অধ্যায় ১৬

সম্ভাৱিতা
(PROBABILITY)

❖ *Where a mathematical reasoning can be had, it is as great a folly to make use of any other, as to grope for a thing in the dark, when you have a candle in your hand. - JOHN ARBUTHNOT* ❖

16.1 অৱতাৰণা (Introduction)

Kolmogorov
(1903-1987)

আগৰ শ্ৰেণীসমূহত আমি বিভিন্ন পৰিঘটনাৰ অনিশ্চয়তাৰ মাপ হিচাপে সম্ভাৱিতাৰ ধাৰণাৰ কথা আলোচনা কৰিছিলোঁ। আমি পাই আহিছোঁ যে এটা পাশাগুটি দলিওৱা কাৰ্য্যত এটা যুগ্ম সংখ্যা পোৱাৰ সম্ভাৱিতা হ'ল $\frac{3}{6}$ বা $\frac{1}{2}$। ইয়াত মুঠ সম্ভাব্য ফলাফলবোৰ হ'ল 1, 2, 3, 4, 5 আৰু 6 (মুঠতে ছয়টা). এটা যুগ্ম সংখ্যা লাভ কৰা ঘটনাটোৰ অনুকূলে ফলাফলবোৰ হ'ল 2, 4 আৰু 6 (মুঠতে তিনিটা)। সাধাৰণতে এটা ঘটনাৰ সম্ভাৱিতা পাবলৈ আমি মুঠ সমসম্ভাব্য ফলাফল আৰু ঘটনাটোৰ অনুকূলে থকা মুঠ ফলাফলৰ অনুপাতটো উলিয়াওঁ। সম্ভাৱিতাৰ এই তত্বটোক পুৰাতন বা ধ্ৰুপদী তত্ব (Classical theory) আখ্যা দিয়া হয়।

নৱম শ্ৰেণীত আমি পৰ্য্যবেক্ষণ আৰু সংগৃহীত তথ্যৰ ভিত্তিত সম্ভাৱিতা উলিয়াবলৈ শিকিছিলোঁ। ইয়াক কোৱা হয় সম্ভাৱিতাৰ পৰিসাংখ্যিক পদ্ধতি (Statistical approach)।

উভয় তত্বৰে কিছুমান গভীৰ ধৰণৰ অসুবিধা আছে। দৃষ্টান্ত হিচাপে, যিবোৰ কাৰ্য্য অথবা পৰীক্ষাৰ ফলাফলৰ সংখ্যা অসীম সেইবোৰ ক্ষেত্ৰত এই তত্ববোৰ প্ৰয়োগ কৰিব নোৱাৰি। পুৰাতন তত্ব অনুসৰি আমি আটাইবোৰ ফলাফলকে সমসম্ভাব্য বুলি ধৰোঁ। স্মৰণ কৰাঁ যে কিছুমান ফলাফলক সমসম্ভাব্য বুলি কোৱা হয় যদি সেইবোৰৰ যিকোনো এটা ঘটিবৰ বাবে অন্যবোৰতকৈ অধিক সম্ভাব্য বুলি ভাবিবৰ কোনো কাৰণ বা যুক্তি নাথাকে। এনেদৰে, সম্ভাৱিতাৰ সংজ্ঞা আগ বঢ়াবলৈ আমি সমসম্ভাব্য ফলাফলৰ ব্যৱহাৰ কৰিছিলোঁ। যুক্তিৰে বিচাৰ কৰিলে বুজিব পাৰি যে ই এটা শুদ্ধ সংজ্ঞা নহয়। গতিকে 1933 চনত এগৰাকী ৰাছিয়ান গণিতজ্ঞ এ. এন্ কল্মোগোৰোভে (A.N. Kolmogorov) সম্ভাৱিতাৰ আন এক তত্ব আগ বঢ়াইছিল। 1933 চনত প্ৰকাশিত Foundation of Probability নামৰ গ্ৰন্থত সম্ভাৱিতাৰ ধাৰণা আগবঢ়াবলৈ তেওঁ কিছুমান স্বতঃসিদ্ধৰ সহায় লৈছিল। এই অধ্যায়ত আমি সম্ভাৱিতাৰ এই স্বতঃসিদ্ধ ভিত্তিক তত্ব সম্পৰ্কে আলোচনা কৰিম। এই তত্ব বুজিবলৈ হ'লে আমি কেইটামান মৌলিক ধাৰণা যেনে— যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষা (Random Experiment), প্ৰতিদৰ্শ স্থান (Sample Space), ঘটনা (Events) ইত্যাদি সম্পৰ্কে জানি ল'ব লাগিব। পৰৱৰ্তী অনুচ্ছেদত আমি এই আটাইবোৰ ধাৰণা আয়ত্ত কৰিবলৈ চেষ্টা কৰিম।

16.2 যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষা (Random Experiments)

আমাৰ দৈনন্দিন কাম-কাজত আমি এনে বহু কাৰ্য্য সম্পন্ন কৰোঁ যিবিলাকৰপৰা পুনঃপুনঃ কৰিলেও একোটা নিৰ্দিষ্ট ফলহে পোৱা যায়। উদাহৰণস্বৰূপে, যিকোনো প্ৰদত্ত ত্ৰিভুজৰ কোণবোৰৰ বিষয়ে একো নজনাকৈয়ে আমি নিশ্চিতভাৱে ক'ব পাৰোঁ যে আটাইবোৰ কোণৰ মাপৰ সমষ্টি 180°.

আমি বহু ধৰণৰ পৰীক্ষানিৰ্ভৰ কাৰ্য্যও সম্পন্ন কৰোঁ যিবোৰৰপৰা সেইবোৰক হুবহু একে চৰ্ত সাপেক্ষে বাৰে বাৰে সম্পাদন কৰিলেও একে ফল পোৱা নাযাব পাৰে। উদাহৰণস্বৰূপে, যদি এটা মুদ্ৰা টচ্ (Toss) কৰা হয় (বিশেষ ধৰণে প্ৰভাৱিত নকৰাকৈ ওপৰলৈ দলিয়াই দি সমান ঠাইত পৰিবলৈ দিয়া কাৰ্য্য। ইয়াক আমি টচ্ বুলিয়েই উল্লেখ কৰিম) তেন্তে মুণ্ড (Heads) নাইবা পুচ্ছ (Tails) কোনোবা এটা ফাল ওপৰলৈ মুখ কৰি পৰিব। কিন্তু বাস্তৱিকতে এই ফল দুটাৰ ভিতৰত কোনটো ফল পোৱা যাব সেই বিষয়ে আমি নিশ্চিত হ'ব নোৱাৰোঁ। এনে ধৰণৰ পৰীক্ষা কাৰ্য্যক কোৱা হয় যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষা।

এটা পৰীক্ষা কাৰ্য্যক যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষা কোৱা হয় যদি তলৰ চৰ্ত দুটা সিদ্ধ হয়-

(i) ইয়াৰ পৰা একাধিক ফল পোৱা যায়।

(ii) ইয়াৰ ফল সম্পৰ্কে আগতীয়াকৈ অনুমান কৰা সম্ভৱ নহয়।

এটা পাশাগুটি টচ্ কৰা কাৰ্য্য যাদৃচ্চিক পৰীক্ষা হয় নে নহয় বিচাৰ কৰাঁ।

অন্যভাৱে উল্লেখ কৰা নাথাকিলে এই অধ্যায়ত যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাক আমি কেৱল পৰীক্ষা বুলিহে উল্লেখ কৰিম।

16.2.1 *ফল আৰু প্ৰতিদৰ্শ স্থান (Outcomes and Sample Space)*

এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাৰ সম্ভাব্য ফলকে ইয়াৰ ফলাফল (outcome) বোলা হয়।

এটা পাশাগুটি টচ্ কৰা পৰীক্ষাটো বিবেচনা কৰা হ'ল। যদি আমি পাশাগুটিটোৰ ওপৰৰ ফালটোত থকা ফুট্ চিহ্নবোৰতহে কেৱল মনোযোগ দিওঁ তেন্তে পৰীক্ষাটোৰ ফলাফলবোৰ হ'ব 1,2,3,4,5 আৰু 6.

এইদৰে, এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাৰ সকলো সম্ভাব্য ফলাফলৰ সংহতিটোক সংশ্লিষ্ট পৰীক্ষাটোৰ বাবে প্ৰতিদৰ্শ স্থান (Sample Space) বোলা হয়।

প্ৰতিদৰ্শ স্থানটোৰ প্ৰতিটো মৌলকে প্ৰতিদৰ্শ বিন্দু (Sample Point) বোলা হয়। অন্যভাৱে, এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাৰ প্ৰতিটো ফলাফলক একোটা প্ৰতিদৰ্শ বিন্দুও বোলা হয়।

আমি এতিয়া কিছুমান উদাহৰণ আলোচনা কৰোঁহক।

উদাহৰণ 1 দুটা মুদ্ৰা (এটা এটকীয়া আৰু আনটো দুটকীয়া) এবাৰ টচ্ কৰা হ'ল। ইয়াৰ প্ৰতিদৰ্শ স্থান উলিওৱাঁ।

সমাধান স্পষ্টভাৱে, মুদ্ৰা দুটা পৰস্পৰ পৃথক বাবে দুয়োটাকে প্ৰথম আৰু দ্বিতীয় ক্ৰমানুসাৰে উল্লেখ কৰিব পাৰি। যিহেতু, প্ৰতিটোতে মুণ্ড (H) নাইবা পুচ্ছ (T) উঠিব পাৰে, গতিকে সম্ভাব্য ফলাফলবোৰ এনেধৰণৰ হ'ব পাৰে-

দুয়োটা মুদ্ৰাতে মুণ্ড, অৰ্থাৎ (H, H) = HH

প্ৰথমটোত মুণ্ড আৰু দ্বিতীয়টোত পুচ্ছ, অৰ্থাৎ (H, T) = HT

প্ৰথমটোত পুচ্ছ আৰু দ্বিতীয়টোত মুণ্ড, অৰ্থাৎ (T, H) = TH

দুয়োটা মুদ্ৰাতে পুচ্ছ, অৰ্থাৎ (T, T) = TT

এইদৰে প্ৰতিদৰ্শ স্থানটো হ'ল $S = \{HH, HT, TH, TT\}$

> **টোকা** এই পৰীক্ষাটোৰ ফলাফলবোৰ H আৰু T ৰ ক্ৰমিক যুগল বা যোৰ (ordered pair)। সৰলীকৰণৰ বাবে ক্ৰমিক যুগলৰ ক'মা চিনবোৰ উঠাই দিয়া হৈছে।

উদাহৰণ 2 এযোৰ পাশাগুটি (এটা নীলা আৰু আনটো ৰঙা) এবাৰ টচ্ কৰা পৰীক্ষাটোৰ সৈতে সংশ্লিষ্ট প্ৰতিদৰ্শ স্থান নিৰ্ণয় কৰাঁ।

সমাধান ধৰা হ'ল, নীলা ৰঙৰ পাশাগুটিটোত 1 আৰু ৰঙাটোত 2 পোৱা গ'ল। এই ফলাফলটোক আমি ক্ৰমিক যুগল (1,2) ৰ দ্বাৰা বুজাম। সদৃশভাৱে, যদি নীলাটোত 3 আৰু ৰঙাটোত 5 পোৱা হয় তেন্তে ফলাফলটোক ক্ৰমিক যুগল (3,5) ৰে সূচোৱা হ'ব।

সাধাৰণভাৱে প্ৰতিটো ফলাফলকে ক্ৰমিক যুগল (x,y) ৰ দ্বাৰা সূচাব পৰা যায়, য'ত x হ'ল নীলা পাশাগুটিটোত পোৱা সংখ্যা আৰু y ৰঙাটোত পোৱা সংখ্যা। গতিকে প্ৰতিদৰ্শ স্থানটো এনেদৰে আগ বঢ়াব পাৰি

$S = \{(x, y): x$ নীলা পাশাগুটিত পোৱা সংখ্যা আৰু y ৰঙা পাশাগুটিত পোৱা সংখ্যা$\}$

এই প্ৰতিদৰ্শ স্থানটোৰ মৌলসংখ্যা হ'ল $6 \times 6 = 36$ আৰু প্ৰতিদৰ্শ স্থানটো হ'ল-

{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),
(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),
(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}

উদাহৰণ 3 তলৰ প্ৰতিটো পৰীক্ষাৰ ক্ষেত্ৰতে যথোপযুক্ত প্ৰতিদৰ্শ স্থানবোৰ উল্লেখ কৰাঁ

(i) এজন ল'ৰাৰ জেপত একোটাকৈ এটকীয়া, দুটকীয়া আৰু পাঁচটকীয়া মুদ্ৰা আছে। তেওঁ এটাৰ পিছত এটাকৈ দুটা মুদ্ৰা জেপৰপৰা উলিয়ায়।

(ii) এজন ব্যক্তিয়ে এবছৰ ধৰি এটা ব্যস্ত ৰাজপথত হোৱা দুৰ্ঘটনাৰ খতিয়ান লয়।

সমাধান (i) Q ৰ দ্বাৰা এটকীয়া, H ৰ দ্বাৰা দুটকীয়া আৰু R ৰ দ্বাৰা পাচঁটকীয়া মুদ্ৰা সূচোৱা হ'ল। জেপৰ পৰা উলিওৱা প্ৰথম মুদ্ৰাটো এই তিনিটা মুদ্ৰা Q, H, R ৰ যিকোনো এটা হ'ব পাৰে। প্ৰথমটো Q হ'লে দ্বিতীয়টো H নাইবা R হ'ব। এইক্ষেত্ৰত দুয়োটা প্ৰচেষ্টাৰ ফলাফলবোৰ হ'ব QH নাইবা QR। সদৃশভাৱে, H ৰ অনুৰূপে দ্বিতীয় প্ৰচেষ্টাৰ ফলবোৰ হ'ব Q নাইবা R। সেয়েহে, এই ক্ষেত্ৰত ফলাফলবোৰ হ'ব HQ নাইবা HR। শেষত R ৰ অনুৰূপে দ্বিতীয় প্ৰচেষ্টাৰ ফলবোৰ হ'ব H নাইবা Q। সেয়েহে এই ক্ষেত্ৰত ফলাফলবোৰ হ'ব RH নাইবা RQ।

এইদৰে, নিৰ্ণেয় প্ৰতিদৰ্শ স্থান হ'ব

$$S = \{QH, QR, HQ, HR, RH, RQ\}$$

(ii) পৰ্য্যবেক্ষণৰ বছৰটোত ব্যস্ত ৰাজপথত ঘটা দুৰ্ঘটনাৰ সংখ্যা হ'ব পাৰে 0 (যদি কোনো দুৰ্ঘটনা ঘটা নাই) নাইবা 1 নাইবা 2 নাইবা অন্য কোনো ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা। এইদৰে পৰীক্ষালব্ধ প্ৰতিদৰ্শ স্থান হ'ব-

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$$

উদাহৰণ 4 মুদ্ৰা এটা টচ্ কৰা হ'ল। টচ্টোত যদি মুণ্ড পোৱা যায় তেন্তে 3 টা নীলা বল আৰু 4 টা বগা বল থকা এখন মোনাৰ পৰা বল এটা লোৱা হয়। যদি টচ্টোত পুচ্ছ পোৱা যায় তেন্তে এটা পাশাগুটি দলিয়াই চোৱা হয়। পৰীক্ষাটোৰ সৈতে সংশ্লিষ্ট প্ৰতিদৰ্শ স্থান নিৰ্ণয় কৰাঁ।

সমাধান নীলা বল তিনিটাক B_1, B_2, B_3 আৰু বগাবল চাৰিটাক W_1, W_2, W_3, W_4 ৰে সূচোৱা হল। তেতিয়া পৰীক্ষাটোৰ সৈতে সংশ্লিষ্ট প্ৰতিদৰ্শ স্থান হ'ব

$$S = \{HB_1, HB_2, HB_3, HW_1, HW_2, HW_3, HW_4, T1, T2, T3, T4, T5, T6\}$$

ইয়াত HB_i ৰ দ্বাৰা মুদ্ৰাৰ টচত মুণ্ড আৰু মোনাখনৰ পৰা B_i বল প্ৰাপ্ত হোৱা, HW_i ৰ দ্বাৰা মুদ্ৰাটোত মুণ্ড আৰু

মোনাৰ পৰা W_i বল প্ৰাপ্ত হোৱা ফল বুজোৱা হৈছে। সদৃশভাৱে T_i ৰ দ্বাৰা মুদ্ৰাটোত পুচ্ছ আৰু পাশাগুটিটোত i সংখ্যটো প্ৰাপ্ত হোৱা ফল বুজোৱা হৈছে।

উদাহৰণ 5 এটা পৰীক্ষা চলোৱা হ'ল য'ত মুদ্ৰা এটাত মুণ্ড নোপোৱালৈকে পুনঃ পুনঃ টচ্ কৰা হয়। পৰীক্ষাটোৰ সৈতে সংশ্লিষ্ট প্ৰতিদৰ্শ স্থানটো বৰ্ণনা কৰাঁ।

সমাধান পৰীক্ষাটোত প্ৰথম টচ্‌তে মুণ্ড প্ৰাপ্ত হ'ব পাৰে নাইবা দ্বিতীয় টচ্‌ত নাইবা তৃতীয় টচত আৰু মুণ্ড প্ৰাপ্ত নোহোৱালৈ এইদৰে টচ্ কৰা কাৰ্য্য চলি থাকে। গতিকে নিৰ্ণেয় প্ৰতিদৰ্শ স্থান হব-

S={H, TH, TTH, TTTH.........}

অনুশীলনী 16.1

তলৰ1ৰ পৰা 7 লৈ প্ৰতিটো অনুশীলনীৰ পৰীক্ষাৰ বাবে প্ৰতিদৰ্শ স্থান বৰ্ণনা কৰাঁ-

1. এটা মুদ্ৰা তিনিবাৰ টচ্ কৰা হ'ল।
2. এটা পাশাগুটি দুবাৰ দলিওৱা হ'ল।
3. এটা মুদ্ৰা চাৰিবাৰ টচ্ কৰা হ'ল।
4. এটা মুদ্ৰা টচ্ কৰা হ'ল আৰু এটা পাশাগুটি দলিওৱা হ'ল।
5. এটা মুদ্ৰা টচ্ কৰা হ'ল আৰু মুদ্ৰাটোত মুণ্ড প্ৰাপ্ত হোৱা চৰ্ত সাপেক্ষে এটা পাশাগুটি দলিওৱা হ'ল।
6. X কোঠাত 2 জন ল'ৰা আৰু 2 জনী ছোৱালী আৰু Y কোঠাত 1 জন ল'ৰা আৰু 3 জনী ছোৱালী আছে। কোঠা এটা বাছনি কৰি তাৰ পিছত কোঠাটোৰ পৰা এজন ব্যক্তিক বাছনি কৰা পৰীক্ষাটোৰ বাবে প্ৰতিদৰ্শ স্থান নিৰ্দেশ কৰাঁ।
7. এখন মোনাত ৰঙা, বগা আৰু নীলা প্ৰতিটো ৰঙৰ একোটাকৈ পাশাগুটি আছে। যাদৃচ্ছিকভাৱে মোনাখনৰপৰা এটা পাশাগুটি বাছনি কৰি ওপৰলৈ দলিওৱা হ'ল। পাশাগুটিটোৰ ৰং আৰু ওপৰৰ ফালটোত থকা সংখ্যাটো টুকি ৰখা হ'ল। পৰীক্ষাটোৰ সৈতে সংশ্লিষ্ট প্ৰতিদৰ্শ স্থান বৰ্ণনা কৰাঁ।
8. দুটি সন্তানৰ পৰিয়ালবোৰৰ ল'ৰা-ছোৱালীৰ হিচাপ লিপিবদ্ধ কৰা পৰীক্ষা এটা চলোৱা হ'ল।
   (i) জন্মৰ ক্ৰমানুসৰি ল'ৰা বা ছোৱালী সম্পৰ্কে জানিব বিচাৰিলে পৰীক্ষাটোৰ প্ৰতিদৰ্শ স্থান কি হ'ব?
   (ii) পৰিয়ালটোত ছোৱালীৰ সংখ্যা সম্পৰ্কে জানিব বিচাৰিলে প্ৰতিদৰ্শ স্থান কি হ'ব?
9. এটা বাকচত 1 টা ৰঙা আৰু 3 টা অভিন্ন বগা বল আছে। যাদৃচ্ছিকভাৱে এটা এটাকৈ মুঠ দুটা বল পুনৰ্স্থাপন (Replacement) নকৰাকৈ বাকচটোৰপৰা লোৱা হ'ল। পৰীক্ষাটোৰ প্ৰতিদৰ্শ স্থান উল্লেখ কৰাঁ।
10. কোনো এক পৰীক্ষাত এটা মুদ্ৰা টচ কৰা হ'ল। প্ৰথম টচত মুণ্ডপ্ৰাপ্ত হ'লে মুদ্ৰাটো পুনৰ দ্বিতীয়বাৰ টচ কৰা হয়। যদি প্ৰথম টচত পুচ্ছ প্ৰাপ্ত হয় তেন্তে এটা পাশাগুটি এবাৰ দলিওৱা হয়। পৰীক্ষাটোৰ প্ৰতিদৰ্শ স্থান নিৰ্ণয় কৰাঁ।
11. কিছুমান বাল্বৰ মাজৰপৰা যাদৃচ্ছিকভাৱে 3 টা বাল্ব বাছনি কৰা হ'ল। প্ৰতিটো বাল্বকে পৰীক্ষা কৰি বেয়া (D অৰ্থাৎ Defective) আৰু ভাল (N অৰ্থাৎ Non-Defective) এই দুই শ্ৰেণীত ভাগ কৰা হ'ল। পৰীক্ষাটোৰ প্ৰতিদৰ্শ স্থান উলিওৱাঁ।
12. এটা মুদ্ৰা এবাৰ টচ্ কৰা হ'ল। যদি টচ্‌টোত মুণ্ড প্ৰাপ্ত হয় তেন্তে এটা পাশাগুটি দলিওৱা হয়। যদি পাশাগুটিটোত এটা যুগ্ম সংখ্যা প্ৰাপ্ত হয় তেন্তে ইয়াক আকৌ দলিওৱা হয়। পৰীক্ষাটোৰ প্ৰতিদৰ্শ স্থান কি হ'ব?

13. চাৰি টুকুৰা কাগজত বেলেগে বেলেগ 1,2,3 আৰু 4 সংখ্যাবোৰ লিখা হ'ল। টুকুৰাকেইটা এটা বাকচত ভৰাই সানমিহলি কৰা হ'ল। পুনৰ স্থাপন নকৰাকৈ এজন মানুহে এটাৰ পিছত এটাকৈ দুটা টুকুৰা বাকচটোৰ পৰা উলিয়ালে। পৰীক্ষাটোৰ প্ৰতিদৰ্শ স্থান কি হ'ব?
14. এটা পৰীক্ষাকাৰ্য্য চলোৱা হ'ল য'ত পাশাগুটি এটা দলিওৱা হয় আৰু তাৰ পিছত পাশাগুটিটো যুগ্ম সংখ্যা প্ৰাপ্ত হোৱা চৰ্ত সাপেক্ষে এটা মুদ্ৰা এবাৰ টচ্ কৰা হয়। যদি পাশাগুটিটোত অযুগ্ম সংখ্যা প্ৰাপ্ত হয় তেন্তে মুদ্ৰাটো দুবাৰ টচ্ কৰা হয়। পৰীক্ষাটোৰ প্ৰতিদৰ্শ স্থান লিপিবদ্ধ কৰাঁ।
15. মুদ্ৰা এটা টচ্ কৰা হ'ল। যদি টচ্কাৰ্য্যত পুচ্ছ প্ৰাপ্ত হয় তেন্তে 2 টা ৰঙা আৰু 3 টা ক'লা বল থকা বাকচ এটাৰ পৰা এটা বল উলিওৱা হয়। যদি মুণ্ড প্ৰাপ্ত হয় তেন্তে এটা পাশাগুটি দলিওৱা হয়। পৰীক্ষাটোৰ সৈতে যুক্ত প্ৰতিদৰ্শ স্থান উল্লেখ কৰাঁ।
16. 6 প্ৰাপ্ত নোহোৱা পৰ্যন্ত এটা পাশাগুটি বাৰে বাৰে দলিওৱা হয়। পৰীক্ষাটোৰ প্ৰতিদৰ্শ স্থান কি হ'ব।

16.3 ঘটনা (Events)

যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষা আৰু এই পৰীক্ষাৰ সৈতে সংশ্লিষ্ট প্ৰতিদৰ্শ স্থান সম্পৰ্কে আমি আলোচনা কৰি আহিছোঁ। এটা পৰীক্ষা কাৰ্য্যৰ সৈতে যুক্ত সকলো ধৰণৰ প্ৰশ্নৰ বাবে প্ৰতিদৰ্শ স্থানে এটা সাৰ্বিক সংহতিৰ ভূমিকা লয়।

মুদ্ৰা এটা দুবাৰ টচ্ কৰা পৰীক্ষাটো বিবেচনা কৰাঁ। ইয়াৰ সৈতে যুক্ত প্ৰতিদৰ্শ স্থানটো হ'ল S = {HH,HT,TH,TT}

এতিয়া ধৰি লোৱা যে আমি ঠিক এটা মুণ্ড প্ৰাপ্ত হ'ব পৰা ফলাফলবোৰ জানিব খুজিছোঁ। এনে ধৰণৰ ফলাফলৰ (ঘটনাৰ) অনুৰূপে S ৰ পৰা পোৱা মৌলবোৰ হ'ল কেৱল HT আৰু TH। এই মৌল দুটা লৈ আমি এটা সংহতি E পাওঁ য'ত E = {HT,TH}

আমি জানো যে E প্ৰতিদৰ্শ স্থান S ৰ এটা উপসংহতি। সদৃশভাৱে, আমি বিভিন্ন ঘটনাৰ অনুৰূপে S ৰ উপসংহতি বোৰক পৰবৰ্তী ধৰণে যুক্ত কৰিব পাৰোঁ।

ঘটনাৰ বিৱৰণ	**S ৰ অনুৰূপ উপসংহতি**
পুচ্ছৰ সংখ্যা ঠিক 2 টা	A = {TT}
পুচ্চৰ সংখ্যা অতি কমেও 1 টা	B = {HT,TH,TT}
মুণ্ডৰ সংখ্যা অতি বেছি 1 টা	C = {HT,TH,TT}
দ্বিতীয় টচত মুণ্ড প্ৰাপ্ত নহয়	D = {HT,TT}
পুচ্ছৰ সংখ্যা অতিবেছি 2 টা	S = {HH, HT,TH,TT}
পুচ্ছৰ সংখ্যা 2 টাতকৈ অধিক	ϕ

উপৰিউক্ত আলোচনাই দেখুৱায় যে প্ৰতিদৰ্শ স্থানৰ এটা উপসংহতি কোনো এক ঘটনাৰ সৈতে জড়িত হয় আৰু কোনো ঘটনা প্ৰতিদৰ্শ স্থানৰ কোনো উপসংহতিৰ সৈতে জড়িত হয়। এই আলোচনাৰ আলোকতে আমি ঘটনাৰ সংজ্ঞা এনেদৰে আগ বঢ়াব পাৰোঁ-

সংজ্ঞা প্ৰতিদৰ্শ স্থান S ৰ যিকোনো উপসংহতি E ক এক ঘটনা আখ্যা দিয়া হয়।

16.3.1 ***ঘটনাৰ সংঘটন (Occurrence of an Event)*** এটা পাশাগুটি দলিওৱা এটা পৰীক্ষা বিবেচনা কৰা হ'ল। পৰীক্ষাটোৰপৰা 4 তকৈ সৰু সংখ্যা প্ৰাপ্ত হ'ব পৰা ঘটনাটোক E ৰে সূচোৱা হ'ল। যদি পাশাগুটিটোত সঁচাকৈয়ে 1প্ৰাপ্ত হয় তেন্তে আমি 'E সংঘটিত হ'ল' বুলি কওঁ। দৰাচলতে যদি ফলাফল হিচাপে 2 বা 3 পোৱা যায় তেতিয়াও 'E ঘটিল বা সংঘটিত হ'ল' বুলি কোৱা হয়।

এইদৰে, কোনো প্ৰতিদৰ্শ স্থান S ৰ ক্ষেত্ৰত কোনো ঘটনা E ঘটিল বুলি কোৱা হয় যদি পৰীক্ষাটোৰ কোনো ফলাফল ω ৰ বাবে $\omega \in E$। যদি পৰীক্ষাটোৰ ফলাফল ω ৰ বাবে $\omega \notin E$ তেন্তে আমি E নঘটিল বা ঘটা নাই বুলি কওঁ।

16.3.2 *ঘটনাৰ প্ৰকাৰ (Types of Events)* মৌলৰ ওপৰত নিৰ্ভৰ কৰি ঘটনাবোৰক বিভিন্ন প্ৰকাৰে শ্ৰেণীভুক্ত কৰিব পাৰি।

1. অসম্ভৱ আৰু নিশ্চিত ঘটনা (Impossible and Certain Events) ৰিক্ত সংহতি ϕ আৰু প্ৰতিদৰ্শ স্থান S ৰ দ্বাৰা দুটা ঘটনা বৰ্ণনা কৰা হয়। প্ৰকৃততে ϕ ক কোৱা হয় অসম্ভৱ ঘটনা আৰু S অৰ্থাৎ সামগ্ৰিকভাৱে প্ৰতিদৰ্শ স্থানটোকে কোৱা হয় নিশ্চিত ঘটনা।

কথাখিনি ভালদৰে বুজাৰ বাবে পাশাগুটি এটা দলিওৱা পৰীক্ষাটো বিবেচনা কৰা হ'ল। পৰীক্ষাটোৰ সৈতে সংশ্লিষ্ট প্ৰতিদৰ্শ স্থান হ'ল

$$S = \{1,2,3,4,5,6\}$$

পাশাগুটিটোৰ পৰা 7 ৰ গুণিতক প্ৰাপ্ত হোৱা এটা ঘটনাক Eৰে সূচোৱা হ'ল। এই ঘটনা E ৰ সৈতে যুক্ত কৰি S ৰ কোনো উপসংহতি লিখিব পৰা যাবনে? স্পষ্টভাৱে কোনো ফলাফলেই ঘটনাটোত উল্লেখ কৰা চৰ্ত সিদ্ধ নকৰে অৰ্থাৎ প্ৰতিদৰ্শ স্থানৰ কোনো মৌলই ঘটনা E ঘটিব পৰা কথাটো নিশ্চিত নকৰে। এইদৰে, আমি ক'ব পাৰোঁ যে একমাত্ৰ ৰিক্ত সংহতি ϕ য়েই হ'ব পাৰে ঘটনা E ৰ অনুৰূপ প্ৰতিদৰ্শ স্থান S ৰ উপসংহতি। অন্যভাৱে আমি ক'ব পাৰোঁ যে এটা পাশাগুটিৰ ওপৰৰ ফালটোত 7 ৰ গুণিতক পোৱাটো অসম্ভৱ। গতিকে $E = \phi$ এটা অসম্ভৱ ঘটনা।

এতিয়া আন এটা ঘটনা F লোৱা হ'ল যিয়ে পাশাগুটিটোত যুগ্ম নাইবা অযুগ্ম সংখ্যা প্ৰাপ্ত হোৱাটো সূচায়। স্পষ্টভাৱে, $F = \{1,2,3,4,5,6\} = S$, অৰ্থাৎ পৰীক্ষাটোৰ আটাইবোৰ ফলাফলেই F ঘটনাটো ঘটা কথাটো নিশ্চিত কৰে। সেয়েহে, ঘটনা $F = S$ এটা নিশ্চিত ঘটনা

2. সৰল ঘটনা (Simple Event) কোনো ঘটনা E যদি প্ৰতিদৰ্শস্থানৰ এটা মাত্ৰ প্ৰতিদৰ্শ বিন্দুৰে গঠিত হয় তেন্তে ইয়াক এটা সৰল (বা মৌলিক) ঘটনা আখ্যা দিয়া হয়।

কোনো প্ৰতিদৰ্শ স্থানত n টা স্পষ্ট মৌল থাকিলে সৰল ঘটনাৰ সংখ্যাও ঠিক n টা হয়।

উদাহৰণস্বৰূপে, দুটা মুদ্ৰা টচ্ কৰা পৰীক্ষাটোৰ বাবে প্ৰতিদৰ্শ স্থান হ'ল

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

এই প্ৰতিদৰ্শ স্থান সাপেক্ষে চাৰিটা সৰল ঘটনা পোৱা যায়। এইবোৰ হ'ল

$$E_1 = \{HH\},\ E_2 = \{HT\},\ E_3 = \{TH\} \text{ আৰু } E_4 = \{TT\}$$

3. যৌগিক ঘটনা (Compound Event) যদি এটা ঘটনা প্ৰতিদৰ্শ স্থানৰ একাধিক প্ৰতিদৰ্শ বিন্দুৰে গঠিত হয় তেন্তে ইয়াক যৌগিক ঘটনা আখ্যা দিয়া হয়।

উদাহৰণস্বৰূপে, এটা মুদ্ৰা তিনিবাৰ টচ্ কৰা পৰীক্ষাটোৰ ক্ষেত্ৰত পৰৱৰ্তী ঘটনাবোৰ যৌগিক ঘটনা।

E: ঠিক এটা মুণ্ড প্ৰাপ্ত হয়

F: অতি কমেও এটা মুণ্ড প্ৰাপ্ত হয়

G: অতি বেছি এটা মুণ্ড প্ৰাপ্ত হয়। ইত্যাদি।

এটা ঘটনাবোৰৰ সৈতে যুক্ত S ৰ উপসংহতিবোৰ হ'ল

$E = \{HTT, THT, TTH\}$

$F = \{HTT, THT, TTH, HHT, HTH, THH, HHH\}$

$G = \{TTT, THT, HTT, TTH\}$

উপৰিউক্ত প্ৰতিটো উপসংহতিতে এটাতকৈ অধিক প্ৰতিদৰ্শ বিন্দু আছে। গতিকে আটাইকেইটা ঘটনাই যৌগিক ঘটনা।

16.3.3 *ঘটনাৰ বীজগণিত (Algebra of Events)* সংহতিৰ অধ্যায়ত আমি দুই বা ততোধিক সংহতিক সংযোজিত কৰাৰ বিভিন্ন প্ৰণালী যেনে মিলন, ছেদন, প্ৰভেদ, সংহতিৰ পূৰক ইত্যাদি সম্পৰ্কে আলোচনা কৰি আহিছোঁ। একেদৰে, সংহতি চিহ্নৰ সদৃশৰূপ ব্যৱহাৰ কৰি দুই বা ততোধিক ঘটনাক আমি সংযোজন কৰিব পাৰোঁ।

ধৰা হ'ল A,B,C কোনো পৰীক্ষা কাৰ্যৰ সৈতে যুক্ত ঘটনা আৰু S সংশ্লিষ্ট প্ৰতিদৰ্শ স্থান।

1. পূৰক ঘটনা (Complementary Event) প্ৰতিটো ঘটনা A ৰ বাবে আন এটা ঘটনা A' পোৱা যায় আৰু ইয়াক A ৰ পূৰক ঘটনা বোলা হয়। ইয়াক 'A নহয়' এই ঘটনাৰ দ্বাৰাও সূচোৱা হয়। উদাহৰণস্বৰূপে, তিনিটা মুদ্ৰা টচ্ কৰা পৰীক্ষাটো বিবেচনা কৰাঁ। ইয়াৰ সৈতে সংশ্লিষ্ট প্ৰতিদৰ্শ স্থান হ'ল-

$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$

ধৰা হ'ল $A = \{HTH, HHT, THH\}$ যিয়ে মাত্ৰ এটা পচ্ছ প্ৰাপ্ত হোৱা ঘটনাক নিৰ্দেশ কৰে। স্পষ্টভাৱে, ফলাফল HTT ৰ বাবে A ঘটনাটো ঘটা নাই। এই কথাটো আমি এইদৰেও ক'ব পাৰোঁ যে 'A নহয়' ঘটনাটো ঘটিল। এইদৰে, A ত নথকা প্ৰতিটো ফলাফলৰ কাৰণে আমি 'A নহয়' ঘটনাটো ঘটিল বুলি কওঁ।

গতিকে, ঘটনা A ৰ পূৰক ঘটনাটো অৰ্থাৎ 'A নহয়' ঘটনাটো হ'ল

$$A' = \{HHH, HTT, THT, TTH, TTT\}$$

বা $$A' = \{\omega : \omega \in S \text{ আৰু } \omega \notin A\} = S - A$$

2. ঘটনা 'A বা B' (The Event 'A or B') স্মৰণ কৰাঁ যে দুটা সংহতি A আৰু B ৰ মিলনক $A \cup B$ ৰ দ্বাৰা সূচোৱা হয় আৰু ইয়াত সেইবোৰ মৌল থাকে যিবোৰ A ত নাইবা B ত নাইবা A আৰু B উভয়তে থাকে।

যেতিয়া সংহতি A আৰু B যে কোনো প্ৰতিদৰ্শ স্থানৰ সৈতে যুক্ত এটা ঘটনাক নিৰ্দেশ কৰে তেতিয়া $A \cup B$ যে নিৰ্দেশ কৰা ঘটনাটো হ'ব 'A বা B বা A আৰু B উভয়ে।' ঘটনা '$A \cup B$' ক 'A বা B' বুলিও কোৱা হয়।

সেইবাবে ঘটনা 'A বা B' $= A \cup B$

$$= \{\omega : \in A \text{ বা } \omega \in B\}$$

3. ঘটনা 'A আৰু B' (The Event 'A and B') আমি জানো যে দুটা সংহতি A আৰু B ৰ ছেদন অৰ্থাৎ $A \cap B$ হ'ল সেইবোৰ মৌলৰ সংহতি যিবোৰ A আৰু B ৰ উমৈহতীয়া মৌল অৰ্থাৎ যিবোৰ A আৰু B উভয়তে থাকে।

যদি A আৰু B যে দুটা ঘটনাক সূচায় তেন্তে $A \cap B$ যে 'A আৰু B' ঘটনাটোক সূচায়। এইদৰে

$$A \cap B = \{\omega : \omega \in A \text{ আৰু } \omega \in B\}$$

উদাহৰণস্বৰূপে, এটা পাশাগুটি দুবাৰ দলিওৱা পৰীক্ষাটোত 'A ঘটনাৰ দ্বাৰা প্ৰথম দলিটোত 6 প্ৰাপ্ত হোৱা' আৰু ঘটনা B ৰ দ্বাৰা 'দুয়োটা দলিৰ পৰা অতি কমেও 11 প্ৰাপ্ত হোৱা' বুলি ধৰা হ'ল। তেতিয়া

$$A = \{(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}, \; B = \{(5,6), (6,5), (6,6)\}$$

গতিকে, $A \cap B = \{(6,5), (6,6)\}$

লক্ষ্য কৰাঁ যে সংহতি $A \cap B = \{(6,5), (6,6)\}$ য়ে নির্দেশ কৰা ঘটনাটো এনেভাৱেও বৰ্ণনা কৰিব পাৰি যেনে 'প্ৰথম দলিটোত প্ৰাপ্ত সংখ্যাটো 6 আৰু দুয়োটা দলিৰ পৰা প্ৰাপ্ত সংখ্যা দুটাৰ সমষ্টি অতি কমেও 11.

4. ঘটনা 'A কিন্তু B নহয়' (The Event 'A but not B') আমি জানো যে A - B য়ে এটা সংহতি সূচায় যাৰ মৌলবোৰ A ত আছে কিন্তু B ত নাই। সেয়েহে সংহতি A- B ৰ দ্বাৰা এটা ঘটনা যেনে 'A কিন্তু B নহয়' সূচাব পৰা যায়।

আমি এইটোৱো জানো যে

$$A - B = A \cap B'$$

উদাহৰণ 6 এটা পাশাগুটি দলিওৱা পৰীক্ষাটো বিবেচনা কৰাঁ। এটা মৌলিক সংখ্যা প্ৰাপ্ত হোৱা ঘটনাটোক A আৰু এটা অযুগ্ম সংখ্যা প্ৰাপ্ত হোৱা ঘটনাটোক B ৰে সূচোৱা হ'ল। পৰৱৰ্তী ঘটনাসমূহক নির্দেশ কৰাকৈ সংহতিবোৰ লিখাঁ- (i) A বা B (ii) A আৰু B (iii) A, কিন্তু B নহয় (iv) A নহয়

সমাধান ইয়াত, $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{2, 3, 5\}$, $B = \{1,3,5\}$

স্পষ্টভাৱে,

(i) 'A বা B' = $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$

(ii) 'A আৰু B' = $A \cap B = \{3, 5\}$

(iii) 'A কিন্তু B নহয়' = $A - B = \{2\}$

(iv) 'A নহয়' = $A' = \{1, 4, 6\}$

16.3.4 *পৰস্পৰ বিৱৰ্জিত ঘটনা (Mutually Exclusive Events)*

এটা পাশাগুটি দলিওৱা পৰীক্ষাৰ বাবে প্ৰতিদৰ্শ স্থান হ'ল $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$। দুটা ঘটনা A আৰু B বিবেচনা কৰা হ'ল য'ত A : 'অযুগ্ম সংখ্যা প্ৰাপ্ত হয়' আৰু B : 'যুগ্ম সংখ্যা প্ৰাপ্ত হয়'।

স্পষ্টভাৱে ঘটনা A B ৰ পৰা বৰ্জিত হৈছে আৰু বিপৰীত ক্ৰমেও কথাটো প্ৰযোজ্য। অন্যভাৱে ক'বলৈ হলে তাত এনে কোনো ফলাফল নাই যিয়ে ঘটনা A আৰু B ক একে সময়তে সংঘটিত কৰে। ইয়াত $A = \{1,3,5\}$ আৰু $B = \{2, 4, 6\}$. স্পষ্টভাৱে, $A \cap B = \phi$ অৰ্থাৎ A আৰু B দুটা পৃথক (Disjoint) সংহতি।

সাধাৰণতে দুটা ঘটনা A আৰু B ক পৰস্পৰ বিৱৰ্জিত ঘটনা আখ্যা দিয়া হয় যদি সিহঁতৰ এটাৰ সংঘটনে (occurrence) আনটোৰ সংঘটনক নিষেধ কৰে অৰ্থাৎ যদি সিহঁত একেলগে সংঘটিত নহয়। এই ক্ষেত্ৰত A আৰু B দুটা পৃথক সংহতি।

আকৌ এটা পাশাগুটি দলিওৱা পৰীক্ষাটোত 'অযুগ্ম সংখ্যা প্ৰাপ্ত হোৱা' এটা ঘটনা A আৰু '4 তকৈ সৰু সংখ্যা প্ৰাপ্ত হোৱা' আন এটা ঘটনা B বিবেচনা কৰা হ'ল।

স্পষ্টভাৱে,

$A = \{1,3,5\}$ আৰু $B = \{1,2,3\}$

এতিয়া, $3 \in A$ আৰু একেদৰে $3 \in B$

সেইবাবে, A আৰু B পৰস্পৰ বিৱৰ্জিত নহয়।

মন্তব্য এটা প্ৰতিদৰ্শ স্থানৰ সৰল ঘটনাবোৰ সদায় পৰস্পৰ বিৱৰ্জিত।

16.3.5 *নিঃশেষিত ঘটনা (Exhaustive Events)* এটা পাশাগুটি দলিওৱা পৰীক্ষাটো বিবেচনা কৰোঁ। আমি পাওঁ S = {1, 2 ,3, 4,5, 6}। পৰৱৰ্তী ঘটনাবোৰ বিবেচনা কৰা হ'ল

A : 4 তকৈ সৰু সংখ্যা প্ৰাপ্ত হয়।

B : 2 তকৈ ডাঙৰ কিন্তু 5 তকৈ সৰু সংখ্যা প্ৰাপ্ত হয়।

আৰু C : 4 তকৈ ডাঙৰ সংখ্যা প্ৰাপ্ত হয়।

তেতিয়া, A = {1, 2, 3}, B = {3, 4} আৰু C = {5, 6}. আমি পাওঁ যে

$$A \cup B \cup C = \{1,\ 2,\ 3\} \cup \{3,\ 4\} \cup \{5,\ 6\} = S.$$

এনে ঘটনা A, B আৰু C ক নিঃশেষিত ঘটনা বোলা হয়। সাধাৰণতে যদি কোনো প্ৰতিদৰ্শ স্থান S ত n টা ঘটনা E_1, E_2 ....,E_n পোৱা যায় যাতে-

$$E_1 \cup E_2 \cup .... \cup E_n = \bigcup_{i=1}^{n} E_i = S$$

তেন্তে, E_1, E_2 ....E_n ক নিঃশেষিত ঘটনা আখ্যা দিয়া হয়। অন্যভাৱে, E_1, E_2,......., E_n ঘটনাবোৰক নিঃশেষিত ঘটনা বোলা হয় যদি পৰীক্ষা সম্পন্ন কৰিলেই এইবোৰৰ অতি কমেও এটা সংঘটিত হোৱাটো প্ৰয়োজনীয় হৈ পৰে।

লগতে যদি $i \neq j$ ৰ বাবে $E_i \cap E_j = \phi$ অৰ্থাৎ E_i আৰু E_j ঘটনাবোৰ যুৰীয়াভাৱে পৃথক আৰু $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = S$ তেন্তে E_1,E_2,........,E_n ক পৰস্পৰ বিৰৰ্জিত আৰু নিঃশেষিত ঘটনা আখ্যা দিয়া হয়।

এতিয়া কেইটামান উদাহৰণ আলোচনা কৰা যাওক।

উদাহৰণ 7 দুটা পাশাগুটি দলিওৱা হ'ল আৰু প্ৰাপ্ত সংখ্যাবোৰৰ যোগফল টুকি ৰখা হ'ল। পৰীক্ষাটোৰ সৈতে যুক্ত পৰৱৰ্তী ঘটনাবোৰ লোৱা হওক।

A : যোগফলটো যুগ্ম সংখ্যা

B : যোগফলটো 3 ৰ গুণিতক

C : যোগফলটো 4 তকৈ সৰু

D : যোগফলটো 11 তকৈ ডাঙৰ

এই ঘটনাবোৰৰ ভিতৰত কোন কেইযোৰ পৰস্পৰ বিৰৰ্জিত?

সমাধান প্ৰতিদৰ্শ স্থান S = {(*x*,*y*): *x*,*y* = 1, 2, 3, 4, 5, 6} টোত মুঠ 36 টা মৌল (প্ৰতিদৰ্শ বিন্দু) আছে। এতিয়া,

A = {(1,1), (1,3), (1,5), (2,2) (2,4), (2,6), (3,1), (3,3), (3,5), (4,2), (4,4) (4,6), (5,1), (5,3), (5,5) (6,2), (6,4), (6,6)}

B = {(1,2), (1,5), (2,1), (2,4), (3,3) (3,6), (4,2), (4,5), (5,1), (5,4), (6, 3), (6,6)}

C = {(1,1), (1,2), (2,1)} আৰু D = {(6,6)}

আমি পাওঁ যে-

$$A \cap B = \{(1,5),\ (2,4),\ (3,3),\ (4,2),\ (5,1),\ (6,6)\} \neq \phi$$

গতিকে A আৰু B পৰস্পৰ বিৰৰ্জিত নহয়।

সদৃশভাৱে, .$A \cap C \neq \phi$, $A \cap D \neq \phi$, $B \cap C \neq \phi$ আৰু $B \cap D \neq \phi$

এইদৰে (A,C), (A,D), (B,C), (B,D) যোৰসমূহে পৰস্পৰ বিৰৰ্জিত ঘটনা নির্দেশ নকৰে। আকৌ $C \cap D = \phi$ সেইবাবে C আৰু D ঘটনা দুটা পৰস্পৰ বিৰৰ্জিত।

উদাহৰণ 8 এটা মুদ্রা তিনিবাৰ টচ্ কৰা হ'ল। পৰৱৰ্তী ঘটনাবোৰ বিবেচনা কৰা হ'ল-

A : 'মুণ্ড প্ৰাপ্ত নহয়', B : 'ঠিক এটা মুণ্ড প্ৰাপ্ত হয়', আৰু C : অতিকমেও দুটা মুণ্ড প্ৰাপ্ত হয়।

ঘটনা তিনিটা পৰস্পৰ বিৰৰ্জিত আৰু নিঃশেষিত হয়নে?

সমাধান পৰীক্ষাটোৰ প্ৰতিদৰ্শ স্থান হ'ল

$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$

$A = \{TTT\}$, $B = \{HTT, THT, TTH\}$, আৰু $C = \{HHT, HTH, THH, HHH\}$

এতিয়া

$$A \cup B \cup C = \{TTT, HTT, THT, TTH, HHT, HTH, THH, HHH\} = S$$

সেয়েহে, A, B, C ঘটনা তিনিটা নিঃশেষিত।

তদুপৰি, $A \cap B = \phi, A \cap C = \phi$ আৰু $B \cap C = \phi$

সেইবাবে, ঘটনা তিনিটা যুৰীয়াভাৱে পৃথক অৰ্থাৎ সিহঁত পৰস্পৰ বিৰৰ্জিত।

গতিকে A,B আৰু C যে এটা পৰস্পৰ বিৰৰ্জিত আৰু নিঃশেষিত ঘটনাৰ সংহতি প্ৰণালী গঠন কৰে।

অনুশীলনী 16.2

1. এটা পাশাগুটি দলিওৱা হ'ল। ধৰা হ'ল, '4 প্ৰাপ্ত হোৱা ঘটনা'টো E আৰু 'যুগ্ম সংখ্যা প্ৰাপ্ত হোৱা' ঘটনাটো Fৰে সূচোৱা হৈছে। E আৰু F পৰস্পৰ বিৰৰ্জিত ঘটনা হয় নে?
2. এটা পাশাগুটি দলিওৱা হ'ল। তলৰ ঘটনাবোৰ উল্লেখ কৰাঁ
   (i) A: 7 তকৈ সৰু সংখ্যা প্ৰাপ্ত হয় (ii) B: 7 তকৈ ডাঙৰ সংখ্যা প্ৰাপ্ত হয়
   (iii) C: 3 ৰ গুণিতক প্ৰাপ্ত হয়। (iv) D: 4 তকৈ সৰু সংখ্যা প্ৰাপ্ত হয়।
   (v) E: 4 তকৈ ডাঙৰ যুগ্ম সংখ্যা প্ৰাপ্ত হয়।
   (vi) F: 3 তকৈ সৰু নহয়, এনে সংখ্যা পাপ্ত হয়।

লগতে উলিওৱাঁ $A \cup B$, $A \cap B$, $B \cup C$, $E \cap F$, $D \cap E$, $A - C$, $D - E$, $E \cap F'$ আৰু F'

3. এটা পৰীক্ষা কাৰ্য্যত দুটা পাশাগুটি একেলগে দলিওৱা হয় আৰু প্ৰাপ্ত সংখ্যা দুটা টুকি ৰখা হয়। পৰৱৰ্তী ঘটনাবোৰ উল্লেখ কৰাঁ
   A : সংখ্যা দুটাৰ যোগফল 8 তকৈ ডাঙৰ।
   B : দুয়োটা গুটিত 2 প্ৰাপ্ত হয়।
   C : সংখ্যা দুটাৰ যোগফল অতি কমেও 7 ৰ সমান আৰু 3 ৰ গুণিতক হয়। ঘটনাবোৰৰ কোন কেইযোৰ পৰস্পৰ বিৰৰ্জিত?
4. তিনিটা মুদ্রা একেলগে এবাৰ টচ্ কৰা হ'ল। ধৰা হ'ল A ৰ দ্বাৰা তিনিটা মুণ্ড, B ৰ দ্বাৰা দুটা মুণ্ড আৰু এটা পুচ্ছ, C ৰ দ্বাৰা তিনিটা পুচ্ছ আৰু D ৰ দ্বাৰা প্ৰথম মুদ্রাটোত এটা মুণ্ড প্ৰাপ্ত হোৱা ঘটনাসমূহ নিৰ্দেশ কৰা হয়। কোনবোৰ ঘটনা
   (i) পৰস্পৰ বিৰৰ্জিত (ii) সৰল (iii) যৌগিক উল্লেখ কৰাঁ।
5. তিনিটা মুদ্রা টচ্ কৰা হ'ল। উল্লেখ কৰাঁ

(i) দুটা ঘটনা যি পৰস্পৰ বিৰৰ্জিত।

(ii) তিনিটা ঘটনা যি পৰস্পৰ বিৰৰ্জিত আৰু নিঃশেষিত।

(iii) দুটা ঘটনা যি পৰস্পৰ বিৰৰ্জিত নহয়।

(iv) দুটা ঘটনা যি পৰস্পৰ বিৰৰ্জিত কিন্তু নিঃশেষিত নহয়।

(v) তিনিটা ঘটনা যি পৰস্পৰ বিৰৰ্জিত কিন্তু নিঃশেষিত নহয়।

6. দুটা পাশাগুটি দলিওৱা হ'ল। তিনিটা ঘটনা A, Bআৰু C পৰৱৰ্তী ধৰণে উল্লেখ কৰা হল।

A : প্ৰথম গুটিটোত এটা যুগ্ম সংখ্যা প্ৰাপ্ত হয়

B : প্ৰথম গুটিটোত এটা অযুগ্ম সংখ্যা প্ৰাপ্ত হয়

C : গুটি দুটাত প্ৰাপ্ত সংখ্যা দুটাৰ যোগফল 5 ৰ সমান বা তাতকৈ কম।

নিম্নোক্ত ঘটনাবোৰ বৰ্ণনা কৰাঁ-

(i) A'	(ii) B নহয়	(iii) A বা B
(iv) A আৰু B	(v) A কিন্তু C নহয়	(vi) B বা C
(vii) B আৰু C	(viii) $A \cap B' \cap C'$	

7. উপৰিউক্ত অনুশীলনী 6 ৰ প্ৰসংগক্ৰমে সঁচা নে মিছা কোৱা (তোমাৰ সমিধানৰ সমৰ্থনত যুক্তি দৰ্শোৱাঁ)

(i) A আৰু B পৰস্পৰ বিৰৰ্জিত

(ii) A আৰু B পৰস্পৰ বিৰৰ্জিত আৰু নিঃশেষিত

(iii) $A = B'$

(iv) A আৰু C পৰস্পৰ বিৰৰ্জিত

(v) A আৰু B' পৰস্পৰ বিৰৰ্জিত

(vi) A', B', C পৰস্পৰ বিৰৰ্জিত আৰু নিঃশেষিত।

16.4 স্বতঃসিদ্ধ ভিত্তিক সম্ভাৱিতা (Axiomatic Approach to Probability)

আগৰ অনুচ্ছেদত আমি যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষা, প্ৰতিদৰ্শ স্থান আৰু পৰীক্ষাকাৰ্য্যৰ সৈতে সংশ্লিষ্ট ঘটনাসমূহৰ বিষয়ে আলোচনা কৰি আহিছোঁ। আমাৰ দৈনন্দিন জীৱন ধাৰাত আমি ঘটনাসমূহৰ সংঘটনৰ সুযোগ বা অদৃষ্ট বা ভাগ্য (Chance) সম্পৰ্কীয় বিভিন্ন শব্দ ব্যৱহাৰ কৰোঁ। সম্ভাৱিতা তত্ত্বৰ জৰিয়তে ঘটনাসমূহৰ এই সংঘটন (Occurrence) বা অসংঘটন (Non- Occurrence) ৰ সুযোগক (Chance) সাংখ্যিক ৰূপত প্ৰকাশ কৰাৰ চেষ্টা কৰা হয়।

আগৰ শ্ৰেণীসমূহত মুঠ ফলাফলৰ সংখ্যা জানিব পৰা এটা পৰীক্ষা কাৰ্য্যৰ সৈতে সংশ্লিষ্ট কোনো ঘটনাৰ সম্ভাৱিতা নিৰূপণ কৰিবলৈ আমি কিছুমান পদ্ধতিৰ কথা আলোচনা কৰি আহিছোঁ।

কোনো ঘটনাৰ সম্ভাৱিতা বৰ্ণনা কৰাৰ বাবে আন এক উপায় হ'ল স্বতঃসিদ্ধভিত্তিক ধাৰণাৰ প্ৰয়োগ। এনে প্ৰচেষ্টাত সম্ভাৱিতা নিৰূপণৰ বাবে কিছুমান স্বতঃসিদ্ধ বা বিধি নিৰ্দিষ্ট কৰি লোৱা হয়।

ধৰা হওক, কোনো যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাৰ ক্ষেত্ৰত প্ৰতিদৰ্শ স্থান S। S ৰ ঘাত সংহতিক আদিক্ষেত্ৰ আৰু [0,1] অন্তৰালক পৰিসৰ হিচাপে লৈ নিৰ্ণয় কৰা এটা বাস্তৱ ফলন P ক সম্ভাৱিতা বোলা হয় যদি ই তলৰ স্বতঃসিদ্ধবোৰ মানে

(i) যি কোনো ঘটনা E ৰ বাবে $P(E) \geq 0$ (ii) $P(S) = 1$

(iii) যদি E আৰু F পৰস্পৰ বিৰৰ্জিত ঘটনা হয় তেন্তে $P(E \cup F) = P(E) + P(F)$

(iii) ৰ পৰা আমি পাওঁ যে $P(\phi) = .0$ ইয়াক প্ৰমাণ কৰিবলৈ আমি $F = \phi$ লওঁ আৰু লক্ষ্য কৰোঁ যে E আৰু ϕ দুটা পৃথক (পৰস্পৰ বিৱৰ্জিত) ঘটনা। সেয়েহে (iii) নং স্বতঃসিদ্ধটো খটুৱাই আমি পাওঁ -

$$P(E \cup \phi) = P(E) + P(\phi) \text{ বা } \quad P(E) = P(E) + P(\phi) \quad \text{অৰ্থাৎ } P(\phi) = 0$$

ধৰা হ'ল S এটা প্ৰতিদৰ্শ স্থান যাৰ মৌলবোৰ হ'ল $\omega_1, \omega_2 \ldots\ldots\ldots, \omega_n$ অৰ্থাৎ

$$S = \{\omega_1, \omega_2 \ldots\ldots\ldots\ldots, \omega_n\}$$

সম্ভাৱিতাৰ স্বত:সিদ্ধ ভিত্তিক সংজ্ঞাৰ পৰা আমি পাওঁ-

(i) $0 \le P(\omega_i) \le 1$ প্ৰত্যেক $\omega_i \in S$ ৰ বাবে।

(ii) $P(\omega_1) + P(\omega_2) + \ldots\ldots\ldots P(\omega_n) = 1$

(iii) যিকোনো ঘটনা A ৰ বাবে $P(A) = \sum P(\omega_i),\ \omega_i \in A$

> ☛ **টোকা** লক্ষ্যণীয় যে এক মৌল সংহতি $\{\omega_i\}$ ক মৌলিক ঘটনা আখ্যা দিয়া হয় আৰু চিহ্ন প্ৰকৰণৰ সুবিধাৰ্থে আমি $P(\{\omega_i\})$ ৰ পৰিবৰ্তে $P(\omega_i)$ হে লিখোঁ।

উদাহৰণস্বৰূপে, এটা মুদ্ৰাৰ টচ্ পৰীক্ষাত ফলাফল H আৰু T উভয়ৰে বাবে আমি $\frac{1}{2}$ সংখ্যাটো যুক্ত কৰিব পাৰোঁ অৰ্থাৎ

$$P(H) = \frac{1}{2} \text{ আৰু } P(T) = \frac{1}{2} \qquad (1)$$

স্পষ্টভাৱে এনেধৰণৰ মান নিৰূপণে দুয়োটা চৰ্ত সিদ্ধ কৰে অৰ্থাৎ প্ৰতিটো সংখ্যাই 0 তকৈ সৰু নহয় আৰু 1 তকৈ ডাঙৰ নহয় আৰু

$$P(H) + P(T) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

সেয়েহে এই ক্ষেত্ৰত আমি ক'ব পাৰোঁ যে H ৰ সম্ভাৱিতা $= \frac{1}{2}$ আৰু T ৰ সম্ভাৱিতা $= \frac{1}{2}$

যদি $P(H) = \frac{1}{4}$ আৰু $P(T) = \frac{3}{4}$ (2)

লোৱা হয় তেন্তে এই ধৰণৰ মান নিৰূপণে স্বতঃসিদ্ধভিত্তিক এই আলোচনাৰ চৰ্ত সমূহ সিদ্ধ কৰে নে?

হয়, সিদ্ধ কৰে। এই ক্ষেত্ৰত H ৰ সম্ভাৱিতা $= \frac{1}{4}$ আৰু T ৰ সম্ভাৱিতা $= \frac{3}{4}$

আমি দেখিবলৈ পাওঁ যে H আৰু T ৰ সম্ভাৱিতাৰ বাবে (1) আৰু (2) উভয় ধৰণৰ মান নিৰূপণেই প্ৰযোজ্য।

দৰাচলতে, দুয়োটা ফলাফলৰ বাবে আমি p আৰু $1-p$ ধৰণে মান নিৰূপণ কৰিব পাৰোঁ যাতে $0 \le p \le 1$ আৰু $P(H) + P(T) = p + (1-p) = 1$

এনেধৰণৰ মান নিৰূপণেও সম্ভাৱিতাৰ স্বতঃসিদ্ধভিত্তিক সংজ্ঞাৰ দুয়োটা চৰ্তকে সিদ্ধ কৰে। গতিকে আমি ক'ব পাৰোঁ যে কোনো পৰীক্ষাৰ ফলাফলসমূহৰ সম্ভাৱিতা নিৰূপণৰ বহুতো (বৰং ক'ব পাৰি অসীম সংখ্যক) উপায়

আছে। এতিয়া আমি কিছুমান উদাহৰণ লওঁহক।

উদাহৰণ 9 এটা প্ৰতিদৰ্শ স্থান $S = \{\omega_1, \omega_2, ...\omega_6\}$ লোৱা হ'ল। প্ৰতিটো ফলাফলৰ বাবে সম্ভাৱিতাৰ পৰবৰ্তী ধৰণৰ মান নিৰূপণৰ কোনবোৰ প্ৰযোজ্য হব?

ফলাফলসমূহ	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
(a)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
(b)	1	0	0	0	0	0
(c)	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$
(d)	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{2}$
(e)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6

সমাধান (a) চৰ্ত (i) ঃ প্ৰতিটো সংখ্যা $P(\omega_i)$ ধনাত্মক আৰু 1 তকৈ সৰু।

চৰ্ত (ii) ঃ সম্ভাৱিতাবোৰৰ যোগফল

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1$$

সেয়েহে, নিৰূপিত মানবোৰ সম্ভাৱিতাৰ বাবে প্ৰযোজ্য।

(b) চৰ্ত (i) ঃ প্ৰতিটো অখণ্ড সংখ্যা $P(\omega_i)$ 0 নাইবা 1 ৰ সমান।
চৰ্ত (ii)ঃ সম্ভাৱিতাবোৰৰ যোগফল = 1+0+0+0+0+0=1
সেইবাবে, নিৰূপিত মানবোৰ সম্ভাৱিতাৰ বাবে প্ৰযোজ্য।

(c) চৰ্ত (i)ঃ দুটা সম্ভাৱিতা যেনে $P(\omega_5)$ আৰু $P(\omega_6)$ ৰ মানবোৰ ঋণাত্মক। গতিকে নিৰূপিত মানবোৰ সম্ভাৱিতাৰ বাবে প্ৰযোজ্য নহয়।

(d) যিহেতু $P(\omega_6) = \frac{3}{2} > 1$, গতিকে নিৰূপিত মানবোৰ সম্ভাৱিতাৰ বাবে প্ৰযোজ্য নহয়।

(e) যিহেতু সম্ভাৱিতাবোৰৰ যোগফল = 0.1+ 0.2 + 0.3 + 0.4+ 0.5 + 0.6 = 2.1 সেয়েহে নিৰূপিত মানবোৰ সম্ভাৱিতাৰ বাবে প্ৰযোজ্য নহয়।

16.4.1 *ঘটনাৰ সম্ভাৱিতা (Probability of an Event)* মেছিনত উৎপাদিত 'ধাৰাবাহিক তিনিটা কলম পৰীক্ষাৰ জৰিয়তে ভাল (ক্ৰুটিহীন) আৰু বেয়া (ক্ৰুটিপূৰ্ণ) হিচাপে শ্ৰেণীভুক্ত কৰা' এক পৰীক্ষাকাৰ্যৰ সৈতে সংশ্লিষ্ট প্ৰতিদৰ্শ স্থান S লোৱা হ'ল। এই পৰীক্ষা কাৰ্য্যৰ ফলস্বৰূপে আমি 0,1,2 বা 3 টা বেয়া কলম পাব পাৰোঁ।
পৰীক্ষাটোৰ সৈতে সংশ্লিষ্ট প্ৰতিদৰ্শ স্থান হ'ব

$$S = \{BBB, BBG, BGB, GBB, BGG, GBG, GGB, GGG\}$$

য'ত, B য়ে বেয়া (ক্ৰুটিপূৰ্ণ) কলম আৰু G য়ে ভাল (ক্ৰুটিমুক্ত) কলম সূচাইছে।

ধৰা হ'ল, ফলাফলবোৰৰ সম্ভাৱিতাৰ বাবে নিৰূপিত মানবোৰ এনেধৰণৰ-

প্ৰতিদৰ্শ বিন্দুঃ	BBB	BBG	BGB	GBB	BGG	GBG	GGB	GGG
সম্ভাৱিতাঃ	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

ধৰা হ'ল, A ঃ ঠিক এটা বেয়া কলম পোৱা যায়, B ঃ অতি কমেও দুটা বেয়া কলম পোৱা যায়

তেতিয়া, $A = \{BGG, GBG, GGB\}$ আৰু $B = \{BBG, BGB, GBB, BBB\}$

এতিয়া, $P(A) = \sum P(\omega_i), \forall \omega_i \in A$

$$= P(BGG) + P(GBG) + P(GGB) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

আৰু $P(B) = \sum P(\omega_i), \forall \omega_i \in B$

$$= P(BBG) + P(BGB) + P(GBB) + P(BBB)$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

'মুদ্ৰা এটা দুবাৰ টচ্ কৰা' আন এটা পৰীক্ষা বিবেচনা কৰা হ'ল।

এই পৰীক্ষাৰ বাবে প্ৰতিদৰ্শ স্থান হ'ল $S = \{HH, HT, TH, TT\}$

ফলাফলবোৰৰ সম্ভাৱিতাৰ বাবে পৰৱৰ্তী ধৰণে মান নিৰূপণ কৰা হওক-

$$P(HH) = \frac{1}{4}, P(HT) = \frac{1}{7}, P(TH) = \frac{2}{7}, P(TT) = \frac{9}{28}$$

স্পষ্টভাৱে এই ধৰণৰ মান নিৰূপণে স্বতঃসিদ্ধভিত্তিক সম্ভাৱিতাৰ চৰ্তাৱলী সিদ্ধ কৰে। এতিয়া Eঃ 'উভয় টচতে একে ফল প্ৰাপ্ত হয়' ঘটনাটোৰ সম্ভাৱিতা উলিওৱা হওক।

ইয়াত, $E = \{HH, TT\}$

এতিয়া, $P(E) = P(\omega_i), \forall \omega_i \in E$

$$= P(HH) + P(TT) = \frac{1}{4} + \frac{9}{28} = \frac{4}{7}$$

আকৌ, F ঃ 'ঠিক দুটা মুণ্ড প্ৰাপ্ত হয়' ঘটনাৰ বাবে আমি পাওঁ $F = \{HH\}$

আৰু $P(F) = P(HH) = \frac{1}{4}$

16.4.2 *সমসম্ভাৱ্য ফলাফলৰ সম্ভাৱিতা (Probabilities of equally likely outcomes)*

ধৰা হ'ল, কোনো পৰীক্ষাকাৰ্য্যৰ সৈতে সংশ্লিষ্ট প্ৰতিদৰ্শ স্থান

$$S = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$$

ধৰা হ'ল, প্ৰতিদৰ্শ স্থান S ৰ আটাইবোৰ ফলাফলেই সমসম্ভাৱ্য অৰ্থাৎ, প্ৰতিটো সৰল ঘটনাৰ সংঘটনৰ সুযোগ একে।

অৰ্থাৎ, $P(\omega_i) = p \ \forall \ \omega_i \in S$ য'ত $0 \le p \le 1$

যিহেতু, $\sum_{i=1}^{n} P(\omega_i) = 1$, অৰ্থাৎ $p + p + ... + p$ (n বাৰলৈ) $=1$

বা $np = 1$, অৰ্থাৎ $p = \frac{1}{n}$

ধৰা হ'ল, S এক প্ৰতিদৰ্শস্থান আৰু E এক ঘটনা যাতে $n(S) = n$ আৰু $n(E) = m$. যদি প্ৰতিটো ফলাফলেই সমসম্ভাব্য তেন্তে

$$P(E) = \frac{m}{n} = \frac{\text{Eৰ অনুকূলে ফলাফলৰ মুঠ সংখ্যা}}{\text{সম্ভাব্য মুঠ ফলাফলৰ সংখ্যা}}$$

16.4.3 'A বা B' ঘটনাৰ সম্ভাৱিতা (Probability of the Event 'A or B') 'A বা B' ঘটনাৰ সম্ভাৱিতা অৰ্থাৎ, $P(A \cup B)$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা যাওক। 'এটা মুদ্ৰা তিনিবাৰ টচ্ কৰা' পৰীক্ষাটোৰ সৈতে সংশ্লিষ্ট দুটা ঘটনা যেনে A = {HHT, HTH, THH} আৰু B = {HTH, THH,HHH} লোৱা হ'ল।

স্পষ্টভাৱে, $A \cup B = \{HHT, HTH, THH, HHH\}$

এতিয়া, $P(A \cup B) = P(HHT) + P(HTH) + P(THH) + P(HHH)$

যদি সকলো ফলাফলেই সমসম্ভাব্য হয়, তেন্তে

$$P(A \cup B) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

আকৌ, $P(A) = P(HHT) + P(HTH) + P(THH) = \frac{3}{8}$

আৰু $P(B) = P(HTH) + P(THH) + P(HHH) = \frac{3}{8}$

সেইবাবে, $P(A) + P(B) = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

এইটো স্পষ্ট যে $P(A \cup B) \ne P(A) + P(B)$

HTH আৰু THH বিন্দু দুটা A আৰু B উভয়ৰে উমৈহতীয়া বিন্দু। P(A)+P(B) নিৰ্ণয় কৰোঁতে HTH আৰু THH বিন্দু দুটাৰ অৰ্থাৎ $A \cap B$ ৰ মৌলৰ সম্ভাৱিতা দুবাৰ অন্তৰ্ভুক্ত কৰা হৈছে। গতিকে $P(A \cup B)$ ৰ সম্ভাৱিতা পাবলৈ আমি P(A)+P(B) ৰ পৰা $A \cap B$ ৰ প্ৰতিদৰ্শ বিন্দুবোৰৰ সম্ভাৱিতা বিয়োগ কৰিব লাগিব।

অৰ্থাৎ, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \sum P(\omega_i), \forall \omega_i \in A \cap B$

$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

এইদৰে, আমি পাওঁ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

সাধাৰণতে, যদি এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাৰ সৈতে সংশ্লিষ্ট A আৰু B যি কোনো দুটা ঘটনা হয় তেন্তে ঘটনাৰ সম্ভাৱিতাৰ সংজ্ঞা মতে

$$P(A\cup B)=\sum P(\omega_i),\forall\omega_i\in A\cup B.$$

যিহেতু, $A\cup B=(A-B)\cup(A\cap B)\cup(B-A)$

আমি পাওঁ-

$$P\ (A\cup B)=\left[\sum P(\omega_i),\forall\omega_i\in A-B\right]+\left[\sum P(\omega_i),\forall\omega_i\in A\cap B\right]$$
$$+\left[\sum P(\omega_i),\forall\omega_i\in B-A\right] \qquad (1)$$

(কাৰণ, $A-B, A\cap B, B-A$ সংহতিকেইটা পৰস্পৰ বিৰৰ্জিত)

আকৌ, P(A)+P(B)

$$=\left[\sum P(\omega_i)\forall\omega_i\in A\right]+\left[\sum P(\omega_i)\forall\omega_i\in B\right]$$
$$=\left[\sum P(\omega_i)\forall\omega_i\in(A-B)\cup(A\cap B)\right]+\left[\sum P(\omega_i)\forall\omega_i\in(B-A)\cup(A\cap B)\right]$$
$$=\left[\sum P(\omega_i)\forall\omega_i\in(A-B)\right]+\left[\sum P(\omega_i)\forall\omega_i\in(A\cap B\right]$$
$$+\left[\sum P(\omega_i)\forall\omega_i\in(B-A)\right]+\left[\sum P(\omega_i)\forall\omega_i\in(A\cap B)\right]$$

$$=P(A\cup B)+\left[\sum P(\omega_i)\forall\omega_i\in(A\cap B)\right]$$ ((1) ৰ পৰা)

$$=P(A\cup B)+P(A\cap B)$$

গতিকে, $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

বৈকল্পিকভাৱে, ইয়াক এনেদৰেও প্ৰমাণ কৰিব পাৰি-

$A\cup B=A\cup(B-A)$ য'ত A আৰু $B-A$ পৰস্পৰ বিৰৰ্জিত,

আৰু $B=(A\cap B)\cup(B-A)$ য'ত $A\cap B$ আৰু $B-A$ পৰস্পৰ বিবৰ্জিত। সম্ভাৱিতাৰ স্বতঃসিদ্ধ (iii) ৰ সহায়ত আমি পাওঁ-

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B-A) \qquad \ldots (2)$$

আৰু $$P(B)=P(A\cap B)+P(B-A) \qquad \ldots (3)$$

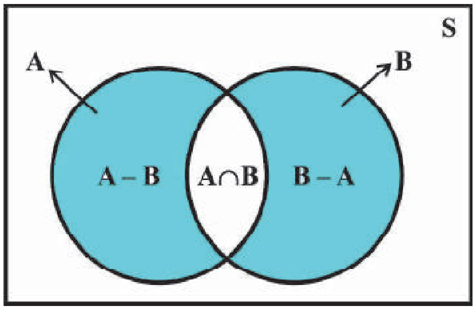
(2) ৰ পৰা (3) বিয়োগ কৰি আমি পাওঁ-

$$P(A\cup B)-P(B)=P(A)-P(A\cap B)$$

বা

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

উপৰিউক্ত সম্বন্ধটো আকৌ ভেন্‌চিত্ৰ (চিত্ৰ16.1) ৰ দ্বাৰাও প্ৰতিপন্ন কৰিব পাৰি।



চিত্ৰ 16.1

যদি A আৰু B পৃথক সংহতি অৰ্থাৎ পৰস্পৰ বিৰৰ্জিত ঘটনা হয় তেন্তে $A \cap B = \phi$

সেইবাবে, $P(A \cap B) = P(\phi) = 0$

এইদৰে, পৰস্পৰ বিৰৰ্জিত ঘটনা A আৰু B ৰ বাবে

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

যিটো সম্ভাৱিতাৰ স্বতঃসিদ্ধ (iii) ৰ সৈতে একে।

16.4.4 *'A নহয়' ঘটনাৰ সম্ভাৱিতা (Probability of Event 'not A')* 1 ৰ পৰা 10 লৈ সংখ্যাবোৰ লিপিবদ্ধ কৰা 10 খন কাৰ্ডৰ পৰা এখন কাৰ্ড টনা পৰীক্ষাটোৰ সৈতে যুক্ত A = {2, 4, 6, 8} ঘটনাটো বিবেচনা কৰা হ'ল। স্পষ্টভাৱে, ইয়াত প্ৰতিদৰ্শ স্থান হ'ল

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

যদি 1, 2, 3,............,10 ফলাফলবোৰ সমসম্ভাব্য বুলি ধৰা হয় তেন্তে প্ৰতিটো ফলাফলৰ সম্ভাৱিতা হ'ব $\frac{1}{10}$

এতিয়া $P(A) = P(2) + P(4) + P(6) + P(8)$

$$= \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

আকৌ, ঘটনা 'A নহয়' ঃ $A' = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\}$

এতিয়া $P(A') = P(1) + P(3) + P(5) + P(7) + P(9) + P(10)$

$$= \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

এইদৰে, $P(A') = \frac{3}{5} = 1 - \frac{2}{5} = 1 - P(A)$

আকৌ আমি জানো যে A' আৰু A ঘটনা দুটা পৰস্পৰ বিৰৰ্জিত অৰ্থাৎ

$A \cap A' = \phi$ আৰু $A \cup A' = S$

বা $P(A \cup A') = P(S)$

এতিয়া, $P(A) + P(A') = 1$ (স্বতঃসিদ্ধ (ii) আৰু (iii) ৰ ব্যৱহাৰ কৰি)

বা $P(A') = P(A \text{ নহয়}) = 1 - P(A)$

এতিয়া আমি কিছুমান সমসম্ভাব্য (যদি অন্যভাৱে উল্লেখ কৰা নহয়) ফলাফলৰ উদাহৰণ আৰু অনুশীলনী আলোচনা কৰোঁহক।

উদাহৰণ 10 ভালদৰে সানমিহলি কৰা (Well Shuffled) 52 খন কার্ড থকা এজাপ কার্ডৰ পৰা এখন কার্ড টনা হ'ল। প্ৰতিটো ফলাফল সমসম্ভাব্য হ'লে সম্ভাৱিতা উলিওৱা যাতে কার্ডখন

(i) ৰোহিতন (Diamond) হয় (ii) টেক্কা (Ace) নহয়

(iii) ক'লা ৰঙৰ [চিৰ্তন (Club) বা ইস্কাপন (Spade)] হয়

(iv) ৰোহিতন নহয় (v) ক'লা ৰঙৰ নহয়

সমাধান ভালদৰে সানমিহলি কৰা 52 খন কার্ড থকা এজাপ কার্ডৰ পৰা যেতিয়া এখন কার্ড টনা হয় তেতিয়া, সম্ভাব্য ফলাফলৰ মুঠ সংখ্যা হয় 52

(i) ধৰা হ'ল, 'টনা কার্ডখন ৰোহিতন হয়' ঘটনাটো A.স্পষ্টভাৱে, সংহতি A ৰ মৌল সংখ্যা হ'ল 13.

সেইবাবে, $P(A)=\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$

অর্থাৎ এখন ৰোহিতনৰ কার্ড টনাৰ সম্ভাৱিতা $\frac{1}{4}$

(ii) ধৰা হ'ল, 'টনা কার্ডখন টেক্কা (Ace) হয়' ঘটনাটো B.সেইবাবে 'টনা কার্ডখন টেক্কা নহয়' ঘটনাটো হ'ব B′।

আমি জানো যে $P(B')=1-P(B)=1-\frac{4}{52}=1-\frac{1}{13}=\frac{12}{13}$

(iii) ধৰা হ'ল 'টনা কার্ডখন ক'লা ৰঙৰ হয়' ঘটনাটো C। তেতিয়া সংহতি C ৰ মৌলসংখ্যা হ'ব 26

অর্থাৎ $P(C)=\frac{26}{52}=\frac{1}{2}$

এইদৰে, ক'লা ৰঙৰ কার্ড টনাৰ বাবে সম্ভাৱিতা হ'ল $\frac{1}{2}$।

(iv) (i) ত 'টনা কার্ডখন ৰোহিতন হয়' ঘটনাটোক A ৰে সূচোৱা হৈছে। গতিকে 'টনা কার্ডখন ৰোহিতন নহয়' ঘটনাটো হ'ব A′ বা 'A নহয়'।

আমি জানো যে $P(A \text{ নহয়})=1-P(A)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

(v) 'টনা কার্ডখন ক'লা ৰঙৰ নহয়' ঘটনাটো C′ বা 'C নহয়' এইধৰণে সূচাব পাৰি।

আমি জানো যে $P(C \text{ নহয়})=1-P(C)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

সেয়েহে কার্ডখন ক'লা ৰঙৰ নোহোৱাৰ সম্ভাৱিতা $=\frac{1}{2}$

উদাহৰণ 11 এখন মোনাত থকা 9 খন ফলক (Discs) ৰ ভিতৰত 4 খন ৰঙা , 3 খন নীলা আৰু 2 খন হালধীয়া ৰঙৰ ফলক আছে। ফলকবোৰ আকাৰ আৰু আকৃতিত একেধৰণৰ। যাদৃচ্ছিকভাৱে এখন ফলক মোনাখনৰপৰা লোৱা হ'ল। সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰাঁ যাতে ফলকখন (i) ৰঙা হয় (ii) হালধীয়া হয় (iii) নীলা হয় (iv) নীলা নহয় (v) ৰঙা বা নীলা হয়।

সমাধান মোনাখনত মুঠ 9 খন ফলক আছে বাবে সম্ভাব্য ফলাফলৰ মুঠ সংখ্যা হ'ব 9.
ধৰা হ'ল, ঘটনা A, B আৰু C য়ে সূচোৱা ঘটনাবোৰ এনেধৰণৰ

A : প্ৰাপ্ত ফলকখন ৰঙা

B : প্ৰাপ্ত ফলকখন হালধীয়া

C : প্ৰাপ্ত ফলকখন নীলা।

(i) ৰঙা ফলকৰ সংখ্যা = 4 অৰ্থাৎ n (A) = 4

গতিকে $$P(A)=\frac{4}{9}$$

(ii) হালধীয়া ফলকৰ সংখ্যা = 2 অৰ্থাৎ n (B) = 2

সেয়েহে $$P(B)=\frac{2}{9}$$

(iii) নীলা ফলকৰ সংখ্যা = 3 অৰ্থাৎ n (C) = 3

সেইবাবে $$P(C)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

(iv) স্পষ্টভাৱে 'ফলকখন নীলা নহয়' ঘটনাটো হ'ল 'C নহয়'। আমি জানো যে
P (C নহয়) =1− P(C)

সেইবাবে $$P\,(C\text{ নহয়})=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

(v) 'ফলকখন ৰঙা বা নীলা হয়' ঘটনাটো সংহতি 'A বা C' ৰ দ্বাৰা বৰ্ণনা কৰিব পাৰি। যিহেতু A আৰু C পৰস্পৰ বিৱৰ্জিত ঘটনা, গতিকে

$$P(A\text{ বা }C)=P(A\cup C)=P(A)+P(C)=\frac{4}{9}+\frac{1}{3}=\frac{7}{9}$$

উদাহৰণ 12 অনিল আৰু অসীম নামৰ ছাত্ৰ দুজন এটা পৰীক্ষাত অৱতীৰ্ণ হ'ল। অনিলৰ পৰীক্ষাত উত্তীৰ্ণ হোৱাৰ সম্ভাৱিতা হ'ল 0.05 আৰু অসীমৰ উত্তীৰ্ণ হোৱাৰ সম্ভাৱিতা 0.10 দুয়োজনে পৰীক্ষাটোত উত্তীৰ্ণ হোৱাৰ সম্ভাৱিতা হ'ল 0.02. সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰাঁ যাতে

(a) পৰীক্ষাটোত অনিল আৰু অসীম দুয়ো উত্তীৰ্ণ নহয়।

(b) দুয়োজনৰ ভিতৰত অতি কমেও এজন পৰীক্ষাত উত্তীৰ্ণ নহয়।

(c) দুয়োজনৰ ভিতৰত মাত্ৰ এজন পৰীক্ষাত উত্তীৰ্ণ হয়।

সমাধান ধৰা হ'ল, পৰীক্ষাটোত 'অনিল উত্তীৰ্ণ হয়' আৰু 'অসীম উত্তীৰ্ণ হয়' ঘটনা দুটা ক্ৰমে E আৰু F ৰ দ্বাৰা সূচোৱা হয়। প্ৰদত্ত চৰ্তানুসৰি,

$P(E)=0.05$, $P(F)=0.10$ আৰু $P(E\cap F)=0.02$

তেতিয়া

(a) 'পৰীক্ষাটোত অনিল আৰু অসীম দুয়ো উত্তীৰ্ণ নহয়' ঘটনাটো $E'\cap F'$ ৰ দ্বাৰা প্ৰকাশ কৰিব পাৰি।

কাৰণ E′ মানে ‘E নহয়’ অৰ্থাৎ ‘অনিল উত্তীৰ্ণ নহয়’ আৰু F′ মানে ‘F নহয়’ অৰ্থাৎ ‘অসীম উত্তীৰ্ণ নহয়’।

আকৌ, $E' \cap F' = (E \cup F)'$ (ডি মৰ্গানৰ বিধিমতে)

এতিয়া $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$

বা $P(E \cup F) = 0.05 + 0.10 - 0.02 = 0.13$

সেয়েহে, $P(E' \cap F') = P((E \cup F)') = 1 - P(E \cup F) = 1 - 0.13 = 0.87$

(b) P (দুজনৰ অতি কমেও এজন উত্তীৰ্ণ নহয়)

$= 1 -$ P (দুজনৰ উভয়ে উত্তীৰ্ণ হয়)

$= 1 - 0.02 = 0.98$

(c) ‘পৰীক্ষাত দুজনৰ ভিতৰত মাত্ৰ এজন উত্তীৰ্ণ হয়’ ঘটনাটো ‘অনিল উত্তীৰ্ণ হয় আৰু অসীম উত্তীৰ্ণ নহয় নাইবা অনিল উত্তীৰ্ণ নহয় আৰু অসীম উত্তীৰ্ণ হয়’ ঘটনাটোৰ সৈতে অৰ্থাৎ ‘$E \cap F'$ বা $E' \cap F$’ৰ সৈতে একে, য’ত $E \cap F'$ আৰু $E' \cap F$ ঘটনা দুটা পৰস্পৰ বিৰৰ্জিত।

সেয়েহে, P (তেওলোকৰ ভিতৰত মাত্ৰ এজন উত্তীৰ্ণ হয়)

$= P(E \cap F'$ বা $E' \cap F)$

$= P(E \cap F') + P(E' \cap F) = P(E) - (E \cap F) + P(F) - P(E \cap F)$

$= 0.05 - 0.02 + 0.10 - 0.02 = 0.11$

উদাহৰণ 13 দুজন পুৰুষ আৰু দুজনী মহিলাৰ মাজৰপৰা দুজনীয়া সমিতি এখন নিৰ্বাচন কৰা হল। সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰাঁ- যাতে সমিতিখনত (*a*) এজনো পুৰুষ নাই (*b*) এজন পুৰুষ আছে (*c*) দুজন পুৰুষ আছে।

সমাধান মুঠ মানুহৰ সংখ্যা = 2 + 2 = 4। চাৰিজন মানুহৰূপৰা দুজনক $^4C_2$ ধৰণে বাছিব পাৰি।

(a) দুজনীয়া সমিতিখনত এজনো পুৰুষ নাই মানে তাত দুজনী মহিলা থাকিব। দুজনী মহিলাৰ পৰা দুজনী মহিলাক $^2C_2 = 1$ ধৰণে বাছিব পাৰি।

সেইবাবে P (এজনো পুৰুষ নাই) $= \dfrac{^2C_2}{^4C_2} = \dfrac{1 \times 2 \times 1}{4 \times 3} = \dfrac{1}{6}$

(b) সমিতিখনত এজন পুৰুষ থকা মানে এজনী মহিলাও থাকিব লাগিব। 2 জন পুৰুষৰ পৰা 1 জনক $^2C_1$ ধৰণে আৰু দুজনী মহিলাৰ পৰা 1 জনী মহিলাক $^2C_1$ ধৰণে বাছিব পাৰি। তেওঁলোক দুজনক একেলগে $^2C_1 \times {}^2C_1$ ধৰণে বাছিব পাৰি।

সেয়েহে, P (এজন পুৰুষ আছে) $= \dfrac{^2C_1 \times {}^2C_1}{^4C_2} = \dfrac{2 \times 2}{2 \times 3} = \dfrac{2}{3}$

(c) 2 জন পুৰুষৰ পৰা 2 জন $^2C_2$ ধৰণে বাছিব পাৰি।

গতিকে P (2 জন পুৰুষ আছে) $= \dfrac{^2C_2}{^4C_2} = \dfrac{1}{2 \times 3} = \dfrac{1}{6}$

অনুশীলনী 16.3

1. প্ৰতিদৰ্শ স্থান $S = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7\}$ ৰ ফলাফলসমূহ সম্ভাৱিতাৰ জোখ হিচাপে তলৰ নিৰ্দ্ধাৰিত মানবোৰৰ কোনবোৰ সম্ভাৱিতাৰ বাবে প্ৰযোজ্য?

নিৰ্দ্ধাৰিত মান	ω_1,	ω_2,	ω_3,	ω_4,	ω_5,	ω_6,	ω_7
(a)	0.1	0.01	0.05	0.03	0.01	0.2	0.6
(b)	1/7	1/7	1/7	1/7	1/7	1/7	1/7
(c)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
(d)	–0.1	0.2	0.3	0.4	– 0.2	0.1	0.3
(e)	$\frac{1}{14}$	$\frac{2}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{4}{14}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{6}{14}$	$\frac{15}{14}$

2. এটা মুদ্ৰা দুবাৰ টচ্ কৰা হ'ল। কমপক্ষে এবাৰ পুচ্ছ প্ৰাপ্ত হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কি?
3. এটা পাশাগুটি দলিওৱা হ'ল। সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰাঁ যাতে
   (i) এটা মৌলিক সংখ্যা প্ৰাপ্ত হয়।
   (ii) 3 তকৈ ডাঙৰ বা 3 ৰ সমান সংখ্যা প্ৰাপ্ত হয়।
   (iii) 1 তকৈ সৰু বা 1 ৰ সমান সংখ্যা প্ৰাপ্ত হয়।
   (iv) 6 তকৈ ডাঙৰ সংখ্যা প্ৰাপ্ত হয়।
   (v) 6 তকৈ সৰু সংখ্যা প্ৰাপ্ত হয়।
4. 52 খন কাৰ্ড থকা এজাপ কাৰ্ডৰপৰা এখন কাৰ্ড টনা হ'ল।
   (a) প্ৰতিদৰ্শ স্থানৰ মৌলসংখ্যা কি হ'ব?
   (b) কাৰ্ডখন ইস্কাপনৰ টেক্কা (Ace of Spade) হোৱাৰ সম্ভাৱিতা উলিওৱাঁ।
   (c) সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰাঁ যাতে (i) কাৰ্ডখন টেক্কা হয় (ii) কাৰ্ডখনৰ ৰং ক'লা হয়।
5. এপিঠি 1 ৰে আৰু আনপিঠি 6 ৰে চিহ্নিত এটা নিখুঁত মুদ্ৰা আৰু এটা পাশাগুটি একেলগে টচ্ কৰা হ'ল। সম্ভাৱিতা উলিওৱাঁ যাতে- প্ৰাপ্ত সংখ্যাবোৰৰ সমষ্টি (i) 3 (ii) 12 হয়।
6. এখন নগৰ সমিতিত 4 জন পুৰুষ আৰু 6 জনী মহিলা আছে। যাদৃচ্ছিকভাৱে সমিতিৰ পৰা বাছনি কৰা এগৰাকী সদস্য মহিলা হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?
7. 4 বাৰ টচ্ কৰা এটা নিখুঁত মুদ্ৰাৰ ক্ষেত্ৰত এজন মানুহে প্ৰতিবাৰতে মুণ্ড প্ৰাপ্ত হ'লে 1 টকাকৈ লাভ কৰে আৰু পুচ্ছ প্ৰাপ্ত হ'লে 1.50 টকাকৈ হেৰুৱায়। প্ৰতিদৰ্শ স্থানৰ সহায়ত 4 টা টচৰ অন্তত মানুহজনে কিমান বিভিন্ন পৰিমাণৰ টকা পাব পাৰে আৰু এই পৰিমাণবোৰৰ প্ৰতিটোৰে সম্ভাৱিতা কিমান?
8. তিনিটা মুদ্ৰা এবাৰ একেলগে টচ্ কৰা হ'ল। পৰৱৰ্তী ফলাফলবোৰ প্ৰাপ্ত হোৱাৰ সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰাঁ -
   (i) 3 টা মুণ্ড (ii) 2 টা মুণ্ড (iii) অতি কমেও 2 টা মুণ্ড
   (iv) সৰ্বাধিক 2 টা মুণ্ড (v) মুণ্ড প্ৰাপ্ত নহয় (vi) 3 টা পুচ্ছ
   (vii) ঠিক 2 টা পুচ্ছ (viii) পুচ্ছ প্ৰাপ্ত নহয় (ix) সৰ্বাধিক 2 টা পুচ্ছ ।
9. যদি এটা ঘটনা A ৰ সম্ভাৱিতা $\frac{7}{11}$ হয় তেন্তে 'A নহয়' ঘটনাটোৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

10. 'ASSASSINATION' শব্দটোৰ পৰা এটা অক্ষৰ বাছনি কৰা হ'ল। সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰাঁ যাতে অক্ষৰটো (i) স্বৰবৰ্ণ (ii) ব্যঞ্জনবৰ্ণ হয়।

11. এখন লটাৰী খেলত এজন মানুহে 1 ৰ পৰা 20 লৈ যাদৃচ্ছিকভাৱে ছয়টা সংখ্যা বাছিব পাৰে। মানুহজনে পুৰস্কাৰ লাভ কৰিবলৈ হ'লে তেওঁ বাছনি কৰা সংখ্যাবোৰ লটাৰী কমিটীয়ে পূৰ্ব নিৰ্দিষ্ট কৰি থোৱা ছয়টা সংখ্যাৰ সৈতে একে হ'ব লাগিব। খেলখনত তেওঁ পুৰস্কাৰ লাভ কৰাৰ সম্ভাৱিতা কিমান? [**ইংগিত ঃ** সংখ্যাবোৰৰ ক্ৰম ইয়াত প্ৰয়োজনীয় নহয়]

12. তলত দিয়া ধৰণে P(A) আৰু P(B) ৰ প্ৰদত্ত মানবোৰ সামঞ্জস্যপূৰ্ণ হয় নে নহয় বিচাৰ কৰাঁ-

(i) $P(A) = 0.5,\ P(B) = 0.7,\ P(A \cap B) = 0.6$

(ii) $P(A) = 0.5,\ P(B) = 0.4,\ P(P \cup B) = 0.8$

13. পৰৱৰ্তী তালিকাৰ খালী ঠাই পূৰণ কৰাঁ

	P(A)	**P(B)**	**P(A ∩ B)**	**P(A ∪ B)**
(i)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	...
(ii)	0.35	...	0.25	0.6
(iii)	0.5	0.35	...	0.7

14. দিয়া আছে $P(A) = 3/5$ আৰু $P(B) = 1/5$. P(A বা B) উলিওৱাঁ যদি A আৰু B ঘটনা দুটা পৰস্পৰ বিৰৰ্জিত হয়।

15. যদি E আৰু F দুটা ঘটনা যাতে $P(E) = \frac{1}{4}$, $P(F) = \frac{1}{2}$ আৰু P(E আৰু F) $= 1/8$ তেন্তে (i) P(E বা F) (ii) P(E নহয় আৰু F নহয়) নিৰ্ণয় কৰাঁ।

16. দুটা ঘটনা E আৰু F ৰ ক্ষেত্ৰত P(E নহয় বা F নহয়) = 0.25. E আৰু F পৰস্পৰ বিৰৰ্জিত হয় নে?

17. A আৰু B দুটা ঘটনা যাতে P(A) = 0.42, P(B) = 0.48 আৰু P(A আৰু B) = 0.16 মান উলিওৱা (i) P(A নহয়) (ii) P(B নহয়) আৰু (iii) P(A বা B)

18. একাদশ শ্ৰেণীৰ 40% ছাত্ৰই গণিত আৰু 30% ছাত্ৰই জীৱবিদ্যা অধ্যয়ন কৰে। শ্ৰেণীটোৰ 10% ছাত্ৰই গণিত আৰু জীৱবিদ্যা দুয়োটা বিষয় অধ্যয়ন কৰে। যদি শ্ৰেণীটোৰ পৰা যাদৃচ্ছিকভাৱে এজন ছাত্ৰ বাছনি কৰা হয় তেন্তে তেওঁ গণিত বা জীৱবিদ্যা অধ্যয়ন কৰাৰ সম্ভাৱিতা উলিওৱাঁ।

19. দুটা পৰীক্ষাৰ ভিত্তিত মূল্যাংক নিৰ্দ্ধাৰণ কৰা কোনো প্ৰবেশ পৰীক্ষাত অৱতীৰ্ণ হোৱা এজন পৰীক্ষাৰ্থীৰ প্ৰথম আৰু দ্বিতীয় পৰীক্ষাত উত্তীৰ্ণ হোৱাৰ সম্ভাৱিতাবোৰ ক্ৰমে 0.8 আৰু 0.7। পৰীক্ষা দুটাৰ কমেও এটাত উত্তীৰ্ণ হোৱাৰ সম্ভাৱিতা হ'ল 0.95। দুয়োটা পৰীক্ষাত উত্তীৰ্ণ হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

20. চূড়ান্ত পৰীক্ষাত ইংৰাজী আৰু হিন্দী উভয় বিষয়ত এজন ছাত্ৰ উত্তীৰ্ণ হোৱাৰ সম্ভাৱিতা হ'ল 0.5 আৰু দুটাৰ এটাতো উত্তীৰ্ণ নোহোৱাৰ সম্ভাৱিতা হ'ল 0.1। যদি ইংৰাজী পৰীক্ষাত উত্তীৰ্ণ হোৱাৰ সম্ভাৱিতা 0.75। তেন্তে হিন্দী পৰীক্ষাত উত্তীৰ্ণ হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

21. 60 জনীয়া শ্ৰেণী এটাত 30 জন ছাত্ৰই NCC, 32 জনে NSS আৰু 24 জনে NCC আৰু NSS দুয়োটা

বিষয়ত নামভৰ্তি কৰিলে। যদি তেওঁলোকৰ মাজৰ পৰা যাদৃচ্ছিকভাৱে এজনক বাছনি কৰা হয় তেন্তে সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰাঁ যাতে

(i) ছাত্ৰজনে NCC বা NSS অত নাম ভৰ্তি কৰে

(ii) ছাত্ৰজনে NCC বা NSS ৰ এটাতো নাম ভৰ্তি নকৰে।

(iii) ছাত্ৰজনে NSS ত নাম ভৰ্তি কৰে কিন্তু NCC ত নাম ভৰ্তি নকৰে।

বিবিধ উদাহৰণ

উদাহৰণ 14 বন্ধত বীণাই চাৰিখন চহৰ (A, B, C আৰু D) ভ্ৰমি আহিল। সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰাঁ যাতে তেওঁ (i) B ৰ আগতে A (ii) B ৰ আগতে A আৰু C ৰ আগতে B (iii) প্ৰথমে A আৰু শেষত B (iv) প্ৰথম বা দ্বিতীয়তে A (v) ঠিক B ৰ আগতে A ভ্ৰমণ কৰিছিল।

সমাধান বীনাই চাৰিখন চহৰ A, B, C আৰু D ভ্ৰমণ কৰাৰ বাবে ক্ৰমভিত্তিক শৃংখলাৰ সংখ্যা 4! অৰ্থাৎ 24। সেইবাবে n (S) = 24

যিহেতু পৰীক্ষাটোৰ প্ৰতিদৰ্শ স্থানৰ মৌল সংখ্যা 24, এই আটাইবোৰ ফলাফলেই সমসম্ভাব্য বুলি বিবেচনা কৰিব পাৰি। পৰীক্ষাটোৰ প্ৰতিদৰ্শ স্থান হ'ল-

S = {ABCD, ABDC, ACBD, ACDB, ADBC, ADCB.
BACD, BADC, BDAC, BDCA, BCAD, BCDA,
CABD, CADB. CBDA, CBAD, CDAB, CDBA,
DABC, DACB, DBCA, DBAC, DCAB, DCBA}

(i) 'তেওঁ B ৰ আগতে A ভ্ৰমণ কৰা' ঘটনাটো E ৰ দ্বাৰা সূচোৱা হ'ল।

তেতিয়া E = {ABCD, CABD, DABC, ABDC, CADB, DACB,
ACBD, ACDB, ADBC, CDAB, DCAB, ADCB}

এইদৰে, $$\mathrm{P(E)} = \frac{n(\mathrm{E})}{n(\mathrm{S})} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$$

(ii) বীণাই 'B ৰ আগতে A আৰু C ৰ আগতে B ভ্ৰমণ কৰা ঘটনাটো, F ৰে সূচোৱা হ'ল। গতিকে F = {ABCD, DABC, ABDC, ADBC}

সেইবাবে, $$\mathrm{P(F)} = \frac{n(\mathrm{F})}{n(\mathrm{S})} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$$

ছাত্ৰ ছাত্ৰীসকলক (iii) , (iv) আৰু (v) ৰ ক্ষেত্ৰত সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰি উলিয়াবলৈ পৰামৰ্শ আগ বঢ়োৱা হ'ল।

উদাহৰণ 15 ভালদৰে সানমিহলি কৰা 52 খনীয়া এজাপ কাৰ্ডৰ পৰা 7 খনীয়া এজাপ কাৰ্ড টনা হয়। সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰাঁ যাতে 7 খনীয়া কাৰ্ডৰ জাপটোত (i) আটাইবোৰ ৰজা (ii) 3 জন ৰজা (iii) কমপক্ষে 3 জন ৰজা সন্নিৱিষ্ট হয়।

সমাধান 52 খন কাৰ্ডৰপৰা বাছিব পৰা 7 খনীয়া জাপৰ সংখ্যা $^{52}C_7$

(i) 4 জন ৰজা সন্নিবিষ্ট জাপৰ মুঠ সংখ্যা $= {}^4C_4 \times {}^{48}C_3$ (আন তিনিখন কাৰ্ড বাকী 48 কাৰ্ডৰপৰা বাছিব লাগিব)

গতিকে $$\text{P (জাপত 4 জন ৰজা সন্নিৱিষ্ট হয়)} = \frac{{}^4C_4 \times {}^{48}C_3}{{}^{52}C_7} = \frac{1}{7735}$$

(ii) 3 খন ৰজা থকা আৰু 4 খন ৰজা নথকা 7 খনীয়া কাৰ্ডযুক্ত জাপৰ সংখ্যা $= {}^4C_3 \times {}^{48}C_4$

সেইবাবে P(3 জন ৰজা সন্নিৰিষ্ট হয়) $= \dfrac{{}^4C_3 \times {}^{48}C_4}{{}^{52}C_7} = \dfrac{9}{1547}$

(iii) P (কমপক্ষে 3 জন ৰজা সন্নিৰিষ্ট হয়)

= P (3 জন ৰজা বা 4 জন ৰজা সন্নিবিষ্ট হয়)

= P (3 জন ৰজা সন্নিবিষ্ট হয়) + P (4 জন ৰজা সন্নিবিষ্ট হয়)

$$= \frac{9}{1547} + \frac{1}{7735} = \frac{56}{7735}$$

উদাহৰণ 16 যদি A,B,C কোনো যাদৃচ্ছিক ঘটনাৰ সৈতে যুক্ত তিনিটা ঘটনা হয় তেন্তে প্ৰমাণ কৰাঁ যে-

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C)$$
$$- P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

সমাধান $E = B \cup C$ লোৱা হওক যাতে

$$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup E)$$
$$= P(A) + P(E) - P(A \cap E) \qquad (1)$$

এতিয়া,

$$P(E) = P(B \cup C)$$
$$= P(B) + P(C) - P(B \cap C) \qquad (2)$$

আকৌ, $A \cap E = A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (সংহতিৰ মিলন সাপেক্ষে ছেদনৰ বিতৰণ বিধি প্ৰয়োগ কৰি)। এইদৰে,

$$P(A \cap E) = P(A \cap B) + P(A \cap C) - P[(A \cap B) \cap (A \cap C)]$$
$$= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C) \qquad (3)$$

(1) ত (2) আৰু (3) প্ৰয়োগ কৰি আমি পাওঁ

$$P[A \cup B \cup C] = P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C)$$
$$- P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

উদাহৰণ 17 এখন 'ৰিলে' দৌৰ (Relay Race) প্ৰতিযোগিতাত মুঠ পাঁচটা দল A, B, C, D আৰু E আছে।

(a) দল A, B আৰু C ক্ৰমে প্ৰথম, দ্বিতীয় আৰু তৃতীয় স্থানপ্ৰাপ্ত হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

(b) দল A, B আৰু C প্ৰথম তিনিটা স্থানত (যিকোনো ক্ৰমত) থকাৰ সম্ভাৱিতা কিমান? (আটাইবোৰ সামৰণী ক্ৰমেই সমসম্ভাব্য বুলি ধৰাঁ)

সমাধান প্ৰথম তিনিটা স্থানৰ বাবে সকলো সামৰণী ক্ৰমেই সম্ভৱ বুলি ধৰিলে, প্ৰতিদৰ্শ স্থানত মুঠ প্ৰতিদৰ্শ বিন্দুৰ সংখ্যা হ'ব ${}^5P_3$ অৰ্থাৎ $\dfrac{5!}{(5-3)!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$ আৰু প্ৰতিটো প্ৰতিদৰ্শ বিন্দুৰ সম্ভাৱিতা হ'ব $\dfrac{1}{60}$.

(a) A, B আৰু C যথাক্ৰমে প্ৰথম, দ্বিতীয় আৰু তৃতীয় স্থানপ্ৰাপ্ত হয়। ইয়াৰ বাবে আমি মাত্ৰ এটা ক্ৰম যেনে ABC পাওঁ।

এইদৰে, P(ABC ক্ৰমে প্ৰথম, দ্বিতীয় আৰু তৃতীয় স্থানপ্ৰাপ্ত হয়) $= \frac{1}{60}$

(b) প্ৰথম তিনিটা স্থানত A, B আৰু C আছে। এই ক্ষেত্ৰত A, B আৰু C ৰ বাবে 3! সংখ্যক ক্ৰম পোৱা যাব। সেইবাবে এনে ঘটনাৰ অনুৰূপে প্ৰতিদৰ্শ বিন্দুৰ সংখ্যা হ'ব 3!

গতিকে, P(A, B আৰু C প্ৰথম তিনিটা স্থানপ্ৰাপ্ত হয়) $= \frac{3!}{60} = \frac{6}{60} = \frac{1}{10}$

ষোড়শ অধ্যায়ৰ বিবিধ অনুশীলনী

1. এটা বাকচত 10 টা ৰঙা, 20 টা নীলা আৰু 30 টা সেউজীয়া মাৰ্বল আছে। বাকচটোৰ পৰা 5 টা মাৰ্বল লোৱা হ'ল। সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰাঁ যাতে

   (i) আটাইবোৰ মাৰ্বল নীলা হয়। (ii) কমেও এটা মাৰ্বল সেউজীয়া হয়।

2. 52 খনীয়া এজাপ কাৰ্ডৰ পৰা 4 খন কাৰ্ড টনা হ'ল। 3 খন ৰোহিতন (Diamond) আৰু 1 খন ইস্কাপন (Spade) প্ৰাপ্ত হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

3. এটা পাশাগুটিৰ দুটা ফালত 1, তিনিটা ফালত 2 আৰু এটা ফালত 3 সংখ্যা লিখা আছে। পাশাগুটিটো এবাৰ দলিওৱা হ'ল। নিৰ্ণয় কৰাঁ-

   (i) P(2) (ii) P(1 বা 3) (iii) P(3 নহয়)

4. এখন লটাৰী খেলৰ বাবে 10,000 টিকট বিক্ৰী কৰা হ'ল আৰু 10 টা একেধৰণৰ পুৰস্কাৰ ঘোষণা কৰা হ'ল। যদি তুমি (i) এখন টিকট (ii) দুখন টিকট (iii) দহখন টিকট কিনা তেন্তে কোনো পুৰস্কাৰ লাভ নকৰাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

5. 100 জন ছাত্ৰ-ছাত্ৰীৰ মাজৰপৰা 40 জন আৰু 60 জনকৈ দুটা শাখা গঠন কৰা হ'ল। যদি 100 জনৰ ভিতৰত তোমাৰ বন্ধুসহ তুমিও আছা, তেন্তে সম্ভাৱিতা উলিওৱা যাতে (a) তোমালোক উভয়ে একেটা শাখাত অন্তৰ্ভুক্ত হোৱা

   (b) দুয়োজনে বেলেগ বেলেগ শাখাত অন্তৰ্ভুক্ত হোৱা।

6. তিনিজন ব্যক্তিলৈ তিনিখন চিঠি আৰু তেওঁলোকৰ প্ৰতিজনৰ বাবে একোটাকৈ খামত ঠিকনা লিখা হ'ল। চিঠিবোৰ খামত যাদৃচ্ছিকভাৱে ভৰোৱা হ'ল যাতে প্ৰতিটো খামতে এখনকৈ চিঠি সোমায়। সম্ভাৱিতা উলিওৱাঁ যাতে কমপক্ষে এখন চিঠি সঠিক খামত সোমায়।

7. A আৰু B দুটা ঘটনা যাতে P(A) = 0.54, P(B) = 0.69 আৰু $P(A \cap B) = 0.35$.

   মান উলিওৱা (i)$P(A \cup B)$ (ii)$P(A' \cap B')$ (iii)$P(A \cap B')$ (iv)$P(B \cap A')$

8. এটা কোম্পানীৰ চাকৰিয়ালসকলৰ মাজৰ পৰা কোম্পানীটোৰ পৰিচালনা সমিতিলৈ প্ৰতিনিধি হিচাপে 5 গৰাকী ব্যক্তিক বাছনি কৰা হ'ল আৰু তেওঁলোকৰ ব্যক্তিগত তথ্যপাতি নিম্নোক্ত ধৰণে উল্লেখ কৰা হ'ল-

ক্ৰমিক সংখ্যা	নাম	লিঙ্গ	বয়স (বছৰৰ হিচাপত)
1.	হৰীশ	পুৰুষ	30
2.	ৰোহন	পুৰুষ	33
3.	শীতল	মহিলা	46
4.	এলিচ	মহিলা	28
5.	চেলিম	পুৰুষ	41

দলটোৰ পৰা যিকোনো (Chosen randomly) এজনক মুখপাত্ৰ (Spokesperson) হিচাপে বাছনি কৰা হ'ল। মুখপাত্ৰ গৰাকী পুৰুষ বা তেওঁৰ বয়স 35 তকৈ অধিক হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

9. 0, 1, 3, 5 আৰু 7 অংকবোৰ ব্যৱহাৰ কৰি 5000 তকৈ ডাঙৰ যিকোনো ধৰণে 4 অংকীয়া সংখ্যা গঠন কৰা হ'ল। 5 ৰে বিভাজ্য সংখ্যা গঠিত হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কি যদি
(i) অংকবোৰ বাৰে বাৰে ব্যৱহাৰযোগ্য হয় (ii) অংকবোৰৰ বাৰে বাৰে ব্যৱহাৰ নিষিদ্ধ হয়।

10. এটা চুটকেচৰ সাংখ্যিক তলাটোত (Number Lock) মুঠ 4 টা চকা আছে, যাৰ প্ৰতিটোতে 0 ৰ পৰা 9 লৈ মুঠ দহোটা অংক লেবেল লগাই থোৱা আছে। বেলেগ বেলেগ চাৰিটা অংকৰ বিশেষ ক্ৰম ব্যৱহাৰ কৰি তলাটো খুলিব পাৰি। চুটকেচটো খোলাৰ বাবে এজন মানুহে অংকবোৰৰ সঠিক ক্ৰমটো বিচাৰি উলিওৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

সাৰাংশ

এই অধ্যায়ত সম্ভাৱিতাৰ স্বতঃসিদ্ধ ভিত্তিক ধাৰণা সম্পৰ্কে আলোচনা কৰা হ'ল। অধ্যায়টোৰ মূল বৈশিষ্ট্যসমূহ নিম্নোক্ত ধৰণৰ-

- ***প্ৰতিদৰ্শ স্থান*** ঃ সম্ভৱপৰ সকলো ফলাফলৰ সংহতি
- ***প্ৰতিদৰ্শ বিন্দু*** ঃ প্ৰতিদৰ্শ স্থানৰ মৌলসমূহ
- ***ঘটনা*** ঃ প্ৰতিদৰ্শ স্থানৰ উপসংহতি
- ***অসম্ভৱ ঘটনা*** ঃ ৰিক্ত সংহতি
- ***নিশ্চিত ঘটনা*** ঃ সামগ্ৰিকভাৱে প্ৰতিদৰ্শ স্থানটো
- ***পূৰক ঘটনা বা নেতিবাচক ঘটনা*** ঃ সংহতি A' বা $S - A$.
- ***ঘটনা A বা B*** ঃ সংহতি $A \cup B$
- ***ঘটনা A আৰু B*** ঃ সংহতি $A \cap B$
- ***ঘটনা A কিন্তু B নহয়*** ঃ সংহতি $A - B$
- ***পৰস্পৰ বিৱৰ্জিত ঘটনা*** ঃ A আৰু B পৰস্পৰ বিবৰ্জিত ঘটনা হয় যদি $A \cap B = \phi$
- ***নিঃশেষিত আৰু পৰস্পৰ বিৱৰ্জিত ঘটনা*** ঃ ঘটনা $E_1, E_2, ...E_n$ পৰস্পৰ বিৱৰ্জিত আৰু নিঃশেষিত যদি $E_1 \cup E_2 \cup ....\cup E_n = S$ আৰু $E_i \cap E_j = \phi, \forall i, j$
- ***সম্ভাৱিতা*** ঃ প্ৰতিদৰ্শ বিন্দু ω_i ৰ সৈতে যুক্ত সংখ্যা $P(\omega_i)$ যাতে

(i) $0 \le P(\omega_i) \le 1$ (ii) $\sum P(\omega_i) = 1 \forall \omega_i \in S$

(iii) $P(A) = \sum P(\omega_i) \forall \omega_i \varepsilon A$ সংখ্যা $P(\omega_i)$ ক ফলাফল ω_i ৰ বাবে সম্ভাৱিতা বোলা হয়।

- ***সমসম্ভাব্য ফলাফল*** ঃ সকলো ফলাফল যিবিলাকৰ সম্ভাৱিতা পৰস্পৰ সমান
- ***ঘটনাৰ সম্ভাৱিতা*** ঃ সমসম্ভাব্য ফলাফলযুক্ত এটা সসীম প্রতিদর্শ স্থানৰ বাবে কোনো ঘটনা A ৰ সম্ভাৱিতা

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$, য'ত $n(A)$ = সংহতি A ৰ মৌল সংখ্যা, $n(S)$ = S ৰ মৌলসংখ্যা

- যদি A আৰু B দুটা ঘটনা হয় তেন্তে P(A বা B) = P(A)+P(B) – P(A আৰু B)

 সমতুল্যভাৱে

 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

- যদি A আৰু B পৰস্পৰ বিৰৰ্জিত ঘটনা হয় তেন্তে P(A বা B) = P(A) + P(B)
- যদি A যিকোনো ঘটনা হয়, তেন্তে

 P(A নহয়) = 1 – P(A)

ঐতিহাসিক টোকা

গণিত শাস্ত্ৰৰ আন আন বহু শাখাৰ নিচিনা সম্ভাৱিতা তত্ত্বৰো উদ্ভৱ হৈছিল ব্যাৱহাৰিক কৰ্মকাণ্ডৰ জৰিয়তে। ইয়াৰ আৰম্ভণি ঘটিছিল ষোড়শ শতিকাত, যেতিয়া ইটালীয় চিকিৎসক তথা গণিতজ্ঞ জেৰম কাৰ্ডনে (Jerome Cardan, 1501-1576) বিষয়টোৰ সম্পৰ্কত প্ৰথম গ্ৰন্থখন 'Book on Games of Chance'(Biber de Ludo Aleae) লিখিছিল। গ্ৰন্থখনি 1663 চনত তেওঁৰ মৃত্যুৰ পিছত প্ৰকাশ হৈছিল।

1654 চনত চেভেলিয়াৰ ডি মেৰে নামৰ জুৱাৰী এজনে বিখ্যাত ফৰাচী দাৰ্শনিক আৰু গণিতজ্ঞ ব্লেইচ্ পাস্কেলক (1623 – 1662) পাশাখেলৰ কিছুমান সমস্যাৰ সমাধান বিচাৰি লগ ধৰিছিল। পাস্কেল এই সমস্যাবোৰৰ সম্পৰ্কে আগ্ৰহী হৈ পৰিছিল আৰু প্ৰখ্যাত গণিতজ্ঞ পিয়েৰ ডি ফাৰ্মাৰ (Pierre de Fermat, 1601–1665) সৈতে আলোচনা কৰিছিল। পাস্কেল আৰু ফাৰ্মা উভয়ে এই সমস্যাবোৰ গাইগুটীয়াভাৱে সমাধান কৰিছিল। পাস্কেল আৰু ফাৰ্মাৰ বাহিৰেও হলেণ্ডৰ খ্ৰীষ্টিয়ান হাইজেন্স (Christian Huygenes, 1629 – 1665), জে বাৰ্ণুলি (J. Bernouli, 1654 – 1705), ডি মইভাৰ (De Moivre, 1667 – 1754), ফ্ৰান্সৰ পিয়েৰ লাপ্লাছ (Pierre Laplace, 1749 – 1827), ৰাছিয়াৰ পি. এল চেবিশ্বেভ্ (P.L. Chebyshev, 1821 – 1897), এ, এ, মাৰ্কভ্ (A.A Markov, 1856 – 1922) আৰু এ, এন্ কল্মোগোৰোভে (A.N Kolmogorov, 1903 – 1987) সম্ভাৱিতা তত্ত্বলৈ অনবদ্য বৰঙণি আগবঢ়ায়। কল্মোগোৰোভেই সম্ভাৱিতাৰ স্বতঃসিদ্ধ ভিত্তিক ধাৰণাৰ উদ্ভাৱন কৰে। 1933 চনত প্ৰকাশ কৰা 'সম্ভাৱিতা তত্ত্বৰ ভেটি' নামৰ তেওঁৰ গ্ৰন্থখনত এটা সংহতিফলন (Set function) হিচাপে সম্ভাৱিতাৰ ধাৰণা আগবঢ়োৱা হৈছে আৰু এই গ্ৰন্থখনক এখন ধ্ৰুপদী গ্ৰন্থ হিচাপে স্বীকাৰ কৰা হয়।