम होंगे। सर्वांगसम त्रिभुज के लिए हमें एक ऐसा बिन्दु चाहिए जो भुजा BA और BC पर स्थित बिन्दुओं से समान दूरी पर हो।

पद 2 : रचना के चरण :

1. शीर्ष B को केंद्र लेकर, कोई भी त्रिज्या लेकर एक चाप काटें जो किरण BA और BC को क्रमशः बिन्दु E और F पर प्रतिच्छेद करती हो।



आकृति – 40 आकृति –41

2. अब E और F को केंद्र लेकर तथा $\frac{1}{2}$ EF से बड़ी त्रिज्या लेकर चाप काटें जो एक दूसरे को D पर प्रतिच्छेद करें।
3. अब किरण BD बनाएँ। यही अभीष्ट कोण समद्विभाजक है।

पद 3 : प्रमाण : लेकिन यह हम कैसे कहें कि किरण BD कोण समद्विभाजक है। आइए देखें।

D से F और E को मिलाएँ अब त्रिभुज BED और BFD में,

BE = BF (एक ही चाप कि त्रिज्याएँ)

ED = FD (एक ही चाप कि त्रिज्याएँ)

BD = BD (उभयनिष्ठ भुजा)

अतः $\Delta BED \cong \Delta BFD$ (SSS से)

इससे हमें प्राप्त होता है $\angle ABD = \angle DBC$ (CPCT)

कोण समद्विभाजक की भुजाओं से दूरी :

कोण समद्विभाजक पर कोई बिन्दु P लें। बिन्दु P से भुजा BA और BC की दूरी ज्ञात करने के लिए P से BA और BC पर लम्ब डालें।

बिन्दु P से भुजा AB पर लंब डालें जो AB को M पर प्रतिच्छेद करता हो। इसी तरह P से ही BC पर लम्ब डालें जो उसे R पर प्रतिच्छेद करता हो। अब त्रिभुज BMP और BRP में,

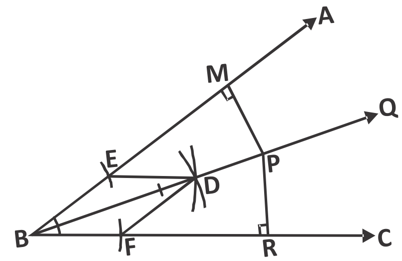
$\angle BMP = \angle BRP$ (समकोण)

$\angle MBP = \angle RBP$ (क्योंकि BP कोण समद्विभाजक है)

$BP = BP$ (उभयनिष्ठ)

अतः $\Delta BMP \cong \Delta BRP$ (AAS सर्वांगसमता)

इससे हमें प्राप्त होता है $PM = PR$ (CPCT))



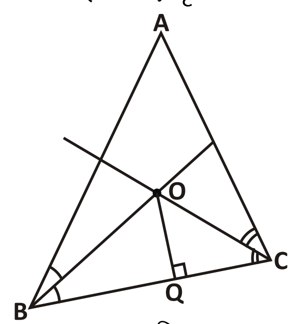
आकृति – 42

अंतः वृत्त (अंतर्गत वृत्त)

पद 1 : हमें एक त्रिभुज ABC दिया है और हमें एक ऐसे वृत्त की रचना करनी है जो त्रिभुज के तीनों भुजाओं को स्पर्श करती है।

रचना कैसे करें :

चूँकि वृत्त त्रिभुज की तीनों भुजाओं को स्पर्श करते हुए गुजरता है इसलिए वृत्त का केंद्र तीनों भुजाओं से समान दूरी पर होगा। हम जानते हैं कि कोण समद्विभाजक पर स्थित कोई भी बिंदु कोण की भुजाओं से समान दूरी पर होता है। कोण ABC के कोण समद्विभाजक पर स्थित ऐसे कई बिंदु होंगे जो भुजा BA और BC से समान दूरी पर होंगे। इसी प्रकार कोण BCA के कोण समद्विभाजक पर भी ऐसे कई बिंदु स्थित होंगे जो भुजा CB और CA से समान दूरी पर होंगे।

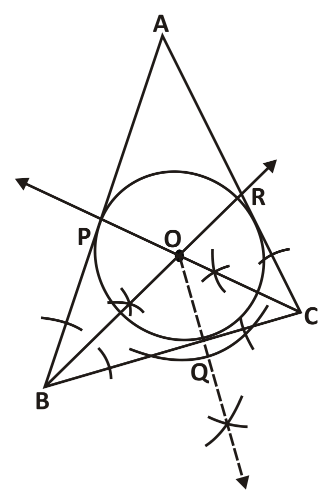


आकृति – 43

दोनों कोण समद्विभाजक एक दूसरे को जिस बिंदु पर काटते हैं उसे O मानें तो बिंदु O से भुजा AB, BC और CA की दूरी समान होगी। अब O को केन्द्र और केन्द्र से किसी भुजा की लम्बवत दूरी को त्रिज्या मानकर वृत्त खींचें। क्या यह वृत्त ΔABC की तीनों भुजाओं को स्पर्श करेगा?

पद 2 : रचना के चरण :

1. एक त्रिभुज ABC बनाएँ।
2. कोण ABC और कोण BCA के कोण समद्विभाजक खींचें। जिस बिंदु पर दोनों एक दूसरे को काटें उसे बिंदु O मान लें।
3. अब बिंदु O से भुजा BC पर लंब डालें जो BC को Q पर प्रतिच्छेद करता है। O को केंद्र लेकर और OQ को त्रिज्या लेकर एक वृत्त बनाएँ। आकृति में आप देख सकते हैं कि यह वृत्त तीनों भुजाओं को स्पर्श करता है। अतः O की AB, BC और CA से लम्बवत दूरी समान है।



आकृति – 44

पद 3 : प्रमाण : आइए हम गणितीय तर्कों के आधार पर देखते हैं कि क्या प्राप्त वृत्त तीनों भुजाओं को स्पर्श करते हुए गुजरता है?

त्रिभुज POB और त्रिभुज BOQ में,

$\angle PBO = \angle QBO$

$\angle OPB = \angle OQB = 90^\circ$

$OB = OB$ (उभयनिष्ठ)

अतः $\Delta POB \cong \Delta QOB$

$\therefore \quad OP = OQ$....(i)

इसी तरह $\Delta ROC \cong \Delta QOC$

$\therefore \quad OR = OQ$....(ii)

(i) और (ii) से हम कह सकते हैं कि,

$OP = OQ = OR$

अब हम O को केंद्र लेकर और त्रिज्या OP लेकर एक वृत्त बनाते हैं जो त्रिभुज की तीनों भुजाओं को स्पर्श करते हुए गुजरता है।

किसी त्रिभुज के कोण समद्विभाजक जिस बिंदु पर मिलते हैं, उसे अंतःकेन्द्र कहते हैं और वृत्त को अंतःवृत्त कहते हैं।

करके देखें

1. अंतःवृत्त और परिवृत्त की रचना कीजिए जब त्रिभुज ABC में :

   (i) $AB = 3$ सेमी., $BC = 4$ सेमी. और $\angle B = 90^\circ$ । साथ ही अंतःवृत्त और परिवृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

   (ii) $AB = BC = CA = 6$ सेमी. अंतःकेंद्र और परिकेंद्र कहाँ स्थित हैं?

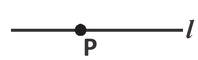
   (iii) $BC = 7$ सेमी., $\angle B = 45^\circ$, $\angle A = 105^\circ$ अंतःकेंद्र और परिकेंद्र कहाँ स्थित हैं?

FFEL4R

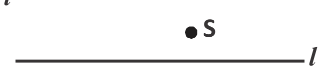
प्रश्नावली–3

1. निर्देशानुसार रचना करें– (परकार का उपयोग करें)

   (i) रेखा ℓ पर स्थित बिन्दु p पर लंब खींचें।

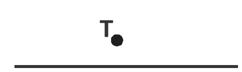


   (ii) बिन्दु s से रेखा ℓ पर लंब खींचें।

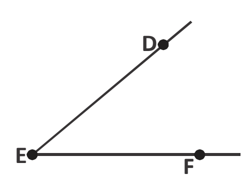


   (iii) रेखाखंड JK का लंब समद्विभाजक बनाएँ।

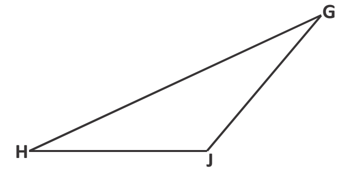
   (iv) बिन्दु 'T' से होती हुई रेखा जो ℓ के समांतर हो खींचें।



   (v) बिन्दु 'F' से होती हुई रेखा जो ED के समांतर हो, खींचें।

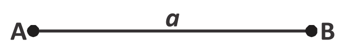


(vi) बिन्दु G से रेखा HJ पर लंब डालें।



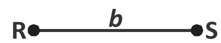
2. आपको दो रेखाखण्ड AB = a और RS = b दिए हैं। अब निर्देशानुसार रचना करें–

(i) 'a' और 'b' भुजा का आयत बनाएँ।



(ii) 4b परिमाप का वर्ग बनाएँ।

(iii) a कर्ण का वर्ग बनाएँ।



(iv) समांतर चतुर्भुज जिसकी भुजा a और b तथा इनके बीच का कोण θ हो।

3. एक समकोण त्रिभुज पर परिवृत्त की रचना कीजिए। रचे गए वृत्त की त्रिज्या का मान बताइए।
4. एक समकोण त्रिभुज पर अंतःवृत्त की रचना कीजिए। रचे गए वृत्त की त्रिज्या का मान बताइए।
5. एक समबाहु त्रिभुज पर अंतःवृत्त और परिवृत्त की रचना कीजिए। अब अंतःकेंद्र और परिकेंद्र निकालिए। क्या दोनों एक ही जगह पर स्थित हैं?
6. कोई तीन असंरेख बिन्दु (non-collinear points) लीजिए और उनसे गुजरने वाले एक वृत्त की रचना कीजिए।
7. मोहन अपनी शाला के वृत्ताकार मैदान के केन्द्र पर झण्डा फहराना चाहता है। मैदान में किस जगह झण्डे के लिए खंभा गड़ाया जाए, यह पता लगाने के लिए उसे जोया और राहुल की सहायता लेनी पड़ी। सोचिए तीनों ने मिलकर खंभे के लिए जगह कैसे ढूँढ़ी होगी?

हमने सीखा

1. **सवाल को समझना :–** सवाल पर काम शुरू करने का सबसे पहला कदम है सवाल को पढ़ना और यह देखना कि क्या जानकारी दी गयी है और क्या रचना करनी है। यह एक तरीके से जानकारी को समझकर उसे गणितीय रूप व संदर्भ में परिवर्तित करने जैसा है। इसमें यह समझने की जरूरत है कि दी गई जानकारी में से कौनसी उपयोगी है और कौन सी नहीं। दी गई जानकारी के आधार पर किन ज्यामितीय अवधारणाओं का उपयोग हो सकता है, इस तरह की सोच सवाल को समझने मे मदद करती है।
2. एकत्रित की गई जानकारी के आधार पर एक कच्चा (Rough) चित्र बनाकर एवं विश्लेषण कर यह सोच सकते हैं कि इस सवाल को किस तरह हल करें। इसमें यह सोचना होगा कि जो जानकारी दी गई है उसमें अपेक्षित आकृति का कौन–कौन सा हिस्सा हमें ज्ञात हो गया है और आकृति की रचना के लिए क्या और चाहिए।
3. एक बार विश्लेषण कर कच्चा (Rough) चित्र बनने के बाद चरणबद्ध रूप से ज्यामितीय रचना की जा सकती है।
4. अंत में रचना पूरी होने के बाद देखें कि रचित आकृति सवाल में दी गयी जानकारी के अनुसार है या नहीं। ज्यामितीय रचना में आप माप के अलावा प्रमाण (proof) के माध्यम से भी देख सकते हैं कि रचित आकृति अभीष्ट है या नहीं।