3 घातांक तथा घनमूल

थोड़ा याद करें

पिछली कक्षाओं में हमने घातांक और उनके नियमों का अध्ययन किया है ।

- $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ इस गुणन रुपी संख्या को संक्षेप में हम 2^5 ऐसा लिखते है ।

  यहाँ 2 यह आधार तथा 5 यह घातांक है 2^5 यह घातांकित संख्या है ।

- घातांक के नियम : m तथा n पूर्णांक संख्या हो, तो

  (i) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ (ii) $a^m \div a^n = a^{m-n}$ (iii) $(a \times b)^m = a^m \times b^m$ (iv) $a^0 = 1$

  (v) $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$ (vi) $(a^m)^n = a^{mn}$ (vii) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$ (viii) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^m$

- घातांक के नियम का उपयोग कर दिए गए उदाहरणों की चौखट में उचित संख्या लिखिए ।

  (i) $3^5 \times 3^2 = 3^{\square}$ (ii) $3^7 \div 3^9 = 3^{\square}$ (iii) $(3^4)^5 = 3^{\square}$

  (iv) $5^{-3} = \dfrac{1}{5^{\square}}$ (v) $5^0 = \square$ (vi) $5^1 = \square$

  (vii) $(5 \times 7)^2 = 5^{\square} \times 7^{\square}$ (viii) $\left(\dfrac{5}{7}\right)^3 = \dfrac{\square^3}{\square^3}$ (ix) $\left(\dfrac{5}{7}\right)^{-3} = \left(\dfrac{\square}{\square}\right)^3$

आओ जानें

परिमेय घातांक वाली संख्या का अर्थ (The number with rational index)

(I) संख्या का घातांक $\dfrac{1}{n}$ स्वरुप में परिमेय संख्या हो तो ऐसी संख्या का अर्थ ।

संख्या का घातांक $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{5}, \ldots, \dfrac{1}{n}$ इस रुप में परिमेय संख्या हो तो उस संख्या का अर्थ देखेंगे ।

किसी एक संख्या का वर्ग दर्शाने के लिए उसके घात में 2 लिखते हैं और संख्या का वर्गमूल दर्शाने के लिए उसके घात $\dfrac{1}{2}$ लिखते हैं ।

उदाहरण, 25 का वर्गमूल $\sqrt{\ }$ इस करणी चिह्न का उपयोग कर हम $\sqrt{25}$ ऐसा लिखते हैं । घात का उपयोग कर इसे $25^{\frac{1}{2}}$ ऐसा लिखते हैं, अर्थात $\sqrt{25} = 25^{\frac{1}{2}}$.

साधारणत: a इस संख्या का वर्ग a^2 ऐसा लिखते हैं तो a का वर्गमूल $\sqrt[2]{a}$ ऐसा या $\sqrt{a}$ या $a^{\frac{1}{2}}$ ऐसा लिखते हैं ।

इसी प्रकार a इस संख्या का घन a^3 ऐसा लिखते हैं तब a का घनमूल $\sqrt[3]{a}$ या $a^{\frac{1}{3}}$ ऐसा लिखते हैं ।

जैसे, $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$ ।

$\therefore$ 64 का घनमूल $\sqrt[3]{64}$ या $(64)^{\frac{1}{3}}$ ऐसा लिखते हैं ध्यान दो कि, $64^{\frac{1}{3}} = 4$

$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5 = 243$ । अर्थात 3 का 5 वाँ घात 243 है ।

इसके विपरित 243 के पाँचवे मूल को $(243)^{\frac{1}{5}}$ या $\sqrt[5]{243}$ ऐसा लिखते हैं । $\therefore$ $(243)^{\frac{1}{5}} = 3$

साधारणत: a का n वाँ मूल $a^{\frac{1}{n}}$ ऐसा लिखा जाता है ।

उदाहरण, (i) $128^{\frac{1}{7}}$ =128 का 7 वाँ मूल, (ii) $900^{\frac{1}{12}}$ = 900 का 12 वाँ मूल, आदि ।

ध्यान दो कि $10^{\frac{1}{5}} = x$ यह संख्या हो तब $x^5 = 10$ ।

प्रश्नसंग्रह 3.1

1. घातांक का उपयोग करके नीचे दी हुई संख्याएँ लिखिए ।

(1) 13 का पाँचवाँ मूल (2) 9 का छठा मूल (3) 256 का वर्गमूल

(4) 17 का घनमूल (5) 100 का आठवाँ मूल (6) 30 का सातवाँ मूल

2. दी गई घातांकित संख्या कौन-सी संख्याँ का कौन-सा मूल है लिखिए ।

(1) $(81)^{\frac{1}{4}}$ (2) $49^{\frac{1}{2}}$ (3) $(15)^{\frac{1}{5}}$ (4) $(512)^{\frac{1}{9}}$ (5) $100^{\frac{1}{19}}$ (6) $(6)^{\frac{1}{7}}$

(II) संख्या के घातांक के स्थान पर $\frac{m}{n}$ स्वरुप में परिमेय संख्या हो तो ऐसी संख्या का अर्थ :

आप जानते हैं कि $8^2 = 64$,

64 का घनमूल = $(64)^{\frac{1}{3}} = (8^2)^{\frac{1}{3}} = 4$

$\therefore$ 8 के वर्ग का घनमूल = 4 .... (I)

इसी प्रकार, 8 का घनमूल = $8^{\frac{1}{3}} = 2$

$\therefore$ 8 के घनमूल का वर्ग $\left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 2^2 = 4$ ....(II)

(I) तथा (II) से

8 के वर्ग का घनमूल = 8 के घनमूल का वर्ग; अर्थात, $(8^2)^{\frac{1}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2$ यह ध्यान में आता है ।

पूर्णांक घातांकों के नियम, परिमेय घातांकों को भी लागू होते हैं ।

$\therefore$ $\boldsymbol{(a^m)^n = a^{mn}}$ इस नियम का उपयोग कर $(8^2)^{\frac{1}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 8^{\frac{2}{3}}$

इस आधार पर $8^{\frac{2}{3}}$ इस संख्या का अर्थ दो प्रकार से लगा सकते हैं ।

(i) $8^{\frac{2}{3}} = (8^2)^{\frac{1}{3}}$ = 8 के वर्ग का घनमूल (ii) $8^{\frac{2}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2$ = 8 के घनमूल का वर्ग

इसी प्रकार $27^{\frac{4}{5}} = \left(27^4\right)^{\frac{1}{5}}$ अर्थात '27 के चौथे घात का पाँचवाँ मूल',

और $27^{\frac{4}{5}} = \left(27^{\frac{1}{5}}\right)^4$ अर्थात '27 के पाँचवें मूल का चौथा घात' ऐसे दो अर्थ होते हैं ।

सामान्यत: $a^{\frac{m}{n}}$ इस संख्या का अर्थ दो प्रकार से व्यक्त कर सकते हैं ।

$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}}$ अर्थात a के m वें घात का n वाँ मूल या

$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$ अर्थात a के n वें मूल का m वाँ घात ।

प्रश्नसंग्रह 3.2

1. निम्नलिखित सारिणी पूर्ण कीजिए ।

क्र.	संख्या	कौन-से मूल का कौन-सा घात	कौन-से घात का कितना मूल
(1)	$(225)^{\frac{3}{2}}$	225 के वर्गमूल का घन	225 के घन का वर्गमूल
(2)	$(45)^{\frac{4}{5}}$		
(3)	$(81)^{\frac{6}{7}}$		
(4)	$(100)^{\frac{4}{10}}$		
(5)	$(21)^{\frac{3}{7}}$		

2. परिमेय घातांक स्वरुप में व्यक्त करो ।

(1) 121 के पाँचवें घात का वर्गमूल

(2) 324 के चौथे मूल का घन

(3) 264 के वर्ग का पाँचवाँ मूल

(4) 3 के घनमूल का घन

थोड़ा याद करें

- $4 \times 4 = 16$ अर्थात् $4^2 = 16$, इसी प्रकार $(-4) \times (-4)$ अर्थात $(-4)^2 = 16$ इसप्रकार 16 इस संख्या में एक धन और दूसरे में ऋण ऐसे दो वर्गमूल हैं । संकेत में 16 के धन वर्गमूल को $\sqrt{16}$ ऐसे, तथा 16 के ऋण वर्गमूल को $-\sqrt{16}$ ऐसा दर्शाया जाता है $\sqrt{16} = 4$ और $-\sqrt{16} = -4$.
- प्रत्येक धन संख्या के दो वर्गमूल होते हैं ।
- शून्य इस संख्या का वर्गमूल शून्य होता है ।

आओ जानें

घन तथा घनमूल (Cube and Cube Root)

किसी एक संख्या को तीन बार लेकर गुणा करने पर प्राप्त गुणनफल उस संख्या का घन होता है । उदाहरण, $6 \times 6 \times 6 = 6^3 = 216$ । अर्थात 216 यह संख्या 6 का घन है ।

परिमेय संख्या का घन करना ।

उदा. (1) 17 का घन कीजिए ।

$$17^3 = 17 \times 17 \times 17$$
$$= 4913$$

उदा. (2) (-6) का घन कीजिए ।

$$(-6)^3 = (-6) \times (-6) \times (-6)$$
$$= -216$$

उदा. (3) $\left(-\frac{2}{5}\right)$ का घन कीजिए ।

$$\left(-\frac{2}{5}\right)^3 = \left(-\frac{2}{5}\right) \times \left(-\frac{2}{5}\right) \times \left(-\frac{2}{5}\right)$$
$$= -\frac{8}{125}$$

उदा. (4) (1.2) का घन कीजिए ।

$$(1.2)^3 = 1.2 \times 1.2 \times 1.2$$
$$= 1.728$$

उदा. (5) (0.02) का घन कीजिए ।

$$(0.02)^3 = 0.02 \times 0.02 \times 0.02$$
$$= 0.000008$$

दिमाग चलाएँ

उदा (1) में 17 यह संख्या धन है इस संख्या का घन 4913 भी धन संख्या है ।

उदा (2) में -6 इस संख्या का घन -216 है और कुछ धन तथा ऋण संख्या लेकर उनका घन करके देखो उससे संख्या का चिह्न और उस संख्या का घन का चिह्न इनमे कौन-सा संबंध प्राप्त होता है, अध्ययन कीजिए ।

उदा (4) तथा (5) में दी गई संख्या में दशमलव चिह्न के पश्चात आने वाले अंकों की संख्या और संख्याओं के घन में दशमलव चिह्न के पश्चात आने वाले अंकों की संख्या में कौन-सा संबंध ध्यान में आता है ।

घनमूल ज्ञात करना :

दी गई संख्या का अभाज्य गुणनखंड पद्धति से वर्गमूल ज्ञात करना हमने देखा है । उसी पद्धति से हम घनमूल ज्ञात करेंगे ।

उदा. (1) 216 का घनमूल ज्ञात कीजिए ।

हल : सर्वप्रथम 216 के अभाज्य गुणनखंड ज्ञात करेंगे । $216 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$

3 तथा 2 यह गुणनखंड 3 बार आता है इसलिए एक-एक बार लेकर समूह बनाइए ।

$\therefore\ 216 = (3 \times 2) \times (3 \times 2) \times (3 \times 2) \quad = (3 \times 2)^3 = 6^3$

$\therefore\ \sqrt[3]{216} = 6$ अर्थात $(216)^{\frac{1}{3}} = 6$

उदा. (2) -1331 का घनमूल ज्ञात कीजिए।

हल : -1331 का घनमूल ज्ञात करने के लिए सर्वप्रथम 1331 के अभाज्य गुणनखंड ज्ञात करेंगे

$1331 = 11 \times 11 \times 11 = 11^3$

$-1331 = (-11) \times (-11) \times (-11)$

$= (-11^3)$

$\therefore \sqrt[3]{-1331} = -11$

उदा.(4) $\sqrt[3]{0.125}$ ज्ञात कीजिए।

हल : $\sqrt[3]{0.125} = \sqrt[3]{\dfrac{125}{1000}}$

$= \dfrac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{1000}} \quad \cdots \left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$

$= \dfrac{\sqrt[3]{5^3}}{\sqrt[3]{10^3}} \quad \cdots \left(a^m\right)^{\frac{1}{m}} = a$

$= \dfrac{5}{10} \quad = 0.5$

उदा.(3) 1728 के घनमूल ज्ञात कीजिए।

हल : $1728 = 8 \times 216 \quad = 2 \times 2 \times 2 \times 6 \times 6 \times 6$

$\therefore 1728 = 2^3 \times 6^3 \quad = (2 \times 6)^3$ .... $a^m \times b^m = (a \times b)^m$

$\sqrt[3]{1728} = 2 \times 6 = 12$ (ध्यान दे, -1728 का घनमूल -12 प्राप्त होता है।)

प्रश्नसंग्रह 3.3

1. निम्न संख्याओं के घनमूल ज्ञात कीजिए।

(1) 8000 (2) 729 (3) 343 (4) -512 (5) -2744 (6) 32768

2. हल कीजिए (1) $\sqrt[3]{\dfrac{27}{125}}$ (2) $\sqrt[3]{\dfrac{16}{54}}$

3. यदि $\sqrt[3]{729} = 9$ हो तब $\sqrt[3]{0.000729}$ = कितना ?

४४४

उत्तर सूची

प्रश्नसंग्रह 3.1 (1) $13^{\frac{1}{5}}$ (2) $9^{\frac{1}{6}}$ (3) $256^{\frac{1}{2}}$ (4) $17^{\frac{1}{3}}$ (5) $100^{\frac{1}{8}}$ (6) $30^{\frac{1}{7}}$

2. (1) 81 का चौथा मूल (2) 49 का वर्गमूल (3) 15 का पाँचवाँ मूल

(4) 512 का नौवाँ मूल (5) 100 का उन्नीसवाँ मूल (6) 6 का सातवाँ मूल

प्रश्नसंग्रह 3.2 1. (2) 45 के पाँचवें मूल का चौथा घात, 45 के चौथे घात का पाँचवाँ मूल

(3) 81 के 7 वें मूल का 6 वां घात, 81 के 6 वें घात का 7 वाँ मूल

(4) 100 के 10 वें मूल का चौथा घात, 100 के चौथे घात का 10 वाँ मूल

(5) 21 के 7 वें मूल का 3 रा घात, 21 के 3 रे घात का 7 वाँ मूल

2. (1) $(121)^{\frac{5}{2}}$ (2) $(324)^{\frac{3}{4}}$ (3) $(264)^{\frac{2}{5}}$ (4) $3^{\frac{3}{3}}$

प्रश्नसंग्रह 3.3 1. (1) 20 (2) 9 (3) 7 (4) -8 (5) -14 (6) 32

2. (1) $\dfrac{3}{5}$ (2) $\dfrac{2}{3}$ 3. 0.09