ગુજરાત શૈક્ષણિક સંશોધન અને તાલીમ પરિષદના પત્ર-ક્રમાંક
જીસીઈઆરટી/સીએન્ડઈ/2018/5808, તા.07/03/2018થી મંજૂર

# ریاضی

## جماعت 7

## ગણિત ધોરણ VII (ઉર્દૂ)

### عہدنامہ

بھارت میرا وطن ہے۔
تمام بھارتی میرے بھائی بہن ہیں۔
میں اپنے وطن سے محبت کرتا ہوں اور اس کے شاندار بوقلموں ورثے پر فخر کرتا ہوں۔
میں ہمیشہ اس کے شایان شان بننے کی کوشش کرتا رہوں گا۔
میں اپنے والدین، اساتذہ اور بزرگوں کی تعظیم کروں گا
اور ہر شخص کے ساتھ ادب سے پیش آؤں گا۔
میں اپنے وطن اور اہلِ وطن کو اپنی عقیدت پیش کرتا ہوں۔
ان کی فلاح وبہبودی میں ہی میری خوشی ہے۔

قیمت : ₹ 55.00

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

गुजरات راجیہ شالا پاٹھیہ پستک منڈل
'ودیاین'، سیکٹر-10-A، گاندھی نگر-382010

© NCERT نئی دہلی اور گجرات راجیہ شالا پاٹھیہ پستک منڈل، گاندھی نگر
اِس کتاب کے جملہ حقوق بحق NCERT نئی دہلی اور گجرات راجیہ شالا پاٹھیہ پستک منڈل محفوظ ہیں۔ درسی کتاب کے کسی بھی حصے کو کسی بھی صورت میں NCERT نئی دہلی اور گجرات راجیہ شالا پاٹھیہ پستک منڈل کے ڈائریکٹر کی تحریری اجازت کے بغیر شائع نہیں کیا جاسکتا۔

ترتیب
شری آشش ایچ. بوری ساگر
(سبجیکٹ کوآرڈینیٹر-فیزِکس)

اشاعت ترتیب
شری ہرین پی. شاہ
(منڈل کے نائب دائریکٹر، اکیڈمک)

طباعت ترتیب
شری ہریش ایس لمباچیا
(منڈل کے نائب ڈائریکٹر - پروڈکشن)

# پیش لفظ

قومی سطح پر 'مساوی نصاب پالیسی' کے نفاذ کے نقطۂ نظر سے ریاستِ گجرات اور GCERT نے براہِ راست NCERT نئی دہلی کی درسی کتابوں کے استعمال کا فیصلہ لیا تھا۔ یہ فیصلہ مورخہ 17-7-19 کی تجویز نمبر JSBH/1217/Single file-62/N کے تحت لیا گیا تھا۔ اِس ہدف کے پیش نظر NCERT کے ذریعے شائع شدہ اس درسی کتاب کو **جماعت VII ریاضی** کی درسی کتاب کے طور پر قبول کیا گیا ہے۔ اس کاز کے لیے سب سے پہلے NCERT کی درسی کتاب کا گجراتی ترجمہ تیار کیا گیا ہے۔

گجراتی ترجمے کے دوران موجودہ صورت حال اور گجرات کے مخصوص علاقائی پس منظر کو مدّنظر رکھتے ہوئے خصوصی ناموں، اعداد وشمار اور اسباق میں معمولی ردّوبدل کیا گیا ہے، جس کے لیے NCERT سے پیشگی اجازت لی گئی تھی۔ اب گجراتی کی کتاب میں کی گئی اِن معمولی تبدیلیوں کو اُردو میڈیم کی اِس درسی کتاب میں بھی برضا ورغبت شامل کرلیا گیا ہے۔

اِس پورے عمل کے لیے بورڈ جناب مقبول احمد شیخ کی قابلیت اور عطیے کا اعتراف کرتا ہے۔ اُن کے اِس قابلِ قدر عطیے کے لیے بورڈ اُن کا شکر گزار ہے۔

گجرات راجیہ شالا پاٹھیہ پستک منڈل اس پورے عمل میں بھرپور تعاون کے لیے NCERT کا بھی ممنون ہے۔

اِس درسی کتاب کے معیار میں اصلاح کی غرض سے دی جانے والی تعمیری تجاویز اور آپ کی قیمتی آراء کا بورڈ ہمیشہ استقبال کرتا رہے گا۔

پی۔ بھارتی (IAS)
ڈائریکٹر
تاریخ : 21-11-2019

پاٹھیہ پُستک منڈل
گاندھی نگر

پہلی طباعت - 2019 طباعتِ نو - 2020
ناشر : گجرات راجیہ شالا پاٹھیہ پستک منڈل-'وِدیاین'، سیکٹر 10-A، گاندھی نگر کی جانب سے۔ پی۔ بھارتی (IAS) ،ڈائریکٹر۔
طابع :

# پیش لفظ

’قومی درسیات کا خاکہ —2005‘ میں سفارش کی گئی ہے کہ بچوں کی اسکول کی زندگی، ان کی باہر کی زندگی سے ہم آہنگ ہونی چاہیے۔ یہ زاویۂ نظر، کتابی علم کی اس روایت کی نفی کرتا ہے جس کے باعث آج تک ہمارے نظام میں گھر اور سماج کے درمیان فاصلے حائل ہیں۔ نئے قومی درسیات کے خاکے پر مبنی نصاب اور درسی کتابیں اسی بنیادی خیال پر عمل آوری کی ایک کوشش ہے۔ اس کوشش میں مختلف مضامین کو ایک دوسرے سے الگ رکھنے اور رٹ کر پڑھنے کے طریقۂ کار کی حوصلہ شکنی بھی شامل ہے۔ ہمیں امید ہے کہ ان اقدامات سے قومی تعلیمی پالیسی 1986 میں مذکور ’تعلیم کے طفل مرکوز نظام‘ کی طرف مزید پیش رفت ہوگی۔

اس کوشش کی کامیابی کا انحصار اس پر ہے کہ اسکولوں کے پرنسپل اور اساتذہ بچوں میں اپنے تاثرات خود ظاہر کرنے اور ذہنی سرگرمیوں اور سوالوں کے ذریعے سیکھنے کی ہمّت افزائی کریں۔ ہمیں یہ ضرور تسلیم کرنا چاہیے کہ بچوں کو اگر موقع، وقت اور آزادی دی جائے تو وہ بڑوں سے حاصل شدہ معلومات سے وابستہ ہوکر، نئی معلومات مرتب کرتے ہیں۔ آموزش کے دوسرے ذرائع اور محل وقوع کو نظر انداز کرنے کے بنیادی اسباب میں سے ایک اہم سبب مجوزہ درسی کتاب کو امتحان کے لیے واحد ذریعہ بنانا ہے۔ بچّوں کے اندر تخلیقی صلاحیت اور پیش قدمی کے رجحان کو فروغ دینا اسی وقت ممکن ہے جب ہم آموزشی عمل میں بچّوں کو بحیثیت شریک کار قبول کریں اور اُن سے اسی طرح پیش آئیں۔ انھیں محض مقررہ معلومات کا پابند نہ سمجھیں۔

یہ مقاصد اسکول کے معمولات اور طریقۂ کار میں معقول تبدیلی کا مطالبہ کرتے ہیں۔ روزمرہ نظام الاوقات (Time-Table) میں لچیلا پن اُسی قدر ضروری ہے جتنی کہ سالانہ کیلنڈر کے نفاذ میں سخت محنت کی تاکہ مطلوبہ ایّام کو حقیقتاً تدریس کے لیے وقف کیا جاسکے۔ تدریس اور اندازۂ قدر کے طریقوں سے بھی اس امر کا تعین ہوگا کہ یہ درسی کتاب، بچوں میں ذہنی تناؤ اور اکتاہٹ کا ذریعہ بننے کے بجائے ان کی اسکولی زندگی کو خوش گوار بنانے میں کس حد تک مؤثر ثابت ہوتی ہے۔ نصابی بوجھ کے مسئلے کو حل کرنے کے لیے نصاب سازوں نے مختلف سطحوں پر معلومات کی تشکیلِ نو اور اسے نیا رخ دینے کی غرض سے بچوں کی نفسیات اور تدریس کے لیے دستیاب وقت پر زیادہ سنجیدگی کے ساتھ توجہ دی ہے۔ اس مخلصانہ کوشش کو مزید بہتر بنانے کے لیے یہ درسی کتاب سوچنے اور محسوس کرنے کی تربیت، چھوٹے گروپوں میں بحث ومباحثہ کرنے اور عملاً انجام دی جانے والی سرگرمیوں کو زیادہ اوّلیت دیتی ہے۔

این سی ای آر ٹی اس کتاب کے لیے تشکیل دی جانے والی ’’کمیٹی برائے درسی کتب‘‘ کی مخلصانہ کوششوں کی شکرگزار ہے۔ کونسل سائنس اور ریاضی کی مشاورتی کمیٹی کے چیئر پرسن پروفیسر جے۔ وی۔ نارلیکر اور اس کتاب کے خصوصی صلاح کار ایچ۔ کے۔ دیوان کی ممنون ہے۔ اس درسی کتاب کی تیاری میں جن اساتذہ نے حصّہ لیا، ہم ان کے متعلقہ اداروں کے بھی شکرگزار ہیں۔ ہم ان سب ہی اداروں اور تنظیموں

کا بھی شکریہ ادا کرتے ہیں جنھوں نے اپنے وسائل، مآخذ اور عملے کی فراہمی میں فراخ دلی کا ثبوت دیا۔ ہم وزارت برائے فروغ انسانی وسائل کے شعبہ برائے ثانوی اور اعلیٰ ثانوی تعلیم کی جانب سے پروفیسر مرنال مری اور پروفیسر جی۔ پی۔ دیش پانڈے کی سربراہی میں تشکیل شدہ نگراں کمیٹی (مانیٹرنگ کمیٹی) کے اراکین کا بھی خصوصی شکریہ ادا کرتے ہیں جنھوں نے اپنا قیمتی وقت اور تعاون ہمیں دیا۔ ہم اس نصابی کتاب کے اردو ترجمے کی ذمے داری بخوبی انجام دینے کے لیے جامعہ ملیہ اسلامیہ نئی دہلی کے شکرگزار ہیں، خاص طور پر جامعہ ملیہ اسلامیہ کے وائس چانسلر پروفیسر مشیر الحسن اور محترمہ رخشندہ جلیل کے ممنون اور شکرگزار ہیں جنھوں نے مرکز برائے جواہر لعل نہرو اسٹڈیز، جامعہ ملیہ اسلامیہ کے آؤٹ ریچ پروگرام کے ذریعے اس عمل میں رابطہ کار کے فرائض بخوبی انجام دیے۔ کونسل اس کتاب کے اردو ترجمے کے لیے ڈاکٹر روحی فاطمہ کی شکر گزار ہے۔ باضابطہ اصلاح اور اپنی اشاعت کے معیار کو مسلسل بہتر بنانے کے مقصد کی پابند ایک تنظیم کے طور پر این سی ای آر ٹی تمام مشوروں اور آرا کا خیر مقدم کرتی ہے تاکہ کتاب کو مزید غور و فکر کے بعد اور زیادہ کارآمد اور بامعنی بنایا جاسکے۔

نئی دہلی
20 نومبر 2006

ڈائریکٹر
نیشنل کونسل آف ایجوکیشنل ریسرچ اینڈ ٹریننگ

# دیباچہ

قومی خاکہٗ درسیات 2005 (NCF) نے بچوں میں ریاضیاتی صلاحیتوں کی نشو ونما کرنے کے مشورے دیے ہیں۔انھوں نے اس طرف اشارہ کیا ہے کہ ریاضیاتی آموزش کا مقصد صرف مقداری حساب کتاب ہی نہیں ہے بلکہ بچوں میں ان صلاحیتوں کو پیدا کرنا ہے جو انھیں اس قابل بنا سکیں کہ وہ اس دنیا سے اپنے تعلق کو نئے سرے سے دیکھ سکیں۔ NCF 2005 بچوں کی منطقی صلاحیتوں کو بڑھاوا دینے پر زور دیتا ہے اور اس کے ساتھ ساتھ بچوں میں فضا اور فضائی تحویل کو سمجھنے اور ان دونوں کو تصور کرنے کی صلاحیتوں پر بھی زور دیتا ہے۔ یہ اس بات کی سفارش کرتا ہے کہ ریاضی کو ٹھوس اور حقیقی تجربات اور ماڈل کی مدد سے اپنی شروعات کرتے ہوئے تصورات کی جانب آہستہ آہستہ بڑھانا چاہیے۔ پیٹرن کے ادراک اور تعمیم کی صلاحیت دراصل مضمون کی تجریری اور منطقی نوعیت کو سمجھنے کے لیے ایک اہم قدم ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ ابتدائی اور ثانوی سطح کے زیادہ تر بچے ریاضی سے خائف ہوتے ہیں اور یہ ڈر ان کے اسکول چھوڑ دینے کی ایک بڑی وجہ بنتا ہے۔قومی خاکہٗ درسیات نے اس مسئلہ کا ذکر کیا ہے اور اس بات پر زور دیا ہے کہ ایک ایسا پروگرام وضع کیا جائے جو برمحل اور پر معنی ہو۔تدریس ریاضی کی تجریری تشکیل کی ضرورت بچوں میں تصورات کی کھوج نیز مسائل کے دل کو اپنے آپ ڈھونڈنے کا موقع فراہم کرتی ہے۔ یہی قومی خاکہٗ درسیات کے ذریعے اجاگر کیے گئے اصولوں کے سنگ بنیاد ہے۔

ہم نے چھٹی جماعت میں ایک پروگرام کی تشکیل کا عمل شروع کیا جو بچوں کو ریاضی کی تجریری نوعیت کو سمجھنے میں مددگار رہوگا۔اس سے بچوں میں اپنے تصورات کو تعمیر کرنے کی صلاحیت میں اضافہ ہوگا قومی خاکہٗ درسیات کی تجویز کے مطابق ہی اس بات کی کوشش کی گئی ہے کہ بچوں کو مسائل کے حل ڈھونڈنے کے مختلف طریقوں کا موقع ملے اور الگ الگ حکمت عملیوں کی نشو ونما کے لیے بچوں کو بڑھاوا دیا جائے۔اس میں اس بات پر زور دیا گیا ہے کہ ریاضی کے بنیادی اصولوں پر قائم رہا جائے اور الگوریم کو رٹنے اور شارٹ کٹس سے بچا جائے۔

ساتویں جماعت کی درسی کتاب میں بھی اسی جذبہ کو بحال رکھا گیا ہے۔اور ایسی زبان کا استعمال کرنے کی کوشش کی گئی ہے جس کو بچے اپنے آپ آسانی سے پڑھ اور سمجھ سکیں۔اس کتاب کو گروپ میں یا انفرادی طور پر پڑھا جا سکتا ہے اور کچھ موقعوں پر ہی استاد کی مدد در کار رہوگی۔ہم نے اس میں بہت سی مثالوں کو شامل کیا ہے۔اور اس بات کے مواقع بچوں کو دیتے ہیں کہ وہ اپنے آپ مسائل بنا کر پیش کر سکیں۔کتاب کی ظاہری ہیئت کو خوشنما رکھنے کے لیے اس میں بہت سی تصاویر کو شامل کیا گیا ہے۔اس کتاب میں اس بات کی بھی کوشش کی گئی ہے کہ بچوں کے ذہن کو مصروف رکھا جائے اور تصورات کو استعمال کرنے کے مواقع بھی فراہم کیے جائیں۔یہ کتاب بچوں میں ان کے اپنے خیالات کو بڑھاوا دیتی ہے اور فضول کی پیچیدہ اصطلاحات اور اعداد سے دماغ پچّی سے نجات دیتی ہے۔

ہم توقع کرتے ہیں کہ یہ کتاب ریاضی سیکھنے میں بچوں کی بھرپور مدد کرے گی۔اور ہم یہ بھی توقع کرتے ہیں کہ بچوں میں ریاضی کے حس

اور قوت کی تفہیم کی صلاحیت پیدا ہو سکے گی۔ یہ بھی توقع کی جاتی ہے کہ ان تصورات اور مہارتوں کو کر سکیں گے جو بچوں نے ابتدائی اسکول میں سیکھے ہیں۔ہم پر امید ہیں کہ ریاضی کی بنیاد پائیدار ہو گی۔ جس سے بچے اپنے مستقبل کی تعلیم اور اپنی روزمرہ کی زندگی میں کامیابی کے ساتھ آگے بڑھ سکیں گے۔

اس درسی کتاب کو تیار کرنے میں بہت سے اساتذہ شامل رہے ہیں۔ جنھوں نے اپنے تجربات کی بنیاد پر اسکول میں بچوں کے نقطۂ نظر کو سامنے رکھا ہے۔ ان میں وہ لوگ بھی شامل تھے جنھوں نے ریاضی کو سیکھنے سے متعلق تحقیق کا کام انجام دیا اور برسوں سے ریاضی کی درسی کتابیں رکھ رہے ہیں۔ اس ٹیم نے اس بات کی بھرپور کوشش کی ہے کہ بچوں کے ذہن سے ریاضی کے خوف کو مٹایا جا سکے اور ریاضی کو روزمرہ کے معمول یہاں تک کہ اسکول کے بعد کے اوقات میں بھی بچے اس کو استعمال کر سکیں۔ اس کے لیے ہم نے ملک بھر کے اسکولوں کے دوسرے اساتذہ کے ساتھ کئی بار مدلل مباحثے منعقد کیے اور نظر ثانی کے عمل کو اپنایا۔ ٹیم نے اس بات کی پوری کوشش کی کہ سبھی لوگوں کی رائے کو اس میں جگہ دی جائے۔

میں پروفیسر کرشن کمار، ڈائریکٹر، این سی ای آر ٹی، پروفیسر، جی۔ رویندرا، جوائنٹ ڈائریکٹر، این سی ای آر ٹی اور پروفیسر حکم سنگھ، صدر، ڈی ای ایس ایم کا ممنون ہوں کہ انھوں نے اس فریضے کو پورا کرنے کے لیے مجھے اور میری ٹیم کو موقع فراہم کیا۔ میں پروفیسر جے۔ وی۔ نارلیکر، چیئر پرسن مشاورتی کمیٹی برائے سائنس وریاضی کے مشوروں کا شکر گزار ہوں۔ میں ٹیم کے سبھی ارکان کا مدد کرنے کے لیے شکر گزار ہوں۔ میں ان سبھی جس میں این سی ای آر ٹی کے پروفیسر ایس۔ کے۔ سنگھ گوتم، ڈاکٹر وی۔ پی۔ سنگھ اور ڈاکٹر آشوتوش کے۔ وازالوار شامل ہیں جنھوں نے اپنی کوششوں سے اس کام کو ممکن بنایا۔ آخر میں میں این سی ای آر ٹی کے پبلی کیشن ڈپارٹمنٹ کا بھی شکریہ ادا کروں گا۔ جنھوں نے ہماری مدد کی اور مشوروں سے نوازا نیز ودھیا بھون کا بھی میں شکر گزار ہوں، انھوں نے کتاب کی تیاری میں تعاون دیا۔

کسی بھی مواد کو بہتر کرنے کا عمل ہمیشہ چلتا رہتا ہے اس کتاب کے سلسلے میں آپ کی رائے اور مشوروں کا ہم خیر مقدم کریں گے۔

ڈاکٹر ایچ۔ کے۔ دیوان

خصوصی صلاح کار

# کمیٹی برائے درسی کتب

چیئرپرسن، مشاورتی کمیٹی برائے سائنس وریاضی

جے۔وی نارلیکر، ایمرٹس پروفیسر، انٹریونیورسٹی سینٹر فار اسٹرونومی اینڈ اسٹروفزکس (IUCCA) گنیش کھنڈ، پونہ یونیورسٹی، پونے، مہاراشٹر

## خصوصی صلاح کار

ایچ۔کے۔دیوان، ودھیا بھون سوسائٹی، اُودے پور، راجستھان

## چیف کوارڈی نیٹر

حکم سنگھ، پروفیسر اور صدر، ڈی ای ایس ایم، این سی ای آر ٹی، نئی دہلی

## اراکین

انجلی گپتا، ودھیا بھون پبلک اسکول، اُودے پور، راجستھان

اونتیکا دام، ٹی جی ٹی، سی آئی ای ایکسپریمینٹل پبلک اسکول، ڈپارٹمنٹ آف ایجوکیشن، دہلی

ایچ۔سی۔پردھان، پروفیسر، ہومی بھابھا سینٹر فار سائنس ایجوکیشن، ٹی آئی ایف آر، ممبئی، مہارشٹر

مھندر شنکر، لیکچرر (ایس۔جی۔) (ریٹائرڈ)، این سی ای آر ٹی، نئی دہلی

میناشریمالی، ٹیچر، ودھیا بھون سینئر سیکنڈری اسکول، اُودے پور، راجستھان

آر۔ آتھرامان، میتھمیٹکس ایجوکیشن کنسلٹینٹ، ٹی آئی میٹرک ہائر سیکنڈری اسکول اورائے ایم ٹی آئی، چنئی، تمل ناڈو

ایس۔کے۔ایس۔گوتم، پروفیسر، ڈی ای ایس ایم، این سی ای آر ٹی، نئی دہلی

شردھا اگروال، پی جی ٹی، سرپدمپت سنگھانیا ایجوکیشن سینٹر، کانپور، اترپردیش

سریجا تاداس، سینئر لیکچرر (ریاضی)، ایس سی ای آر ٹی، نئی دہلی

وی۔پی۔سنگھ، ریڈر، ڈی ای ایس ایم، این سی ای آر ٹی، نئی دہلی

## ممبر کوارڈی نیٹر

آشوتوش کے۔وزالوار، ریڈر، ڈی ای ایس ایم، این سی ای آر ٹی، نئی دہلی

# اظہار تشکر

کونسل مندرجہ ذیل افراد کے بیش قیمت تعاون پر ان کی نہایت ممنون ومشکور ہے — محترمہ نیرو پما ساہنی، ٹی جی ٹی ،مہابیر دگمبر جین سینئر سیکنڈری اسکول، جے پور؛ ڈاکٹر روحی فاطمہ، ٹی جی ٹی ،جامعہ مڈل اسکول، نئی دہلی؛ محترمہ دیپتی ماتھر، ٹی جی ٹی ، مدرس انٹرنیشنل اسکول، نئی دہلی؛ محترم کے۔ بالاجی، ٹی جی ٹی ،کیندریہ ودھیالہ، دونی ملائی، کرناٹکا؛ محترم امت بجاج، ٹی جی ٹی ،سی آر پی ایف پبلک اسکول، دہلی؛ محترمہ اوم لتا سنگھ، ٹی جی ٹی ، پرزینٹیشن کونونیٹ سینئر سیکنڈری اسکول، دہلی؛ محترم ناگیش ایس۔ مونے، ٹی جی ٹی ، دراوڑ ہائی اسکول، وئی، مہاراشٹر؛ محترم گورکھ ناتھ شرما، پی جی ٹی ، جواہر نوودے ودھیالیہ، میسرا، رانچی، جھارکھنڈ؛ محترم اجے کمار سنگھ، ٹی جی ٹی ، رام جس سینئر سیکنڈری اسکول، نمبر 3، دہلی؛ محترم راگنی سبرامنیم، ٹی جی ٹی ، ایس آر ڈی ایف وویکا نند ودھیالیہ، چنئی، تامل ناڈو؛ محترم رجکمار دھون، پی جی ٹی ، گیتا سینئر سیکنڈری اسکول نمبر 2، دہلی؛ ڈاکٹر سنجے مدھگل، لیکچرر، سی آئی ای ٹی، این سی آر ٹی، نئی دہلی؛ ڈاکٹر سشما جے رتھ، ریڈر، ڈی ڈبلیو ایس، این سی ای آر ٹی، نئی دہلی؛ ڈاکٹر مونا یادو، لیکچرر، ڈی ڈبلیو ایس، این سی ای آر ٹی، نئی دہلی۔

کونسل مواد کی اصلاح کے لیے ڈاکٹر رام اوتار (ریٹائرڈ پروفیسر ، این سی ای آر ٹی) کنسلٹینٹ، ڈی ایس ایم، این سی ای آر ٹی، نئی دہلی اور ڈاکٹر آر۔ پی۔ موریہ، ریڈر، ڈی ای ایس ایم، این سی ای آر ٹی، نئی دہلی کا ان کے مشوروں اور تبصروں کے لیے شکریہ ادا کرتی ہے۔

کونسل ودھیا بھون سوسائٹی اُودے پور اور اس کے عملے کی اس کتاب کی تیاری کے لیے اُودے پور میں ورک شاپ منعقد کرانے کے لیے اور ڈائرکٹر، سینٹر فار سائنس ایجوکیشن اینڈ کمیونیکیشن (سی ایس ای سی)، دہلی یونیورسٹی کا لائبریری کی سہولیات فراہم کرنے کے لیے ان کی ممنون ومشکور ہے۔

کونسل اکیڈمک اور انتظامی تعاون کے لیے پروفیسر حکم سنگھ، صدر، ڈی ای ایس ایم، این سی ای آر ٹی، نئی دہلی کا شکریہ ادا کرتی ہے۔ ساتھ ہی اے پی سی۔ آفس اور ڈی ای ایس ایم، این سی ای آر ٹی کی انتظامیہ اور پبلی کیشن ڈپارٹمنٹ این سی ای آر ٹی کی ممنون ومشکور ہے۔

# اساتذہ کے لیے نوٹ

یہ کتاب چھٹی جماعت میں جو کچھ شروع کیا گیا تھا، اس کے عمل اور استواری کا ایک سلسلہ ہے۔ ہم نے قومی خاکۂ درسیات 2005 میں بیان کی گئی خاص باتوں کو جانا تھا۔ ان میں بچوں میں اہلیتوں کے وسیع تر فروغ، پیچیدہ شماروں سے احتراز، سمجھنے کے لیے حساب وشمار کے قواعد کے استعمال کے ذریعہ مسائل کے حل اور سوجھ بوجھ کی بنیادی ساخت کی تعمیر کے سلسلے میں ریاضی سے متعلق امور شامل ہیں۔ بچوں کے ذہن میں ریاضیاتی تصور اور خیالات نہ تو بتانے کے ذریعہ اور نہ ہی محض توضیح کے ذریعہ ابھرتے ہیں۔ بچوں کے لیے ریاضی سیکھنے، اس میں پُر اعتماد ہونے اور بنیادی تصورات کو سمجھنے کے لیے انھیں تصورات کی اپنی خود کی اساسی ساخت کو فروغ دیے جانے کی ضرورت ہوتی ہے۔ یہ موقع کلاس روم میں ہی فراہم ہوگا جہاں بچے تصورات اور خیالات سے بحث کرسکیں گے، مسائل کا حل تلاش کرسکیں گے، نئے مسائل مرتب کرسکیں گے اور مسائل کو حل کرنے کے اپنے خود کے طریقے ہی نہیں دریافت کریں گے بلکہ زبان جن کا وہ استعمال کرسکتے اور سمجھ سکتے ہیں اپنی خود کی تعریف وتوضیح کرسکیں گے۔ یہ تعریفیں کوئی ضروری نہیں کہ عمومی اور معیار کے لحاظ سے مکمل ہوں۔

یہ اہم ہے کہ ریاضی کی کلاس میں درسی کتاب اور دیگر حوالوں کو سمجھنے کے ساتھ پڑھنے میں بچوں کو مدد فراہم کی جائے۔ عام طور پر مواد کو پڑھنا ریاضی کی آموزش سے متعلق نہیں سمجھا جاتا لیکن ریاضی کی مزید آموزش میں بچوں کو متن ذہن نشین کرنا ہوگا۔ ریاضی کے متن میں وہ زبان استعمال ہوتی ہے، جس میں اختصار ہوتا ہے۔ اس میں اختصار اور علامات کا استعمال کرنے، منطقی دلائل کی تعمیل اور مخصوص عوامل اور بندشوں کو قائم رکھنے کی ضرورت کا اعتراف کیا جاتا ہے۔ بچوں کو ریاضیاتی بیانوں کو عام بیانوں میں منتقل کرنے کی مشق کی ضرورت ہے تاکہ وہ اپنے خیالات الفاظ میں ظاہر کرسکیں اور اسی طرح عام بیانوں کو ریاضیاتی بیانوں میں منتقل کرنے کی ضرورت ہوتی ہے۔ الفاظ میں زبان کا استعمال کرنے کے ساتھ ساتھ ریاضیاتی بیانوں کے ذریعہ ترسیل کرنے میں بھی اہلیت پیدا کرنے میں ہمیں بچوں کو پراعتماد بنائے جانے کی ضرورت ہے۔

اپر پرائمری مرحلے میں ریاضی ایک بڑا چیلنج ہے اور بچوں کے تجربے اور ماحول سے قریب تر اور تجریدی ہونے کے لحاظ سے اسے دوہرا کردار انجام دینے کی ضرورت ہوتی ہے۔ بچے اکثر محض تصورات کی اصطلاح میں کام کرنے کے اہل نہیں ہوتے۔ معنی کی دریافت کے لیے ان کے تجربے سے جڑے سیاق وسباق اور ماڈل کی سہولت فراہم کیے جانے کی ضرورت ہے۔ یہ مرحلہ ہمارے سامنے سیاق وسباق استعمال کرتے وقت بچوں کو مصروف رکھنے کا ہی نہیں بلکہ دھیرے دھیرے ایسے انحصار سے انھیں دور رکھنے کا چیلنج پیش کرتا ہے۔ لہٰذا یہاں بچوں کو سیاقی صورت حال میں استعمال کیے جانے والے اصولوں کی شناخت کرنے کا اہل بنانا چاہیے وہیں انھیں سیاق وسباق تک ہی نہ تو منحصر ہونا چاہیے اور نہ ہی محدود۔ جیسے جیسے ہم مڈل اسکول کی طرف پیش رفت کرتے ہیں، بچوں سے ہمیں زیادہ مطلوب ہوگا کہ وہ اسے انجام دینے کے اہل بنیں۔

ریاضی کو سیکھنا حلوں یا طریقوں کو یاد رکھنے کے بارے میں نہیں بلکہ یہ جاننا ہے کہ کس طرح مسائل کو حل کیا جائے۔ مسائل کو حل کرنے کی

حکمت عملی طلبا کو عقلی طور پر سوچنے کے مواقع فراہم کرتی ہے، طریقوں کے ساتھ ساتھ عمل کاری کو سمجھنے اور تخلیق کرنے کا انھیں اہل بناتی ہے، وہ انفعالی قبول کنندگان کے بجائے نئے علم کی تعمیر میں انھیں سرگرم شرکا بناتی ہے۔ طلبا کے ذریعہ مسئلے کی شناخت اور تعریف کیے جانے، ممکنہ حلوں کو منتخب کرنے یا وضع کیے جانے اور اقدامات (اگر ضروری ہوں) تو نظر ثانی یا وضع نو کیے جانے کی ضرورت ہوتی ہے۔ استاد کے کردار میں ایک رہنما اور سہولت کار کے طور پر ترمیم ہو جاتی ہے۔ طلبا کو متعدد مسائل حل کرنے والے تجربات کے ساتھ ساتھ سرگرمیوں اور چیلنج پیش کرنے والے مسائل فراہم کیے جانے کی ضرورت ہوتی ہے۔

کسی مسئلے کو پیش کرنے پر بچوں کو پہلے اسے قابل فہم عبارت میں پیش کیے جانے کی ضرورت ہوتی ہے۔ انھیں اس کی کوشش کے لیے مطلوبہ علم کی شناخت کیے جانے اور اس کے لیے ایک ماڈل بنائے جانے کی ضرورت ہوتی ہے۔ یہ ماڈل ایک توضیحی مثال یا صورت حال کی تخلیق کرنے کی شکل میں تیار کیا جا سکتا ہے۔ ہمیں یہ یاد رکھنا ہوگا کہ جیومیٹری میں مسائل کے حل کے مدارج کی تخلیق کے لیے جو شکلیں بنائی جاتی ہیں وہ بھی مثالی بے ابعاد شکل کے ماڈل ہیں۔ تاہم یہ ڈائیگرام حساب اور الجبرا میں مسائل حل کرنے کی کوشش کے لیے مطلوبہ ٹھوس ماڈلوں کی نسبت زیادہ تجریدی ہوتا ہے۔ مسائل کو ٹکڑوں میں حل کرنے کے ذریعہ موزوں ماڈلوں کی تعمیر کی اہلیت کو فروغ دینے اور ان کی اپنی حکمت عملیوں کے ارتقا میں بچوں کی مدد کرنا اور مسائل کا تجزیہ نہایت اہم ہے۔ مسائل کو حل کرنے میں اسے حساب وشمار کے قواعد کو لاگو کرنے کے ذریعہ بدلنا چاہیے۔

اساتذہ سے یہ توقع کی جاتی ہے کہ وہ تعارفی آموزش کی حوصلہ افزائی کریں گے۔ بچے ایک دوسرے سے بامقصد بات چیت کرنے کے ذریعہ بہت کچھ سیکھ سکتے ہیں۔ ہماری جماعت میں طلبا کے اندر ایک دوسرے سے مسابقت کرنے کے بجائے ایک دوسرے سے سیکھنے کی خواہش اور اہلیت کو فروغ دینے کی ضرورت ہے۔ بات چیت شور نہیں ہے اور مشاورت حکمیہ دینا نہیں ہے۔ ایسا ممکنہ جماعت کا گروپ بنانا ایک چیلنج ہے جو ایک دوسرے کو زیادہ سے زیادہ فائدہ پہنچانے اور جس میں ہر بچہ گروپ کی آموزش میں اشتراک کرے۔ اساتذہ کو یہ تسلیم کرنا چاہیے کہ مختلف بچے اور مختلف گروپ الگ الگ حکمت عملیوں کا استعمال کریں گے۔ ان میں سے بعض حکمت عملیاں زیادہ موثر دکھائی دیں گی اور بعض اتنی موثر نہیں ہوں گی۔ ہر ایک گروپ کے ذریعہ تیار ماڈل پر ان کا اثر دکھائی دے گا اور استعمال کی گئی سوچ کی عمل کاری بھی ظاہر ہوگی۔ بہتر حکمت عملی کی شناخت کرنا یا غلط حکمت عملیوں کو خوار کرنا مناسب نہیں ہے۔ ہمیں سبھی اپنائی جانے والی حکمت عملیوں کو ریکارڈ کیے جانے اور ان کا تجزیہ کیے جانے کی ضرورت ہے۔ اس کے دوران یہ بحث کرنا اہم ہے کہ کیوں بعض حکمت عملیاں کامیاب نہیں ہیں۔ گروپ کے طور پر کلاس غیر موثر اور ناکام حکمت عملیوں میں بہتری اور ان میں اصلاح کر سکتی ہے۔ اس سے یہ دلالت ہوتی ہے کہ ہمیں ہر حکمت عملی کو پورا کیے جانے کی ضرورت ہے نہ کہ بعض غلط یا ناموزوں کو خارج کیے جانے کی۔ مختلف حکمت عملیوں کو ظاہر کرنے سے ریاضیاتی سمجھ اور ایک دوسرے سے سیکھنے کی اہلیت اور بھی گہری ہوگی۔ اس سے کوئی کیا کر رہا ہے اس سے آگاہ ہونے کی اہمیت کو سمجھنے میں بھی مدد ملے گی۔

سمجھنے کے لیے پوچھ تاچھ ایک فطری طریقہ ہے جس کے ذریعہ طلبا علم حاصل کرتے ہیں اور اس کی تعمیر کرتے ہیں۔ عمل اتفاقی مشاہدات

کے ساتھ بھی شروع ہوسکتا ہے اور علم کی تخلیق اور حصول کے طور پر ختم ہوسکتا ہے۔ سوال کرنے کی تحقیقی، کھلے پن، سیاقی غلطی کی تفتیش کی مختلف شکلوں کے لیے مثالیں فراہم کرنے کے ذریعہ اس میں مدد دی جاسکتی ہے۔ طلبا چیلنج پیش کرنے والی تفتیش کے لیے کسی طرح کی رکاوٹ دور کیے جانے کی ضرورت ہوتی ہے۔ مثال کے لیے جیومیٹری میں ٹھوس کے لیے موزوں نٹ، شیڈ و یلے کے ذریعہ ٹھوس کو متصور کرنے، قاشیں بنانے اور ارتفاع وغیرہ کے ساتھ تجربہ کرنے جیسی چیزیں انجام دی جاسکتی ہیں۔ حساب میں رقوم کے مجموعے وغیرہ میں شامل جز میں رشتوں کو تلاش کرنے، رشتوں کی تقسیم کرنے، طریقوں اور اصولوں کو دریافت کرنے اور اس کے بعد الجبری رشتوں کو وضع کرنے میں حوصلہ افزائی کرسکتے ہیں۔

بچوں کو منطقی دلائل اپنانے اور پیش کیے گئے دلائل میں رخنہ دریافت کرنے کا موقع دیے جانے کی ضرورت ہے۔ اس سے وہ مسائل کے حل کے مدارج (پروف) کی ضروریات کو سمجھ سکیں گے۔ اس مرحلے میں جیومیٹری جیسے موضوعات ایک رسمی مرحلے میں داخل ہونے کو آمادہ ہوتے ہیں۔ وہ سرگرمیاں فراہم کی جائیں جو آسان جیومیٹرک آلات کا استعمال کرتے ہوئے جیومیٹریہ فرہنگ اور رشتوں کو دریافت کرتے وقت تخلیقی قوت اور تخیل کی مشق کے لیے طلبا کی حوصلہ افزائی کریں، ریاضی کو پرانے اور پیچیدہ مسائل کا جواب دریافت کرنے کے عمل کے بجائے جستجو، تلاش اور تخلیق کے مضمون کے طور پر ابھرنا ہے۔ مسائل کو حل کرنے کے لیے متعدد مختلف طریقوں کو دریافت کرنے میں بچوں کو حوصلہ افزائی کیے جانے کی ضرورت ہے۔ انھیں متعدد متبادل حساب کے قواعد اور حکمت عملیوں کے استعمال کو قبول کرنے کی ضرورت ہے جو مسئلے کو حل کرنے میں اپنائی جاسکتی ہے۔ سالم اعداد، کسر، اعشاریہ، تشاکل جیسے موضوعات یہاں انھیں پچھلی کلاسوں میں مطالعہ کیے گئے ان کے ابتدائی حصوں کے ساتھ جوڑ کر پیش کیے گئے ہیں۔ ایک دوسرے کے ساتھ ابواب کو مربوط کرنے کی کوشش کی گئی ہے اور ابتدائی ابواب میں جو تصورات متعارف کیے گئے ہیں انھیں بعد کے ابواب میں ارتقائے تصور کے لیے استعمال کیا گیا ہے۔ منفی عدد سالم، ناطق اعداد، جیومیٹری میں تفتیشی بیانات اور ٹھوس شکلوں کو متصور کرنے کے تصورات کو زیادہ وقت دیجیے۔

ہمیں امید ہے کہ یہ کتاب طلبا کو ریاضی سے استفادہ کرنے میں مدد کرے گی اور متعارف تصورات میں پُر اعتماد بنائے گی۔ ہم انفرادی اور اجتماعی طور پر سوچنے کے مواقع پیدا کرنے کی سفارش کرنا چاہتے ہیں۔ گروپ میں بحث ومباحثے کی ضرورت ریاضی کی جماعت کی ایک باقاعدہ خصوصیت بن چکی ہے۔ اس بنا پر ریاضی میں طلبا پُر اعتماد بنتے ہیں اور ریاضی کا خوف ایک دور کی بات ہے ہم اس کتاب کے سلسلے میں آپ کے تبصروں اور تجاویز کی توقع کریں گے اور یہ امید کریں گے کہ آپ ان دلچسپ مشقوں، سرگرمیوں اور کاموں کو ارسال کریں گے جو اس کی تدریس کے دوران جو آپ کے ذہن میں آئیں گی، اسے مستقبل کی اشاعت میں شامل کیا جائے گا۔

# بھارت کا آئین

## تمہید

ہَم بھارت کے عوام متانت وسنجیدگی سے عزم کرتے ہیں کہ بَھارَت کو ایک مقتَدر، سمَاج وَادی، غیَر مَذہَبی عَوامی جَمہُوریَہ بنائیں اور اس کے تمام شہریوں کے لیے حاصل کریں۔

انصاف     سماجی، معاشی اور سیاسی

آزادی     خیال، اظہار، عقیدہ، دین اور عبادت

مساوات     بہ اعتبار حیثیت اور موقع اور ان سب میں

اخوت کو ترقی دیں جس سے فرد کی عظمت اور قوم کے اتحاد اور سالمیت کا تیقن ہو۔

اپنی آئین ساز اسمبلی میں آج چھبیس نومبر 1949ء کو یہ آئین ذریعہ ہذا اختیار کرتے ہیں، وضع کرتے ہیں اور اپنے آپ پر نافذ کرتے ہیں۔

---

1۔ آئینی (بیالیسویں ترمیم) ایکٹ، 1976 کے سیکشن 2 کے ذریعہ ''مقتدر عوامی جمہوریہ'' کی جگہ (3-1-1977 سے)

2۔ آئینی (بیالیسویں ترمیم) ایکٹ، 1976 کے سیکشن 2 کے ذریعہ ''قوم کے اتحاد'' کی جگہ (3-1-1977 سے)

# فہرست


| | | |
|---|---|---|
| | پیش لفظ | *iii* |
| | دیبا چہ | *v* |
| باب 1 | صحیح اعداد | 1 |
| باب 2 | کسری اور اعشاریائی اعداد | 31 |
| باب 3 | اعداد و شمار کا استعمال | 59 |
| باب 4 | سادہ مساوات | 82 |
| باب 5 | خطوط اور زاویے | 101 |
| باب 6 | مثلث اور اس کی خصوصیات | 122 |
| باب 7 | مثلثوں کی مماثلت | 143 |
| باب 8 | مقداروں کا موازنہ | 165 |
| باب 9 | ناطق اعداد | 187 |
| باب 10 | عملی جیومیٹری | 206 |
| باب 11 | احاطہ اور رقبہ | 218 |
| باب 12 | الجبریائی عبارتیں | 245 |
| باب 13 | قوت نما اور قوت | 267 |
| باب 14 | تشاکل | 286 |
| باب 15 | ٹھوس اشکال کو متصور کرنا | 299 |
| | جوابات | 316 |

# بھارت کا آئین

حصہ III (دفعہ 12 سے 35)
(بعض شرائط، چند مستثنات اور واجب پابندیوں کے ساتھ)

## بنیادی حقوق

کے ذریعہ منظور شدہ

حق مساوات

- قانون کی نظر میں اور قوانین کا مساویانہ تحفظ
- مذہب، نسل، ذات، جنس یا مقام پیدائش کی بنا پر عوامی جگہوں پر مملکت کے زیر انتظام
- سرکاری ملازمت کے لیے مساوی موقع
- چھوت چھات اور خطابات کا خاتمہ

حق آزادی

- اظہار خیال، مجلس، انجمن، تحریک، بود و باش اور پیشے کا
- سزا کے جرم سے متعلق بعض تحفظات کا
- زندگی اور شخصی آزادی کے تحفظ کا
- 6 سے 14 سال کی عمر کے بچوں کے لیے مفت اور لازمی تعلیم کا
- گرفتاری اور نظر بندی سے متعلق بعض معاملات کے خلاف تحفظ کا

استحصال کے خلاف حق

- انسانوں کی تجارت اور جبری خدمت کی ممانعت کے لیے
- بچوں کو خطرناک کام پر مامور کرنے کی ممانعت کے لیے

مذہب کی آزادی کا حق

- آزادی ضمیر اور قبولِ مذہب اور اس کی پیروی اور تبلیغ
- مذہبی امور کے انتظام کی آزادی
- کسی خاص مذہب کے فروغ کے لیے ٹیکس ادا کرنے کی آزادی
- کلی طور سے مملکت کے زیر انتظام تعلیمی اداروں میں مذہبی تعلیم یا مذہبی عبادت کی آزادی

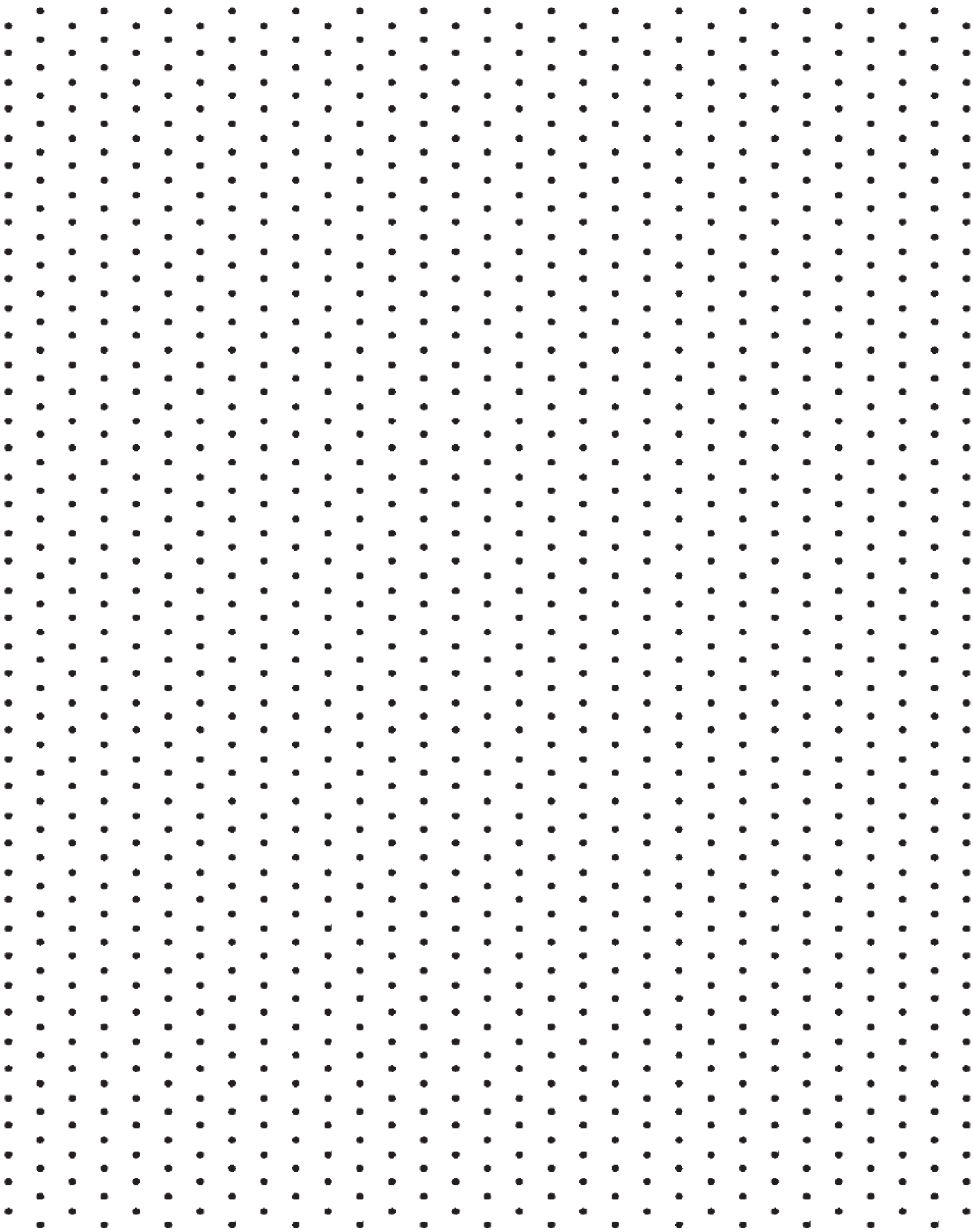
ثقافتی اور تعلیمی حقوق

- اقلیتوں کی اپنی زبان، رسم خط یا ثقافت کے مفادات کا تحفظ
- اقلیتوں کو اپنی پسند کے تعلیمی ادارے کے قیام اور ان کے انتظام کا حق

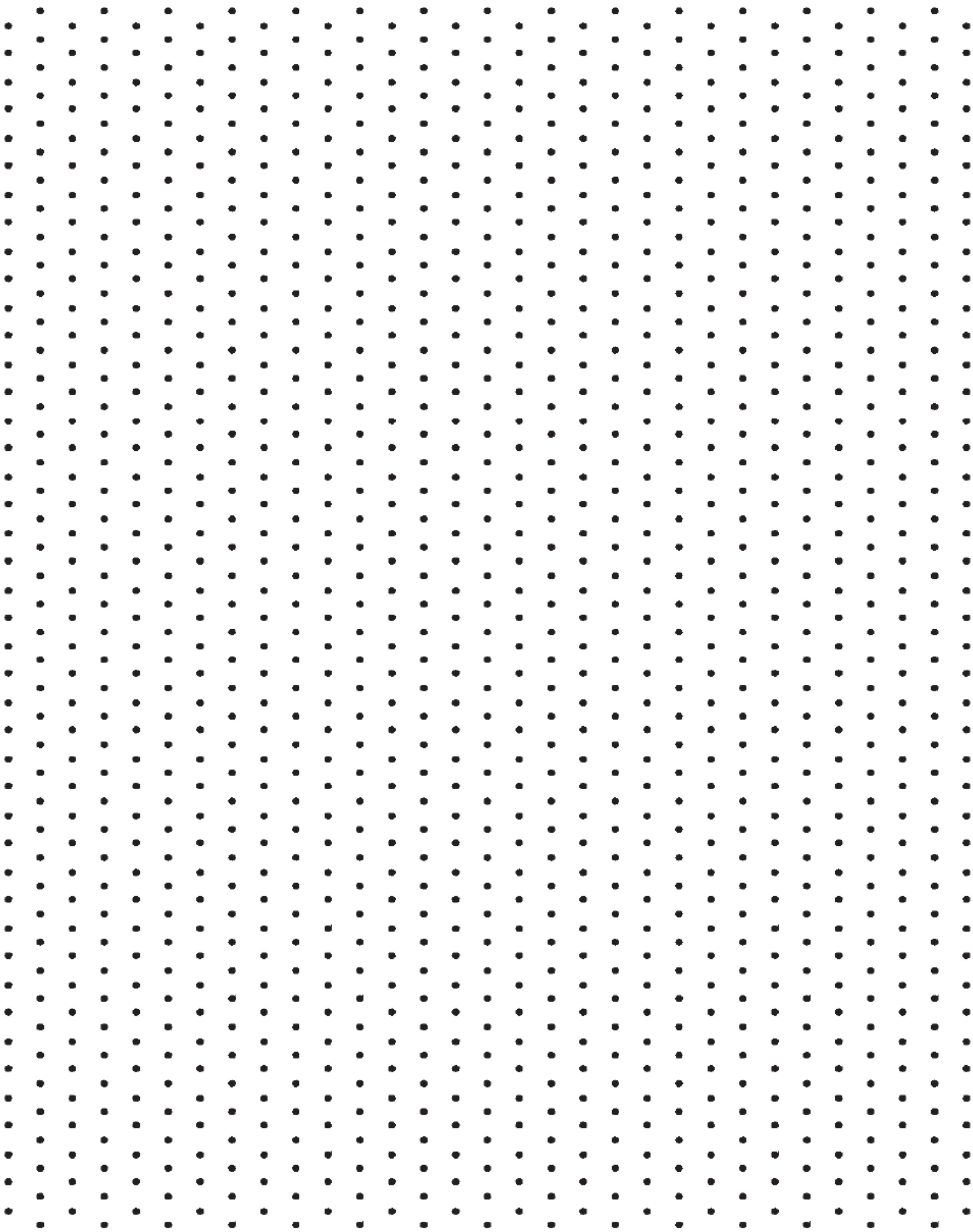
قانونی چارہ جوئی کا حق

- سپریم کورٹ یا کورٹ کی جانب سے ہدایات، احکام یا رٹ کے اجرا کو تبدیل کرانے کا حق

# آئی سومیٹرک ڈاٹ شیٹ



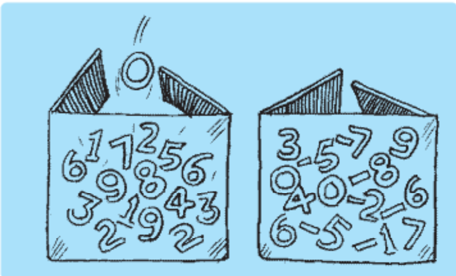
# آئی سومیٹرک ڈاٹ شیٹ



باب 1

# صحیح اعداد

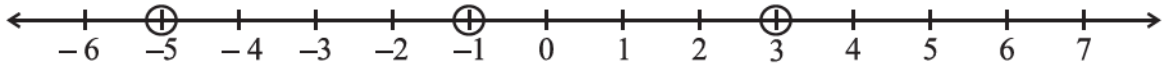
## 1.1 تعارف (Introduction)



ہم نے چھٹی کلاس میں مکمل اعداد اور صحیح اعداد کے بارے میں پڑھا ہے۔ ہمیں معلوم ہے کہ صحیح اعداد نمبروں کے ایک بڑے مجموعے کو تشکیل دیتے ہیں جن میں مکمل اعداد اور منفی اعداد شامل ہوتے ہیں۔ آپ مکمل اعداد اور صحیح اعداد کے بیچ اور کون کون سے فرق پاتے ہیں؟ اس سبق میں ہم صحیح اعداد کے بارے میں مزید پڑھیں گے۔ اولاً ہم نے پچھلی جماعت میں صحیح اعداد کے بارے میں جو کچھ سیکھا ہے اُسے دہرائیں گے۔

## 1.2 تجدید (Recall)

ہم جانتے ہیں کہ صحیح اعداد کو عددی خط پر کس طرح ظاہر کرتے ہیں۔ کچھ صحیح اعداد نیچے دیے گئے عددی خط پر ظاہر کیے گئے ہیں۔

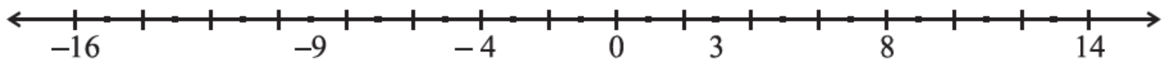



کیا آپ ظاہر کئے گئے صحیح اعداد کو بڑھتی ترتیب میں لکھ سکتے ہیں؟ ان اعداد کی بڑھتی ترتیب ہے:

–5, –1, 3.

ہم نے -5 کو سب سے چھوٹے عدد کے طور پر کیوں منتخب کیا؟

درج ذیل عددی خط پر کچھ صحیح اعداد کی نشاندہی کی گئی ہے۔ ان صحیح اعداد کو گھٹتی ترتیب میں لکھیے۔

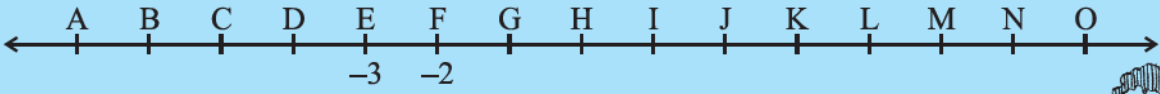



ان صحیح اعداد کی گھٹتی ترتیب ہے۔ .........,14, 8, 3

اوپر دیے گئے عددی خط پر چند صحیح اعداد دکھائے گئے ہیں۔ ہر ڈاٹ کے لیے مناسب اعداد لکھیے۔

## کوشش کیجیے:

-1 نیچے دیا ہوا عددی خط صحیح اعداد کو ظاہر کرتا ہے۔



-3 اور -2 کی نشاندہی بالترتیب E اور F سے کی گئی۔ B، D، H، J، M اور O کن صحیح اعداد کو ظاہر کرتے ہیں؟

2 0,4,5,–7,–5 اور -4 کو بڑھتی ترتیب میں رکھیے اور اپنے جواب کی جانچ کرنے کے لیے ان اعداد کو عددی خط پر دکھایئے۔

صحیح اعداد کی جمع اور تفریق ہم گذشتہ جماعت میں کر چکے ہیں۔ درج ذیل بیانات کو پڑھیے۔

کسی عددی خط پر

(i) ایک مثبت صحیح عدد کو جوڑنے کے لیے ہم دائیں جانب بڑھتے ہیں۔

(ii) ایک منفی صحیح عدد کو جوڑنے کے لیے ہم بائیں جانب بڑھتے ہیں۔

(iii) ایک مثبت صحیح عدد کو گھٹانے کے لیے ہم بائیں جانب بڑھتے ہیں۔

(iv) ایک منفی صحیح عدد کو گھٹانے کے لیے ہم دائیں جانب بڑھتے ہیں۔

بتایئے کیا درج ذیل بیانات درست ہیں یا نہیں۔ غلط بیانات کو درست کیجیے۔

(i) دو مثبت صحیح اعداد کو جوڑنے پر ہمیں ایک مثبت صحیح عدد حاصل ہوتا ہے۔

(ii) دو منفی صحیح اعداد کو جوڑنے پر ہمیں ایک مثبت صحیح عدد حاصل ہوتا ہے۔

(iii) ایک مثبت اور ایک منفی صحیح عدد کو جوڑنے پر ہمیں ہمیشہ ایک منفی صحیح عدد حاصل ہوتا ہے۔

(iv) صحیح عدد 8 کا جمعی معکوس (–8) ہے اور (–8) کا جمعی معکوس 8 ہے۔

(v) تفریق کے لیے ہم صحیح عدد کے جمعی معکوس کو جوڑ دیتے ہیں جو کہ دوسرے صحیح عدد میں سے گھٹا دیا جاتا ہے۔

(vi) $(-10)+3=10-3$

(vii) $8+(-7)-(-4)=8+7-4$

اپنے جوابات کو نیچے دیے گئے جوابوں سے ملایئے۔

(i) درست۔ مثال کے طور پر

(a) $56 + 73 = 129$ (b) $113+82 =195$

اس بیان کی تصدیق کے لیے پانچ مثالیں اور دیجیے۔

(ii) غلط۔ کیونکہ $(-6)+(-7)=-13$ جو ایک مثبت صحیح عدد نہیں ہے۔ درست بیان ہوگا: دو منفی صحیح اعداد کو جوڑنے پر ہمیں ایک منفی صحیح عدد حاصل ہوتا ہے۔

مثال کے طور پر۔

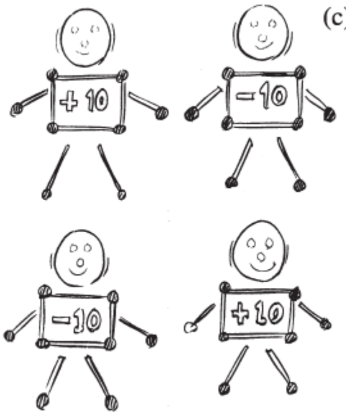
(a) (−56)+(−73)= −129 (b) (−113)+(−82)=−195

(iii) غلط۔ 7=16+9– جو کہ ایک منفی عدد نہیں ہے۔ درست بیان ہوگا:

ایک مثبت اور ایک منفی صحیح عدد کو جوڑنے پر ہم ان دونوں اعداد کا فرق معلوم کرتے ہیں اور بڑے صحیح عدد کا نشان لگا دیتے ہیں۔ بڑے صحیح عدد کا فیصلہ دونوں صحیح اعداد کو ان کے نشانوں سے الگ کر کے کیا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر۔

(a) (−56) + (73)=17 (b) (−113)+82= −31

(c) 16+ (−23)= −7 (d) 125 + (−101) = 24




اس بیان کی تصدیق کے لیے پانچ مثالیں اور بنائیے۔

(iv) درست۔ جمعی معکوس کی کچھ اور مثالیں نیچے دی جا رہی ہیں۔

| صحیح اعداد | جمعی معکوس |
|---|---|
| 10 | −10 |
| −10 | 10 |
| 76 | −76 |
| −76 | 76 |

لہٰذا، کسی صحیح عدد $a$ کا جمعی معکوس $-a$ ہے اور $(-a)$ کا جمعی معکوس $a$ ہے۔

(v) درست، تفریق جمع کے برعکس ہے اور اسی لیے ہم صحیح عدد کے جمعی معکوس کو، جو گھٹا دیا جاتا ہے، دوسرے صحیح عدد میں جوڑ دیتے ہیں۔ مثال کے طور پر:

(a) 56 −73= 56 + 73 کا جمعی معکوس = 56 + (−73) −17

(b) 56−(−73) = 56 + (−73) کا جمعی معکوس = 56 +73=129

(c) (−79) − 45=(−79)+(−45) = −124

(d) (−100 )− (−172) = − 100 +172 =72 وغیرہ

اس بیان کی تصدیق کے لیے ایسی کم از کم پانچ مثالیں دیجیے۔

لہٰذا، دو صحیح اعداد $a$ اور $b$ کے لیے ہم نے پایا کہ

$a - b = a +$ ( $b$ کا جمعی معکوس ) $= a + (-b)$

اور $a - (-b) = a +$ [ $(-b)$ کا جمعی معکوس ] $= a + b$

(vi) غلط، کیونکہ (−10) +3 = −7 اور 10−3=7

اس لیے (−10) + 3≠10−3

(vii) غلط، کیونکہ 8 + (−7) − (−4) = 8 + (−7) +4 =1+4 = 5

اور 8 +7− 4 =15− 4 =11

اس لیے 8 + (−7)− (−4) ≠ 8+7−4

## کوشش کیجیے:

ہم گزشتہ کلاس میں اعداد کے مختلف پیٹرن کر چکے ہیں۔

کیا آپ مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک کے لیے ایک پیٹرن تلاش کر سکتے ہیں؟ اگر ہاں تو ان کو مکمل کیجیے

(a) 7, 3, –1, –5, ___, ___, ___

(b) –2, –4, –6, –8, ___, ___, ___

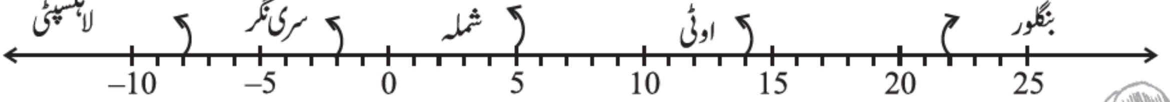
(c) 15, 10, 5, 0, ___, ___, ___

(d) –11, –8, –5, –2, ___, ___, ___

اسی طرح کے کچھ اور پیٹرن تیار کیجیے اور اپنے دوستوں سے ان کو مکمل کرنے کے لیے کہیے۔

## مشق 1.1

1۔ مندرجہ ذیل عددی خط ایک خاص دن کا مختلف مقامات پر درج درجۂ حرارت ڈگری سیلس (°C) میں دکھا رہا ہے۔

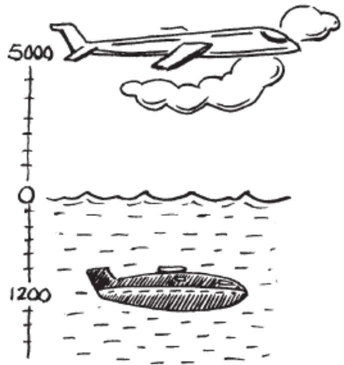


(a) اس عددی خط کا مشاہدہ کیجیے اور اس پر درج مختلف مقامات کا درجۂ حرارت لکھیے۔

(b) اوپر دیے گئے مقامات میں سب سے زیادہ گرم اور سب سے زیادہ سرد مقام کے درجۂ حرارت کے فرق کو بتائیے؟

(c) لاہلسپٹی اور سری نگر کے درمیان درجہ حرارت میں کتنا فرق ہے؟

(d) کیا ہم کہہ سکتے ہیں کہ سری نگر اور شملہ دونوں کا درجۂ حرارت ملا کر شملہ درجۂ حرارت سے کم ہے؟ کیا یہ سری نگر کے درجہ حرارت سے بھی کم ہے؟




2۔ ایک معلوماتی مقابلے میں درست جوابات کے لیے مثبت اعداد اور غلط جوابات کے لیے منفی اعداد دیے گئے۔ اگر جیک کو پانچ لگاتار باریوں میں 25، 5–، 10–، 15 اور 10 ملے تو آخر میں اس کا کل اسکور کیا ہوگا؟

3۔ سری نگر میں پیر کے دن درجہ حرارت 5°C– تھا۔ منگل کو یہ درجۂ حرارت 2°C اور کم ہو گیا۔ منگل کو سری نگر میں کتنا درجہ حرارت تھا۔ بدھ کو یہ 4°C بڑھ گیا۔ اس دن کتنا درجۂ حرارت تھا؟

4۔ ایک ہوائی جہاز سطح سمندر سے 5000 میٹر اوپر اڑ رہا ہے۔ ایک خاص مقام پر جہاز اس پنڈبی سے ٹھیک اوپر آ گیا جو کہ سطح سمندر سے 1200 میٹر نیچے تیر رہی ہے۔ ہوائی جہاز اور پنڈبی کے درمیان کا عمودی فاصلہ بتائیے؟

5۔ موہن نے اپنے بینک کے کھاتے میں ₹ 2,000 جمع کیے اور اگلے دن اس میں سے ₹ 1,642 نکال لیے۔ اگر نکالی گئی رقم کو منفی صحیح عدد سے ظاہر کیا جائے تو آپ جمع کی گئی رقم کو کس طرح ظاہر کریں گے؟

رقم نکالنے کے بعد موہن کے کھاتے میں باقی بچی رقم بتائیے؟

**6۔** ریتا نقطہ A سے 20 کلومیٹر مشرق کی جانب چل کر نقطہ B پر پہنچ گئی۔ نقطہ B سے اس سڑک پر چلتے ہوئے وہ 30 کلومیٹر مغرب کی جانب گئی۔ اگر مشرق کی جانب کے فاصلے کو مثبت صحیح عدد سے ظاہر کیا جائے تو آپ مغرب کی جانب کے فاصلے کو کیسے ظاہر کریں گے؟ نقطہ A سے شروع کرتے ہوئے اس کی آخری حالت کو آپ کس صحیح عدد سے ظاہر کریں گے؟

**7۔** ایک طلسمی مربع ایسا چارخانہ ہوتا ہے جس کے اندر بنے چوکور خانوں میں درج اعداد کی گنتی افقی، عمودی، وتری ہر قطار میں یکساں ہوتی ہے۔ جانچ کیجیے کہ درج ذیل میں کون سا طلسمی مربع ہے۔

| | | |
|---|---|---|
| 5 | −1 | −4 |
| −5 | −2 | 7 |
| 0 | 3 | −3 |

(i)

| | | |
|---|---|---|
| 1 | −10 | 0 |
| −4 | −3 | −2 |
| −6 | 4 | −7 |

(ii)

**8۔** a اور b کی درج ذیل قیمتوں کے لیے $a-(-b)=a+b$ کی جانچ کیجیے

(i) $a = 21, b = 18$ (ii) $a = 118, b = 125$

(iii) $a = 75, b = 84$ (iv) $a = 28, b = 11$

**9۔** درج ذیل بیانات کو درست بنانے کے لیے باکس میں >، < یا = کے نشان لگائیے۔

(a) $(-8)+(-4)$ ☐ $(-8)-(-4)$

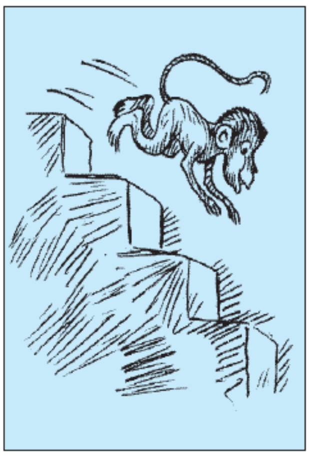
(b) $(-3)+7-(19)$ ☐ $15-8+(-9)$

(c) $23-41+11$ ☐ $23-41-11$

(d) $39+(-24)-(15)$ ☐ $36+(-52)-(-36)$

(e) $-231+79+51$ ☐ $-399+159+81$

**10۔** پانی کے ایک ٹینک میں نیچے کی طرف سیڑھیاں جا رہی ہیں، سب سے اوپر والی سیڑھی پر ایک بندر بیٹھا ہوا ہے (یعنی پہلی سیڑھی پر)۔ پانی کی سطح نویں سیڑھی پر ہے۔



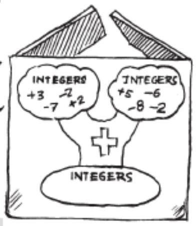
(i) وہ 3 سیڑھی نیچے کود جاتا ہے اور پھر دو سیڑھی اوپر کود جاتا ہے۔ کتنی بار کودنے پر وہ پانی کی سطح تک پہنچ جائے گا؟

(ii) پانی پینے کے بعد وہ واپس جانا چاہتا ہے۔ اس کے لیے وہ ہر بار 4 سیڑھیاں اوپر جاتا ہے اور 2 سیڑھیاں نیچے کود جاتا ہے۔ کتنی بار کودنے پر وہ سب سے اوپر کی سیڑھی پر پہنچ جائے گا؟

(iii) اگر نیچے جانے والی سیڑھیوں کو منفی صحیح عدد اور اوپر جانے والی سیڑھیوں کو مثبت صحیح عدد سے ظاہر کیا جاتا ہے تو درج ذیل کو مکمل کرتے ہوئے حصہ (i) اور (ii) میں بندر کی چھلانگوں کو ظاہر کیجیے : (a) $-3+2-\ldots=-8$ ، (b) $4-2+\ldots=8$ (a) میں جواب (−8) نیچے جانے والی سیڑھیوں کو ظاہر کر رہا ہے تو (b) میں جواب 8 کس کو ظاہر کرے گا؟

## 1.3 صحیح اعداد کے جمع اور تفریق کی خصوصیات (Properties of Addition and Substraction of Integers)

### 1.3.1 جمع کی بندشی خاصیت (Closure Under Addition)




ہم پڑھ چکے ہیں کہ دو مکمل اعداد کا جوڑ ہمیشہ مکمل عدد ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر 41 = 24+17 جس کا جواب ایک مکمل عدد ہی ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ اس خصوصیت کو مکمل اعداد کی جمع کے لیے بندشی خاصیت کہتے ہیں۔

آیئے دیکھتے ہیں کہ کیا یہ خصوصیت صحیح اعداد کے لیے بھی درست ہے۔

ذیل میں صحیح اعداد کے کچھ جوڑے دیے گئے ہیں۔ درج ذیل جدول کا مشاہدہ کیجیے اور پھر اس کو مکمل کیجیے۔

| | بیانات | مشاہدات |
|---|---|---|
| (i) | 17 + 23 = 40 | جواب صحیح عدد ہے |
| (ii) | (–10) + 3 = _____ | __________ |
| (iii) | (– 75) + 18 = _____ | __________ |
| (iv) | 9 + (– 25) = – 6 | جواب صحیح عدد ہے |
| (v) | 27 + (– 27) = _____ | __________ |
| (vi) | (– 20) + 0 = _____ | __________ |
| (vii) | (– 35) + (– 10) = _____ | __________ |

آپ نے کیا مشاہدہ کیا؟ کیا دو صحیح اعداد کا جوڑ ہمیشہ ایک صحیح عدد ہوتا ہے؟

کیا آپ صحیح اعداد کا ایک ایسا جوڑا بتا سکتے ہیں جس کا جوڑ صحیح عدد نہ ہو؟

کیونکہ صحیح اعداد کو جوڑنے پر صحیح اعداد ہی حاصل ہوتے ہیں۔ اس لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ صحیح اعداد کی جمع بندشی خاصیت رکھتی ہے۔ عام طور پر کوئی بھی دو صحیح اعداد $a$ اور $b$ کے لیے $a+b$ ایک صحیح عدد ہوتا ہے۔

### 1.3.2 تفریق کی بندشی خاصیت (Closure under Subtraction)

اگر ایک صحیح عدد کو دوسرے صحیح عدد میں سے گھٹایا جائے تو کیا ہوگا؟ کیا ہم کہہ سکتے ہیں کہ دو صحیح عدد کو گھٹانے پر ایک صحیح عدد حاصل ہوگا؟

درج ذیل جدول کا مشاہدہ کیجیے اور پھر اس کو مکمل کیجیے۔

| | بیانات | مشاہدات |
|---|---|---|
| (i) | 7 – 9 = – 2 | جواب صحیح عدد ہے |
| (ii) | 17 – (– 21) = _______ | |
| (iii) | (– 8) – (–14) = 6 | _______ |
| (iv) | (– 21) – (– 10) = _______ | جواب صحیح عدد ہے |
| (v) | 32 – (–17) = _______ | _______ |
| (vi) | (– 18) – (– 18) = _______ | _______ |
| (vii) | (– 29) – 0 = _______ | _______ |

آپ کا مشاہدہ کیا ہے؟ کیا صحیح اعداد کا کوئی جوڑا ایسا بھی ہے جن کا فرق صحیح عدد نہیں ہے؟ کیا ہم کہہ سکتے ہیں کہ صحیح اعداد کی تفریق بندشی خاصیت رکھتی ہے؟ ہاں، ہم دیکھ سکتے ہیں کہ صحیح اعداد کی تفریق بندشی خاصیت رکھتی ہے؟

لہٰذا، اگر a اور b دو صحیح اعداد ہیں تو a–b ہمیشہ ایک صحیح عدد ہوگا۔ کیا مکمل اعداد بھی یہ خصوصیت رکھتے ہیں؟

## 1.3.3 تقلیبی خصوصیت (Commutative Property)

ہم جانتے ہیں کہ 3+5=5+3=8 یعنی مکمل اعداد کو کسی بھی ترتیب میں جوڑا جا سکتا ہے۔ دوسرے الفاظ میں مکمل اعداد کی جمع تقلیبی خصوصیت رکھتی ہیں۔ کیا ہم یہی بات صحیح اعداد کے لیے بھی کہہ سکتے ہیں۔ ہم جانتے ہیں کہ $5+(-6)=-1$ اور $(-6)+5=-1$

اس لیے،

$$5+(-6)=(-6)+5$$

کیا درج ذیل برابر ہیں؟

(i) $(-9)+(-8)$ اور $(-8)+(-9)$

(ii) $32+(-23)$ اور $(-23)+32$

(iii) $0+(-45)$ اور $(-45)+0$

صحیح اعداد کے پانچ اور دوسرے صحیح اعداد کے جوڑوں کے لیے اس کو کر کے دیکھیے۔ کیا آپ کو صحیح اعداد کا کوئی جوڑا ایسا ملا جس کی ترتیب بدلنے پر جوڑ مختلف آئے؟ یقیناً نہیں۔ لہٰذا ہم کہہ سکتے ہیں کہ **صحیح اعداد کی جمع تقلیبی خاصیت** رکھتی ہے۔

عام طور پر کوئی بھی دو صحیح اعداد $a$ اور $b$ کے لیے، ہم کہہ سکتے ہیں کہ

$$a+b=b+a$$

- ہم جانتے ہیں کہ مکمل اعداد کی تفریق تقلیبی خاصیت نہیں رکھتی ہے۔ کیا صحیح اعداد کی تفریق تقلیبی خاصیت رکھتی ہے؟

  صحیح اعداد 5 اور $(-3)$ کو لیجیے۔

  کیا $5-(-3)$ اور $(-3)-5$ ایک جیسے ہیں؟ نہیں، کیونکہ $5-(-3)=5+3=8$ اور $(-3)-5=-3-5=-8$

  صحیح اعداد کے کم از کم پانچ جوڑے لیجیے اور اس کی جانچ کیجیے۔

  نتیجہ کے طور پر، ہم کہہ سکتے ہیں کہ **صحیح اعداد کی تفریق تقلیبی خاصیت** نہیں رکھتی ہے۔

## 1.3.4 تلازمی خصوصیت (Associative Property)

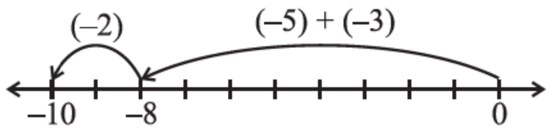
درج ذیل مثالوں کا مشاہدہ کیجیے

صحیح اعداد 3–، 2– اور 5– کو لیجیے۔

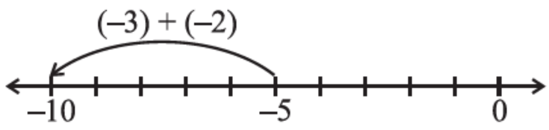
$(-5)+[(-3)+(-2)]$ اور $[(-5)+(-3)]+(-2)$ پر دھیان دیجیے۔

پہلے سوال میں $(-3)$ اور $(-2)$ کا ایک گروپ بنایا گیا ہے جب کہ دوسرے سوال میں $(-5)$ اور $(-3)$ کا ایک گروپ بنایا گیا ہے۔ آیئے

ہم جانچ کر کے دیکھتے ہیں کہ کیا ہمیں مختلف نتائج ملیں گے۔




$[(-5) + (-3)] + (-2)$




$(-5) + [(-3) + (-2)]$

دونوں ہی حالتوں میں ہم کو 10– حاصل ہوتا ہے۔

یعنی $(-5) + [(-3) + (-2)] = [(-5) + (-3)] + (-2)$

بالکل اسی طرح 3–، 1 اور 7– کو لیجیے۔

$(-3) + [1 + (-7)] = -3 +$ ________ = ________

$[(-3) + 1] + (-7) = -2 +$ ________ = ________

کیا $(-3) + [1 + (-7)]$ اور $[(-3) + 1] + (-7)$ ایک جیسے ہیں؟

ایسی ہی پانچ اور مثالیں لیجیے۔ آپ کو ایسی کوئی بھی مثال نہیں ملے گی جس کے جوابات مختلف ہوں۔ اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ **صحیح اعداد کی جمع تلازمی خاصیت** رکھتی ہے۔

عام طور پر کسی بھی صحیح اعداد a، b اور c کے لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

## 1.3.5 جمعی تماثلہ (Additive Indentity)

جب ہم کسی مکمل عدد میں صفر کو جوڑتے ہیں تو ہم کو وہی مکمل عدد حاصل ہوتا ہے۔ مکمل اعداد کے لیے صفر جمعی تماثلہ ہے۔ کیا یہ صحیح اعداد کے لیے بھی جمعی تماثلہ ہے؟

درج ذیل کا مشاہدہ کیجیے اور خالی جگہوں کو بھریے۔

(i) $(-8) + 0 = -8$

(ii) $0 + (-8) = -8$

(iii) $(-23) + 0 =$ _____

(iv) $0 + (-37) = -37$

(v) $0 + (-59) =$ _____

(vi) $0 +$ _____ $= -43$

(vii) $-61 +$ _____ $= -61$

(viii) _____ $+ 0 =$ _____

اوپر دی گئی مثالوں سے ظاہر ہوتا ہے کہ صحیح اعداد کے لیے صفر جمعی تماثلہ ہے۔

آپ کسی بھی دوسرے پانچ صحیح اعداد میں صفر کو جوڑ کر اس کی جانچ کر سکتے ہیں۔

عام طور پر کسی صحیح عدد $a$ کے لیے

$$a + 0 = a = 0 + a$$

## کوشش کیجیے:

1۔ صحیح اعداد کا ایک ایسا جوڑ بتائیے جس کا جوڑ

(a) منفی صحیح عدد ہو (b) صفر ہو

(c) دونوں صحیح اعداد سے چھوٹا صحیح عدد ہو (d) کسی بھی ایک صحیح عدد سے چھوٹا ہو

(e) دونوں صحیح اعداد سے بڑا صحیح عدد ہو۔

2۔ صحیح اعداد کا ایک ایسا جوڑ ابنائیے جس کا فرق

(a) منفی صحیح عدد ہو (b) صفر ہو

(c) دونوں صحیح اعداد سے چھوٹا صحیح عدد ہو (d) کسی بھی ایک صحیح عدد سے چھوٹا ہو

(e) دونوں صحیح اعداد سے بڑا صحیح عدد ہو

**مثال نمبر 1** صحیح اعداد کا ایک ایسا جوڑ ابنائیے جس کا:

(a) جوڑ $-3$ ہے (b) فرق $-5$ ہے

(c) فرق 2 ہے (d) جوڑ 0 ہے

**حل**

(a) $(-1) + (-2) = -3$ یا $(-5) + 2 = -3$

(b) $(-9) - (-4) = -5$ یا $(-2) - 3 = -5$

(c) $(-7) - (-9) = 2$ یا $1 - (-1) = 2$

(d) $(-10) + 10 = 0$ یا $5 + (-5) = 0$

کیا آپ ان مثالوں کے کچھ اور جوڑے لکھ سکتے ہیں؟

## مشق 1.2

1۔ صحیح اعداد کا ایک ایسا جوڑ لکھیے جس کا:

(a) جوڑ $-7$ ہے (b) فرق $-10$ ہے

(c) جوڑ 0 ہے

2۔ (a) صحیح اعداد کا ایک ایسا جوڑ جس کا فرق 8 ہو۔

(b) ایک ایسا منفی اور ایک مثبت صحیح عدد لکھیے جن کا جوڑ $-5$ ہو۔

(c) ایک ایسا منفی اور ایک مثبت صحیح عدد لکھیے جن کا فرق $-3$ ہو۔

3۔ ایک مقابلے میں ٹیم A کا تین لگا تار باریوں میں اسکور $-40$، 10، 0 اور ٹیم B کا اسکور 10، 0، $-40$ ہے۔ کون سی ٹیم کا اسکور زیادہ ہے؟ کیا ہم کہہ سکتے ہیں کہ صحیح اعداد کو کسی بھی ترتیب میں جوڑا جا سکتا ہے؟

4۔ درج ذیل بیانات کو صحیح کرنے کے لیے خالی جگہوں کو بھریے:

(i) (–5) + (– 8) = (– 8) + (............)

(ii) –53 + ............ = –53

(iii) 17 + ............ = 0

(iv) [13 + (– 12)] + (............) = 13 + [(–12) + (–7)]

(v) (– 4) + [15 + (–3)] = [– 4 + 15] + ............

## 1.4 صحیح اعداد کی ضرب: (Multiplication of Intergers)

ہم صحیح اعداد کی جمع اور تفریق کر سکتے ہیں۔ آیئے اب ہم صحیح اعداد کی ضرب سیکھتے ہیں۔

### 1.4.1 ایک مثبت اور ایک منفی صحیح عدد کی ضرب: (Multiplication of a Positive and Negative Integer)

**کوشش کیجیے:**

معلوم کیجیے

4 × (– 8),

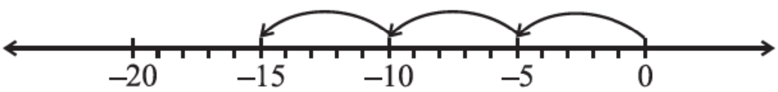
8 × (–2),

3 × (–7),

10 × (–1)

ہم جانتے ہیں کہ مکمل اعداد کی ضرب دراصل ان کی بار بار جمع ہے۔ مثال کے طور پر

5 + 5 + 5 = 3 × 5 = 15




کیا آپ صحیح اعداد کی بار بار جمع کو بھی اسی طرح ظاہر کر سکتے ہیں؟

درج ذیل عددی خط سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ (–5) + (–5) + (–5) = –15

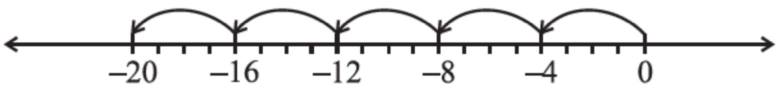
لیکن، ہم یہ بھی لکھ سکتے ہیں

(–5) + (–5) + (–5) = 3 × (–5)

اس لیے 3 × (–5) = –15

اسی طرح

(– 4) + (– 4) + (– 4) + (– 4) + (– 4) = 5 × (– 4) = –20




اور (–3) + (–3) + (–3) + (–3) = __________ = __________

نیز (–7) + (–7) + (–7) = __________ = __________

آیئے اب، ہم دیکھتے ہیں کہ عددی خط کا استعمال کیے بنا ایک مثبت اور ایک صحیح عدد کی ضرب کیسے کی جاتی ہے۔

آیئے 3×(–5) کو مختلف طریقوں سے حل کرتے ہیں۔ پہلے 3×5 کو معلوم کیجیے اور پھر حاصل ضرب سے پہلے منفی نشان – لگائیے۔ آپ

کو 15– حاصل ہوگا۔ یعنی ہم (3×5)– معلوم کریں گے 15– حاصل کرنے کے لیے۔

اسی طرح

$5\times(-4)=-(5\times4)=-20$

بالکل اسی طریقے سے معلوم کیجیے

$4 \times (-8) =$ _____ $=$ _____, $3 \times (-7) =$ _____ $=$ _____

$6 \times (-5) =$ _____ $=$ _____, $2 \times (-9) =$ _____ $=$ _____

اسی طریقے کا استعمال کر کے ہم کو حاصل ہوگا

$10 \times (-43) = -(10 \times 43) = -430$

**کوشش کیجیے:**

معلوم کیجیے

(i) $6 \times (-19)$

(ii) $12 \times (-32)$

(iii) $7 \times (-22)$

اب تک صحیح اعداد کی ضرب ہم اس طرح کرتے آئے ہیں (مثبت صحیح اعدد)×(منفی صحیح عدد)

اب ذرا ان کو اس طرح ضرب کیجیے (منفی صحیح عدد)×(مثبت صحیح عدد)

ہم پہلے $5 \times -3$ معلوم کریں گے

اس کو معلوم کرنے کے لیے درج ذیل کا مشاہدہ کیجیے :

ہم جانتے ہیں

$3 \times 5 = 15$

$2 \times 5 = 10 = 15 - 5$

$1 \times 5 = 5 = 10 - 5$

$0 \times 5 = 0 = 5 - 5$

اس طرح

$-1 \times 5 = 0 - 5 = -5$

$-2 \times 5 = -5 - 5 = -10$

$-3 \times 5 = -10 - 5 = -15$

ہم پہلے ہی جانتے ہیں $3 \times (-5) = -15$

اور اب ہم کو حاصل ہوا ہے $(-3) \times 5 = -15 = 3 \times (-5)$

اس طرح کے پیٹرن کا استعمال کر کے ہم $(-5) \times 4 = -20 = 5 \times (-4)$ بھی حاصل کر سکتے ہیں۔

پیٹرن کا استعمال کر کے معلوم کیجیے $8 \times (-4)$، $7 \times (-3)$، $5 \times (-6)$ اور $9 \times (-2)$

جانچ کیجیے کیا، $4 \times (-8) = (-4) \times 8$، $3 \times (-7) = (-3) \times 7$، $6 \times (-5) = (-6) \times 5$

اور $2 \times (-9) = (-2) \times 9$

اس کا استعمال کر کے ہم کو حاصل ہوگا $(-33) \times 5 = 33 \times (-5) = -165$

اس طرح ہم کو معلوم ہوا کہ جب ایک مثبت صحیح عدد اور ایک منفی صحیح عدد کو ضرب کیا جاتا ہے تو ہم ان کو مکمل اعداد کی طرح ہی ضرب کرتے ہیں اور حاصل ضرب سے پہلے (–) کا نشان لگا دیتے ہیں۔ اس طرح ہم کو ایک منفی صحیح عدد حاصل ہو جاتا ہے۔

### کوشش کیجیے:

1۔ معلوم کیجیے

(a) $15 \times (-16)$ (b) $21 \times (-32)$

(c) $(-42) \times 12$ (d) $-55 \times 15$

2۔ جانچ کیجیے

(a) $25 \times (-21) = (-25) \times 21$ (b) $(-23) \times 20 = 23 \times (-20)$

ایسی ہی پانچ اور مثالیں لکھیے۔

عام طور پر کسی بھی دو مثبت صحیح اعداد a اور b کے لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ

$$\times (a-b) = (-a) \times b = -(a \times b)$$

## 1.4.2 دو منفی صحیح اعداد کی ضرب (Multiplication of two Negative Integers)

کیا آپ $(-3)\times(-2)$ کا حاصل ضرب معلوم کر سکتے ہیں؟

درج ذیل کا مشاہدہ کیجیے:

$-3 \times 4 = -12$

$-3 \times 3 = -9 = -12 - (-3)$

$-3 \times 2 = -6 = -9 - (-3)$

$-3 \times 1 = -3 = -6 - (-3)$

$-3 \times 0 = 0 \quad = -3 - (-3)$

$-3 \times -1 = 0 - (-3) = 0 + 3 = 3$

$-3 \times -2 = 3 - (-3) = 3 + 3 = 6$

کیا آپ کو اس میں کوئی پیٹرن نظر آ رہا ہے؟ مشاہدہ کیجیے کہ کیسے حاصل ضرب بدل رہے ہیں۔

اس مشاہدہ کی بنیاد پر درج ذیل کو مکمل کیجیے:

$-3 \times -3 =$ _____ و $-3 \times -4 =$ _____

اب ان خالی جگہوں کا مشاہدہ کیجیے اور خالی جگہوں کو بھریے

$-4 \times 4 = -16$

$-4 \times 3 = -12 = -16 + 4$

$-4 \times 2 =$ _____ $= -12 + 4$

$-4 \times 1 =$ _____

$-4 \times 0 =$ _____

$-4 \times (-1) =$ _____

$-4 \times (-2) =$ _____

$-4 \times (-3) =$ _____

ان پیٹرنس سے ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ

$(-3) \times (-1) = 3 = 3 \times 1$

$(-3) \times (-2) = 6 = 3 \times 2$

$(-3) \times (-3) = 9 = 3 \times 3$

اور $(-4) \times (-1) = 4 = 4 \times 1$

اس لیے $(-4) \times (-2) = 4 \times 2 =$ _____

$(-4) \times (-3) =$ _____ = _____

**کوشش کیجیے:**

(i) $(-5) \times 4$ سے شروع کرتے ہوئے $(-5) \times (-6)$ معلوم کیجیے۔

(ii) $(-6) \times 3$ سے شروع کرتے ہوئے $(-6) \times (-7)$ معلوم کیجیے۔

ان حاصل ضرب کا مشاہدہ کرنے کے بعد ہم کہہ سکتے ہیں کہ دو منفی صحیح اعداد کا حاصل ضرب ایک مثبت صحیح عدد ہوتا ہے۔ ہم دو منفی صحیح اعداد کو مکمل اعداد کی طرح ضرب کرتے ہیں اور پھر ان کے حاصل ضرب سے پہلے مثبت نشان لگا دیتے ہیں۔

لہٰذا $(-10) \times (-12) = +120 = 120$

اسی طرح $(-15) \times (-6) = +90 = 90$

عام طور پر کوئی بھی دو مثبت صحیح اعداد a اور b کے لیے

$$(-a) \times (-b) = a \times b$$

**کوشش کیجیے:**

معلوم کیجیے: $(-31) \times (-100)$، $(-25) \times (-72)$، $(-83) \times (-28)$

## کھیل 1

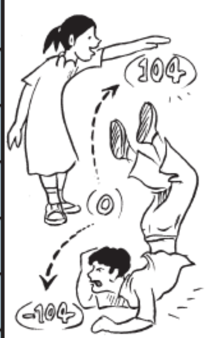
(i) ایک ایسا بورڈ لیجیے جس میں 104– سے 104 تک کے اعداد لکھے گئے ہیں۔ جیسا کہ تصویر میں دکھایا گیا ہے۔

(ii) ایک بیگ لیجیے جس میں دو نیلے اور دو لال پانسے ہوں۔ نیلے پانسے پر دکھائے گئے ڈاٹ مثبت صحیح اعداد کو ظاہر کرتے ہیں اور لال پانسے پر دکھائے گئے ڈاٹ منفی صحیح اعداد کو ظاہر کرتے ہیں۔

(iii) ہر کھلاڑی اپنی گوٹ صفر پر رکھے گا۔

(iv) ہر کھلاڑی ایک بار میں بیگ میں سے دو پانسے نکالے گا اور ان کو پھینکے گا۔

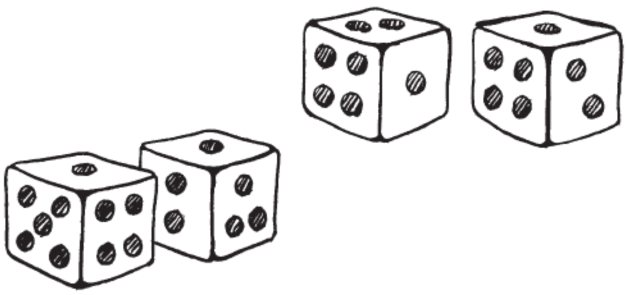
| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 104 | 103 | 102 | 101 | 100 | 99 | 98 | 97 | 96 | 95 | 94 |
| 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 | 91 | 92 | 93 |
| 82 | 81 | 80 | 79 | 78 | 77 | 76 | 75 | 74 | 73 | 72 |
| 61 | 60 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 | 71 |
| 60 | 59 | 58 | 57 | 56 | 55 | 54 | 53 | 52 | 51 | 50 |
| 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 |
| 38 | 37 | 36 | 35 | 34 | 33 | 32 | 31 | 30 | 29 | 28 |
| 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 |
| 16 | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 |
| –5 | –4 | –3 | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| –6 | –7 | –8 | –9 | –10 | –11 | –12 | –13 | –14 | –15 | –16 |
| –27 | –26 | –25 | –24 | –23 | –23 | –21 | –20 | –19 | –18 | –17 |
| –28 | –29 | –30 | –31 | –32 | –33 | –34 | –35 | –36 | –37 | –38 |
| –49 | –48 | –47 | –46 | –45 | –44 | –43 | –42 | –41 | –40 | –39 |
| –50 | –51 | –52 | –53 | –54 | –55 | –56 | –57 | –58 | –59 | –60 |
| –71 | –70 | –69 | –68 | –67 | –66 | –65 | –64 | –63 | –62 | –61 |
| –72 | –73 | –74 | –75 | –76 | –77 | –78 | –79 | –80 | –81 | –82 |
| –93 | –92 | –91 | –90 | –89 | –88 | –87 | –86 | –85 | –84 | –83 |
| –94 | –95 | –96 | –97 | –98 | –99 | –100 | –101 | –102 | –103 | –104 |




(v) ہر باری میں پانسہ پھینکنے کے بعد کھلاڑی کو دونوں پانسوں پر حاصل ہوئے اعداد کو ضرب کرنا ہوگا۔

(vi) اگر حاصل ضرب مثبت صحیح عدد ہے تو کھلاڑی اپنی گوٹ 104 کی طرف بڑھائے گا لیکن اگر حاصل ضرب منفی صحیح عدد ہوا تو کھلاڑی اپنی گوٹ 104– کی طرف بڑھائے گا۔

(vii) جو کھلاڑی 104 یا (104–) پر پہلے پہنچے گا وہی جیتے گا۔



### 1.4.3 تین یا زیادہ منفی صحیح اعداد کا حاصل ضرب (Product of three or more Negative Integers)

ماہرین ریاضی ایولر نے اپنی کتاب 'انکیٹنگ زر الجبرا(1770) میں سب سے پہلے $(-1)\times(-1)=1$ کو ثابت کرنے کی کوشش کی۔

ہم نے مشاہدہ کیا کہ دو منفی صحیح اعداد کا حاصل ضرب ایک مثبت صحیح عدد ہوتا ہے۔ تین منفی صحیح اعداد کا حاصل ضرب کیا ہوگا؟ چار منفی صحیح اعداد کا؟ درج ذیل مثالوں کا مشاہدہ کیجیے:

(a) $(-4)\times(-3)=12$

(b) $(-4)\times(-3)\times(-2)=[(-4)\times(-3)]\times(-2)=12\times(-2)=-24$

(c) $(-4)\times(-3)\times(-2)\times(-1)=[(-4)\times(-3)\times(-2)]\times(-1)=(-24)\times(-1)$

(d) $(-5)\times[(-4)\times(-3)\times(-2)\times(-1)]=(-5)\times 24=-120$

**ایک خاص مسئلہ**

درج ذیل بیانات اور ان کے حاصل ضرب کو دیکھیے

$(-1)\times(-1)=+1$

$(-1)\times(-1)\times(-1)=-1$

$(-1)\times(-1)\times(-1)\times(-1)=+1$

$(-1)\times(-1)\times(-1)\times(-1)\times(-1)=-1$

اس کا مطلب یہ ہے کہ اگر عدد (1–) کو جفت مرتبہ ضرب دیا جائے تو حاصل 1+ ہوگا اور اگر عدد (1–) کو طاق مرتبہ ضرب دیا جائے تو حاصل 1– آئے گا۔ (1–) کے جوڑے بنا کر اس کی جانچ کی جا سکتی ہے۔ اعداد کا حاصل ضرب نکالنے میں اس سے مدد ملتی ہے۔

اوپر دیے گئے حاصل ضرب سے ہم نے مشاہدہ کیا کہ

(a) دو منفی صحیح اعداد کا حاصل ضرب مثبت صحیح عدد ہوتا ہے۔

(b) تین منفی صحیح اعداد کا حاصل ضرب منفی صحیح عدد ہوتا ہے۔

(c) چار منفی صحیح اعداد کا حاصل ضرب مثبت صحیح عدد ہوتا ہے۔

(d) پانچ منفی صحیح اعداد کا حاصل ضرب کیا ہوگا؟

اس لیے چھ منفی صحیح اعداد کا حاصل ضرب کیا ہوگا؟

ہم نے یہ بھی دیکھا کہ اوپر دیے گئے (a) اور (c) میں دیے گئے منفی اعداد کی تعداد جفت عدد ہے۔ (بالترتیب دو اور چار)۔ اور (a) اور (c) کا حاصل ضرب مثبت صحیح اعداد ہے۔ جب کہ (b) اور (d) میں دیے گئے منفی اعداد کی تعداد طاق عدد ہے اور (b) اور (d) کا حاصل ضرب منفی صحیح اعداد ہیں۔

ہم نے معلوم کیا کہ اگر کسی ضرب میں منفی صحیح اعداد کی تعداد جفت ہے تو حاصل ضرب مثبت صحیح عدد ہوگا اور اگر ضرب میں منفی صحیح اعداد کی تعداد طاق ہے تو حاصل ضرب منفی صحیح عدد ہوگا۔

ہر قسم کی پانچ مثالیں لے کر اس کی جانچ کیجیے۔

## سوچیے، بات چیت کیجیے اور لکھیے

(i) $(-9)\times(-5)\times(-6)\times(-3)$ کا حاصل ضرب مثبت صحیح عدد ہوگا جب کہ $(-9)\times(-5)\times 6\times(-3)$ کا حاصل ضرب منفی ہوگا۔ کیوں؟

(ii) اگر ہم درج ذیل کو ایک ساتھ ضرب کریں تو حاصل ضرب کا نشان کیا ہوگا

(a) 8 منفی صحیح اعداد اور 3 مثبت صحیح اعداد

(b) 5 منفی صحیح اعداد اور 4 مثبت صحیح اعداد

(c) (–1) کو بارہ مرتبہ

(d) (–1) کو $2m$ مرتبہ جہاں $m$ ایک فطری عدد ہے

## 1.5 صحیح اعداد کے ضرب کی خصوصیات (Properties Of Multiplication Of Integers)

### 1.5.1 ضرب کی بندشی خصوصیت (Closure under Multiplication)

1۔ درج ذیل جدول کا مشاہدہ کیجیے اور پھر اس کو مکمل کیجیے۔

| | |
|---|---|
| (–20) × (–5) = 100 | حاصل ضرب ایک صحیح عدد ہے |
| (–15) × 17 = – 255 | حاصل ضرب ایک صحیح عدد ہے |
| (–30) × 12 = _____ | |
| (–15) × (–23) = _____ | |
| (–14) × (–13) = _____ | |
| 12 × (–30) = _____ | |

آپ کا مشاہدہ کیا ہے؟ کیا آپ کو صحیح اعداد کا کوئی ایسا جوڑا ملا جس کا حاصل ضرب صحیح عدد نہ ہو؟ نہیں۔ اس سے ہم یہ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ دو صحیح اعداد کا حاصل ضرب ایک صحیح عدد ہی ہوتا ہے۔ اس لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ صحیح اعداد کی ضرب بندشی خصوصیت رکھتی ہے۔

عام طور پر

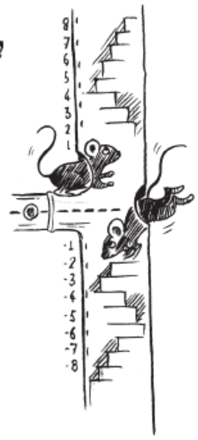
> کسی بھی دو صحیح اعداد a اور b کے لیے a × b بھی ایک صحیح عدد ہوتا ہے۔

پانچ مزید صحیح اعداد کے جوڑے معلوم کیجیے اور درج بالا بیان کو جانچیے۔

### 1.5.2 ضرب کی تقلیبی خصوصیت (Commutativity of Multiplication)

ہم جانتے ہیں کہ مکمل اعداد کی ضرب تقلیبی خصوصیت رکھتی ہے۔ کیا ہم کہہ سکتے ہیں کہ صحیح اعداد کی ضرب بھی تقلیبی خصوصیت رکھتی ہے؟

درج ذیل جدول کا مشاہدہ کیجیے اور اس کو مکمل کیجیے:



| بیان 1 | بیان 2 | اخذ کیے گیے نتائج |
|---|---|---|
| 3 × (– 4) = –12 | (– 4) × 3 = –12 | 3 × (– 4) = (– 4) × 3 |
| (–30) × 12 = _____ | 12 × (–30) = _____ | |
| (–15) × (–10) = 150 | (–10) × (–15) = 150 | |
| (–35) ×(–12)= _____ | (–12) × (–35) = | |
| (–17) × 0 = _____ | | |
| __________ = _____ | (_1) × (_15) = | |

آپ کے مشاہدات کیا ہیں؟ اوپر کی مثالیں یہ ظاہر کرتی ہیں کہ صحیح اعداد کی ضرب تقلیبی خصوصیت رکھتی ہے۔ ایسی ہی پانچ اور مثالیں لیجیے اور اس کی جانچ کیجیے۔

عام طور پر کسی بھی دو صحیح اعداد $a$ اور $b$ کے لیے

$$a \times b = b \times a$$

### 1.5.3 صفر سے ضرب (Multiplication by Zero)

ہم جانتے ہیں کہ جب کسی مکمل عدد کو صفر سے ضرب کرتے ہیں تو صفر ہی حاصل ہوتا ہے۔ درج ذیل منفی اعداد اور صفر کی ضرب کا مشاہدہ کیجیے۔ یہ پہلے کیے جا چکے پیٹرن سے حاصل ہوئے ہیں۔

$(-3) \times 0 = 0$

$0 \times (-4) = 0$

$-5 \times 0 =$ _____

$0 \times (-6) =$ _____

اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ منفی عدد کو صفر سے ضرب کرنے پر صفر ہی حاصل ہوتا ہے۔

عام طور پر کسی بھی صحیح عدد a کے لیے

$$a \times 0 = 0 \times a = 0$$

### 1.5.4 ضربی تماثلہ (Multiplicative Identity)

ہم جانتے ہیں کہ مکمل اعداد کا ضربی تماثلہ 1 ہے۔

ذرا جانچ کیجیے کہ کیا صحیح اعداد کا ضربی تماثلہ بھی 1 ہے۔ درج ذیل صحیح اعداد اور 1 کی ضرب کا مشاہدہ کیجیے:

| | |
|---|---|
| $(-3) \times 1 = -3$ | $1 \times 5 = 5$ |
| $(-4) \times 1 =$ _____ | $1 \times 8 =$ _____ |
| $1 \times (-5) =$ _____ | $3 \times 1 =$ _____ |
| $1 \times (-6) =$ _____ | $7 \times 1 =$ _____ |

اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ صحیح اعداد کا ضربی تماثلہ بھی 1 ہے۔

عام طور پر کسی صحیح عدد a کے لیے

$$a \times 1 = 1 \times a = a$$

اگر ہم کسی صحیح عدد کو 1– سے ضرب کریں تو کیا ہوتا ہے؟ درج ذیل کو مکمل کیجیے:

$(-3) \times (-1) = 3$

$3 \times (-1) = -3$

$(-6) \times (-1) =$ _____

$(-1) \times 13 =$ _____

$(-1) \times (-25) =$ _____

$18 \times (-1) =$ _____

> صحیح اعداد کا جمعی تماثلہ 0 ہے اور ضربی تماثلہ 1 ہے۔ اگر ہم کسی صحیح عدد $a$ کو (1–) سے ضرب کرتے ہیں تو ہم کو اس عدد $a$ کا جمعی معکوس حاصل ہوتا ہے۔
> یعنی $a \times (-1) = (-1) \times a = -a$

آپ کا مشاہدہ کیا ہے؟

کیا ہم کہہ سکتے ہیں کہ صحیح اعداد کا ضربی تماثل 1– ہے؟ نہیں۔

## 1.5.5 ضرب کی تلازمی خصوصیت (Associativity for Multiplication)

3–، 2– اور 5 کو لیجیے۔

$[(-3) \times (-2)] \times 5$ اور $(-3) \times [(-2) \times 5]$ کو دیکھیے

پہلی حالت میں (3–) اور (2–) کو اکٹھا کیا گیا ہے جب کہ دوسری حالت میں (2–) اور 5 کو اکٹھا کیا گیا ہے۔

ہم نے دیکھا کہ $[(-3) \times (-2)] \times 5 = 6 \times 5 = 30$

اور $(-3) \times [(-2) \times 5] = (-3) \times (-10) = 30$

تو، دونوں حالتوں میں ہم کو ایک ہی جواب ملا۔

لہٰذا، $[(-3) \times (-2)] \times 5 = (-3) \times [(-2) \times 5]$

اس کو دیکھیے اور حاصل ضرب کو مکمل کیجیے:

$[(7) \times (-6)] \times 4 =$ ________ $\times 4 =$ ________

$7 \times [(-6) \times 4] = 7 \times$ ________ $=$ ________

کیا $[7 \times (-6)] \times 4 = 7 \times [(-6) \times 4]$ ؟

کیا صحیح اعداد کی گروپنگ، ان کے حاصل ضرب پر اثر انداز ہوتی ہے؟ نہیں۔

عام طور پر کسی بھی تین صحیح اعداد a، b اور c کے لیے

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

$a$، $b$ اور $c$ ہر ایک کی پانچ پانچ قیمتیں لیجیے اور اس خصوصیت کی جانچ کیجیے۔

لہٰذا، مکمل اعداد کی طرح، تین صحیح اعداد کی ضرب، صحیح اعداد کی گروپنگ پر منحصر نہیں ہوتی ہے اور اس خصوصیت کو صحیح اعداد کی ضرب کی تلازمی خصوصیت کہتے ہیں۔

## 1.5.6 تقسیمی خصوصیت: (Distributive Property)

ہم جانتے ہیں کہ

$16 \times (10 + 2) = (16 \times 10) + (16 \times 2)$ (جمع پر ضرب کا تقسیمی کلیہ)

ذرا جانچ کیجیے کہ کیا یہ صحیح اعداد کے لیے بھی درست ہے۔

درج ذیل کا مشاہدہ کیجیے:

(a) $(-2) \times (3 + 5) = -2 \times 8 = -16$

اور $[(-2) \times 3] + [(-2) \times 5] = (-6) + (-10) = -16$

اس لیے $(-2) \times (3 + 5) = [(-2) \times 3] + [(-2) \times 5]$

(b) $(-4) \times [(-2) + 7] = (-4) \times 5 = -20$

اور $[(-4) \times (-2)] + [(-4) \times 7] = 8 + (-28) = -20$

اس لیے $(-4) \times [(-2) + 7] = [(-4) \times (-2)] + [(-4) \times 7]$

(c) $(-8) \times [(-2) + (-1)] = (-8) \times (-3) = 24$

اور $[(-8) \times (-2)] + [(-8) \times (-1)] = 16 + 8 = 24$

اس لیے $(-8) \times [(-2) + (-1)] = [(-8) \times (-2)] + [(-8) \times (-1)]$

کیا ہم کہہ سکتے ہیں کہ صحیح اعداد جمع پر ضرب کی تقسیمی خصوصیت رکھتے ہیں؟ ہاں۔

عام طور پر کوئی سے بھی تین صحیح اعداد $a$، $b$ اور $c$ کے لیے

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

$a$، $b$ اور $c$ ہر ایک کے لیے پانچ پانچ مختلف قیمتیں لیجیے اور اوپر دی گئی تقسیمی خصوصیت کی جانچ کیجیے۔

## کوشش کیجیے:

(i) کیا $10 \times [(6 + (-2)] = 10 \times 6 + 10 \times (-2)$?

(ii) کیا $(-15) \times [(-7) + (-1)] = (-15) \times (-7) + (-15) \times (-1)$?

درج ذیل پر غور کیجیے:

کیا ہم کہہ سکتے ہیں؟ $4 \times (3 - 8) = 4 \times 3 - 4 \times 8$?

ذرا جانچ کیجیے:

$4 \times (3 - 8) = 4 \times (-5) = -20$

$4 \times 3 - 4 \times 8 = 12 - 32 = -20$

اس لیے $4 \times (3 - 8) = 4 \times 3 - 4 \times 8$

درج ذیل کو دیکھیے

$(-5) \times [(-4) - (-6)] = (-5) \times 2 = -10$

$[(-5) \times (-4)] - [(-5) \times (-6)] = 20 - 30 = -10$

اس لیے $(-5) \times [(-4) - (-6)] = [(-5) \times (-4)] - [(-5) \times (-6)]$

$(-9) \times [10 - (-3)]$ اور $[(-9) \times 10] - [(-9) \times (-3)]$ کے لیے جانچ کیجیے

آپ پائیں گے کہ یہ بھی برابر ہیں۔اور

عام طور پر کوئی بھی تین صحیح اعداد a، b اور c کے لیے

$$a \times (b - c) = a \times b - a \times c$$

a، b اور c ہر ایک کے لیے کم از کم پانچ پانچ مختلف قیمتیں لیجیے اور اس خصوصیت کی جانچ کیجیے۔

## کوشش کیجیے:

(i) کیا $10 \times (6 - (-2)] = 10 \times 6 - 10 \times (-2)$؟

(ii) کیا $(-15) \times [(-7) - (-1)] = (-15) \times (-7) - (-15) \times (-1)$؟

## 1.5.7 ضرب کو آسان بنایئے (Making Multiplication Easier)

درج ذیل پر غور کیجیے

(i) ہم $4 \times 37 \times (-25)$ کو درج ذیل طریقہ سے بھی معلوم کر سکتے ہیں۔

$$[(-25) \times 37] \times 4 = (-925) \times 4 = -3700$$

یا ہم اس کو اس طرح بھی کر سکتے ہیں

$$(-25) \times 37 \times 4 = (-25) \times 4 \times 37 = [(-25) \times 4] \times 37 = (-100) \times 37 = -3700$$

کون سا طریقہ آسان ہے؟

یقیناً دوسرا طریقہ زیادہ آسان ہے کیونکہ $(-25)$ اور 4 کو ضرب کرنے سے $-100$ حاصل ہوتا ہے جس کو 37 سے ضرب کرنا زیادہ آسان ہے۔ ذرا دھیان دیجیے دوسرے طریقہ میں صحیح اعداد کی تقلیبی اور تلازمی خصوصیات شامل ہیں۔

اس طرح ہم نے دیکھا کہ صحیح اعداد کی تقلیبی، تلازمی اور تقسیمی خصوصیات کی مدد سے ہمارا حساب کتاب آسان ہو جاتا ہے۔ آیئے ذرا اور دیکھتے ہیں کہ ان خصوصیات کا استعمال حساب کو کیسے آسان بناتا ہے۔

(ii) معلوم کیجیے $16 \times 12$

$16 \times 12$ کو $16 \times (10 + 2)$ بھی لکھ سکتے ہیں۔

$$16 \times 12 = 16 \times (10 + 2) = 16 \times 10 + 16 \times 2 = 160 + 32 = 192$$

(iii) $(-23) \times 48 = (-23) \times [50 - 2] = (-23) \times 50 - (-23) \times 2 = (-1150) - (-46) = -1104$

(iv) $(-35) \times (-98) = (-35) \times [(-100) + 2] = (-35) \times (-100) + (-35) \times 2 = 3500 + (-70) = 3430$

(v) $52 \times (-8) + (-52) \times 2$

$(-52) \times 2$ کو $52 \times (-2)$ بھی لکھ سکتے ہیں۔

اس لیے $52 \times (-8) + (-52) \times 2 = 52 \times (-8) + 52 \times (-2)$

$= 52 \times [(-8) + (-2)] = 52 \times [(-10)] = -520$

## کوشش کیجیے:

تقسیمی خصوصیت کی مدد سے درج ذیل کی قیمت معلوم کیجیے

$(-49) \times 18; (-25) \times (-31); 70 \times (-19) + (-1) \times 70$

**مثال 2** درج ذیل میں ہر ایک کے لیے حاصل ضرب معلوم کیجیے۔

(i) $(-18) \times (-10) \times 9$ (ii) $(-20) \times (-2) \times (-5) \times 7$

(iii) $(-1) \times (-5) \times (-4) \times (-6)$

**حل**

(i) $(-18) \times (-10) \times 9 = [(-18) \times (-10)] \times 9 = 180 \times 9 = 1620$

(ii) $(-20) \times (-2) \times (-5) \times 7 = -20 \times [(-2) \times (-5)] \times 7 = [-20 \times 10] \times 7 = -1400$

(iii) $(-1) \times (-5) \times (-4) \times (-6) = [(-1) \times (-5)] \times [(-4) \times (-6)] = 5 \times 24 = 120$

**مثال 3** جانچ کیجیے $(-30) \times [13 + (-3)] = [(-30) \times 13] + [(-30) \times (-3)]$

**حل** $(-30) \times [13 + (-3)] = (-30) \times 10 = -300$

$[(-30) \times 13] + [(-30) \times (-3)] = -390 + 90 = -300$

اس لیے $(-30) \times [13 + (-3)] = [(-30) \times 13] + [(-30) \times (-3)]$

**مثال 4** ایک کلاس کی جانچ کے پرچہ میں 15 سوال دیے گئے تھے۔ اس میں ہر صحیح جواب کے لیے 4 نمبر اور ہر غلط جواب کے لیے (2–) نمبر دیے گئے۔

(i) مینا نے تمام سوال حل کیے مگر اس کے صرف 9 جواب صحیح تھے۔ اس نے کل کتنے نمبر حاصل کیے۔

(ii) اس کی ایک دوست کے صرف 5 جواب صحیح تھے اس کو کتنے نمبر ملے؟

**حل** (i) ایک صحیح جواب کے لیے حاصل ہونے والے نمبر = 4

اس لیے 9 صحیح جوابات کے لیے حاصل ہونے والے نمبر = $4 \times 9 = 36$

ایک غلط جواب کے لیے حاصل ہونے والے نمبر = $-2$

اس لیے $(15 - 9) = 6$ غلط جوابات کے لیے حاصل ہونے والے نمبر = $(-2) \times 6 = -12$

اس لیے، مینا نے کل نمبر حاصل کیے $= 36 + (-12) = 24$

(ii) ایک صحیح جواب کے لیے حاصل ہونے والے نمبر $= 4$

اس لیے، 5 صحیح جوابات کے لیے حاصل ہونے والے نمبر $= 4 \times 5 = 20$

ایک غلط جواب کے لیے حاصل ہونے والے نمبر $= (-2)$

اس لیے، (5 – 15=) 10 غلط جوابات کے لیے حاصل ہونے والے نمبر $= (-2) \times 10 = -20$

اس لیے، اس کی دوست کو کل نمبر ملے $= 20 + (-20) = 0$

**مثال 5** مان لیجیے ہم نے سطح زمین سے اوپر کے فاصلے کو مثبت صحیح عدد اور سطح زمین سے نیچے کے فاصلہ کو منفی صحیح عدد سے ظاہر کیا ہے۔

درج ذیل کے جواب دیجیے:

(i) ایک رافع مشین ایک کان میں 5 میٹر فی منٹ کی رفتار سے اندر اتری۔ ایک گھنٹہ بعد وہ کہاں ہوگی؟

(ii) اگر یہ مشین سطح زمین سے 15 میٹر اونچائی سے نیچے اترنا شروع کرے تو یہ 45 منٹ بعد کہاں ہوگی۔

**حل**

(i) کیونکہ مشین نیچے جا رہی ہے اس لیے اس کے ذریعے طے کیا گیا فاصلہ منفی صحیح عدد سے ظاہر کیا جائے گا۔

ایک منٹ میں رافع مشین دوری طے کرتی ہے $= -5$ میٹر

60 منٹ بعد رافع مشین دوری طے کرے گی $= -5 \times 60 = -300$ میٹر

یعنی سطح زمین سے 300 میٹر نیچے

(ii) رافع مشین 45 منٹ میں دوری طے کرے گی $= -5 \times 45 = -225$ میٹر

یعنی سطح زمین سے 225 میٹر نیچے

اس لیے، رافع مشین کل دوری طے کرے گی $= -225 + 15 = -210$ میٹر

یعنی سطح زمین سے 210 میٹر نیچے۔

## مشق 1.3

1۔ درج ذیل کے لیے حاصل ضرب معلوم کیجیے

(a) $3 \times (-1)$  (b) $(-1) \times 225$

(c) $(-21) \times (-30)$  (d) $(-316) \times (-1)$

(e) $(-15) \times 0 \times (-18)$  (f) $(-12) \times (-11) \times (10)$

(g) $9 \times (-3) \times (-6)$  (h) $(-18) \times (-5) \times (-4)$

(i) $(-1) \times (-2) \times (-3) \times 4$  (j) $(-3) \times (-6) \times (-2) \times (-1)$

2۔ درج ذیل کو ثابت کیجیے :

(a) $18 \times [7 + (-3)] = [18 \times 7] + [18 \times (-3)]$

(b) $(-21) \times [(-4) + (-6)] = [(-21) \times (-4)] + [(-21) \times (-6)]$

3۔ (i) کسی بھی صحیح عدد a کے لیے $(-1) \times a$ کس کے برابر ہوگا؟

(ii) وہ صحیح عدد بتائیے جس کا $(-1)$ کے ساتھ حاصل ضرب ہے۔

(a) $-22$ (b) $37$ (c) $0$

4۔ $5 \times (-1)$ سے شروع کرتے ہوئے $(-1) \times (-1) = 1$ کو کچھ پیٹرن کے ذریعے دکھاتے ہوئے مختلف حاصل ضرب لکھیے۔

5۔ مناسب خصوصیات کا استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کا حاصل ضرب معلوم کیجیے:

(a) $26 \times (-48) + (-48) \times (-36)$ (b) $8 \times 53 \times (-125)$

(c) $15 \times (-25) \times (-4) \times (-10)$ (d) $(-41) \times 102$

(e) $625 \times (-35) + (-625) \times 65$ (f) $7 \times (50 - 2)$

(g) $(-17) \times (-29)$ (h) $(-57) \times (-19) + 57$

6۔ ایک خاص انجمادی عمل کس کمرے کے درجۂ حرارت کو جو کہ 40°C ہے، 5°C فی گھنٹہ کی شرح سے کم کرتا ہے۔ یہ عمل شروع ہونے کے 10 گھنٹے بعد کمرے کا درجۂ حرارت کیا ہوگا؟

7۔ کسی کلاس کے جانچ کے پرچے میں کل 10 سوالات دیے گئے ہیں۔ اس میں ہر صحیح جواب کے لیے 10 نمبر اور ہر غلط جواب کے لیے (2–) نمبر دیے جاتے ہیں اور اگر کوئی سوال کیا ہی نہیں ہے تو 0 نمبر دیے جاتے ہیں۔

(i) موہن نے چار صحیح اور چھ غلط سوال کیے، اس کا اسکور کیا ہوگا؟

(ii) ریشما نے پانچ صحیح اور پانچ غلط سوال کیے، اس کا اسکور کیا ہوگا؟

(iii) حِنا نے کل سات سوال کیے جس میں دو صحیح اور پانچ غلط ہیں، اس کا اسکور کیا ہے؟

8۔ ایک سیمنٹ کی کمپنی ہر سفید سیمنٹ کی بوری بیچنے پر 8 ₹ نفع اور ہر سرمئی سیمنٹ کی بوری بیچنے پر 5 ₹ کا نقصان اٹھاتی ہے۔

(a) کمپنی نے ایک مہینے میں 3,000 بوریاں سفید سیمنٹ کی اور 5,000 بوریاں سرمئی سیمنٹ کی بیچیں۔ اس کا کل نفع یا نقصان بتائیے؟

(b) اگر کمپنی 6,400 بوریاں سرمئی سیمنٹ کی بیچتی ہے تو اس کو کتنی بوریاں سفید سیمنٹ کی بیچنی ہوں گی تا کہ اس کو نہ تو کوئی نفع ہو اور نہ ہی نقصان ہو۔

9۔ دیے گئے بیانات کو صحیح بنانے کے لیے خالی جگہوں کو صحیح عدد سے بھریے

(a) $(-3) \times$ _____ $= 27$ (b) $5 \times$ _____ $= -35$

(c) _____ $\times (-8) = -56$ (d) _____ $\times (-12) = 132$

## 1.6 صحیح اعداد کی تقسیم (Division of Integers)

ہم جانتے ہیں کہ تقسیم، ضرب کا برعکس عمل ہے۔ آیئے مکمل اعداد کے لیے ایک مثال پر غور کریں۔

کیونکہ $3 \times 5 = 15$

اس لیے $15 \div 5 = 3$ اور $15 \div 3 = 5$

اسی طرح $4 \times 3 = 12$ سے حاصل ہوگا $12 \div 4 = 3$ اور $12 \div 3 = 4$

ہم کہہ سکتے ہیں کہ مکمل اعداد کی ضرب کے ہر بیان کے لیے ہم دو تقسیم کے بیانات دے سکتے ہیں۔

کیا آپ صحیح اعداد کی ضرب کے بیان اور اس کے لیے تقسیم کے بیانات لکھ سکتے ہیں؟

• درج ذیل کا مشاہدہ کیجیے اور اس کو مکمل بھی کیجیے:

| ضربی بیانات | ہم آہنگ تقسیمی بیانات |
|---|---|
| 2 × (– 6) = (–12) | (–12) ÷ 2 = (– 6) , (–12) ÷ (– 6) = 2 |
| (– 4) × 5 = (–20) | (–20) ÷ (– 4) = 5 , (–20) ÷ (5) = (– 4) |
| (– 8) × (–9) = 72 | 72 ÷ _____ = _____ , 72 ÷ _____ = _____ |
| (–3) × (–7) = _____ | _____ ÷ (–3) = _____ , _____________ |
| (– 8) × 4 = _____ | _____________ , _____________ |
| 5 × (– 9) = _____ | _____________ , _____________ |
| (–10) × (–5) = | _____________ , _____________ |

اوپر دیے گئے بیانات سے ہم نے مشاہدہ کیا کہ:

(–12) ÷ 2 = (– 6)

(–20) ÷ (5) = (– 4)

(–32) ÷ 4 = – 8

(– 45) ÷ 5 = – 9

**کوشش کیجیے:**

معلوم کیجیے:

(a) (–100) ÷ 5 (b) (–81) ÷ 9

(c) (–75) ÷ 5 (d) (–32) ÷ 2

ہم نے مشاہدہ کیا کہ جب ہم ایک منفی صحیح عدد کو ایک مثبت صحیح عدد سے تقسیم کرتے ہیں تو ہم ان اعداد کو مکمل اعداد کی طرح ہی تقسیم کرتے ہیں اور خارج قسمت سے پہلے (–) کا نشان لگا دیتے ہیں۔

72 ÷ (–8) = –9 and 50 ÷ (–10) = –5

72 ÷ (–9) = – 8 50 ÷ (–5) = –10

اس لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ جب ہم ایک مثبت صحیح عدد کو ایک منفی صحیح عدد سے تقسیم کرتے ہیں تو ہم پہلے ان کو مکمل اعداد کی طرح ہی تقسیم کرتے ہیں اور پھر خارج قسمت سے پہلے ایک منفی نشان لگا دیتے ہیں۔

عام طور پر کوئی بھی دو مثبت صحیح اعداد a اور b کے لیے

$a \div (-b) = (-a) \div b$ جہاں $b \neq 0$

کیا ہم کہہ سکتے ہیں کہ
$(-48) \div 8 = 48 \div (-8)$?
آؤ چیک کریں۔ ہم جانتے ہیں کہ
$(-48) \div 8 = -6$
اور $48 \div (-8) = -6$
اس لیے $(-48) \div 8 = 48 \div (-8)$
چیک کیجیے اس کے لیے
(i) $90 \div (-45)$ and $(-90) \div 45$
(ii) $(-136) \div 4$ and $136 \div (-4)$

## کوشش کیجیے:

معلوم کیجیے:

(a) $125 \div (-25)$ (b) $80 \div (-5)$ (c) $64 \div (-16)$

اور آخر میں ہم یہ بھی مشاہدہ کرتے ہیں کہ

$(-12) \div (-6) = 2$; $(-20) \div (-4) = 5$; $(-32) \div (-8) = 4$; $(-45) \div (-9) = 5$

اس لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ جب ہم ایک منفی صحیح عدد کو ایک منفی صحیح عدد سے تقسیم کرتے ہیں تو ہم پہلے ان کو مکمل اعداد کی طرح ہی تقسیم کرتے ہیں تو ہم پہلے ان کو مکمل اعداد کی طرح ہی تقسیم کرتے ہیں اور پھر خارج قسمت سے پہلے ایک مثبت نشان (+) لگا دیتے ہیں۔

عام طور پر کسی دو مثبت صحیح اعداد a اور b کے لیے

$(-a) \div (-b) = a \div b$ جہاں $b \neq 0$

## کوشش کیجیے:

معلوم کیجیے (a) $(-36) \div (-4)$ (b) $(-201) \div (-3)$ (c) $(-325) \div (-13)$

## 1.7 صحیح اعداد کی تقسیم کی خصوصیات (Properties Of Division Of Integers)

درج ذیل جدول کا مشاہدہ کیجیے اور اس کو مکمل کیجیے:

| بیانات | حاصل کردہ نتائج | بیانات | حاصل کردہ نتائج |
|---|---|---|---|
| $(-8) \div (-4) = 2$ | جواب ایک صحیح عدد ہے | $(-8) \div 3 = \frac{-8}{3}$ | ________ |
| $(-4) \div (-8) = \frac{-4}{-8}$ | جواب ایک صحیح عدد نہیں ہے | $3 \div (-8) = \frac{3}{-8}$ | ________ |

آپ کا مشاہدہ کیا ہے؟ ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ صحیح اعداد کی تقسیم بندشی خصوصیت نہیں رکھتی ہے۔

پانچ اور مثالوں سے اس کو ثابت کیجیے۔

- ہم جانتے ہیں کہ مکمل اعداد کی تقسیم تقلیبی خصوصیت نہیں رکھتی ہے۔اس کو صحیح اعداد کے لیے بھی جانچیے۔

آپ جدول سے دیکھ سکتے ہیں کہ $(-8) \div (-4) \neq (-4) \div (-8)$

کیا $(-9) \div 3$ اور $3 \div (-9)$ ایک سے ہیں؟

کیا $(-30) \div (-6)$ اور $(-6) \div (-30)$ ایک سے ہیں؟

کیا ہم کہہ سکتے ہیں کہ صحیح اعداد کی تقسیم تقلیبی خصوصیت رکھتی ہے؟ نہیں۔

صحیح اعداد کے پانچ اور جوڑے لے کر آپ اس کی تصدیق کر سکتے ہیں۔

- مکمل اعداد کی طرح ہی کسی بھی صحیح عدد کو صفر سے تقسیم کرنا بے معنی ہے اور اگر صفر کو صفر کے علاوہ کسی دوسرے صحیح عدد سے تقسیم کرنے پر صفر ہی حاصل ہوتا ہے، یعنی کسی بھی صحیح عدد a کے لیے $a \div 0$ بے معنی ہے لیکن $0 \div a = 0$ جہاں $a \neq 0$

- جب ہم کسی مکمل عدد کو 1 سے تقسیم کرتے ہیں تو ہمیں وہ مکمل عدد حاصل ہوتا ہے۔ ذرا جانچیے تو کیا یہ بات منفی صحیح اعداد کے لیے بھی درست ہے۔

درج ذیل کا مشاہدہ کیجیے:

| | | |
|---|---|---|
| $(-8) \div 1 = (-8)$ | $(-11) \div 1 = -11$ | $(-13) \div 1 = -13$ |
| $(-25) \div 1 =$ ____ | $(-37) \div 1 =$ ____ | $(-48) \div 1 =$ ____ |

اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ کسی منفی عدد کو جب 1 سے تقسیم کیا جاتا ہے تو وہی صحیح عدد حاصل ہوتا ہے۔ اس لیے کسی بھی صحیح عدد کو 1 سے تقسیم کرنے پر وہی صحیح عدد حاصل ہوتا ہے۔

عام طور پر کسی صحیح عدد a کے لیے

$$a \div 1 = a$$

- اگر ہم کسی صحیح عدد کو (1–) سے تقسیم کریں تو کیا ہوگا؟ درج ذیل جدول کو مکمل کیجیے

| | | |
|---|---|---|
| $(-8) \div (-1) = 8$ | $11 \div (-1) = -11$ | $13 \div (-1) =$ ____ |
| $(-25) \div (-1) =$ ____ | $(-37) \div (-1) =$ ____ | $-48 \div (-1) =$ ____ |

آپ کا مشاہدہ کیا ہے؟

ہم کہہ سکتے ہیں کہ کسی صحیح عدد کو (1–) سے تقسیم کرنے پر وہی صحیح عدد حاصل نہیں ہوتا ہے۔

- کیا ہم کہہ سکتے ہیں $[(-16) \div 4] \div (-2)$ اور $(-16) \div [4 \div (-2)]$ دونوں ایک ہی ہیں؟

ہم جانتے ہیں کہ $[(-16) \div 4] \div (-2) = (-4) \div (-2) = 2$

اور $(-16) \div [4 \div (-2)] = (-16) \div (-2) = 8$

اس لیے $[(-16) \div 4] \div (-2) \neq (-16) \div [4 \div (-2)]$

**کوشش کیجیے:**

معلوم کیجیے:

(i) $1 \div a = 1$?

(ii) کسی بھی صحیح عدد $a$ کے لیے $a \div (-1) = (-a)$?

$a$ کی الگ الگ قیمتیں لے کر جانچ کیجیے۔

کیا آپ کہہ سکتے ہیں کہ صحیح اعداد کی تقسیم تلازمی خصوصیت رکھتی ہے؟ نہیں۔

آپ اپنے سے کوئی پانچ مثالیں لے کر اس کو ثابت کیجیے۔

**مثال 6** ایک جانچ میں ہر صحیح جواب کے لیے $(+5)$ اور ہر غلط جواب کے لیے $(-2)$ نمبر دیے گئے۔

(i) رادھیکا نے تمام سوالوں کے جواب دیے اور اس کو 30 نمبر ملے جب کہ اس کے دس جواب صحیح تھے۔

(ii) جے نے بھی سارے سوالوں کے جواب دیے اور اس کو $(-12)$ نمبر ملے جب کہ اس کے 4 جواب صحیح تھے۔

ان لوگوں نے کتنے سوال غلط کیے؟

**حل**

(i) ایک صحیح سوال کے لیے نمبر ملے $=5$

اس لیے 10 صحیح سوالوں کے لیے نمبر ملے $5\times10=50$

رادھیکا کا اسکور ہے $=30$

غلط جوابوں کے لیے نمبر ملے $30-50=-20$

ایک غلط سوال کے لیے نمبر ملے $=(-2)$

اس لیے کل غلط سوالوں کی تعداد $=(-20)\div(-2)=10$

(ii) 4 صحیح جوابوں کے لیے نمبر ملے $5\times4=20$

جے کا اسکور ہے $=-12$

غلط جوابوں کے لیے نمبر ملے $-12-20=-32$

ایک غلط جواب کے لیے نمبر $=(-2)$

اس لیے کل غلط سوالوں کی تعداد $=(-32)\div(-2)=16$

**مثال 7** ایک دکاندار ایک پین بیچ کر ₹1 نفع کماتا ہے جب کہ اپنے پرانے رکھے سامان کی ایک پنسل بیچنے سے اس کو 40 پیسے کا نقصان ہوتا ہے۔

(i) ایک مہینے میں اس کو کل 5 روپے کا نقصان ہوا۔ اس میں اس نے 45 پین بیچے۔ بتائیے اس نے اس مہینے میں کتنی پنسلیں بیچیں۔

(ii) اگلے مہینے میں اس کو نہ تو کوئی نفع ہوا اور نہ ہی کوئی نقصان ہوا۔ اگر اس نے 70 پین بیچے تو اس نے کتنی پینسلیں بیچیں؟

**حل**

(i) ایک پین بیچنے سے کمایا گیا نفع $=$ ₹ 1

45 پین بیچنے پر کمایا گیا نفع $=$ ₹ 45

اس کو ہم 45+ ₹ سے ظاہر کریں گے

کل سہا گیا نقصان= 5 ₹ ،اس کو ہم 5– ₹ سے ظاہر کریں گے۔

کمایا گیا نفع+سہا گیا نقصان= کل نقصان

اس لیے سہا گیا نقصان= کل نقصان– کمایا گیا نفع

= ₹ (–5 – 45)

= ₹(–50)

= 5000 پیسے

ایک پنسل بیچنے سے سہا گیا نقصان= 40 پیسے، جس کو ہم 40– پیسے سے ظاہر کریں گے۔

اس لیے بیچی گئی پنسلوں کی تعداد= (–5000) ÷ (– 40) = 125

اگلے مہینے میں نہ کوئی نفع ہوا اور نہ ہی نقصان اس لیے کمایا گیا نفع+سہا گیا نقصان= 0

یعنی کمایا گیا نفع= –سہا گیا نقصان

اب 70 پین بیچنے سے کمایا گیا نفع= 70 ₹

اس لیے پنسلوں کو بیچنے سے سہا گیا نقصان= 70 ₹ جس کو ہم 70– ₹ یا 7,000– پیسے ظاہر کریں گے۔

بیچی گئی کل پنسلوں کی تعداد= (–7000) ÷ (– 40) = 175 پنسلیں

## مشق 1.4

1۔ درج ذیل کی قیمت معلوم کیجیے

(a) $(-30) \div 10$ (b) $50 \div (-5)$ (c) $(-36) \div (-9)$

(d) $(-49) \div (49)$ (e) $13 \div [(-2) + 1]$ (f) $0 \div (-12)$

(g) $(-31) \div [(-30) + (-1)]$ (h) $[(-36) \div 12] \div 3$ (i) $[(-6) + 5)] \div [(-2) + 1]$

2۔ $a$، $b$ اور $c$ کی درج ذیل قیمتوں کے لیے $a \div (b + c) \neq (a \div b) + (a \div c)$ کی جانچ کیجیے

(a) $a = 12, b = -4, c = 2$ (b) $a = (-10), b = 1, c = 1$

3۔ خالی جگہیں بھریے

(a) 369 ÷ _____ = 369 (b) (–75) ÷ _____ = –1

(c) (–206) ÷ _____ = 1 (d) – 87 ÷ _____ = 87

(e) _____ ÷ 1 = – 87 (f) _____ ÷ 48 = –1

(g) $20 \div ____ = -2$ (h) $____ \div (4) = -3$

4۔ کوئی پانچ صحیح اعداد کے جوڑے (a,b) اس طرح لکھیے کہ $a \div b = -3$ ہو۔ ایسا ایک جوڑا (6, –2) ہے کیونکہ $6 \div (-2) = (-3)$

5۔ 12 بجے دو پہر کا درجہ حرارت صفر سے 10°C زیادہ ہے۔ اگر یہ آدھی رات تک 2°C فی گھنٹے کی شرح سے گھٹتا ہے تو صفر سے 8°C کم درجہ حرارت کس وقت ہوگا؟ آدھی رات کو درجہ حرارت کیا ہوگا؟

6۔ کلاس کی ایک جانچ میں ہر صحیح جواب کے لیے (3+) نمبر، ہر غلط جواب کے لیے (2–) نمبر دیے گئے ہیں۔ اگر کوئی سوال حل نہیں کیا گیا ہے تو اس کے کچھ بھی نمبر نہیں دیے گئے ہیں۔ (i) رادھیکا کو 20 نمبر ملے ہیں۔ اگر اس کے 12 جواب صحیح ہیں تو اس کے غلط جوابات کی تعداد کیا ہے؟ (ii) موہنی کو اس جانچ میں 5– نمبر ملے جب کہ اس کے 7 جواب صحیح تھے۔ اس نے کتنے غلط جواب دیے ہیں؟

7۔ ایک رافع مشین ایک کان میں 6 میٹر فی منٹ کی رفتار سے نیچے جاتی ہے اور سطح زمین سے 10 میٹر کی اونچائی سے اس مشین نے جانا شروع کیا تو 350 میٹر کی گہرائی تک پہنچنے میں اس کو کتنی دیر لگے گی۔

## ہم نے کیا سیکھا؟

1۔ مکمل اعداد اور ان کے منفی اعداد کو ملا کر بننے والا بڑا مجموعہ صحیح اعداد ہوتے ہیں۔ اس کا تعارف چھٹی کلاس میں کرایا جا چکا ہے۔

2۔ آپ پچھلی جماعت میں عددی خط پر صحیح اعداد کا اظہار اور ان کی جمع و تفریق سیکھ چکے ہیں۔

3۔ اب ہم جمع اور تفریق کی کچھ خصوصیات کے بارے میں پڑھتے ہیں۔

(a) صحیح اعداد کی جمع اور تفریق دونوں ہی بندشی خصوصیت رکھتی ہیں۔ یعنی $a+b$ اور $a-b$ دونوں صحیح اعداد ہیں۔ جہاں a اور b صحیح اعداد ہیں۔

(b) صحیح اعداد کی جمع تقلیبی خصوصیت رکھتی ہے۔ یعنی سبھی صحیح اعداد a اور b کے لیے $a + b = b + a$

(c) صحیح اعداد کی جمع تلازمی خصوصیت رکھتی ہے۔ یعنی سبھی صحیح اعداد a، b اور c کے لیے $(a + b) + c = a + (b + c)$

(d) صحیح اعداد کا جمعی تماثلہ صحیح عدد 0 ہے۔ یعنی کسی بھی صحیح عدد a کے لیے $a + 0 = 0 + a = a$

4۔ ہم نے پڑھا ہے کہ صحیح اعداد کی ضرب کیسے ہوتی ہے اور ہم نے دیکھا کہ ایک مثبت اور ایک منفی صحیح عدد کا حاصل ضرب ایک منفی صحیح عدد ہوتا ہے، جب کہ دو منفی صحیح اعداد کا حاصل ضرب ایک مثبت صحیح عدد ہے۔ مثال کے طور پر $-2\times7=-14$ اور $-3\times-8=24$

5۔ ضرب کیے جانے والے منفی صحیح اعداد کی تعداد اگر جفت ہے تو حاصل ضرب مثبت ہوگا اور اگر یہ تعداد طاق ہے تو حاصل ضرب منفی ہوگا۔

6۔ صحیح اعداد کی ضرب کی بھی کچھ خصوصیات ہیں۔

(a) صحیح اعداد کی ضرب بندشی خصوصیت رکھتی ہے، یعنی کوئی بھی دو صحیح اعداد a اور b کے لیے $a \times b$ بھی ایک صحیح عدد ہے۔

(b) صحیح اعداد کی ضرب تقلیبی خصوصیت رکھتی ہے۔یعنی کوئی بھی دو صحیح اعداد a اور b کے لیے $a \times b = b \times a$ ہے۔

(c) صحیح عدد 1، صحیح اعداد کا ضربی تماثلہ ہے۔یعنی کسی بھی صحیح عدد a کے لیے $1 \times a = a \times 1 = a$ ہے

(d) صحیح اعداد کی ضرب تلازمی خصوصیت بھی رکھتی ہے۔یعنی کسی بھی تین صحیح اعداد a، b اور c کے لیے $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

7۔ صحیح اعداد کی جمع اور ضرب کی ایک اور خصوصیت بھی ہے جس کو تقسیمی خصوصیت کہتے ہیں۔یعنی کسی بھی تین صحیح اعداد a، b اور c کے لیے $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

8۔ صحیح اعداد کی جمع اور ضرب کے تحت تقلیبی ، تلازمی اور تقسیمی خصوصیات ہمارے حساب کو آسان کرنے میں مددگار ثابت ہوتی ہیں۔

9۔ ہم نے صحیح اعداد کی تقسیم بھی سیکھی۔ہم نے پایا کہ

(a) جب ایک مثبت صحیح عدد کو کسی منفی صحیح عدد سے تقسیم کیا جاتا ہے تو خارج قسمت منفی عدد آتا ہے اور اس کا الٹا بھی۔

(b) ایک منفی صحیح عدد کو کسی منفی صحیح عدد سے تقسیم کرنے پر خارج قسمت مثبت عدد آتا ہے۔

10۔ کسی بھی صحیح عدد a کے لیے

(a) $a \div 0$ بے معنی ہے

(b) $a \div 1 = a$

باب 2

4714CH02

# کسری اور اعشاریائی اعداد

## 2.1 تعارف (Introduction)

آپ گزشتہ کلاسوں میں کسری اور اعشاریائی اعداد کے بارے میں پڑھ چکے ہیں۔ کسری اعداد کے مطالعہ کے دوران واجب، غیر واجب اور مخلوط اعداد اور ساتھ ہی ساتھ ان کی جمع و تفریق کے بارے میں بھی پڑھا ہے۔ ہم نے کسری اعداد کا موازنہ، معادل کسریں، عددی خط پر کسری اعداد کا اظہار اور کسری اعداد کی ترتیب کے بارے میں پڑھ لیا ہے۔

اعشاریائی اعداد میں، ہم نے ان کا موازنہ، عددی خط پر ان کا اظہار اور ان کی جمع و تفریق کے بارے میں پڑھا ہے۔

اب ہم کسری اعداد اور اعشاریائی اعداد کی ضرب اور تقسیم کے بارے میں پڑھیں گے۔

## 2.2 آپ کسری اعداد کے بارے میں کیا جانتے ہیں؟
## (How Well Have You Learnt About Fractions?)

**واجب کسر** وہ کسر ہے جو کسی مکمل چیز کے ایک حصہ کو ظاہر کرتی ہے۔ کیا $\frac{7}{4}$ واجب کسر ہے؟ کون بڑا ہے، شمار کنندہ یا نسب نما؟

**غیر واجب کسر**، واجب کسر اور مکمل کا مجموعہ ہے۔ کیا $\frac{7}{4}$ غیر واجب کسر ہے؟ یہاں کون بڑا ہے، شمار کنندہ یا نسب نما؟

غیر واجب کسر $\frac{7}{4}$ کو $1\frac{3}{4}$ بھی لکھ سکتے ہیں۔ یہ مخلوط کسر ہے۔

کیا آپ واجب، غیر واجب اور مخلوط کسروں میں ہر ایک کی پانچ پانچ مثالیں لکھ سکتے ہیں؟

**مثال 1** $\frac{3}{5}$ کی پانچ معادل کسریں لکھیے۔

**حل** $\frac{3}{5}$ کی ایک معادل کسر ہے

$\frac{3}{5} = \frac{3\times 2}{5\times 2} = \frac{6}{10}$ چار اور معادل کسریں معلوم کیجیے۔

**مثال 2** رمیش نے ایک مشق کا $\frac{2}{7}$ حصہ حل کیا جب کہ سیما نے اس کا $\frac{4}{5}$ حصہ حل کیا۔ کس نے کم حصہ حل کیا؟

**حل** یہ معلوم کرنے کے لیے کہ کس نے کم حصہ حل کیا، آیئے ہم $\frac{2}{7}$ اور $\frac{4}{5}$ کا موازنہ کرتے ہیں۔

ان کو یکساں کسر میں بدلنے پر ہم کو حاصل ہوتا ہے $\frac{2}{7}=\frac{10}{35}$ ، $\frac{4}{5}=\frac{28}{35}$

کیونکہ $28 > 10$، اس لیے $\frac{10}{35} < \frac{28}{35}$

اس طرح $\frac{2}{7} < \frac{4}{5}$

رمیش نے سیما سے کم حصہ حل کیا۔

**مثال 3** سمیرا نے $3\frac{1}{2}$ کلوگرام سیب اور $4\frac{3}{4}$ کلوگرام سنترے خریدے۔ اس نے کل کتنے وزن کے پھل خریدے؟

**حل** پھلوں کا کل وزن $= \left(3\frac{1}{2}+4\frac{3}{4}\right)$ کلوگرام

$= \left(\frac{7}{2}+\frac{19}{4}\right)$ کلوگرام $= \left(\frac{14}{4}+\frac{19}{4}\right)$ کلوگرام

$= \frac{33}{4}$ کلوگرام $= 8\frac{1}{4}$ کلوگرام

**مثال 4** سمن روزانہ $5\frac{2}{3}$ گھنٹے پڑھتی ہے۔ اس میں سے $2\frac{4}{5}$ گھنٹے وہ سائنس اور حساب پڑھتی ہے۔ دوسرے مضمون کو وہ کتنا وقت دیتی ہے؟

**حل** سمن کے پڑھنے کا کل وقت $= 5\frac{2}{3}$ گھنٹے $= \frac{17}{3}$ گھنٹے

سمن کے حساب اور سائنس پڑھنے کا وقت $= 2\frac{4}{5}$ گھنٹے $= \frac{14}{5}$ گھنٹے

دوسرے مضامین پڑھنے کا وقت $= \left(\frac{17}{3}-\frac{14}{5}\right)$ گھنٹے

$= \left(\frac{17\times 5}{15}-\frac{14\times 3}{15}\right)$ گھنٹے $= \left(\frac{85-42}{15}\right)$ گھنٹے

$= \frac{43}{15}$ گھنٹے $= 2\frac{13}{15}$ گھنٹے

## مشق 2.1

1۔ حل کیجیے

(i) $2-\frac{3}{5}$ (ii) $4+\frac{7}{8}$ (iii) $\frac{3}{5}+\frac{2}{7}$ (iv) $\frac{9}{11}-\frac{4}{15}$

(v) $\frac{7}{10}+\frac{2}{5}+\frac{3}{2}$ (vi) $2\frac{2}{3}+3\frac{1}{2}$ (vii) $8\frac{1}{2}-3\frac{5}{8}$

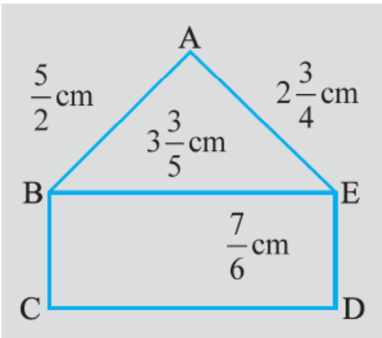
2۔ مندرجہ ذیل کو گھٹتی ترتیب میں لگایئے۔

(i) $\frac{2}{9},\frac{2}{3},\frac{8}{21}$ (ii) $\frac{1}{5},\frac{3}{7},\frac{7}{10}$

3۔ ایک طلسمی مربع ایسا چار خانہ ہوتا ہے جس کے اندر بنے چوکور خانوں میں درج اعداد کی گنتی افقی، عمودی، آڑی ہر قطار میں یکساں ہوتی ہے۔ کیا یہ ایک طلسمی مربع ہے۔

| | | |
|---|---|---|
| $\frac{4}{11}$ | $\frac{9}{11}$ | $\frac{2}{11}$ |
| $\frac{3}{11}$ | $\frac{5}{11}$ | $\frac{7}{11}$ |
| $\frac{8}{11}$ | $\frac{1}{11}$ | $\frac{6}{11}$ |

(پہلی افقی قطار میں $\frac{4}{11}+\frac{9}{11}+\frac{2}{11}=\frac{15}{11}$)




4۔ ایک مستطیل نما کاغذ کی لمبائی $12\frac{1}{2}$ سم اور چوڑائی $10\frac{2}{3}$ سم ہے۔ اس کا احاطہ معلوم کیجیے۔

5۔ اس تصویر میں (i) $\Delta ABE$ اور (ii) مستطیل BCDE کا احاطہ معلوم کیجیے۔ کس کا احاطہ زیادہ ہے؟

6۔ سلیل ایک فریم میں ایک تصویر لگانا چاہتا تھا۔ یہ تصویر $7\frac{3}{5}$ سم چوڑی تھی۔ اس فریم میں لگانے کے لیے تصویر $7\frac{3}{10}$ سم سے زیادہ چوڑی نہیں ہونی چاہیے۔ کتنی تصویر کاٹی جائے گی؟

7۔ ریتو نے ایک سیب کا $\frac{3}{5}$ حصہ کھالیا۔ باقی بچا ہوا حصہ اس کے بھائی سومو نے کھالیا۔ سومو نے سیب کا کتنا حصہ کھایا؟ کس کو زیادہ حصہ ملا؟ اور کتنا زیادہ؟

8۔ منوج نے ایک تصویر میں $\frac{7}{12}$ گھنٹے میں رنگ بھرا۔ ویبھو نے اسی تصویر میں $\frac{3}{4}$ گھنٹے میں رنگ بھرا۔ کس نے زیادہ دیر کام کیا؟ اور کتنا زیادہ؟

## 2.3 کسری اعداد کی ضرب (Multiplication Of Fractions)

کسی مستطیل کا رقبہ نکالنا آپ جانتے ہیں۔ یہ برابر ہوتا ہے۔ لمبائی × چوڑائی۔ اگر ایک مستطیل کی لمبائی 7 سم اور چوڑائی 4 سم ہے تو اس کا رقبہ کیا ہوگا؟ اس کا رقبہ ہوگا $7\times4=28$ مربع سم۔

اگر کسی مستطیل کی لمبائی اور چوڑائی بالترتیب $7\frac{1}{2}$ اور $3\frac{1}{2}$ سم ہو تو اس کا رقبہ کیا ہوگا؟ آپ کہیں گے کہ یہ برابر ہوگا۔ $7\frac{1}{2}\times3\frac{1}{2}=\frac{15}{2}\times\frac{7}{2}$ مربع سم۔

$\frac{15}{2}$ اور $\frac{7}{2}$ کسری اعداد ہیں۔ مستطیل کا رقبہ معلوم کرنے کے لیے ہم کو کسری اعداد کی ضرب آنا ضروری ہے۔ اس کو ہم اب پڑھیں گے۔

## 2.3.1 ایک کسری عدد کی ایک مکمل عدد سے ضرب
## Multiplication of a Fraction by a Whole Number

شکل 2.1

بائیں طرف دی گئی تصویر (تصویر 2.1) کو دیکھیے ۔ ہر رنگا ہوا حصہ دائرہ کا $\frac{1}{4}$ حصہ ہے۔ دونوں رنگے ہوئے حصے کل ملا کر کتنا حصہ ظاہر کر رہے ہیں؟ یہ ظاہر کریں گے

دونوں رنگے ہوئے حصوں کو ملانے پر ہم کو تصویر 2.2 حاصل ہوتی ہے۔ تصویر 2.2 میں دائرے کا کتنا حصہ رنگا ہوا ہے؟ یہ دائرہ $\frac{2}{4}$ حصہ کو ظاہر کر رہا ہے۔

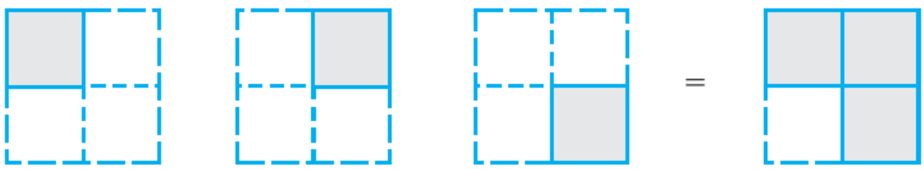
شکل 2.2

تصویر 2.1 میں رنگے ہوئے حصوں کو اکٹھا کرنے پر تصویر 2.2 کے حصے کے برابر ہے۔ یعنی ہم کو تصویر 2.3 ملتی ہے۔

شکل 2.3

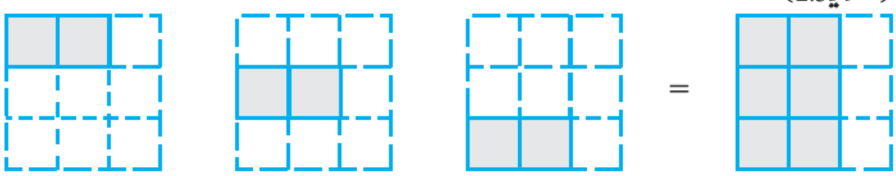
یا $2 \times \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$

کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ یہ تصویر کیا ظاہر کر رہی ہے؟ (تصویر 2.4)



شکل 2.4

اور یہ؟ (تصویر 2.5)



شکل 2.5

آیئے اب ذرا معلوم کیجیے $3 \times \frac{1}{2}$

ہم جانتے ہیں $3 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

ہم یہ بھی جانتے ہیں $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1+1+1}{2} = \frac{3 \times 1}{2} = \frac{3}{2}$

اس لیے $3 \times \frac{1}{2} = \frac{3 \times 1}{2} = \frac{3}{2}$

اسی طرح $\frac{2}{3} \times 5 = \frac{2 \times 5}{3} = ?$

کیا آپ بتا سکتے ہیں $3 \times \frac{2}{7} = ?$

اب تک ہم نے جن کسری اعداد کے بارے میں بات کی ہے یعنی $\frac{1}{2}$ ، $\frac{2}{3}$ ، $\frac{2}{7}$ اور $\frac{3}{5}$ یہ سب واجب کسریں ہیں۔

غیر واجب کسروں کے لیے بھی ہم دیکھتے ہیں کہ

$$2 \times \frac{5}{3} = \frac{2 \times 5}{3} = \frac{10}{3}$$

کوشش کیجیے، $3 \times \frac{8}{7} = ?$ ، $4 \times \frac{7}{5} = ?$

اس طرح کسی مکمل عدد کو ایک واجب یا غیر واجب عدد سے ضرب کرنے پر ہم مکمل عدد کو کسر کے شمار کنندہ سے ضرب کرتے ہیں اور نسب نما کو ایسے ہی رہنے دیتے ہیں۔

## کوشش کیجیے:

1- معلوم کیجیے: (a) $\frac{2}{7} \times 3$ (b) $\frac{9}{7} \times 6$ (c) $3 \times \frac{1}{8}$ (d) $\frac{13}{11} \times 6$

اگر حاصل ضرب ایک غیر واجب کسر ہے تو اس کو مخلوط کسر میں بدلیے۔

2- تصویروں کی مدد سے دکھائیے: $2 \times \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$

## کوشش کیجیے:

معلوم کیجیے (i) $5 \times 2\frac{3}{7}$ (ii) $1\frac{4}{9} \times 6$

ایک مخلوط کسر کو ایک مکمل عدد سے ضرب کرنے کے لیے پہلے مخلوط کسر کو غیر واجب کسر میں بدلیے اور پھر اس کو ضرب کیجیے۔

اس لیے $3 \times 2\frac{5}{7} = 3 \times \frac{19}{7} = \frac{57}{7} = 8\frac{1}{7}$

اسی طرح $2 \times 4\frac{2}{5} = 2 \times \frac{22}{5} = ?$

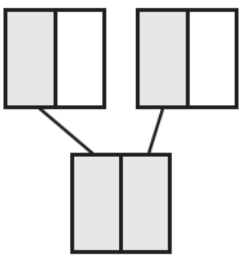
### کسر 'عدد کا ـــــــ واں حصہ' کے طور پر

ان تصاویر پر دھیان دیجیے (تصویر 2.6)

دونوں مربع بالکل مشابہ ہیں۔

ہر رنگا ہوا حصہ 1 کا $\frac{1}{2}$ ہے۔

اس لیے دونوں رنگے ہوئے حصے مل کر 2 کا $\frac{1}{2}$ حصہ کو ظاہر کرتے ہیں۔



شکل 2.6

دونوں رنگے ہوئے $\frac{1}{2}$ حصوں کو ملائیے۔ یہ 1 کو ظاہر کرتا ہے۔

اس لیے، ہم کہہ سکتے ہیں کہ 2 کا $\frac{1}{2}$، 1 ہے۔ ہم اس کو اس طرح بھی لکھ سکتے ہیں $\frac{1}{2} \times 2 = 1$

لہٰذا 2 کا $\frac{1}{2} = 1 = \frac{1}{2} \times 2 = 1$

ان مشابہ مربعوں کو بھی دیکھیے۔ (تصویر 2.7)

ہر رنگا ہوا حصہ 1 کا $\frac{1}{2}$ حصہ کو ظاہر کر رہا ہے۔

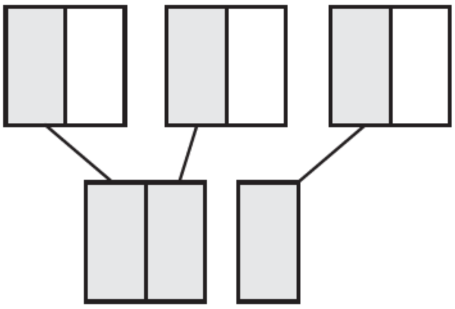
اس لیے دونوں رنگے ہوئے حصے 3 کا $\frac{1}{2}$ کو ظاہر کر رہے ہیں۔

3 رنگے ہوئے حصوں کو اکٹھا کیجیے

یہ $1\frac{1}{2}$ یعنی $\frac{3}{2}$ کو ظاہر کر رہا ہے۔

اس لیے 3 کا $\frac{1}{2}$ ہے $\frac{3}{2}$۔ اور $\frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$

لہٰذا، 3 کا $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$



شکل 2.7

اس لیے ہم نے دیکھا کہ 'کا' ضرب کو ظاہر کرتا ہے۔

فریدہ کے پاس 20 ماربل ہیں۔ ریشما کے پاس فریدہ کے ماربل کی تعداد کا $\frac{1}{5}$ حصہ ہے۔ ریشما کے پاس کتنے ماربل ہیں؟ جیسا کہ ہم جانتے ہیں کہ 'کا' ضرب کو ظاہر کرتا ہے اس لیے ریشماں کے پاس ہیں؛

$\frac{1}{5} \times 20 = 4$ ماربل

اسی طرح 16 کا $\frac{1}{2}$ ہے $\frac{1}{2} \times 16 = \frac{16}{2} = 8$

## کوشش کیجیے:

کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ:

(i) 10 کا $\frac{1}{2}$ (ii) 16 کا $\frac{1}{4}$ (iii) 25 کا $\frac{2}{5}$

**مثال 5** 40 طلبا کی کلاس میں طلبا کی کل تعداد کا $\frac{1}{5}$ حصہ انگریزی پڑھنا چاہتا ہے، کل تعداد کا $\frac{2}{5}$ حصہ ریاضی پڑھنا چاہتا ہے اور باقی بچے طلبا سائنس پڑھنا چاہتے ہیں۔

(i) کتنے طلبا انگریزی پڑھنا چاہتے ہیں؟

(ii) کتنے طلبا ریاضی پڑھنا چاہتے ہیں؟

(iii) کل تعداد کا کتنا حصہ سائنس پڑھنا چاہتے ہیں؟

**حل** کلاس میں کل طلبا کی تعداد = 40

(i) کل طلبا کی تعداد کا $\frac{1}{5}$ حصہ طلبا انگریزی پڑھنا چاہتے ہیں۔

اس طرح انگریزی پڑھنے والے طلبا کی تعداد = 40 کا $\frac{1}{5} = 8 = 40 \times \frac{1}{5}$

(ii) اپنے آپ حل کرنے کی کوشش کیجیے۔

(iii) انگریزی اور ریاضی پڑھنے کے خواہشمند طلبا کی تعداد 24=16+8

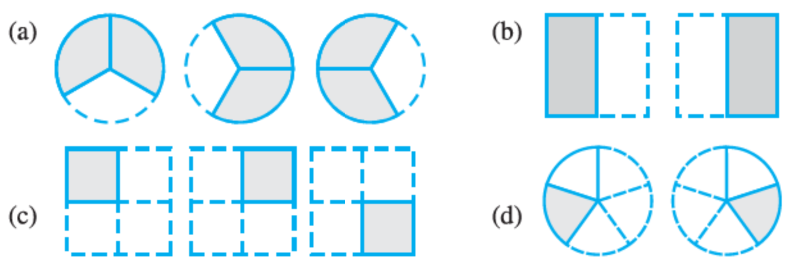
لہٰذا، سائنس پڑھنے کے خواہشمند طلبا کی تعداد 16=24–40

لہٰذا، مطلوبہ کسری عدد $\frac{16}{40}$ ہے۔

## مشق 2.2

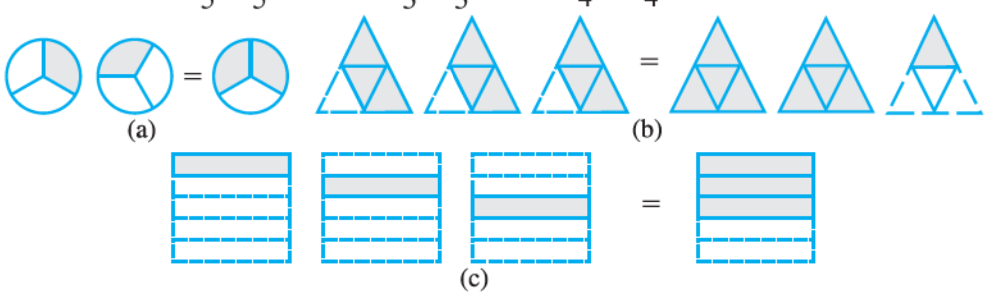
**1۔** نیچے دی گئی تصاویر (a) سے (d) تک، درج ذیل کن اعداد کو ظاہر کرتی ہیں۔

(i) $2\times\frac{1}{5}$ (ii) $2\times\frac{1}{2}$ (iii) $3\times\frac{2}{3}$ (iv) $3\times\frac{1}{4}$



**2۔** نیچے کچھ تصاویر (a) سے (c) دی گئی ہیں۔ بتائیے وہ کس کو ظاہر کر رہی ہیں۔

(i) $3\times\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$ (ii) $2\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ (iii) $3\frac{3}{4}=2\frac{1}{4}$



3۔ ضرب کیجیے اور کمترین ارکان میں لا کر مخلوط کسر میں بدلیے۔

(i) $7\times\frac{3}{5}$ (ii) $4\times\frac{1}{3}$ (iii) $2\times\frac{6}{7}$ (iv) $5\times\frac{2}{9}$ (v) $\frac{2}{3}\times 4$

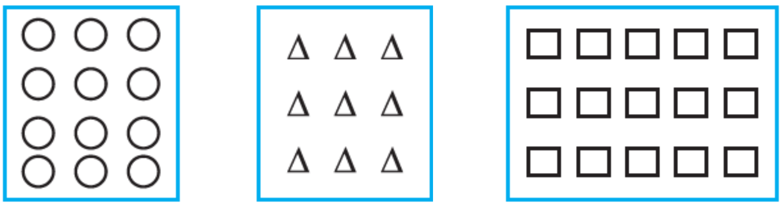
(vi) $\frac{5}{2}\times 6$ (vii) $11\times\frac{4}{7}$ (viii) $20\times\frac{4}{5}$ (ix) $13\times\frac{1}{3}$ (x) $15\times\frac{3}{5}$

4۔ رنگ بھریے:

(i) باکس (a) کے $\frac{1}{2}$ دائروں میں (ii) باکس (b) کے $\frac{2}{3}$ مثلثوں میں

(iii) باکس (c) کے $\frac{3}{5}$ مربعوں میں

(a) (b) (c)



5۔ معلوم کیجیے:

(a) $\frac{1}{2}$ (i) 24 کا (ii) 46 کا

(b) $\frac{2}{3}$ (i) 18 کا (ii) 27 کا

(c) $\frac{3}{4}$ (i) 16 کا (ii) 36 کا

(d) $\frac{4}{5}$ (i) 20 کا (ii) 35 کا

6۔ ضرب کیجیے اور مخلوط کسر میں بدلیے۔

(a) $3\times 5\frac{1}{5}$ (b) $5\times 6\frac{3}{4}$ (c) $7\times 2\frac{1}{4}$

(d) $4\times 6\frac{1}{3}$ (e) $3\frac{1}{4}\times 6$ (f) $3\frac{2}{5}\times 8$

7۔ معلوم کیجیے: (a) (i) $2\frac{3}{4}$ اور (ii) $4\frac{2}{9}$ دونوں کا $\frac{1}{2}$ (b) (i) $3\frac{5}{6}$ اور (ii) $9\frac{2}{3}$ دونوں کا $\frac{5}{8}$

8۔ ودیا اور پرتاپ پکنک پر گئے۔ ان کی امی نے ان کو 5 لیٹر پانی کی ایک بوتل دی۔ ودیا نے پانی کا $\frac{2}{5}$ حصہ استعمال کر لیا۔ باقی پانی پرتاپ نے استعمال کیا۔

(i) ودیا نے کتنا پانی پیا۔

(ii) کل پانی کا کتنا حصہ پانی پرتاپ نے پیا۔

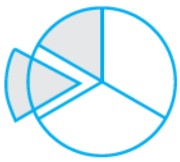
## 2.3.2 کسر کی کسر سے ضرب (Multiplication of a Fraction by a Fraction)

فریدہ کے پاس 9 سم لمبا ربن کا ٹکڑا ہے۔ اس نے اس ٹکڑے کے چار برابر حصّے کیے۔ اس نے یہ کیسے کیا؟ اس نے اس ٹکڑے کو دوبارہ موڑا۔ ہر حصہ کل لمبائی کے کتنے حصے کو ظاہر کر رہا ہے؟ ہر حصہ پورے ٹکڑے کا $\frac{9}{4}$ حصہ ہے۔ اس نے پھر ہر ٹکڑے کو دو برابر کے حصوں میں موڑ دیا۔

ہر ایک حصہ کس کو ظاہر کر رہا ہے؟ یہ $\frac{9}{4}$ کا $\frac{1}{2}$ یا $\frac{9}{4}\times\frac{1}{2}$ ہے۔

آیئے اب دیکھتے ہیں کہ دو کسری اعداد کا حاصل ضرب کیسے معلوم کرتے ہیں۔ جیسے $\frac{9}{4}\times\frac{1}{2}$

اس کو کرنے کے لیے پہلے ہم $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}$ جیسے حاصل ضرب معلوم کرنا سیکھتے ہیں۔



شکل 2.8

(a) ایک مکمل چیز کا $\frac{1}{3}$ کیسے معلوم کرتے ہیں؟ ہم مکمل چیز کو تین برابر کے حصوں میں بانٹتے ہیں۔ تینوں میں سے ہر حصہ مکمل کے $\frac{1}{3}$ حصہ کو ظاہر کر رہا ہے۔ تصویر 2.8 میں دکھائے گئے طریقے سے ان تین حصوں میں سے ایک حصہ لیجیے اور اس کو رنگیے۔

(b) آپ اس رنگے ہوئے حصے کا $\frac{1}{2}$ کیسے معلوم کر سکتے ہیں؟ رنگے ہوئے $\frac{1}{3}$ حصے کو دو برابر حصوں میں بانٹ دیجیے۔

شکل 2.9

ان دو میں سے ہر حصہ $\frac{1}{3}$ کا $\frac{1}{2}$ یعنی $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}$ (تصویر 2.9) کو ظاہر کرتا ہے۔

ان دو حصوں میں سے ایک حصہ لے لیجیے اور اس کا نام 'A' رکھیے۔ 'A' ظاہر کرتا ہے $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}$ کو۔

(c) مکمل کا 'A' کون سا حصہ ہے؟ اس کے لیے بچے ہوئے ہر $\frac{1}{3}$ حصّے کو دو برابر حصوں میں بانٹیے۔ اب آپ کے پاس ایسے کتنے حصے ہو گئے؟

اس طرح کے چھ برابر کے حصّے ہیں 'A' ان میں سے ایک ہے۔ اس لیے 'A' مکمل کا $\frac{1}{6}$ حصہ ہے۔ لہٰذا $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

ہم نے یہ کیسے طے کیا کہ 'A' مکمل کا $\frac{1}{6}$ حصہ ہے؟ مکمل کو بانٹا گیا $2\times3 = 6$ حصوں میں اور ان میں سے $1\times1=1$ حصہ لے لیا گیا۔

لہٰذا، $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}=\frac{1\times1}{2\times3}$

یا $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1\times1}{2\times3}$

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$ کی قیمت بھی اسی طریقے سے معلوم کی جا سکتی ہے۔ مکمل کو پہلے دو برابر حصوں میں بانٹیے اور پھر ان میں سے ایک کو پھر تین برابر

کے حصوں میں بانٹیے۔ان میں سے کوئی ایک حصہ لیجیے۔یہ حصہ ظاہر کرے گا $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$ یعنی $\frac{1}{6}$ کو۔

اس لیے،جیسا کہ پہلے بھی بات ہو چکی ہے

لہٰذا $$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}=\frac{1\times1}{2\times3}$$

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

معلوم کیجیے: $\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}$ اور $\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}$ اور $\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}$ اور جانچ کیجیے کہ کیا آپ کو یہ ملا

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3} \quad \text{اور} \quad \frac{1}{2}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}$$

## کوشش کیجیے:

باکس کو بھریے:

(i) $\frac{1}{2}\times\frac{1}{7}=\frac{1\times1}{2\times7}=\square$

(ii) $\frac{1}{5}\times\frac{1}{7}=\square=\square$

(iii) $\frac{1}{7}\times\frac{1}{2}=\square=\square$

(iv) $\frac{1}{7}\times\frac{1}{5}=\square=\square$

**مثال 6** سوشانت 1 گھنٹہ میں کتاب کا $\frac{1}{3}$ حصہ پڑھتا ہے۔کتاب کا کتنا حصہ وہ $2\frac{1}{5}$ گھنٹے میں پڑھے گا؟

**حل** 1 گھنٹے میں سوشانت نے کتاب کا حصہ پڑھا= $\frac{1}{3}$

اس لیے $2\frac{1}{5}$ گھنٹے میں وہ کتاب کا حصہ پڑھے گا= $2\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}$

$$=\frac{11}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{11\times1}{5\times3}=\frac{11}{15}$$

آیئے اب ذرا

ہم جانتے ہیں کہ $\frac{5}{3}=\frac{1}{3}\times5$

اس لیے $\frac{1}{2}\times\frac{5}{3}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times5=\frac{1}{6}\times5=\frac{5}{6}$

اور $\frac{1\times5}{2\times3}=\frac{5}{6}$

لہٰذا $\frac{1}{2}\times\frac{5}{3}=\frac{1\times5}{2\times3}=\frac{5}{6}$

اس کو درج ذیل تصاویر سے بھی دیکھا گیا ہے۔ان پانچ برابر کی اشکال میں سے ہر ایک (تصویر 2.10) پانچ مشابہ دائروں کا حصہ

ہے۔ان میں سے ایک شکل لیجیے۔اس شکل کو حاصل کرنے کے لیے ہم پہلے ایک دائرہ کو تین برابر حصوں میں بانٹتے ہیں۔ پھر ان تین برابر برابر حصوں کو پھر سے دو برابر برابر حصوں میں بانٹیے۔ان حصوں میں سے ایک حصہ وہی شکل ہے جس کی ہم بات کر رہے ہیں۔ یہ کیا ظاہر کرے گا؟

یہ ظاہر کرے گا $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ ۔ ایسے تمام حصوں کو ملانے پر حاصل ہوگا $5\times\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

شکل 2.10

اسی طرح $\frac{3}{5}\times\frac{1}{7}=\frac{3\times1}{5\times7}=\frac{3}{35}$

لہٰذا ہم معلوم کر سکتے ہیں $\frac{2}{3}\times\frac{7}{5}$ کو ایسے

اس لیے، ہم نے معلوم کیا کہ دو کسری اعداد کا اس طرح ضرب کرتے ہیں

شمار کنندہ کی حاصل ضرب / نسب نما کی حاصل ضرب

**کوشش کیجیے:**

معلوم کیجیے: $\frac{1}{3}\times\frac{4}{5}$ ، $\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}$

**کوشش کیجیے:**

معلوم کیجیے

$\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}$ ; $\frac{8}{3}\times\frac{4}{7}$

## حاصل ضرب کی قیمت

آپ جانتے ہیں کہ دو مکمل اعداد کا حاصل ضرب ان دونوں مکمل اعداد سے بڑا ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر $3\times4=12$ اور $12>4$، $12>3$۔ جب ہم دو کسری اعداد کو ضرب کریں گے تو حاصل ضرب کی قیمت کیا ہوگی؟ آیئے سب سے پہلے دو واجب کسروں کے حاصل ضرب کو دیکھیے۔

| | | |
|---|---|---|
| $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{8}{15}$ | $\frac{8}{15}<\frac{2}{3},\frac{8}{15}<\frac{4}{5}$ | حاصل ضرب دونوں کسروں سے چھوٹا ہے |
| $\frac{1}{5}\times\frac{2}{7}=$------ | ------,------ | ------------------------ |
| $\frac{3}{5}\times\frac{\square}{8}=\frac{21}{40}$ | ------,------ | ------------------------ |
| $\frac{2}{\square}\times\frac{4}{9}=\frac{8}{45}$ | ------,------ | ------------------------ |

آپ نے دیکھا کہ جب دو واجب کسروں کو ضرب کرتے ہیں تو ان کا حاصل ضرب ان میں سے ہر کسر سے چھوٹا ہوتا ہے۔ یا ہم کہہ سکتے ہیں کہ کسی دو واجب کسروں کا حاصل ضرب ان دونوں کسروں میں سے ہر ایک کسر سے چھوٹا ہوتا ہے۔

مزید پانچ مثالیں دے کر اس کی جانچ کیجیے۔

آیئے اب ذرا دو غیر واجب کسروں کو ضرب کیجیے

| | | |
|---|---|---|
| $\frac{7}{3}\times\frac{5}{2}=\frac{35}{6}$ | $\frac{35}{6}>\frac{7}{3},\frac{35}{6}>\frac{5}{2}$ | حاصل ضرب ہر کسر سے بڑا ہے |
| $\frac{6}{5}\times\frac{\square}{3}=\frac{24}{15}$ | ----,---- | -------------------- |
| $\frac{9}{2}\times\frac{7}{\square}=\frac{63}{8}$ | ----,---- | -------------------- |
| $\frac{3}{\square}\times\frac{8}{7}=\frac{24}{14}$ | ----,---- | -------------------- |

ہم نے دیکھا کہ دو غیر واجب کسروں کا حاصل ضرب، دونوں کسروں میں سے ہر کسر سے بڑا ہوتا ہے۔

یا، غیر واجب کسروں کا حاصل ضرب ان دونوں کسروں میں سے ہر ایک کسر سے بڑا ہوتا ہے۔

مزید پانچ مثالیں دے کر اس کی جانچ کیجیے۔

آیئے اب ایک واجب اور ایک غیر واجب کسر کو ضرب کرتے ہیں۔ جیسے $\frac{2}{3}$ اور $\frac{7}{5}$ ۔

ہم پائیں گے $\frac{2}{3}\times\frac{7}{5}=\frac{14}{15}$ ۔ یہاں $\frac{14}{15}<\frac{7}{5}$ اور $\frac{14}{15}>\frac{2}{3}$

حاصل ضرب کی جانے والی غیر واجب کسر سے چھوٹا ہے اور واجب کسر سے بڑا ہے۔

$\frac{2}{7}\times\frac{6}{5}$ ، $\frac{4}{5}\times\frac{8}{3}$ کے لیے اس کی جانچ کیجیے۔

## مشق 2.3

1۔ معلوم کیجیے:

(a) $\frac{1}{4}$ معلوم کیجیے: (i) $\frac{1}{4}$ کا (b) $\frac{3}{5}$ کا (c) $\frac{4}{3}$ کا

(b) $\frac{4}{3}$ معلوم کیجیے: (i) $\frac{2}{9}$ کا (b) $\frac{6}{5}$ کا (c) $\frac{3}{10}$ کا

2۔ ضرب کیجیے اور کمترین ارکان میں لکھیے (اگر ممکن ہو تو)۔

(i) $\frac{2}{3}\times 2\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{2}{3}\times 2\frac{2}{3}$ (iii) $\frac{3}{8}\times\frac{6}{4}$ (iv) $\frac{9}{5}\times\frac{3}{5}$

(v) $\frac{1}{3}\times\frac{15}{8}$ (vi) $\frac{11}{2}\times\frac{3}{10}$ (vii) $\frac{4}{5}\times\frac{12}{7}$

3۔ درج ذیل کسروں کو ضرب کیجیے۔

(i) $\frac{2}{5}\times5\frac{1}{4}$ (ii) $6\frac{2}{5}\times\frac{7}{9}$ (iii) $\frac{3}{2}\times5\frac{1}{3}$ (iv) $\frac{5}{6}\times2\frac{3}{7}$

(v) $3\frac{2}{5}\times\frac{4}{7}$ (vi) $2\frac{3}{5}\times3$ (vii) $3\frac{4}{7}\times\frac{3}{5}$

4۔ کون بڑا ہے۔

(i) $\frac{3}{4}$ کا $\frac{2}{7}$ یا $\frac{5}{8}$ کا $\frac{3}{5}$ (ii) $\frac{6}{7}$ کا $\frac{1}{2}$ یا $\frac{3}{7}$ کا $\frac{2}{3}$

5۔ سیلی نے اپنے باغیچہ کی ایک قطار میں 4 نئے پودے لگائے۔ دو متصل پودوں کے درمیان $\frac{3}{4}$ میٹر کا فاصلہ ہے۔ پہلے اور آخری پودے کے درمیان کا فاصلہ معلوم کیجیے۔

6۔ لیپکا ایک دن میں $1\frac{3}{4}$ گھنٹے ایک کتاب پڑھتی ہے۔ اس نے پوری کتاب 6 دنوں میں مکمل کی۔ پوری کتاب کو پڑھنے میں اس نے کل کتنے گھنٹے لگائے؟

7۔ ایک کار ایک لیٹر پٹرول میں 16 کلومیٹر چلتی ہے۔ $2\frac{3}{4}$ لیٹر پٹرول میں وہ کتنی دور جائے گی؟

8۔ (a) (i) باکس □ میں صحیح عدد لکھیے $\frac{2}{3}\times\square=\frac{10}{30}$

(ii) باکس □ میں لکھے گئے نمبر کی کمترین شکل ہے............

(b) (i) باکس □ میں صحیح عدد لکھیے $\frac{3}{5}\times\square=\frac{24}{75}$

(ii) باکس □ میں لکھے گئے نمبر کی کمترین شکل ہے............

## 2.4 کسری اعداد کی تقسیم (Division Of Fractions)

جان کے پاس 6 سم لمبی ایک کاغذ کی پٹی ہے۔ اس نے اس پٹی میں سے 2 سم لمبی چھوٹی چھوٹی پٹیاں کاٹ لیں۔ آپ کو معلوم ہے کہ اس کے پاس 3=2÷6 پٹیاں ہو گئیں۔

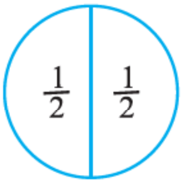
جان نے ایک دوسری 6 سم لمبی کاغذ کی پٹی کو $\frac{3}{2}$ سم لمبی چھوٹی چھوٹی پٹیوں میں کاٹ لیا۔ اب اس کے پاس کتنی پٹیاں ہو گئیں؟

اس کے پاس $6\div\frac{3}{2}$ پٹیاں ہو گئیں۔

$\frac{15}{2}$ سم لمبی کاغذ کی پٹی کو $\frac{3}{2}$ سم لمبی چھوٹی چھوٹی کاغذ کی پٹیوں میں کاٹنے پر $\frac{15}{2}\div\frac{3}{2}$ پٹیاں حاصل ہوتی ہیں۔

اس لیے، اب ہمیں کسی مکمل عدد کو کسری عدد سے یا ایک کسری عدد کو دوسرے کسری عدد سے تقسیم کرنے کی ضرورت ہے۔ آیئے دیکھیں اس کو ہم کیسے کرتے ہیں۔

## 2.4.1 ایک مکمل عدد کی ایک کسری عدد سے تقسیم
## (Division of Whole Number by a Fraction)



شکل 2.11

آیئے $1 \div \frac{1}{2}$ معلوم کریں

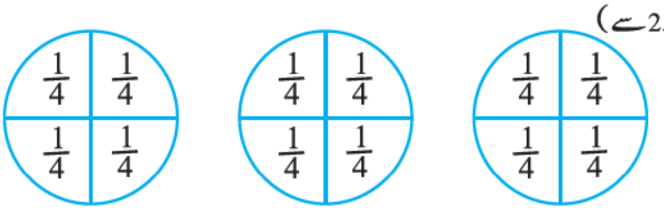
ہمیں ایک مکمل چیز کو دو حصوں میں اس طرح بانٹنا ہے کہ ہر حصہ مکمل کا آدھا ہو۔

کل $(\frac{1}{2})$ آدھے حصے ہوں گے $1 \div \frac{1}{2}$ تصویر (تصویر 2.11) کا مشاہدہ کیجیے۔

آپ کو کتنے آدھے حصے نظر آرہے ہیں؟

اس لیے $1 \div \frac{1}{2} = 2$ اور $1 \div \frac{2}{1} = 1 \times 2 = 2$ لہٰذا $1 \div \frac{1}{2} = 1 \times \frac{2}{1}$

اسی طرح $3 \div \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ حصوں کی تعداد وہ ہوگی جو 3 مکمل چیزوں میں سے ہر مکمل چیز کو $\frac{1}{4}$ برابر کے حصوں میں بانٹا جائے گا=12 (تصویر 2.12 سے)



شکل 2.12

اس کا بھی مشاہدہ کیجیے $3 \times \frac{4}{1} = 3 \times 4 = 12$ لہٰذا $3 \div \frac{1}{4} = 3 \times \frac{4}{1} = 12$

اسی طریقے سے معلوم کیجیے $3 \div \frac{1}{2}$ اور $3 \times \frac{2}{1}$

## کسری عدد کا مقلوب (Reciprocal of a Fraction)

عدد $\frac{2}{1}$ کے شمار کنندہ اور نسب نما کو ادل بدل کرکے $\frac{1}{2}$ حاصل کیا جاسکتا ہے یا پھر $\frac{1}{2}$ کو الٹ کر۔ اسی طرح $\frac{3}{1}$ کو الٹا کرکے

حاصل ہوتا ہے۔

آیئے پہلے ایسے اعداد کو الٹ کر دیکھیں۔

ان حاصل ضرب کا مشاہدہ کیجیے اور خالی جگہوں کو بھریے۔

| | |
|---|---|
| $7 \times \frac{1}{7} = 1$ | $\frac{5}{4} \times \frac{4}{5} =$ --------- |
| $\frac{1}{9} \times 9 =$ --------- | $\frac{2}{7} \times$ --------- $= 1$ |
| $\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{2 \times 3}{3 \times 2} = \frac{6}{6} = 1$ | --------- $\times \frac{5}{9} = 1$ |

ایسے ہی پانچ اور جوڑوں کو ضرب دیجیے۔

**ایسے غیر صفر اعداد جن کو ایک دوسرے سے ضرب کرنے پر 1 آتا ہے۔ ایک دوسرے کے مقلوب کہلاتے ہیں۔** اس لیے $\frac{5}{9}$ کا مقلوب $\frac{9}{5}$ ہے اور $\frac{9}{5}$ کا مقلوب $\frac{5}{9}$ ہے۔ $\frac{1}{9}$ کا مقلوب کیا ہے؟ $\frac{2}{7}$ کا کیا ہے؟

آپ نے دیکھا کہ $\frac{2}{3}$ کا مقلوب اس کو الٹا کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔ آپ کو ملا $\frac{3}{2}$ ۔

## سوچیے، بات چیت کیجیے اور لکھیے

(i) کیا کسی واجب کسر کا مقلوب واجب کسر ہی ہوگا؟

(ii) کیا کسی غیر واجب کسر کا مقلوب غیر واجب کسر ہی ہوگا؟

اس لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ

$1 \div \frac{1}{2} = 1 \times \frac{2}{1} = 1 \times$ $\frac{1}{2}$ کا مقلوب

$3 \div \frac{1}{4} = 3 \times \frac{4}{1} = 3 \times$ $\frac{1}{4}$ کا مقلوب

$3 \div \frac{1}{2} = \text{------} = \text{-----}$

اس لیے، $2 \div \frac{3}{4} = 2 \times$ $\frac{3}{4}$ کا مقلوب $= 2 \times \frac{4}{3}$

$5 \div \frac{2}{9} = 5 \times \text{------} = 5 \times \text{-----}$

**لہٰذا کسی مکمل عدد کو کسی کسری عدد سے تقسیم کرنے کے لیے اس مکمل عدد کو کسری عدد کے مقلوب سے ضرب کیا جاتا ہے۔**

### کوشش کیجیے:

معلوم کیجیے: (i) $7 \div \frac{2}{5}$ (ii) $6 \div \frac{4}{7}$ (iii) $2 \div \frac{8}{9}$

- جب کسی مکمل عدد کو ایک مخلوط کسر سے تقسیم کرتے ہیں تو پہلے مخلوط کسر کو غیر واجب کسر میں بدلتے ہیں اور پھر اس کو حل کرتے ہیں۔

لہٰذا، $4 \div 2\frac{2}{5} = 4 \div \frac{12}{5} = ?$ اور $5 \div 3\frac{1}{3} = 3 \div \frac{10}{3} = ?$

### کوشش کیجیے

معلوم کیجیے:

(i) $6 \div 5\frac{1}{3}$

(ii) $7 \times 2\frac{4}{7}$

## 2.4.2 ایک کسری عدد کی ایک مکمل عدد سے تقسیم

## (Division of a Fraction by a Whole Number)

- $\frac{3}{4} \div 3$ کیا ہوگا؟

پچھلے مشاہدات کی بنا پر ہم کہہ سکتے ہیں کہ

$$\frac{3}{4}\div 3=\frac{3}{4}\div\frac{3}{1}=\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$$

اس لیے، $\frac{2}{3}\div 7=\frac{2}{3}\times\frac{1}{7}=\ ?$     $\frac{5}{7}\div 6$ ، $\frac{2}{7}\div 8$ کیا ہے؟

- جب کسی مخلوط عدد کو غیر واجب عدد سے تقسیم کیا جاتا ہے تو پہلے مخلوط عدد کو غیر واجب کسر میں بدلتے ہیں، یعنی

$2\frac{2}{3}\div 5=\frac{8}{3}\div 5\ =$ ------;     $4\frac{2}{5}\div 3=$ ------ $=$ ------;

$2\frac{2}{5}\div 2\ =$ ------ $=$ ------

## 2.4.3 ایک کسری عدد کی دوسرے کسری عدد سے تقسیم

## Division of a Fraction by Another Fraction

اب ہم $\frac{1}{3}\div\frac{5}{6}$ معلوم کر سکتے ہیں۔

$\frac{1}{3}\div\frac{5}{6}=\frac{1}{3}\times$ $\frac{5}{6}$ کا مقلوب $=\frac{1}{3}\times\frac{6}{5}=\frac{2}{5}$

اسی طرح $\frac{8}{5}\div\frac{2}{3}=\frac{8}{5}\times$ $\frac{2}{3}$ کا مقلوب $=\ ?$     اور $\frac{1}{2}\div\frac{3}{4}=\ ?$

### کوشش کیجیے:

معلوم کیجیے: (i) $\frac{3}{5}\div\frac{1}{2}$    (ii) $\frac{1}{2}\div\frac{3}{5}$    (iii) $2\frac{1}{2}\div\frac{3}{5}$    (iv) $5\frac{1}{6}\div\frac{9}{2}$

## مشق 2.4

1۔ معلوم کیجیے:

(i) $12\div\frac{3}{4}$    (ii) $14\div\frac{5}{6}$    (iii) $8\div\frac{7}{3}$    (iv) $4\div\frac{8}{3}$

(v) $3\div 2\frac{1}{3}$    (vi) $5\div 3\frac{4}{7}$

2۔ درج ذیل کسری اعداد کے مقلوب معلوم کیجیے۔ مقلوب کی واجب، غیر واجب اور مکمل اعداد میں درجہ بندی کیجیے۔

(i) $\frac{3}{7}$    (ii) $\frac{5}{8}$    (iii) $\frac{9}{7}$    (iv) $\frac{6}{5}$

(v) $\frac{12}{7}$    (vi) $\frac{1}{8}$    (vii) $\frac{1}{11}$

3۔ معلوم کیجیے:

(i) $\frac{7}{3} \div 2$ (ii) $\frac{4}{9} \div 5$ (iii) $\frac{6}{13} \div 7$ (iv) $4\frac{1}{3} \div 3$

(v) $3\frac{1}{2} \div 4$ (vi) $4\frac{3}{7} \div 7$

4۔ معلوم کیجیے:

(i) $\frac{2}{5} \div \frac{1}{2}$ (ii) $\frac{4}{9} \div \frac{2}{3}$ (iii) $\frac{3}{7} \div \frac{8}{7}$ (iv) $2\frac{1}{3} \div \frac{3}{5}$

(v) $3\frac{1}{2} \div \frac{8}{3}$ (vi) $\frac{2}{5} \div 1\frac{1}{2}$ (vii) $3\frac{1}{5} \div 1\frac{2}{3}$ (viii) $2\frac{1}{5} \div 1\frac{1}{5}$

## 2.5 آپ اعشاریائی اعداد کے بارے میں کیا جانتے ہیں ؟
## How Well Have You Learnt About Decimal Numbers?

آپ پچھلی کلاسوں میں اعشاریائی اعداد کے بارے میں پڑھ چکے ہیں۔ آیئے اب اسے مختصراً دہرالیں۔ درج ذیل جدول کو دیکھیے اور خالی جگہوں کو بھریے۔

| سیکڑہ (100) | دہائی (10) | اکائی (1) | دسواں $\left(\frac{1}{10}\right)$ | سوواں $\left(\frac{1}{100}\right)$ | ہزارواں $\left(\frac{1}{1000}\right)$ | عدد |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 5 | 3 | 1 | 4 | 7 | 253.147 |
| 6 | 2 | 9 | 3 | 2 | 1 | .............. |
| 0 | 4 | 3 | 1 | 9 | 2 | .............. |
| ........ | 1 | 4 | 2 | 5 | 1 | 514.251 |
| 2 | ....... | 6 | 5 | 1 | 2 | 236.512 |
| ........ | 2 | ........ | 5 | ........ | 3 | 724.503 |
| 6 | ........ | 4 | ........ | 2 | ........ | 614.326 |
| 0 | 1 | 0 | 5 | 3 | 0 | ............... |

جدول میں آپ نے اعشاریائی اعداد لکھے جو کہ مقامی قیمت کے لحاظ سے پھیلی ہوئی شکل میں لکھے ہوئے تھے۔ آپ اس کا الٹا بھی کر سکتے ہیں۔ یعنی دیے گئے عدد کو پھیلی ہوئی شکل میں لکھ سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر

$$253.417 = 2 \times 100 + 5 \times 10 + 3 \times 1 + 4 \times \left(\frac{1}{10}\right) + 1 \times \left(\frac{1}{100}\right) + 7 \times \left(\frac{1}{1000}\right)$$

جان کے پاس ₹15.50 ہیں اور سشما کے پاس ₹15.75 ہیں۔ کس کے پاس زیادہ ہیں؟ اس کو معلوم کرنے کے لیے اعشاریائی اعداد 15.50 اور 15.75 کا موازنہ کرنا ہوگا۔ ایسا کرنے کے لیے پہلے ہم اعشاریائی نقطے کے بائیں جانب کے ہندسوں کا

موازنہ، بائیں ترین ہندسہ سے شروع کرکے کرتے ہیں۔ یہاں اعشاریائی نقطوں کے بائیں جانب کے دونوں ہندسے 1 اور 5 دونوں ایک سے ہیں۔اس لیے ہم اعشاریائی نقطوں کے دائیں جانب کے ہندسہ جو کہ 'دسواں' کے مقام سے شروع ہوتے ہیں، کا موازنہ کریں گے۔ہم نے دیکھا کہ 7>5، اس لیے ہم کہیں گے کہ 15.75>15.50۔لہٰذا سلمٰی کے پاس جون سے زیادہ رقم ہے۔

اگر دسویں مقام کا ہندسہ ایک سا ہوگا تو ہم سوویں مقام کے ہندسہ کا موازنہ کریں گے اور اسی طرح آگے بھی۔

اب ذرا جلدی سے موازنہ کیجیے۔

35.63 اور 35.67، 20.1 اور 20.01، 19.36 اور 29.36

روپے پیسے، لمبائی اور وزن کی چھوٹی اکائیوں کو بڑی اکائیوں میں تبدیل کرنے کے لیے ہمیں اعشاریائی اعداد کی ضرورت ہوتی ہے۔

مثال کے طور پر

3 پیسے = $\frac{3}{100}$ روپے = 0.03 روپے

5 گرام = $\frac{5}{1000}$ کلوگرام = 0.005 کلوگرام

7 سم = 0.07 میٹر

لکھیے: 75 پیسے = ........... روپے؛ 250 گرام = ........... کلوگرام؛ 85 سم = ........... میٹر

ہم اعشاریائی اعداد کی جمع اور تفریق سے واقف ہیں۔لہٰذا 37.35 + 21.36 ہوگا؛

$$\begin{array}{r} 21.36 \\ +\ \underline{37.35} \\ 58.71 \end{array}$$

0.19+2.3 کی کیا قیمت ہے؟

4.56–29.35 کے درمیان فرق ہے

$$\begin{array}{r} 29.35 \\ -\ \underline{04.56} \\ 24.79 \end{array}$$

39.87–21.98 کی قیمت بتائیے۔

## مشق 2.5

**1۔** کون بڑا ہے

(i) 0.5 یا 0.05 (ii) 0.7 یا 0.5 (iii) 7 یا 0.7

(iv) 1.37 یا 1.49 (v) 2.03 یا 2.30 (vi) 0.8 یا 0.88

2۔ اعشاریہ کا استعمال کرکے روپے میں لکھیے:

(i) 7 پیسے (ii) 7 روپے 7 پیسے (iii) 77 روپے 77 پیسے

(iv) 50 پیسے (v) 235 پیسے

3۔ (i) 5 سم کو میٹر اور کلومیٹر میں بدلیے

(ii) 35 ملی میٹر کو سینٹی میٹر، میٹر اور کلومیٹر میں بدلیے۔

4۔ کلوگرام میں بدلیے

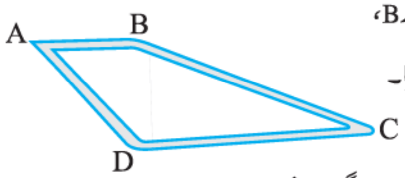
(i) 200 گرام (ii) 3470 گرام (iii) 4 کلوگرام 8 گرام

5۔ درج ذیل اعشاریائی اعداد کو پھیلا کر لکھیے

(i) 20.03 (ii) 2.03 (iii) 200.03 (iv) 2.034

6۔ درج ذیل اعشاریائی اعداد میں 2 کی مقامی قیمت لکھیے۔

(i) 2.56 (ii) 21.37 (iii) 10.25 (iv) 9.42 (v) 63.352




7۔ دنیش مقام A سے مقام B پر گیا اور پھر وہاں سے مقام C پر گیا۔ A،B سے 7.5 کلومیٹر دوری پر ہے اور B، C سے 12.7 کلومیٹر کی دوری پر ہے۔ ایوب مقام A سے مقام D پر گیا اور پھر وہاں سے مقام C پر گیا۔ D،A سے 9.3 کلومیٹر اور D،C سے 11.8 کلومیٹر کی دوری پر ہے۔ کس نے زیادہ سفر کیا اور کتنا زیادہ؟

8۔ شیاما نے 5 کلوگرام 300 گرام سیب اور 3 کلوگرام 250 گرام آم خریدے۔ سرلا نے 4 کلوگرام 800 گرام سنترے اور 4 کلوگرام 150 گرام کیلے خریدے۔ کس نے زیادہ پھل خریدے؟

9۔ 42.6 کلومیٹر سے 28 کلومیٹر کتنا کم ہے؟

## 2.6 اعشاریائی اعداد کی ضرب (Multiplication Of Decimal Numbers)

ریشما نے 8.50 ₹ فی کلوگرام کے حساب سے 1.5 کلوگرام سبزی خریدی۔ اس کو کتنے پیسے دینے چاہئیں؟ یقیناً یہ (8.50×1.50) ₹ ہوں گے۔ 8.5 اور 1.5 دونوں اعشاریائی اعداد ہیں۔ اس لیے، ہمیں ایسی حالت کا سامنا کرنا ہے جہاں پر ہمیں اعشاریائی اعداد کی ضرب آنے کی ضرورت ہے۔

آیئے اب ہم دو اعشاریائی اعداد کی ضرب سیکھتے ہیں۔

سب سے پہلے ہم 0.1×0.1 معلوم کریں گے۔

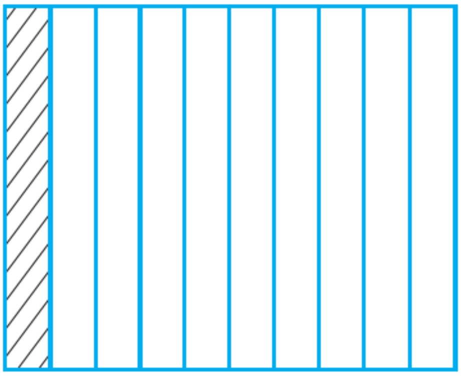
اب $0.1 = \frac{1}{10}$ اس لیے، $0.1 \times 0.1 = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1 \times 1}{10 \times 10} = \frac{1}{100} = 0.01$

ذرا اس کا تصویری اظہار بھی دیکھیے۔ (شکل 2.13)

کسر $\frac{1}{10}$، 10 برابر حصوں میں سے 1 حصہ کو ظاہر کرتی ہے۔ تصویر میں رنگا ہوا حصہ $\frac{1}{10}$ ہے۔

ہم جانتے ہیں،

$\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}$ کا مطلب ہے $\frac{1}{10}$ کا $\frac{1}{10}$ ۔ اس لیے اس $\frac{1}{10}$ ویں حصہ کو پھر 10 برابر حصوں میں بانٹیے اور اس میں سے ایک حصہ لے لیجیے۔



شکل 2.13

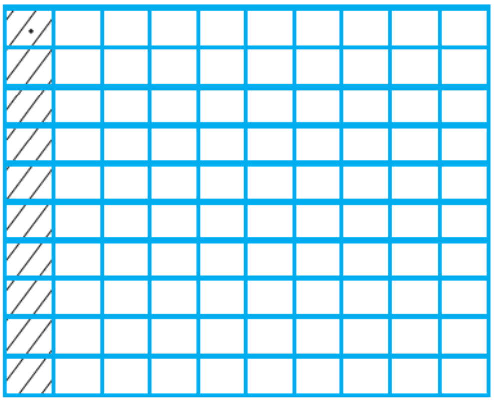
لہٰذا، ہمارے پاس ہے

نقطے دار مربع، $\frac{1}{10}$ ویں حصے کے 10 برابر حصوں میں سے ایک حصہ ہے۔

یعنی $\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}$ یا $0.1\times0.1$ کو ظاہر کرتا ہے۔

کیا نقطے دار مربع کو کسی اور طرح بھی ظاہر کیا جا سکتا ہے؟

تصویر 2.14 میں آپ کو کتنے چھوٹے مربع نظر آ رہے ہیں؟



شکل 2.14

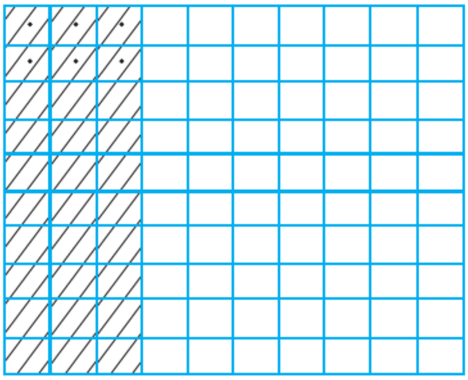
یہاں 100 چھوٹے مربع ہیں۔ اس لیے نقطے دار مربع، ان 100 مربعوں میں سے ایک ہے یا 0.01 ہے۔

لہٰذا، $0.1\times0.1=0.01$

دھیان میں رکھیے کہ اس ضرب میں 0.1 دو بار آیا ہے۔ 0.1 میں اعشاریائی نقطے کے دائیں جانب ایک ہندسہ ہے۔ 0.01 میں اعشاریائی نقطے کے دائیں جانب دو ہندسے ہیں (یعنی 1+1)۔ آیئے اب ذرا $0.2\times0.3$ معلوم کرتے ہیں۔

ہمیں معلوم ہے $0.2\times0.3=\frac{2}{10}\times\frac{3}{10}$

جیسا کہ ہم نے $\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}$ کے لیے کیا تھا، ذرا مربع 10 برابر حصوں میں بانٹیے اور پھر ان میں سے 3 حصے لے لیجیے۔ یعنی آپ کو ملا $\frac{3}{10}$ ۔ پھر ان تین برابر حصوں میں سے ہر ایک کو 10 برابر حصوں میں بانٹ دیجیے اور ہر ایک میں سے دو لے لیجیے۔ ہم کو ملا $\frac{2}{10}\times\frac{3}{10}$ ۔



شکل 2.15

نقطے دار مربعے $\frac{2}{10}\times\frac{3}{10}$ یا $0.2\times0.3$ کو ظاہر کر رہے ہیں (تصویر 2.15)۔ کیونکہ یہاں 100 میں سے 6 نقطے دار مربعے ہیں، اس لیے یہ 0.06 کو ظاہر کر رہے ہیں۔

لہٰذا $0.2\times0.3=0.06$

غور کریں کہ $2\times3=6$ اور 0.06 میں اعشاریائی نقطے کے دائیں جانب کے ہندسوں کی تعداد 2 $(=1+1)$ ہے۔ جانچ کیجیے کیا یہ $0.1\times0.1$ پر بھی لاگو ہوتا ہے۔

ان مشاہدات کا استعمال کرتے ہوئے $0.2\times0.4$ معلوم کیجیے۔

$0.1\times0.1$ اور $0.2\times0.3$ کو معلوم کرتے وقت تو شاید آپ نے غور کیا ہو کہ پہلے ہم ان اعداد کو اعشاریہ کے بنا تصور کر کے یعنی مکمل اعداد کی طرح ضرب کرتے ہیں۔

میں ہم نے دیکھا کہ $01\times01$ یا $1\times1$ ۔ اسی طرح $0.2\times0.3$ میں ہم نے پایا کہ $02\times03$ یا $2\times3$ ۔ پھر ہم دائیں جانب کے پہلے ہندسے سے شروع کر کے ہندسوں کو گننا شروع کرتے ہیں اور بائیں جانب تک جاتے ہیں۔ پھر ہم اس میں اعشاریائی نقطے لگاتے ہیں۔ اعشاریائی نقطے لگانے کے لیے گنے گیے ہندسوں کی تعداد وہی ہوتی ہے جو ضرب کیے جانے والے اعشاریائی اعداد میں اعشاریائی نقطے کے دائیں جانب کے ہندسوں کو جوڑ کر حاصل ہوتی ہے۔ آیئے اب $1.2\times2.5$ معلوم کرتے ہیں۔

12 اور 25 کو ضرب کیجیے۔ حاصل ہوا 300۔ 1.2 اور 2.5 دونوں ہی میں اعشاریائی نقطے کے دائیں جانب ایک ایک ہندسہ ہے۔ تو 300 میں سب سے دائیں جانب والے ہندسے (یعنی 0) سے گنیے اور بائیں جانب جایئے 2=1+1۔ ہم کو ملے گا 3.00 یا 3۔

اسی طریقے سے $1.5\times1.6$ اور $2.4\times4.2$ معلوم کیجیے۔

جب 2.5 اور 1.25 کو ضرب کیا جائے گا تو آپ پہلے 25 اور 125 کو ضرب کیجیے۔ حاصل ضرب میں اعشاریہ لگانے کے لیے آپ سب سے دائیں جانب کے ہندسے سے شروع کر کے $1+2=3$ گنیے (اس طرح $2.5\times1.25=3.225$)۔ لہٰذا $2.7\times1.35$ معلوم کیجیے

## کوشش کیجیے:

1۔ معلوم کیجیے

(i) $2.7\times4$ (ii) $1.8\times1.2$ (iii) $2.3\times4.35$

2۔ (1) میں حاصل ہوئے حاصل ضربوں کو گھٹتی ترتیب میں لگایئے۔

**مثال 7** مساوی الاضلاع مثلث کے ایک ضلع کی لمبائی 3.5 سینٹی میٹر۔ اس کا احاطہ معلوم کیجیے۔

**حل** کسی مساوی الاضلاع مثلث کے تینوں اضلاع برابر ہوتے ہیں تو ایک ضلع کی لمبائی = 3.5 سینٹی میٹر

لہٰذا، احاطہ = 3×3.5 سینٹی میٹر = 10.5 سینٹی میٹر

**مثال 8** ایک مستطیل کی لمبائی 7.1 سم اور چوڑائی 2.5 سینٹی میٹر ہے۔ مستطیل کا رقبہ بتائیے؟

**حل** مستطیل کی لمبائی = 7.1 سینٹی میٹر

مستطیل کی چوڑائی = 2.5 سینٹی میٹر

اس لیے، مستطیل کا رقبہ = $7.1\times2.5$ مربع سینٹی میٹر

= 17.75 مربع سینٹی میٹر

## 2.6.1 اعشاریائی اعداد کی 10، 100 اور 1000 سے ضرب
## (Multiplication of Decimal Numbers by 10, 100 and 1000)

ریشما نے مشاہدہ کیا کہ $2.3=\frac{23}{10}$ اور $2.35=\frac{235}{100}$

لہٰذا، اس نے دیکھا کہ کسی اعشاریائی عدد میں اعشاریائی نقطوں کی جگہ یا مقام کے لحاظ سے اعشاریائی عدد کو کسری عدد میں بدلا جاسکتا ہے، ایسا کسری عدد جس کا نسب نما 10 یا 100 ہو۔ وہ حیران تھی کہ کسی اعشاریائی عدد کو 10، 100 یا 1000 سے ضرب کیا جائے تو کیا ہوگا۔

آیئے دیکھتے ہیں، اگر ہمیں 10 یا 100 یا 1000 سے ضرب کرنے کا کوئی پیٹرن مل جائے۔

نیچے دی گئی جدول پر ایک نظر ڈالیے اور خالی جگہوں کو بھریے۔

| | | |
|---|---|---|
| $17.6\times10=\frac{176}{100}\times10=1.76$ | $2.35\times10=$___ | $12.356\times10=$___ |
| $1.76\times100=\frac{176}{100}\times100=176$ یا $176.0$ | $2.35\times100=$___ | $12.356\times100=$___ |
| $1760\times1000=\frac{176}{100}\times1000=1760\times$ یا $1760.0$ | $2.35\times1000=$___ | $12.356\times1000=$___ |
| $0.5\times10=\frac{5}{10}\times10=5$ ; | $0.5\times100=$___ ; | $0.5\times1000=$___ |

جدول میں حاصل ضرب میں اعشاریائی نقطوں کے بدلاؤ پر دھیان دیجیے۔ یہاں اعداد کو 10، 100 اور 1000 سے ضرب کیا گیا ہے۔

$1.76\times10=17.6$ میں ہندسے ایک سے ہیں، یعنی 1، 7 اور 6۔ کیا کسی دوسرے حاصل ضرب میں بھی آپ نے یہ مشاہدہ کیا ہے؟ 1.76 اور 17.6 پر دھیان دیجیے۔ کون سی سمت اعشاریہ گیا ہے، دائیں یا بائیں؟ اعشاریہ دائیں طرف ایک مقام آگے گیا ہے۔

دھیان میں رکھیے 10 میں 1 کے بعد صرف ایک صفر ہے۔ $1.76\times100=176.0$ میں 1.76 اور 176.0 پر غور کیجیے۔ اعشاریہ دائیں طرف دو ہندسہ یا دو مقام آگے بڑھا ہے۔

غور کیجیے کہ 100 میں ایک کے بعد دو صفر ہیں۔ کیا اعشاریہ کا ایسا بدلاؤ کسی اور حاصل ضرب میں آپ نے دیکھا ہے؟

اس لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ جب کسی اعشاریائی عدد کو 10، 100 یا 1000 سے ضرب کیا جاتا ہے تو حاصل ضرب میں ہندسے تو اتنے ہی ہوتے ہیں جتنے کہ اعشاریائی عدد میں ہوتے ہیں لیکن حاصل ضرب میں اعشاریہ اتنے ہندسے دائیں جانب آگے بڑھ جاتا ہے جتنے کہ ایک کے بعد صفر ہوتے ہیں۔

**کوشش کیجیے:**

معلوم کیجیے

(i) $0.3\times10$

(ii) $1.2\times100$

(iii) $56.3\times1000$

ان مشاہدات کی بنیاد پر اب ہم کہہ سکتے ہیں کہ $0.07 \times 10 = 0.7, 0.07 \times 100 = 7$ اور $0.07 \times 1000 = 70$

کیا آپ بتا سکتے ہیں $2.97 \times 10 = ?$، $2.97 \times 100 = ?$، $2.97 \times 1000 = ?$

کیا آپ ریشما کی مدد کر سکتے ہیں، کل رقم معلوم کرنے میں۔ یعنی ₹ 8.50 × 150 ؟ جو کہ اسے ادا کرنی ہے۔

## مشق 2.6

1۔ معلوم کیجیے:

(i) $0.2 \times 6$ (ii) $8 \times 4.6$ (iii) $2.71 \times 5$ (iv) $20.1 \times 4$

(v) $0.05 \times 7$ (vi) $211.02 \times 4$ (vii) $2 \times 0.86$

2۔ ایک مستطیل کا رقبہ معلوم کیجیے جس کی لمبائی 5.7 سینٹی میٹر اور چوڑائی 3 سینٹی میٹر ہو۔

3۔ معلوم کیجیے:

(i) $1.3 \times 10$ (ii) $36.8 \times 10$ (iii) $153.7 \times 10$ (iv) $168.07 \times 10$

(v) $31.1 \times 100$ (vi) $156.1 \times 100$ (vii) $3.62 \times 100$ (viii) $43.07 \times 100$

(ix) $0.5 \times 10$ (x) $0.08 \times 10$ (xi) $0.9 \times 100$ (xii) $0.03 \times 1000$

4۔ ایک اسکوٹر ایک لیٹر پٹرول میں 55.3 کلومیٹر فاصلہ طے کرتی ہے۔ 10 لیٹر پٹرول میں وہ کتنا فاصلہ طے کرے گی؟

5۔ معلوم کیجیے:

(i) $2.5 \times 0.3$ (ii) $0.1 \times 51.7$ (iii) $0.2 \times 316.8$ (iv) $1.3 \times 3.1$

(v) $0.5 \times 0.05$ (vi) $11.2 \times 0.15$ (vii) $1.07 \times 0.02$

(viii) $10.05 \times 1.05$ (ix) $101.01 \times 0.01$ (x) $100.01 \times 1.1$

## 2.7 اعشاریائی اعداد کی تقسیم (Division Of Decimal Numbers)

سویتا اپنی کلاس کو سجانے کے لیے ایک ڈیزائن بنا رہی تھی۔ اس کو 1.9 سم لمبی رنگین کاغذ کی کچھ پٹیاں چاہئیں۔ اس کے پاس 9.5 سم لمبی رنگین کاغذ کی پٹی تھی۔ اس پٹی میں سے وہ کتنی پٹیاں کاٹ سکتی ہے؟ اس نے سوچا یہ $\frac{9.5}{1.9}$ سم ہونگی۔ کیا وہ صحیح ہے؟

9.5 اور 1.9 دونوں اعشاریائی اعداد ہیں۔ اس لیے ہمیں اعشاریائی اعداد کی تقسیم بھی سیکھنے کی ضرورت ہے۔

### 2.7.1 10، 100 اور 1000 سے تقسیم (Division by 10, 100 and 1000)

آیئے 10، 100 اور 1000 سے تقسیم کرتے ہیں۔

$31.5 \div 10$ پر دھیان دیجیے

$$31.5 \div 10 = \frac{315}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{315}{100} = 3.15$$

اسی طرح $31.5 \div 100 = \frac{315}{10} \times \frac{1}{100} = \frac{315}{1000} = 0.315$

آیئے اب ذرا دیکھتے ہیں کہ 10، 100 یا 1000 سے تقسیم کا کوئی پیٹرن ہے، جو 10، 100 یا 1000 سے تقسیم کرنے میں ہماری مدد کر سکتا ہے۔

| | | | |
|---|---|---|---|
| 31.5 ÷ 10 = 3.15 | 231.5 ÷ 10 =___ | 1.5 ÷ 10 =___ | 29.36 ÷ 10 =___ |
| 31.5 ÷ 100 = 0.315 | 231.5 ÷ 100 =___ | 1.5 ÷ 100 =___ | 29.36 ÷ 100 =___ |
| 31.5 ÷ 1000 = 0.0315 | 231.5 ÷ 1000 =___ | 1.5 ÷ 1000 =___ | 29.36 ÷ 1000 =___ |

$31.5 \div 10 = 3.15$ کو لیجیے۔ 31.5 اور 3.15 میں ہندسے ایک جیسے ہیں، یعنی 3، 1 اور 5 لیکن خارج قسمت میں اعشاریہ کی جگہ بدل گئی ہے۔ کون سی سمت اور کتنے ہندسے؟ اعشاریائی نقطہ بائیں جانب ایک ہندسہ پیچھے ہٹا ہے۔ دھیان دیجیے 10 میں ایک کے بعد ایک صفر ہے۔

اب $31.5 \div 100 = 0.315$ کو دیکھیے۔ 31.5 اور 0.315 میں ہندسے ایک جیسے ہیں مگر خارج قسمت میں اعشاریائی نقطہ کہاں ہے؟ یہ بائیں جانب دو ہندسے پیچھے ہٹا ہے۔ دھیان دیجیے 100 میں ایک کے بعد دو صفر ہیں۔

**کوشش کیجیے:**

معلوم کیجیے:

(i) 235.4 ÷ 10

(ii) 235.4 ÷100

(iii) 235.4 ÷ 1000

**اس لیے، ہم کہہ سکتے ہیں کہ جب کسی عدد کو 10، 100 یا 1000 سے تقسیم کیا جاتا ہے تو عدد اور خارج قسمت کے ہندسے تو ایک جیسے ہی رہتے ہیں مگر خارج قسمت میں اعشاریہ بائیں جانب اتنے ہی مقام یا ہندسے کھسکتا ہے جتنے ایک کے بعد صفر ہوتے ہیں۔** ان مشاہدات کو استعمال کرکے ذرا جلدی سے معلوم کیجیے:

2.38 ÷ 10 = 0.238,  2.38 ÷ 100 = 0.0238,  2.38 ÷ 1000 = 0.00238

## 2.7.2 کسی اعشاریائی عدد کی ایک مکمل عدد سے تقسیم:

## (Division of a Decimal Number by a Whole Number)

**کوشش کیجیے:**

(i) 35.7 ÷ 3 = ?;

(ii) 25.5 ÷ 3 = ?

ذرا $\frac{6.4}{2}$ معلوم کیجیے۔ یاد رکھیے اس کو ہم $6.4 \div 2$ بھی لکھ سکتے ہیں۔

اس لیے، $6.4 \div 2 = \frac{64}{10} \div 2 = \frac{64}{10} \times \frac{1}{2}$ جیسا کہ ہم نے کسری اعداد میں سیکھا ہے

$$\frac{64 \times 1}{10 \times 2} = \frac{1 \times 64}{10 \times 2} = \frac{1}{10} \times \frac{64}{2} = \frac{1}{10} \times 32 = \frac{32}{10} = 3.2$$

یا پہلے 64 کو 2 سے تقسیم کیجیے۔ تو ہم کو ملے گا 32۔ 6.4 میں اعشاریائی نقطے کے دائیں جانب ایک ہندسہ ہے۔ 32 میں اس طرح اعشاریائی نقطہ لگایئے کہ اس کے دائیں جانب بس ایک ہندسہ بچے۔ ہم کو پھر سے 3.2 ملے گا۔

$19.5 \div 5$ کا حاصل کرنے کے لیے پہلے $195 \div 5$ معلوم کیجیے۔ ہمیں 39 حاصل ہوتا ہے 19.5 میں اعشاریائی نقطہ کے

**کوشش کیجیے:**

(i) $43.15 \div 5 = ?$;
(ii) $82.44 \div 6 = ?$

**کوشش کیجیے:**

معلوم کیجیے۔
(i) $15.5 \div 5$
(ii) $126.35 \div 7$

دائیں جانب ایک ہندسہ ہے۔ 39 میں اعشاریائی نقطہ اس طرح لگائیں کہ اس کی دائیں جانب بس ایک ہندسہ بچے۔ آپ کو 3.9 ملے گا۔

اب، $12.96 \div 4 = \frac{1296}{100} \div 4 = \frac{1296}{100} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{100} \times \frac{1296}{4} = \frac{1}{100} \times 324 = 3.24$

یا 1296 کو 4 سے تقسیم کیجیے۔ آپ کو 324 ملے گا۔ 12.96 میں اعشاریہ کے دائیں جانب دو ہندسے ہیں۔ 324 میں ایسے ہی اعشاریہ لگائیے۔ آپ کو 3.24 ملے گا۔ دھیان دیجیے کہ یہاں اور اگلے حصے میں ہم صرف ایسی تقسیموں پر دھیان دے رہے ہیں جس میں اعشاریہ کے بنا جو عدد بنتا ہے وہ دوسرے عدد سے پورا پورا تقسیم ہو جاتا ہے۔ یعنی باقی صفر بچتا ہے۔ مثلاً $19.5 \div 5$ میں عدد 195 کو جب 5 سے تقسیم کریں گے تو باقی صفر بچے گا۔

جب کہ کبھی کبھی حالات ایسے بھی ہوتے ہیں کہ ایک عدد دوسرے عدد سے پورا پورا تقسیم نہ ہو۔ یعنی باقی صفر نہ بچے۔ مثال کے طور پر $195 \div 7$۔ ایسی حالتوں کو ہم اگلی کلاسوں میں دیکھیں گے۔

**مثال 9** 4.2، 3.8 اور 7.6 کا اوسط نکالیے۔

**حل** 4.2، 3.8 اور 7.6 کا اوسط ہے

$$\frac{4.2 + 3.8 + 7.6}{3} = \frac{15.6}{3} = 5.2$$

## 2.7.3 ایک اعشاریائی عدد کی دوسرے اعشاریائی عدد سے تقسیم

## (Division of a Decimal Number by another Decimal Number)

$\frac{25.5}{0.5}$ یعنی $25.5 \div 0.5$ معلوم کرتے ہیں۔

ہم جانتے ہیں $25.5 \div 0.5 = \frac{255}{10} \div \frac{5}{10} = \frac{255}{10} \times \frac{10}{5} = 51$

لہٰذا $25.5 \div 0.5 = 51$

آپ نے کیا دیکھا؟ $\frac{25.5}{0.5}$ میں ہم نے دیکھا کہ 25.5 اور 0.5 دونوں میں اعشاریہ کے دائیں جانب ایک ہندسہ ہے۔ لہٰذا دونوں کو کسر میں تبدیل کرنے پر ہر ایک کے نسب نما میں 10 آتا ہے۔ 10 کو 10 سے تقسیم کرنے پر 1 آتا ہے۔ اور 255 کو 5 سے تقسیم کرنے پر 51 آتا ہے۔ اعشاریائی نقطے کو ایک مقام دائیں جانب کھسکانے پر $55 = \frac{225}{5}$ حاصل ہوتا ہے۔

لہٰذا، $22.5 \div 1.5 = \frac{22.5}{1.5} = \frac{225}{15} = 15$

اسی طریقے سے $\frac{20.3}{0.7}$ اور $\frac{15.2}{0.8}$ معلوم کیجیے۔

**کوشش کیجیے:**

معلوم کیجیے (i) $\frac{7.75}{0.25}$ (ii) $\frac{42.8}{0.02}$ (iii) $\frac{5.6}{1.4}$

اب ذرا $20.55 \div 1.5$ معلوم کیجیے۔ اس کو ہم $205.5 \div 15$ بھی لکھ سکتے ہیں۔ جیسا کہ اوپر بتایا گیا ہے، ہمیں 13.7 ملے گا۔ $\frac{3.96}{0.4}$ ، $\frac{2.31}{0.3}$ معلوم کیجیے۔

اب $\frac{33.725}{0.25}$ کو دیکھیے۔ اس کو ہم $\frac{3372.5}{25}$ لکھ سکتے ہیں۔ (کیسے؟) اور ہم کو خارج قسمت 134.9 مل جائے گی۔ $\frac{27}{0.03}$ کو آپ کیسے معلوم کریں گے؟ ہم جانتے ہیں کہ 27 کو 27.00 بھی لکھا جا سکتا ہے۔

اس لیے،
$$\frac{27}{0.03} = \frac{27.00}{0.03} = \frac{2700}{3} = 900$$

**مثال 10** ایک منظّم کثیر ضلعی کے ہر ضلعے کی لمبائی 2.5 سم ہے۔ اس کثیر ضلعی کا احاطہ 12.5 سم ہے۔ کثیر ضلعی کے کتنے ضلعے ہیں؟

**حل** منظّم کثیر ضلعی کا احاطہ اس کے تمام مساوی اضلاع کی لمبائیوں کے جوڑ کے برابر ہوگا = 12.5 سم

ہر ضلع کی لمبائی = 2.5 سینٹی میٹر

لٰہذا ضلعوں کی تعداد = $\frac{12.5}{2.5} = \frac{125}{25} = 5$

کثیر ضلعی کے 5 اضلاع ہیں۔

**مثال 11** ایک کار 89.1 کلومیٹر کا فاصلہ 2.2 گھنٹوں میں طے کرتی ہے۔ 1 گھنٹے میں یہ کتنا اوسط فاصلہ طے کرے گی؟

**حل** کار کے ذریعے طے کیا گیا فاصلہ = 89.1 کلومیٹر

اس فاصلے کو طے کرنے میں لگا وقت = 2.2 گھنٹے

اس لیے اس کے ذریعے ایک گھنٹے میں طے کیا گیا فاصلہ = $\frac{89.1}{2.2}$

$\frac{891}{22} = 40.5$ کلومیٹر

## مشق 2.7

1۔ معلوم کیجیے:

(i) $0.4 \div 2$ (ii) $0.35 \div 5$ (iii) $2.48 \div 4$ (iv) $65.4 \div 6$

(v) $651.2 \div 4$ (vi) $14.49 \div 7$ (vii) $3.96 \div 4$ (viii) $0.80 \div 5$

2۔ معلوم کیجیے:

(i) $4.8 \div 10$ (ii) $52.5 \div 10$ (iii) $0.7 \div 10$ (iv) $33.1 \div 10$

(v)272.23 ÷ 10 (vi)0.56 ÷ 10 (vii)3.97 ÷10

3۔ معلوم کیجیے:

(i)2.7 ÷ 100 (ii)0.3 ÷ 100 (iii)0.78 ÷ 100

(iv)432.6 ÷ 100 (v)23.6 ÷ 100 (vi)98.53 ÷ 100

4۔ معلوم کیجیے:

(i) 7.9 ÷ 1000 (ii) 26.3 ÷ 1000 (iii) 38.53 ÷ 1000

(iv) 128.9÷1000 (v) 0.5 ÷ 1000

5۔ معلوم کیجیے:

(i) 7 ÷ 3.5 (ii) 36 ÷ 0.2 (iii) 3.25 ÷ 0.5 (iv) 30.94 ÷ 0.7

(v) 0.5 ÷ 0.25 (vi) 7.75 ÷ 0.25 (vii) 76.5 ÷ 0.15 (viii)37.8 ÷ 1.4 (ix)2.73 ÷ 1.3

6۔ ایک گاڑی 2.4 لیٹر پٹرول میں 43.2 کلومیٹر کا فاصلہ طے کرتی ہے۔ ایک لیٹر پٹرول میں وہ کتنا فاصلہ طے کرے گی؟

## ہم نے کیا سیکھا؟

1۔ ہم پچھلی کلاسوں میں کسری اور اعشاریائی اعداد اور ان کی جمع و تفریق پڑھ چکے ہیں۔

2۔ اب ہم نے کسری اور اعشاریائی اعداد کی ضرب اور تقسیم سیکھی ہے۔

3۔ ہم نے سیکھا کہ کسری اعداد کو کیسے ضرب کیا جاتا ہے۔ دو کسری اعداد کو ضرب کرنے کے لیے ان کے شمار کنندہ اور نسب نماؤں کو الگ الگ ضرب کرتے ہیں اور حاصل ضرب کو شمار کنندہ کا حاصل ضرب لکھتے ہیں۔ مثال کے طور پر

$$\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{2 \times 5}{3 \times 7} = \frac{10}{21}$$ شمار کنندہ کا حاصل ضرب / نسب نما کا حاصل ضرب

4۔ کسری اعداد میں 'کا' کی علامت کا بھی استعمال ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر 2 کا $\frac{1}{2}$ ہے $\frac{1}{2} \times 2 = 1$

5۔ (a) دو واجب کسروں کی حاصل ضرب، ضرب ہونے والے دونوں کسری اعداد سے چھوٹی ہوتی ہے۔

(b) ایک واجب اور ایک غیر واجب کسر کی حاصل ضرب غیر واجب کسر سے چھوٹی اور واجب کسر سے بڑی ہوتی ہے۔

(c) دو غیر واجب کسروں کی ضرب دونوں کسروں سے بڑی ہوتی ہے۔

6۔ ایک کسری عدد کا مقلوب اس عدد کو اوپر نیچے الٹا کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

7۔ ہم نے دیکھا کہ دو کسری اعداد کی تقسیم کیسے ہوتی ہے۔

(a) جب کسی مکمل عدد کو ایک کسری عدد سے تقسیم کیا جاتا ہے تو ہم مکمل عدد کو کسری عدد کے مقلوب سے ضرب کرتے ہیں۔

مثال کے طور پر $2 \div \frac{3}{5} = 2 \times \frac{5}{3} = \frac{10}{3}$

(b) جب ہم کسی کسری عدد کو ایک مکمل عدد سے تقسیم کرتے ہیں تو ہم کسری عدد کو مکمل عدد کے مقلوب سے ضرب کرتے ہیں

مثال کے طور پر $\frac{2}{3} \div 7 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{7} = \frac{2}{21}$

(c) ایک کسری عدد کو کسی دوسرے کسری عدد سے تقسیم کرنے پر ہم پہلے کسری عدد کو دوسرے کسری عدد کے مقلوب سے ضرب کرتے ہیں، اس لیے

$$\frac{2}{3} \div \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{14}{15}$$

8۔ ہم نے دو اعشاریائی اعداد کی ضرب میں سیکھا۔ جب دو اعشاریائی اعداد کو ضرب کرنا ہو تو پہلے ان دونوں اعداد کو دو مکمل اعداد کی طرح ضرب کیجیے۔ دونوں اعشاریائی اعداد میں اعشاریائی عدد کے دائیں جانب کے ہندسوں کو گن لیجیے۔ گنے گئے ہندسوں کا جوڑ کیجیے۔ پھر حاصل ضرب میں سب سے دائیں جانب کے ہندسہ سے گنتی کرتے ہوئے اتنے ہی ہندسوں کے بعد اعشاریہ لگا دیجیے۔ یہ گنتی پہلے جوڑے گئے ہندسوں کے برابر ہونی چاہیے۔ مثال کے طور پر $0.5 \times 0.7 = 0.35$

9۔ کسی اعشاریائی عدد کو 10، 100 یا 1000 سے ضرب کرنے پر ہم اعشاریائی نقطے کو اتنے ہی ہندسہ دائیں جانب بڑھا دیتے ہیں جتنے ایک کے بعد صفر ہوتے ہیں۔

لہٰذا، $0.53 \times 10 = 5.3$ ، $0.53 \times 100 = 53$ ، $0.53 \times 1000 = 530$

10۔ ہم نے اعشاریائی اعداد کی تقسیم بھی سیکھی ہے۔

(a) ایک اعشاریائی عدد کو ایک مکمل عدد سے تقسیم کرنے کے لیے ہم پہلے ان دونوں اعداد کو مکمل اعداد کی طرح ہی تقسیم کرتے ہیں۔ پھر اعشاریائی عدد جیسا ہی اعشاریہ خارج قسمت میں لگا دیتے ہیں۔ مثال کے طور پر $8.4 \div 4 = 2.1$
یاد رکھیے یہ یہاں ہم صرف ان اعداد کو لے رہے ہیں جن کی تقسیم میں باقی صفر ہو۔

(b) ایک اعشاریائی عدد کو 10، 100 یا 1000 سے تقسیم کرنے کے لیے اعشاریائی عدد میں اعشاریہ اتنے ہی ہندسے بائیں جانب کھسکا دیا جاتا ہے، جتنے ایک کے بعد صفر ہوتے ہیں۔ مثال کے طور پر

$23.9 \div 10 = 2.39$, $23.9 \div 100 = 0.239$, $23.9 \div 1000 = 0.0239$

(c) دو اعشاریائی اعداد کو تقسیم کرنے کے لیے پہلے مقسوم علیہ کا اعشاریہ ہٹانے کے لیے دونوں اعداد میں اعشاریہ دائیں جانب، برابر مقاموں پر کھسکایا جاتا ہے۔ اب (a) کی طرح ہی جواب حاصل کیجیے۔ مثلاً؛ $2.4 \div 0.2 = 24 \div 2 = 12$

باب 3

# اعداد و شمار کا استعمال

## 3.1 تعارف (Introduction)

اپنی گزشتہ کلاسوں میں آپ نے مختلف طرح کے اعداد و شمار کے بارے میں پڑھا ہے۔ آپ نے اعداد و شمار کو اکٹھا کرنا، اس کا جدول بنانا اور پھر اس کا بار گراف بنانا سیکھا ہے۔ اعداد و شمار کو اکٹھا کرنا، اس کا تحریری اندراج کرنا اور پھر اس کا مختلف طریقوں سے اظہار کرنے سے ہمیں اپنے تجربات کی تنظیم کرنے اور اس کی مدد سے نتائج اخذ کرنے میں مدد ملتی ہے۔ اس باب میں ہم اسی تجربہ کو آگے بڑھائیں گے۔ آپ کچھ اور قسم کے اعداد و شمار اور گراف دیکھیں گے۔ آپ اکثر اخبار، رسالوں، ٹیلی ویژن وغیرہ میں مختلف قسم کے اعداد و شمار دیکھتے ہوں گے۔ آپ یہ بھی جانتے ہیں کہ ہر قسم کے اعداد و شمار ہمیں کچھ نہ کچھ معلومات فراہم کرتے ہیں۔ آیئے ذرا اعداد و شمار کی کچھ عام قسموں پر نظر ڈالتے ہیں جو آپ نے اکثر دیکھے ہوں گے۔

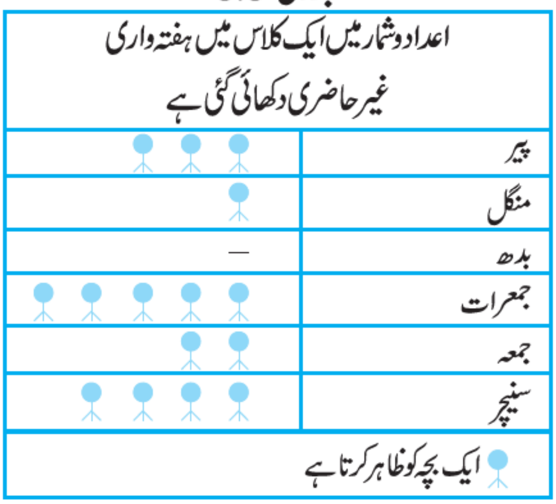
جدول 3.1

| 20.6.2006 کو مختلف شہروں کا درجۂ حرارت | | |
|---|---|---|
| شہر | زیادہ سے زیادہ | کم سے کم |
| احمد آباد | 38°C | 29°C |
| امرتسر | 37°C | 26°C |
| بنگلور | 28°C | 21°C |
| چنئی | 36°C | 27°C |
| دہلی | 38°C | 28°C |
| جے پور | 39°C | 29°C |
| جموں | 41°C | 26°C |
| ممبئی | 32°C | 27°C |

جدول 3.2

| فٹ بال ورلڈ کپ 2006 | |
|---|---|
| یوکرین نے سعودی عرب کو ہرایا | 4 – 0 |
| اسپین نے تیونیشیا کو ہرایا | 3 – 1 |
| سوئٹزرلینڈ نے ٹوگو کو ہرایا | 2 – 0 |

جدول 3.3



اعداد و شمار کے یہ مجموعے آپ کو کیا بتا رہے ہیں؟

مثال کے طور پر آپ کہہ سکتے ہیں کہ جموں میں 20.06.2006 کو سب سے زیادہ درجۂ حرارت تھا۔ (جدول 3.1) یا ہم کہہ سکتے ہیں کہ بدھ کے دن ایک بھی بچہ غیر حاضر نہیں تھا۔ (جدول 3.3)

کیا ہم ان اعداد و شمار کو کسی مختلف طریقے سے منظّم اور ظاہر کر سکتے ہیں تا کہ ان کے تجزیے اور ان کی تشریح اور زیادہ بہتر طریقے سے کی جا سکے؟ اس طرح کے کچھ سوالات کو ہم اب اس باب میں دیکھیں گے۔

## 3.2 اعداد و شمار کو جمع کرنا (Collecting Data)

مختلف شہروں کے درجۂ حرارت کا اعداد و شمار (جدول 3.1) ہم کو بہت ساری چیزیں بتاتا ہے، لیکن یہ ہمیں نہیں بتا سکتا کہ کون سے شہر کا اس سال کے دوران درجۂ حرارت سب سے زیادہ تھا۔ یہ معلوم کرنے کے لیے ہم کو سال کے دوران ان شہروں کا درجۂ حرارت زیادہ سے زیادہ کہاں تک پہنچا، اس کے اعداد و شمار جمع کرنے کی ضرورت ہے۔ ایسی حالت میں سال کے کسی ایک خاص دن کے درج حرارت کا چارٹ، جیسا کہ جدول 3.1 میں دیا گیا ہے، کافی نہیں ہے۔

اس سے یہ بات ظاہر ہوتی ہے کہ کسی اعداد و شمار کا دیا گیا مجموعہ اس اعداد و شمار سے متعلق کوئی مخصوص جانکاری نہیں دیتا ہے۔ اس کے لیے ضرورت اس بات کی ہے کہ اعداد و شمار جمع کرتے وقت وہ مخصوص جانکاری دماغ میں رکھی جائے۔ اوپر والے کیس میں جو مخصوص جانکاری ہمیں چاہیے وہ سال کے دوران شہروں کا زیادہ سے زیادہ درجۂ حرارت ہے، جو کہ ہم کو جدول 3.1 سے نہیں مل سکتا ہے۔

لہٰذا، **اعداد و شمار جمع کرنے سے پہلے یہ جان لینا ضروری ہے کہ ہم اس کو کس لیے استعمال کریں گے۔**

نیچے کچھ حالتیں دی گئی ہیں

آپ پڑھنا چاہتے ہیں

- آپ کی کلاس کی ریاضی میں کارکردگی
- فٹ بال یا کرکٹ میں ہندوستان کی کارکردگی
- کسی دیے ہوئے علاقہ میں عورتوں کی تعلیم کی شرح
- آپ کے آس پڑوس میں رہنے والے کنبوں میں پانچ سال سے کم والے بچوں کی تعداد

اوپر دی گئی حالتوں میں آپ کو کس قسم کے اعداد و شمار کی ضرورت ہوگی؟ جب تک آپ مناسب اعداد و شمار اکٹھا نہیں کریں گے اس وقت تک آپ مطلوبہ جانکاری حاصل نہیں کر پائیں گے۔ ہر ایک کے لیے مناسب اعداد و شمار کیا ہے؟

اپنے دوستوں سے بات چیت کیجیے اور ہر ایک کے لیے ضروری اعداد و شمار کی شناخت کیجیے۔ ان میں سے کچھ اعداد و شمار جمع کرنے میں آسان ہیں اور کچھ مشکل۔

## 3.3 اعداد و شمار کی تنظیم کاری (Organisation of Data)

جب ہم اعداد و شمار جمع کرتے ہیں تو ہم اس کو درج (ریکارڈ) اور منظّم (Organise) کرتے ہیں۔ یہ کرنے کی ہمیں کیا ضرورت ہے؟

درج ذیل مثالوں پر غور کیجیے:

کلاس کی استانی (ٹیچر)، نیلم صاحبہ یہ جاننا چاہتی ہیں کہ بچوں کی انگریزی میں کارکردگی کیسی ہے۔ انہوں نے بچوں کے مارکس درج ذیل طریقہ سے لکھے۔

23, 35, 48, 30, 25, 46, 13, 27, 32, 38

اس شکل میں یہ اعداد و شمار سمجھنا آسان نہیں ہے۔ وہ یہ بھی نہیں جانتیں کہ ان کا طلبا کے بارے میں جو تاثر ہے وہ ان کی کارکردگی سے بھی میل کھا رہا ہے یا نہیں۔

نیلم کی ساتھی ٹیچر نے اس اعداد و شمار کو درج ذیل طریقے سے منظّم کرنے میں اس کی مدد کی۔ (جدول 3.4)

### جدول 3.4

| رول نمبر | نام | نمبر 50 میں سے | رول نمبر | نام | نمبر 50 میں سے |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | اجے | 23 | 6 | گووند | 46 |
| 2 | ارمان | 35 | 7 | جے | 13 |
| 3 | آشیش | 48 | 8 | کویتا | 27 |
| 4 | دیپتی | 30 | 9 | منیشا | 32 |
| 5 | فیضان | 25 | 10 | نیرج | 38 |

اس شکل میں نیلم یہ جان پائیں کہ کس بچے کے کتنے نمبر آئے ہیں، لیکن وہ اور زیادہ جاننا چاہتی ہیں۔ دیپیکا نے انھیں اس اعداد و شمار کو منظّم کرنے کا ایک اور طریقہ بتایا۔ (جدول 3.5)

### جدول 3.5

| رول نمبر | نام | نمبر 50 میں سے | رول نمبر | نام | نمبر 50 میں سے |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | آشیش | 48 | 4 | دیپتی | 30 |
| 6 | گووند | 46 | 8 | کویتا | 27 |
| 10 | نیرج | 38 | 5 | فیضان | 25 |
| 2 | ارمان | 35 | 1 | اجے | 23 |
| 9 | منیشا | 32 | 7 | جے | 13 |

اب نیلم یہ دیکھ سکتی ہیں کہ کس نے سب سے اچھا کیا اور کس کو مدد کی ضرورت ہے۔

بہت سے اعداد وشمار جو ہم دیکھتے ہیں وہ جدول کی شکل میں لکھے جاتے ہیں۔ ہمارے اسکول کی حاضری، امتحان کے نتائج، کاپی میں بنی فہرستیں، درجۂ حرارت کے ریکارڈ اور بہت سے اور بھی۔ سب جدول کی شکل میں ہی لکھے جاتے ہیں۔ کیا آپ کچھ اور ایسے اعداد شمار سوچ سکتے ہیں جو جدول کی شکل میں ہوں؟

جب ہم اعداد وشمار کو مناسب جدول میں مرتّب کرتے ہیں تب اُس کی تفہیم اور تشریح آسان ہو جاتی ہے۔

## کوشش کیجیے:

اپنی کلاس کے کم از کم 20 بچوں (لڑکے اور لڑکیاں) کا وزن (کلوگرام میں) ناپیے۔ اعداد وشمار کو منظّم کیجیے اور اس کے ذریعے درج ذیل سوالات کے جواب دیجیے۔

(i) سب سے بھاری کون ہے؟ (ii) کون سا وزن سب سے زیادہ عام ہے؟

(iii) آپ کے اور آپ کے سب سے اچھے دوست کے وزن میں کتنا فرق ہے؟

## 3.4 نمائندہ قیمتیں (Representative Values)

آپ اپنی روزمرہ کی زندگی میں اصطلاح **'اوسط'** اور اوسط سے متعلق بیانات سنتے ہوں گے۔

- ایشا روزانہ اوسطاً 5 گھنٹے اپنی پڑھائی پر خرچ کرتی ہے۔
- سال کے اس وقت میں اوسط درجہ حرارت 40 ڈگری سیلسیس ہوتا ہے۔
- میری کلاس کے بچوں کی اوسط عمر 12 سال ہے۔
- ایک اسکول میں سالانہ امتحانوں کے دوران اوسط حاضری 98 فی صدی تھی۔

اسی طرح کے اور بہت سے بیانات ہو سکتے ہیں۔ اوپر دیے گئے بیانات کے بارے میں سوچیے۔

کیا آپ سمجھتے ہیں کہ پہلے بیان میں بچہ روزانہ پورے 5 گھنٹے پڑھتا ہوگا؟

یا، اس جگہ کا درجۂ حرارت اس خاص وقت میں ہمیشہ 40 ڈگری ہوگا؟

یا، اس کلاس میں ہر طالب علم کی عمر 12 سال ہوگی؟ یقیناً نہیں۔

تو یہ بیانات آپ کو کیا بتا رہے ہیں؟

اوسط سے ہم یہ سمجھتے ہیں کہ ایشا عام طور پر 5 گھنٹے پڑھتی ہے۔ کسی دن پانچ گھنٹوں سے کم پڑھتی ہے اور کسی دن پانچ گھنٹوں سے زیادہ پڑھتی ہے۔

اسی طرح، اوسط درجہ حرارت 40 ڈگری سیلسیس کا مطلب ہے کہ عام طور پر سال کے اس وقت درجہ حرارت 40 ڈگری سیلسیس کے آس پاس رہتا ہے، کبھی کبھی یہ 40 ڈگری سیلسیس سے کم اور کبھی 40°C سے زیادہ بھی ہو سکتا ہے۔

لہٰذا، ہم یہ سمجھ سکتے ہیں کہ اوسط وہ عدد ہے جو اعداد و شمار یا مشاہدات کے مجموعے کے مرکزی میلان (Central tendency) کو ظاہر کرتا ہے۔ کیونکہ کسی دیئے ہوئے اعداد و شمار کا اوسط سب سے زیادہ اور سب سے کم قیمت کے درمیان میں پایا جاتا ہے۔ اس لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ اوسط کسی اعداد و شمار کے مجموعہ کے مرکزی میلان کی پیمائش کا طریقہ ہے۔ اعداد و شمار کی مختلف قسمیں کو ظاہر کرنے کے لیے مختلف قسم کے نمائندے یا مرکزی قیمت کی ضرورت ہوتی ہے۔ اس طرح کی نمائندہ قیمتوں میں سے ایک ''حسابی اوسط'' ہے۔ دوسری نمائندہ قیمتوں کے بارے میں آپ سبق میں بعد میں پڑھیں گے۔

## 3.5 حسابی اوسط (Arithmetic Mean)

کسی اعداد و شمار کے مجموعہ کی سب سے زیادہ عام نمائندہ قیمت حسابی اوسط یا اوسط ہے۔ اس کو زیادہ اچھے طریقے سے سمجھنے کے لیے آیئے درج ذیل مثالوں پر ایک نظر ڈالتے ہیں۔

دو برتنوں میں بالترتیب 20 اور 60 لیٹر دودھ آتا ہے۔ اگر دونوں برتنوں میں برابر برابر دودھ آتا ہے تو ہر برتن کا ناپ کیا ہوگا؟

جب ہم اس طرح کا سوال پوچھتے ہیں تو ہم حسابی اوسط کی بات کرتے ہیں۔

اوپر دی گئی صورت حال میں اوسط یا حسابی اوسط ہوگا

$$\frac{\text{دودھ کی کل مقدار}}{\text{برتنوں کی تعداد}} = \frac{20+60}{2}\ \text{لیٹر} = 40\ \text{لیٹر}$$

لہٰذا، ہر برتن میں 40 لیٹر دودھ آئے گا۔

اوسط یا حسابی اوسط کو درج ذیل طریقے سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

$$\text{اوسط} = \frac{\text{تمام مشاہدات کا جوڑ}}{\text{مشاہدات کی تعداد}}$$

درج ذیل مثالوں پر غور کیجیے۔

**مثال 1** آشیش تین لگاتار دنوں میں بالترتیب 4 گھنٹے، 5 گھنٹے اور 3 گھنٹے پڑھتا ہے۔ وہ روزانہ اوسطاً کتنے گھنٹے پڑھتا ہے۔

**حل** آشیش کے پڑھنے کا اوسط وقت ہوگا

$$= \frac{\text{پڑھائی کے کل گھنٹے}}{\text{پڑھائی والے دنوں کی تعداد}} = \frac{4+5+3}{3}\ \text{گھنٹے} = 4\ \text{گھنٹے فی دن}$$

لہٰذا، ہم کہہ سکتے ہیں کہ آشیش اوسطاً روزانہ 4 گھنٹے پڑھتا ہے۔

**مثال 2** ایک بلے باز نے چھ پاریوں میں مندرجہ ذیل رن بنائے۔

36, 35, 50, 46, 60, 55

اس کی ایک پاری کا اوسط رن اسکور معلوم کیجیے

**حل** کل رن = 36 + 35 + 50 + 46 + 60 + 55 = 282

اوسط نکالنے کے لیے ہم کو تمام مشاہدات کا جوڑ معلوم کرنا ہے اور پھر اس کو مشاہدات کی کل تعداد سے تقسیم کرنا ہے۔

اس لیے، اس صورت حال میں اوسط= $\frac{282}{6} = 47$ لہٰذا، اوسط رن اسکور 47 ہے۔

اس طرح ایک باری میں اُس کے ذریعے بنائے گئے رنوں کا اوسط 47 ہے۔

## کوشش کیجیے:

آپ اپنے ہفتہ بھر کی پڑھائی کا اوسط وقت کیسے معلوم کریں گے۔

## سوچیے، بات چیت کیجیے اور لکھیے:

اوپر دی گئی مثالوں میں دیے گئے اعداد و شمار پر غور کیجیے اور درج ذیل کے بارے میں سوچیے۔

- کیا اوسط ہر ایک مشاہدہ سے بڑا ہوتا ہے؟
- کیا اوسط ہر ایک مشاہدہ سے چھوٹا ہوتا ہے؟

اپنے دوستوں سے تبادلہ خیال کیجیے۔ اسی طرح کی ایک اور مثال بنائیے اور ایسے ہی سوالات کے جواب دیجیے۔

آپ دیکھیں گے کہ اوسط سب سے بڑے اور سب سے چھوٹے مشاہدے کے درمیان میں واقع ہوتا ہے۔

مخصوص طور پر دو اعداد کا اوسط ہمیشہ ان دونوں اعداد کے درمیان ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر 5 اور 11 کا اوسط ہے $\frac{5+11}{2}=8$، جو 5 اور 11 کے درمیان میں واقع ہے۔

کیا آپ اس خیال کو یہ دکھانے میں استعمال کر سکتے ہیں کہ کن ہی دو کسری اعداد کے درمیان آپ جتنے چاہیں اتنے کسری اعداد معلوم کر سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{4}$ کے درمیان ان کا اوسط $\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{2} = \frac{3}{8}$ اور پھر $\frac{1}{2}$ اور $\frac{3}{8}$ کے درمیان ان کا اوسط $\frac{7}{16}$ ہے اور اسی طرح آگے بھی۔

## کوشش کیجیے:

1۔ ایک ہفتہ میں اپنے سونے کے گھنٹوں کا اوسط معلوم کیجیے۔

2۔ $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{3}$ کے درمیان کم از کم 5 اعداد معلوم کیجیے۔

### 3.5.1 سعت (Range)

سب سے بڑے اور سب سے چھوٹے مشاہدے کے درمیان کا فرق ہم کو مشاہدات کے پھیلاؤ کا تصور دیتا ہے۔ اس کو ہم سب سے

بڑے مشاہدے میں سے سب سے چھوٹے مشاہدے کو گھٹا کر نکال سکتے ہیں۔ حاصل ہوئے نتیجہ کو ہم مشاہدات کی سعت (Range) کہتے ہیں۔ درج ذیل مثالوں کو دیکھیے۔

**مثال 3** ایک اسکول کے 10 اساتذہ کی عمریں (سالوں میں) یہ ہیں

32, 41, 28, 54, 35, 26, 23, 33, 38, 40

(i) سب سے بڑے استاد اور سب سے چھوٹے استاد کی عمریں کیاں ہیں؟

(ii) اساتذہ کی عمروں کی سعت بتایئے

(iii) ان اساتذہ کی اوسط عمر کیا ہے؟

**حل**

(i) عمروں کو بڑھتی ترتیب میں لگانے پر ہم کو ملتا ہے:

23, 26, 28, 32, 33, 35, 38, 40, 41, 54

ہم نے معلوم کیا کہ سب سے بڑے استاد کی عمر 54 سال اور سب سے چھوٹے استاد کی عمر 23 سال ہے۔

(ii) ااساتذہ کی عمروں کی سعت ہے = (54 – 23) سال = 31 سال

(iii) اساتذہ کی اوسط عمر = $\frac{23+26+28+32+33+35+38+40+41+54}{10}$ سال

= $\frac{350}{10}$ سال = 35 سال

## مشق 3.1

1۔ اپنی کلاس کے کوئی بھی دس طلبا کی لمبائیوں کی سعت معلوم کیجیے۔

2۔ کلاس میں لی گئی جانچ کے درج ذیل مارکس کو جدولی شکل میں منظم کیجیے:

4, 6, 7, 5, 3, 5, 4, 5, 2, 6, 2, 5, 1, 9, 6, 5, 8, 4, 6, 7

(i) کون سا نمبر سب سے بڑا ہے؟

(ii) کون سا نمبر سب سے چھوٹا ہے؟

(iii) اعداد و شمار کی سعت کیا ہے؟

(iv) حسابی اوسط معلوم کیجیے۔

3۔ ابتدائی پانچ مکمل اعداد کا اوسط معلوم کیجیے۔

4۔ ایک بلے باز نے آٹھ پاریوں میں درج ذیل رن بنائے:

58, 76, 40, 35, 46, 45, 0, 100

اوسط اسکور معلوم کیجیے۔

5۔ درج ذیل جدول چار کھیلوں میں ہر کھلاڑی کے بنائے ہوئے پوائنٹس دکھاتی ہے:

| کھلاڑی | کھیل 1 | کھیل 2 | کھیل 3 | کھیل 4 |
|---|---|---|---|---|
| A | 14 | 16 | 10 | 10 |
| B | 0 | 8 | 6 | 4 |
| C | 8 | 11 | نہیں کھیلا | 13 |

اب مندرجہ ذیل سوالوں کے جواب دیجیے:

(i) A کے ہر کھیل میں بنایے گیے پوائنٹس کا اوسط عدد معلوم کرنے کے لیے اوسط معلوم کیجیے۔

(ii) C کے ہر کھیل کے پوائنٹس کا اوسط نکالنے کے لیے کیا آپ کل پوائنٹس کو 3 سے یا 4 سے تقسیم کریں گے؟ کیوں؟

(iii) B چاروں کھیلوں میں کھیلا ہے۔ آپ اوسط کیسے نکالیں گے؟

(iv) کس کی کارکردگی سب سے اچھی ہے؟

6۔ سائنس کی جانچ میں طلبا کے ایک گروپ کے مارکس (100 میں سے) ہیں 85، 76، 90، 85، 39، 48، 56، 95، 81 اور 75۔ معلوم کیجیے:

(i) طلبا کے ذریعے حاصل کیے گیے سب سے زیادہ اور سب سے کم مارکس۔

(ii) حاصل شدہ مارکس کی سعت۔

(iii) گروپ کے حاصل شدہ مارکس کا اوسط۔

7۔ ایک اسکول میں چھ لگاتار سالوں میں ہونے والے داخلوں کی تعداد ہے:

1555, 1670, 1750, 2013, 2540, 2820

اس عرصے میں اسکول میں ہونے والے داخلوں کا اوسط معلوم کیجیے۔

8۔ ایک شہر میں کسی خاص ہفتے کے 7 دنوں میں ہونے والی بارش کا ریکارڈ درج ذیل ہے:

| دن | پیر | منگل | بدھ | جمعرات | جمعہ | سنیچر | اتوار |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| بارش (ملی میٹر میں) | 0.0 | 12.2 | 2.1 | 0.0 | 20.5 | 5.5 | 1.0 |

(i) اوپر دیے گئے اعداد و شمار میں بارش کی سعت معلوم کیجیے۔

(ii) ہفتہ بھر کی بارش کا اوسط معلوم کیجیے۔

(iii) اوسط سے کم بارش کتنے دن ہوئی۔

9۔ 10 لڑکیوں کی لمبائی (سنٹی میٹر میں) ناپی گئی اور نتائج درج ذیل ہیں:

135, 150, 139, 128, 151, 132, 146, 149, 143, 141.

(i) سب سے لمبی لڑکی کی لمبائی کیا ہے؟ (ii) سب سے چھوٹی لڑکی کی لمبائی کیا ہے؟

(iii) اعداد و شمار کی سعت کیا ہے؟ (iv) لڑکیوں کی اوسط لمبائی کیا ہے؟

(v) کتنی لڑکیوں کی لمبائی اوسط لمبائی سے زیادہ ہے؟

## 3.6 بہتاتیہ (Mode)

جیسا کہ ہم کہہ چکے ہیں کہ صرف اوسط ہی مرکزی میلان کی پیائش کا طریقہ نہیں ہے یا نمائندہ قیمتوں کی اکیلی شکل نہیں ہے۔ اعداد و شمار کی مختلف ضروریات کے مطابق مرکزی میلان کے دوسرے پیائش کے طریقے استعمال ہوتے ہیں۔

### درج ذیل مثال کو دیکھیے

شرٹ کے مختلف سائزوں کی ہفتہ واری مانگ کو معلوم کرنے کے لیے ایک دکاندار نے مختلف سائز جیسے 90 سنٹی میٹر، 100 سنٹی میٹر، 105 سنٹی میٹر، 110 سنٹی میٹر کے ریکارڈ رکھے۔ ایک ہفتہ کے ریکارڈ مندرجہ ذیل ہیں:

| سائز (سم میں) | 90 سنٹی میٹر | 95 سنٹی میٹر | 100 سنٹی میٹر | 105 سنٹری میٹر | 110 سنٹری میٹر | کل تعد |
|---|---|---|---|---|---|---|
| بکنے والی شرٹس کی تعداد | 8 | 22 | 32 | 37 | 6 | 105 |

اگر وہ بکنے والی شرٹس کا اوسط سائز معلوم کرتا ہے تو کیا آپ سمجھتے ہیں کہ وہ یہ طے کر سکتا ہے کہ اس کو کون سے سائز کی شرٹس رکھنی ہیں؟

$$\text{بکنے والی کل شرٹس کا اوسط} = \frac{\text{کل بکنے والی شرٹس کی تعداد}}{\text{شرٹس کے مختلف سائزوں کی تعداد}} = \frac{105}{5} = 21$$

کیا اسے ہر سائز کی 21 شرٹس حاصل ہوئیں؟ اگر وہ ایسا کرتا ہے تو کیا وہ خریداروں کی ضرورت کو پورا کر پائے گا؟

دکاندار نے ریکارڈ کو دیکھتے ہوئے یہ فیصلہ کیا کہ وہ 95 سنٹی میٹر، 100 سنٹی میٹر، 105 سنٹی میٹر کی شرٹس مہیا کروائے گا۔ اس نے طے کیا کہ باقی سائزوں کی شرٹس وہ نہیں بنوائے گا کیونکہ ان کو بہت کم لوگ خریدتے ہیں۔

### ایک دوسری مثال دیکھیے

سلے سلائے کپڑوں کی دکان کے مالک نے کہا، ''میرے یہاں سب سے زیادہ بکنے والے کپڑوں کا سائز 90 سنٹی میٹر ہے۔

مشاہدہ کیجیے کہ یہاں بھی مالک مختلف سائز کی بکنے والی شرٹس کی تعداد کو دیکھ رہا ہے۔ وہ شرٹ کے اس سائز کو دیکھ رہا ہے جو سب سے زیادہ بک رہا ہے۔ یہ اعداد و شمار کی ایک اور نمائندہ قیمت ہے۔ سب سے زیادہ بکنے والا سائز 90 سنٹی میٹر ہے۔ یہ نمائندہ قیمت اعداد و شمار کا بہتاتیہ کہلاتی ہے۔

**مشاہدات کے مجموعے کا بہتاتیہ وہ مشاہدہ ہوتا ہے جو سب سے زیادہ بار آتا ہے۔**

**مثال 4** دیے گئے اعداد کا بہتاتیہ معلوم کیجیے: 1, 1, 2, 4, 3, 2, 1, 2, 2, 4

**حل** ایک قیمت کے اعداد کو اکٹھا کر کے ترتیب سے لگانے پر ہم کو ملتا ہے

1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 4, 4

اس اعداد و شمار کا بہتاتیہ 2 ہے، کیونکہ یہ دوسرے مشاہدات کے مقابلے سب سے زیادہ بار آتا ہے۔

## 3.6.1 بڑے اعداد و شمار کا بہتاتیہ (Mode of Large Data)

ایک سے مشاہدات کو ایک ساتھ رکھنا اور پھر ان کو گننا بہت آسان کام نہیں ہے، اگر مشاہدات کی تعداد زیادہ ہے۔ ایسے حالات میں ہم اعداد و شمار کو جدول کی شکل میں لکھ لیتے ہیں۔ جدول سازی کی شروعات شماریاتی نشانات لگانے اور تعداد معلوم کرنے سے ہوتی ہے۔ جیسا کہ آپ نے پچھلی کلاسوں میں کیا ہے۔

درج ذیل مثالوں کو دیکھیے :

**کوشش کیجیے :**

بہتاتیہ معلوم کیجیے :

(i) 2, 6, 5, 3, 0, 3, 4, 3, 2, 4, 5, 2, 4,

(ii) 2, 14, 16, 12, 14, 14, 16, 14, 10, 14,18, 14

**مثال 5** فٹبال مقابلے کرنے والی ٹیموں کے جیتنے کے فرق درج ذیل ہیں :

1, 3, 2, 5, 1, 4, 6, 2, 5, 2, 2, 2, 4, 1, 2, 3, 1, 1, 2, 3, 2,

6, 4, 3, 2, 1, 1, 4, 2, 1, 5, 3, 3, 2, 3, 2, 4, 2, 1, 2

اس اعداد و شمار کا بہتاتیہ بتائیے۔

**حل** ذرا اس اعداد و شمار کو جدولی شکل میں لکھیے

<table>
<tr><th>جیتنے کا فرق</th><th>شماریاتی نشانات</th><th>میچوں کی تعداد</th></tr>
<tr><td>1</td><td>𝍸 ||||</td><td>9</td></tr>
<tr><td>2</td><td>𝍸 𝍸 ||||</td><td>14</td></tr>
<tr><td>3</td><td>𝍸 ||</td><td>7</td></tr>
<tr><td>4</td><td>𝍸</td><td>5</td></tr>
<tr><td>5</td><td>|||</td><td>3</td></tr>
<tr><td>6</td><td>||</td><td>2</td></tr>
<tr><td></td><td>کل</td><td>40</td></tr>
</table>

جدول کو دیکھ کر، ہم فوراً سے کہہ سکتے ہیں کہ '2' بہتاتیہ ہے، کیونکہ 2 سب سے زیادہ بار آیا ہے۔ لہٰذا، زیادہ تر میچ 2 گول کے فرق سے جیتے گئے ہیں۔

**سوچیے، تبادلہ خیال کیجیے اور لکھیے**

کیا کسی اعداد کے مجموعے میں ایک سے زیادہ بہتاتیہ ہو سکتے ہیں؟

**مثال 6** درج ذیل اعداد کا بہتاتیہ بتائیے:

2, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 8

**حل** یہاں، 2 اور 5 دونوں تین تین بار آئے ہیں۔ اس لیے، یہ دونوں ہی اس اعداد و شمار کے لیے بہتاتیہ ہیں۔

## خود کریں

1۔ اپنے کلاس کے ساتھیوں کی عمریں (سالوں میں) ریکارڈ کیجیے۔ اعداد و شمار کا جدول بنائیے اور بہتاتیہ معلوم کیجیے۔

2۔ اپنے کلاس کے ساتھیوں کی لمبائیاں ناپیے (سینٹی میٹر میں) اور بہتاتیہ معلوم کیجیے۔

## کوشش کیجیے:

1۔ درج ذیل اعداد و شمار کا بہتاتیہ معلوم کیجیے:

12, 14, 12, 16, 15, 13, 14, 18, 19, 12, 14, 15, 16, 15, 16, 16, 15,

17, 13, 16, 16, 15, 15, 13, 15, 17, 15, 14, 15, 13, 15, 14

2۔ 25 بچوں کی لمبائیاں (سینٹی میٹر میں) نیچے دی گئی ہیں

168, 165, 163, 160, 163, 161, 162, 164, 163, 162, 164, 163, 160, 163, 160, 165, 163,

162, 163, 164, 163, 160, 165, 163, 162

ان کی لمبائیوں کا بہتاتیہ نکالیے؟ یہاں بہتاتیہ سے ہماری سمجھ میں کیا آتا ہے؟

جہاں اوسط، ہمیں ایک اعداد و شمار کی تمام مشاہدات کا اوسط بتاتا ہے وہاں بہتاتیہ سے ہمیں یہ معلوم ہوتا ہے کہ کون سا مشاہدہ سب سے زیادہ بار آیا ہے۔

آئیے ذرا مندرجہ ذیل مثالوں پر دھیان دیں:

(a) آپ کو یہ طے کرنا ہے کہ ایک دعوت میں بلائے گئے 25 لوگوں کے لیے کتنی روٹیوں کی ضرورت پڑے گی۔

(b) شرٹس بیچنے والے ایک دکاندار کو یہ طے کرنا ہے کہ اسے اپنا مال پھر سے بھرنا ہے۔

(c) ہمیں اپنے گھر استعمال ہونے والے دروازے کی لمبائی معلوم کرنی ہے۔

(d) پکنک پر جاتے ہوئے، اگر صرف ایک ہی پھل ہر ایک کو خریدنا ہے تو وہ کون سا پھل ہوگا جو ہم کو ملے گا۔

ان میں سے کون سی صورت حال میں اچھا اندازہ لگانے کے لیے بہتاتیہ کو ہم استعمال کر سکتے ہیں؟

پہلے بیان پر دھیان دیجیے۔ مان لیجیے ہر آدمی کے لیے روٹیوں کی تعداد ہے

2, 3, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 2, 2, 4, 2, 2, 3, 2, 4, 4, 2, 3, 2, 4, 2, 4, 3, 5

اس اعداد و شمار کا بہتا تیہ 2 روٹی ہے۔ اگر ہم اس اعداد و شمار کی نمائندہ قیمت کے لیے بہتا تیہ کا استعمال کریں تو ہم کو 50 روٹیوں کی ضرورت ہوگی۔ 25 آدمیوں میں ہر ایک کے لیے دو روٹی جب کہ روٹیوں کی کل تعداد نا کافی ہے۔ کیا اوسط ایک مناسب نمائندہ قیمت ہے؟

تیسرے بیان میں جو کہ دروازے کی لمبائی سے متعلق ہے، یہ لمبائی ان لوگوں کی لمبائیوں سے متعلق ہے جن کو یہ استعمال کرنا ہے۔ مان لیجیے یہاں 5 بچے اور 4 بڑے لوگ ہیں جو اس دروازے کو استعمال کریں گے اور 5 بچوں میں سے ہر ایک بچے کی لمبائی 135 سنٹی میٹر کے قریب ہے۔ تو ان لمبائیوں کا بہتا تیہ 135 سنٹی میٹر ہوا۔ کیا ہمیں 144 سنٹی میٹر اونچا دروازہ چاہیے؟ کیا سبھی بڑے لوگ اس دروازے سے نکل پائیں گے؟ یہ صاف ظاہر ہو گیا کہ اس اعداد و شمار کے لیے بہتا تیہ مناسب نمائندہ قیمت نہیں ہے۔ کیا یہاں اوسط مناسب نمائندہ قیمت ہوگا؟

کیوں نہیں؟ اونچائی کی کون سی نمائندہ قیمت یہ طے کرنے کے لیے استعمال ہوگی کہ دروازے کی اونچائی کیا ہے؟

اسی طرح باقی بیانات کا تجزیہ کیجیے اور دیکھیے کہ ان کے لیے کون سی نمائندہ قیمت زیادہ کارآمد ہوگی۔

## کوشش کیجیے:

اپنے دوستوں سے بات چیت کیجیے اور بتایئے

(a) دو ایسی حالتیں جہاں پر اوسط ایک مناسب نمائندہ قیمت کی طرح استعمال ہو، اور

(b) دو ایسی حالتیں جہاں پر بہتا تیہ ایک مناسب نمائندہ قیمت کی طرح استعمال ہو۔

## 3.7 وسطانیہ (Median)

ہم نے دیکھا کہ کچھ حالات میں حسابی اوسط ہی مرکزی میلان کی مناسب پیمائش کا طریقہ ہوتا ہے جب کہ کچھ دوسرے صورت حال میں مرکزی میلان کی مناسب پیمائش کا طریقہ بہتا تیہ ہوتا ہے۔

آیئے ایک دوسری مثال کو دیکھتے ہیں۔ 17 طلبا کے ایک گروپ کی لمبائی مندرجہ ذیل دی گئی ہیں:

106, 110, 123, 125, 117, 120, 112, 115, 110, 120, 115, 102, 115, 115, 109, 115, 101.

کھیل کی ٹیچر ان طلبا کو دو گروپوں میں برابر برابر اس طرح بانٹنا چاہتی ہیں کہ ایک خاص لمبائی سے بڑے بچے ایک گروپ میں ہوں اور اس لمبائی سے چھوٹے بچے دوسرے گروپ میں۔ وہ ایسا کیسے کریں گی؟

آیئے دیکھتے ہیں کہ ان کے دوسرے طریقے کیا کیا ہیں۔

(i) وہ اوسط معلوم کر سکتی ہیں۔ اوسط ہے

$$\frac{106+110+123+125+117+120+112+115+110+120+115+102+115+115+109+115+101}{17}$$

$$=\frac{1930}{17}=113.5$$

تو، اگر ٹیچر اوسط لمبائی کی بنیاد پر طلبا کو دو گروپس میں بانٹ سکتی ہیں کہ ایک گروپ میں اوسط لمبائی سے کم لمبائی والے طلبا ہوں اور دوسرے گروپ میں اوسط لمبائی سے زیادہ لمبائی والے طلبا ہوں تو دونوں گروپس میں طلبا کی تعداد کم زیادہ ہوگی۔ ایک گروپ میں 7 اور دوسرے میں 10 ہوں گے۔

(ii) دوسرا طریقہ ہے کہ وہ بہتاتیہ نکال لیں۔ 115 سینٹی میٹر وہ مشاہدہ ہے، جس کی تعداد سب سے زیادہ ہے۔ جوکہ یہاں بہتاتیہ ہوا۔ یہاں پر 7 طلبا بہتاتیہ سے کم لمبائی کے ہیں اور 10 طلبا بہتاتیہ کے برابر یا زیادہ لمبائی کے ہیں۔ اس لیے اس بنیاد پر بھی ہم طلبا کو دو برابر گروپس میں نہیں بانٹ سکتے ہیں۔

اس لیے اب کسی اور نمائندہ قیمت یا مرکزی میلان کے پیائش کے کسی دوسرے طریقہ کے بارے میں سوچتے ہیں۔ اس کے لیے ہم ایک بار پھر طلبا کی لمبائیاں دیکھتے ہیں اور انہیں بڑھتی ترتیب میں لگا لیتے ہیں۔ ہمارے پاس درج ذیل مشاہدات ہیں۔

101, 102, 106, 109, 110, 110, 112, 115, 115, 115, 115, 115, 117, 120, 120, 123, 125

اس اعداد وشمار میں درمیانی قیمت 115 ہے۔ کیونکہ یہ طلبا کو 8 – 8 طلبا کے برابر گروپس میں بانٹ دیتی ہے۔ اس قیمت کو **وسطانیہ** کہتے ہیں۔ وسطانیہ وہ قیمت ہوتی ہے جو کسی اعداد وشمار کے بالکل درمیان میں ہوتی ہے۔ (جب گھٹتی یا بڑھتی ترتیب میں لگایا جائے) اور آدھے مشاہدات اس سے زیادہ اور آدھے اس سے کم ہوتے ہیں۔ کھیل کی ٹیچر نے یہ فیصلہ کیا کہ بیچ والے طالب علم کو کھیل کا ریفری بنا دیں گے۔

**کوشش کیجیے:**

آپ کے دوست نے دیے گئے اعداد وشمار کا وسطانیہ اور بہتاتیہ نکالا ہے۔ اگر اس میں کوئی غلطی ہے تو اس کو ٹھیک کر دیجیے اور بتائیے

35, 32, 35, 42, 38, 32, 34

وسطانیہ=42، بہتاتیہ=32

یہاں، ہم صرف ان معاملات کو دیکھیں گے جہاں مشاہدات کی تعداد طاق عدد ہے۔ لہٰذا، دیے گئے اعداد وشمار کو پہلے گھٹتی یا بڑھتی ترتیب میں لگائیے۔ بیچ والا مشاہدہ وسطانیہ ہے۔ دھیان دیجیے کہ عام طور پر وسطانیہ اور بہتاتیہ کی قیمتیں ایک سی نہیں ہوتیں۔ لہٰذا ہم نے یہ جانا کہ مشاہدات کے مجموعہ یا اعداد وشمار کی نمائندہ قیمتیں اوسط، بہتاتیہ اور وسطانیہ ہیں۔ یہ اعداد وشمار کی سب سے زیادہ اور سب سے کم قیمت کے درمیان میں واقع ہوتے ہیں۔ ان کو مرکزی میلان کے پیائش کے طریقے کہا جاتا ہے۔

**مثال 7** اعداد وشمار کا وسطانیہ معلوم کیجیے: 24, 36, 46, 17, 18, 25, 35

**حل** ہم اعداد وشمار کو بڑھتی ترتیب میں لگائیں گے۔ یعنی 17, 18, 24, 25, 35, 36, 46۔ وسطانیہ درمیانی مشاہدہ ہے۔ اس لیے 25 وسطانیہ ہے۔

## مشق 3.2

1۔ 15 طلبا کے ریاضی کی جانچ (25 میں سے) کے اسکور نیچے دیے گئے ہیں

19, 25, 23, 20, 9, 20, 15, 10, 5, 16, 25, 20, 24, 12, 20

اس اعداد وشمار کا وسطانیہ اور بہتاتیہ معلوم کیجیے۔ کیا یہ ایک سے ہیں۔

2۔ ایک کرکٹ کے میچ میں 11 کھلاڑیوں کے اسکور حسب ذیل ہیں

6, 15, 120, 50, 100, 80, 10, 15, 8, 10, 15

اس اعداد وشمار کے لیے اوسط، بہتاتیہ اور وسطانیہ معلوم کیجیے۔ کیا یہ تینوں ایک سے ہیں ؟

3۔ 15 طلبا کی وزن (کلوگرام) میں دیے گئے ہیں

38, 42, 35, 37, 45, 50, 32, 43, 43, 40, 36, 38, 43, 38, 47

(i) اس اعداد وشمار کے لیے بہتاتیہ اور وسطانیہ معلوم کیجیے۔

(ii) کیا یہاں ایک سے زیادہ بہتاتیہ ہے؟

4۔ دیے گئے اعداد وشمار کا بہتاتیہ اور وسطانیہ معلوم کیجیے 13, 16, 12, 14, 19, 12, 14, 13, 14

5۔ بتائیے کیا درج ذیل بیانات درست ہیں یا نہیں:

(i) بہتاتیہ ہمیشہ اعداد وشمار میں سے ہی ایک عدد ہوتا ہے۔

(ii) اوسط، اعداد وشمار میں سے ہی ایک عدد ہوتا ہے۔

(iii) وسطانیہ، اعداد وشمار میں سے ہی ایک عدد ہوتا ہے۔

(iv) اعداد وشمار 6، 4، 3، 8، 9، 12، 13، 9 کا اوسط 9 ہے۔

## 3.8 ایک مختلف مقصد کے لیے بار گراف کا استعمال

## (Use Of Bar Graphs With A Different Purpose)

پچھلے سال ہم نے دیکھا تھا کہ کس طرح مختلف معلومات کو جمع کیا جاتا ہے پھر پہلے ان کو تعدد کی تقسیم کاری جدول (frequency distribution table) میں ترتیب دیتے ہیں اور پھر اس کو بصری اظہار کے لیے تصویری گراف یا بار گراف کا استعمال کیا جاتا ہے۔ آپ بار گراف کو دیکھ کر اعداد وشمار کے بارے میں نتائج اخذ کر سکتے ہیں۔ آپ ان بار گراف پر منحصر معلومات بھی حاصل کر سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر آپ کہہ سکتے ہیں کہ بہتاتیہ کا بار سب سے زیادہ لمبا ہے۔ اگر بار تعدد کو ظاہر کر رہے ہیں۔

### 3.8.1 پیمانہ کا انتخاب (Choosing a Scale)

ہم جانتے ہیں کہ اعداد کو یکساں چوڑائی کے بار کے ذریعے ظاہر کرنے کے طریقے کو بار گراف کہتے ہیں۔ جہاں بار کی لمبائی آپ کے

ذریعے منتخب ہوئے پیمانہ اور تعدد پر منحصر ہوتی ہے۔ مثال کے طور پر بار گراف میں جہاں اکائیوں کی تعداد کو دکھانا ہے۔ گراف ایک مشاہدہ کے لیے ایک اکائی لمبائی کو ظاہر کر رہا ہے اور ان اعداد کو دہائی یا سیکڑے میں ظاہر کرنا ہے تو ایک اکائی لمبائی 10 یا 100 مشاہدوں کو بھی ظاہر کر سکتی ہے۔ درج ذیل مثالوں پر غور کیجیے۔

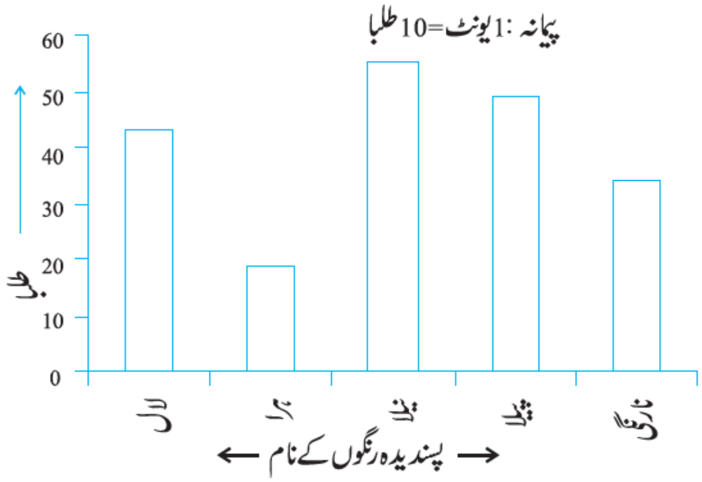
**مثال 8** چھٹی اور ساتویں کلاس کے دو سو طلبا سے کہا گیا کہ اسکول کی بلڈنگ کو رنگوانے کے لیے وہ اپنا پسندیدہ رنگ بتائیں۔ نتائج درج ذیل جدول میں دکھائے گئے ہیں۔ دیے گیے اعداد و شمار کے لیے بار گراف بنائیے۔

| پسندیدہ رنگ | لال | ہرا | نیلا | پیلا | نارنجی |
|---|---|---|---|---|---|
| طلبا کی تعداد | 43 | 19 | 55 | 49 | 34 |

بار گراف کی مدد سے مندرجہ ذیل سوالات کے جواب دیجیے۔

(i) کون سا رنگ سب سے زیادہ پسندیدہ ہے اور کون سا سب سے کم پسندیدہ رنگ ہے؟

(ii) کل کتنے رنگ ہیں؟ وہ کیا ہیں؟




**حل** ایک مناسب پیمانہ کا انتخاب کیجیے جیسا کہ درج ذیل دکھایا گیا ہے۔

پیمانہ 0 سے شروع کیجیے۔ اعداد و شمار میں سب سے بڑی قیمت 55 ہے۔ اس لیے 55 سے بڑی قیمت جیسے 60 پر پیمانہ ختم کیجیے۔ محووروں پر برابر فاصلہ، جیسے 10 سے پیمانہ کو بڑھائیے۔ آپ جانتے ہیں کہ تمام بار 0 اور 60 کے درمیان واقع ہیں۔ ہم پیمانہ ایسا چنتے ہیں کہ 0 سے 60 کے درمیان کی لمبائی نہ تو بہت زیادہ لمبی ہو اور نہ ہی بہت چھوٹی۔

یہاں ہم 1 اکائی 10 طلبا کے لیے لیتے ہیں۔ پھر ہم گراف بناتے ہیں اور ان کے نام دیتے ہیں، جیسا کہ دکھایا گیا ہے۔

بار گراف سے ہم نتائج اخذ کرتے ہیں کہ

(i) نیلا سب سے زیادہ پسندیدہ رنگ ہے۔ (کیونکہ نیلے رنگ کو دکھانے والا بار سب سے لمبا ہے)

(ii) ہرا رنگ سب سے کم پسند کیا گیا ہے۔ (کیونکہ ہرے رنگ کو دکھانے والا بار سب سے چھوٹا ہے)

(iii) کل پانچ رنگ ہیں۔ یہ ہیں لال، ہرا، نیلا، پیلا اور نارنجی۔ (ان کو افقی خط پر دیکھا جا سکتا ہے)

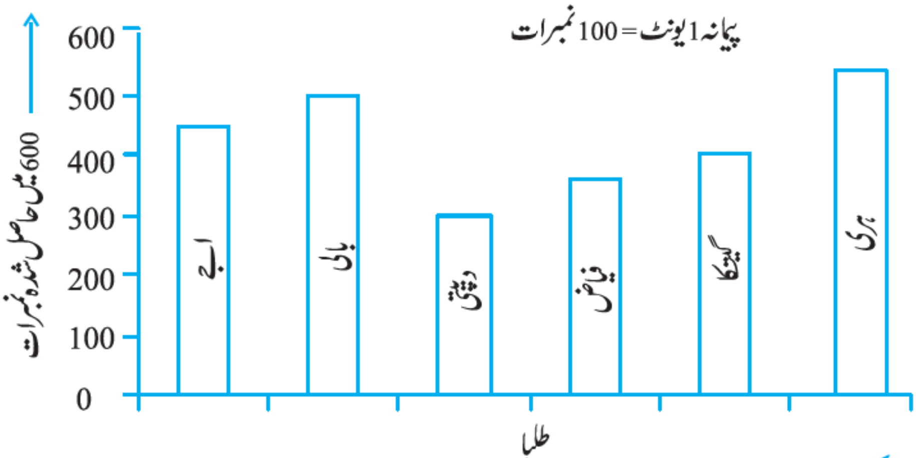
**مثال 9** درج ذیل اعداد و شمار میں کسی خاص کلاس کے چھ طلبا کے کل مارکس (600 میں سے) دکھائے گئے ہیں۔ اعداد و شمار کو بار گراف کی مدد سے دکھائیے۔

| طلبا | اجے | بالی | دیپتی | فیاض | گیتیکا | ہری |
|---|---|---|---|---|---|---|
| حاصل کردہ مارکس | 450 | 500 | 300 | 360 | 400 | 540 |

## حل

(i) مناسب پیمانے کو چننے کے لیے ہم 100 کے اضافہ سے برابر برابر وقفہ لیں گے۔ لہٰذا، 1 اکائی 100 مارکس کو ظاہر کرے گی۔ (اگر ہم 1 اکائی سے 10 مارکس کو ظاہر کریں تو کیا پریشانی ہوگی)

(ii) اب اعداد و شمار کو بار گراف کی مدد سے ظاہر کیجیے۔




## دوہرا بار گراف بنانا

درج ذیل دیے گئے اعداد و شمار میں دو مجموعوں پر غور کیجیے، جس میں سال کے پورے بارہ مہینوں کے لیے دو شہروں مارگیٹ اور ابردین میں روزانہ سورج نظر آنے کے اوسط گھنٹے دیے گئے ہیں۔ یہ دونوں شہر قطب جنوبی کے نزدیک ہیں۔ اس لیے یہاں چند گھنٹے ہی سورج نظر آتا ہے۔

مارگیٹ میں

| | جنوری | فروری | مارچ | اپریل | مئی | جون | جولائی | اگست | ستمبر | اکتوبر | نومبر | دسمبر |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| سورج نظر آنے کے اوسط گھنٹے | 2 | $3\frac{1}{4}$ | 4 | 4 | $7\frac{3}{4}$ | 8 | $7\frac{1}{2}$ | 7 | $6\frac{1}{4}$ | 6 | 4 | 2 |

ابردین میں

| | جنوری | فروری | مارچ | اپریل | مئی | جون | جولائی | اگست | ستمبر | اکتوبر | نومبر | دسمبر |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| سورج نظر آنے کے اوسط گھنٹے | $1\frac{1}{2}$ | 3 | $3\frac{1}{2}$ | 6 | $5\frac{1}{2}$ | $6\frac{1}{2}$ | $5\frac{1}{2}$ | 5 | $4\frac{1}{2}$ | 4 | 3 | $1\frac{3}{4}$ |

الگ الگ بار گراف بنا کر آپ درج ذیل سوالات کے جواب دے سکتے ہیں۔

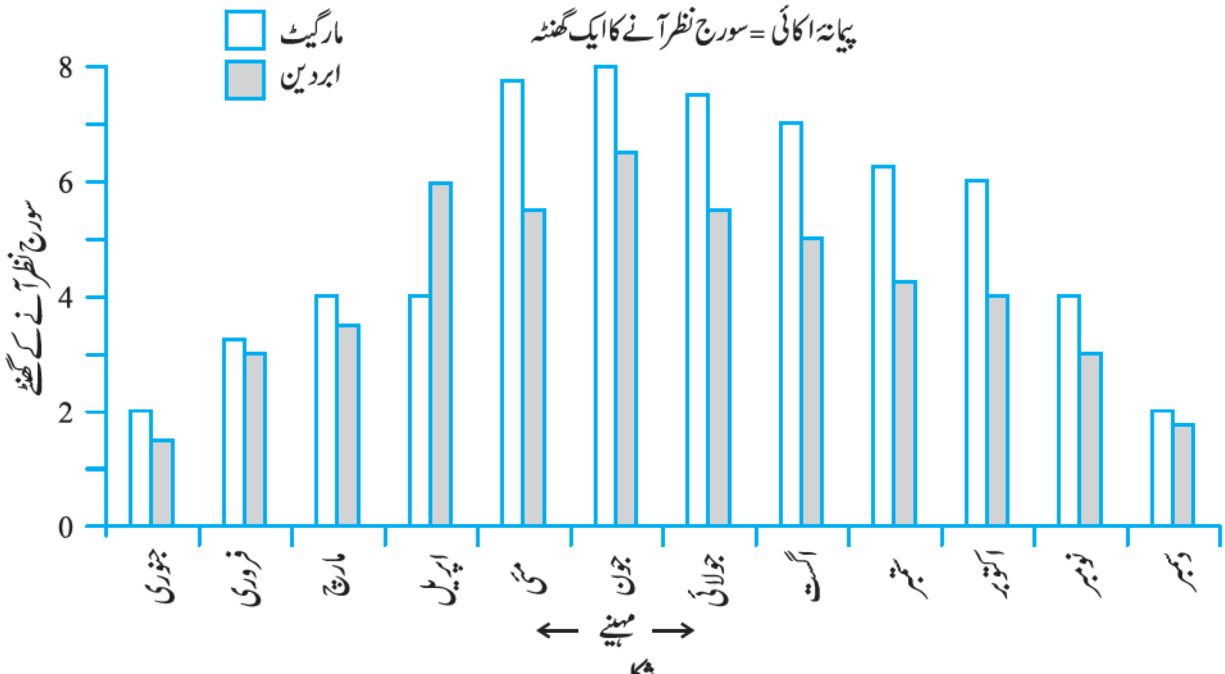
(i) کون سے مہینے میں ہر شہر میں سب سے زیادہ سورج دکھائی دیتا ہے؟

(ii) کون سے مہینے میں ہر شہر میں سب سے کم سورج دکھائی دیتا ہے؟

جب کہ کچھ ایسے سوالات ''جیسے کسی خاص مہینے میں کون سے شہر میں زیادہ دیر سورج دکھائی دیتا ہے'' کے جواب دینے کے لیے دونوں شہروں کے سورج دکھائی دینے کے اوسط گھنٹوں کا موازنہ کرنے کی ضرورت پڑتی ہے۔ ایسا کرنے کے لیے ہم دونوں شہروں کے بارے میں ساتھ ساتھ معلومات دینے والا گراف یعنی دوہرا گراف بنانا سیکھیں گے۔

یہ بار گراف (تصویر 3.1) دونوں شہروں میں سورج دکھائی دینے کے اوسط گھنٹے دکھا رہا ہے۔

ہر مہینے کے لیے ہمارے پاس دو بار ہیں، جن کی اونچائیاں، ہر شہر میں سورج دکھائی دینے کے اوسط گھنٹے دکھا رہی ہیں۔ اس سے ہمیں یہ پتا لگ سکتا ہے کہ اپریل مہینے کے علاوہ وہ ہمیشہ ابردین کے مقابلہ مارگیٹ میں سورج زیادہ دیر دکھائی دیتا ہے۔

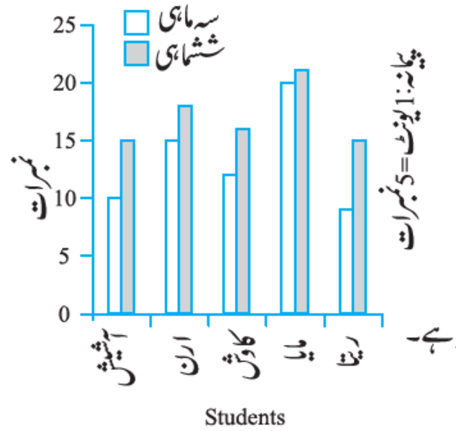



شکل 3.1

آیئے ایک اور مثال دیکھتے ہیں جو ہم سے اور زیادہ متعلق ہے۔

**مثال 10** ایک ریاضی کے ٹیچر یہ دیکھنا چاہتے تھے کہ سہ ماہی جانچ کے بعد انہوں نے پڑھنے کا جو نیا طریقہ استعمال کیا ہے وہ کارگر ہے یا نہیں۔ انہوں نے پانچ سب سے کمزور بچوں کے تیماہی جانچ کے مارکس لیے (25 میں سے) اور ششماہی امتحان میں (25 میں سے)

| طلبا | آشیش | ارون | کاوِش | مایا | ریٹا |
|---|---|---|---|---|---|
| سہ ماہی | 10 | 15 | 12 | 20 | 9 |
| ششماہی | 15 | 18 | 16 | 21 | 15 |




**حل** انہوں نے ایک دوہرا بار گراف بنایا اور انہیں معلوم ہوا کہ زیادہ تر بچوں میں نمایاں فرق آیا ہے۔ اس لیے ٹیچر نے یہ طے کیا کہ وہ یہ نیا طریقہ جاری رکھیں گے۔

کیا آپ ایسے کچھ حالات کے متعلق سوچ سکتے ہیں جن میں دوہرے بار گراف کا استعمال کیا جا سکتا ہے؟

## کوشش کیجیے:

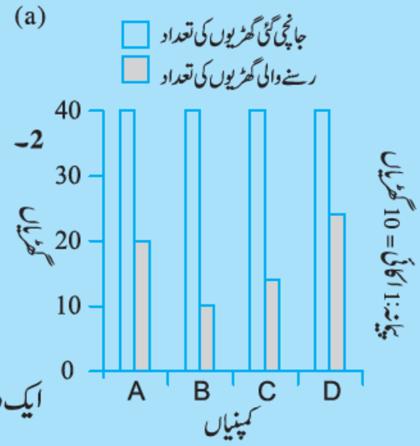
1۔ بار گراف (تصویر 3.2) مختلف کمپنیوں کے ذریعے بنائی گئیں ایسی گھڑیاں جن پر پانی کا اثر نہیں ہوتا ہے، کی جانچ کے لیے ایک سروے کے نتائج دکھا رہا ہے۔

ہر کمپنی یہ دعویٰ کرتی ہے کہ ان کی گھڑیوں پر پانی کا اثر نہیں ہوتا ہے۔

ایک جانچ کرنے کے بعد اوپر دیے گئے نتائج سامنے آئے۔

(a) کیا آپ ہر کمپنی کی جانچ کی گئی گھڑیوں کی تعداد اور رسنے والی گھڑیوں کی تعداد کی کسر بتا سکتے ہیں۔

(b) اس بنیاد پر کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ کون سی کمپنی کی گھڑیاں زیادہ اچھی ہیں۔




شکل 3.2

2۔ 1995، 1996، 1997 اور 1998 میں انگریزی اور ہندی کی کتابوں کی بکری دی گئی ہے۔

| سال | 1995 | 1996 | 1997 | 1998 |
|---|---|---|---|---|
| انگریزی | 350 | 400 | 450 | 620 |
| ہندی | 500 | 525 | 600 | 650 |

ایک دوہرا بار گراف بنائیے اور درج ذیل سوالات کے جواب دیجیے۔

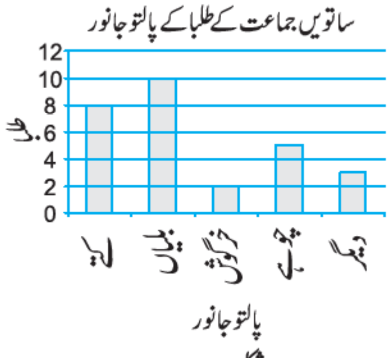
(a) کون سے سال میں دونوں زبانوں کی کتابوں کی بکری میں سب سے کم فرق ہے؟

(b) کیا آپ کہہ سکتے ہیں کہ انگریزی کی کتابوں کی مانگ زیادہ تیزی سے بڑھ رہی ہے؟ وضاحت کیجیے۔

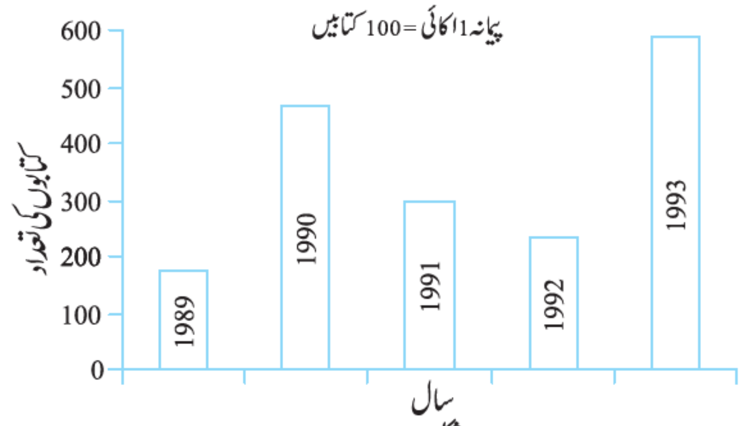
## مشق 3.3

1۔ درج ذیل سوالات کے جواب دینے کے لیے بار گراف (تصویر 3.3) کا استعمال کیجیے۔

(a) کون سا پالتو جانور سب سے زیادہ مقبول ہے؟ (b) کتنے طلبا کے پالتو جانور رکھتے ہیں۔




شکل 3.3




شکل 3.4

2۔ بار گراف پڑھیے (تصویر 3.4) جس میں پانچ لگاتار سالوں میں ایک دکاندار کی بیچی گئی کتابوں کی تعداد دکھائی گئی ہے اور مندرجہ ذیل سوالات کے جواب دیجیے:

(i) تقریباً کتنی کتابیں بیچی گئیں 1989 میں؟ 1990 میں؟ 1992 میں؟

(ii) کون سے سال میں تقریباً 475 کتابیں بکیں؟ تقریباً 225 کتابیں بکیں؟

(iii) کون سے سال میں 250 کتابوں سے کم بکیں؟

(iv) کیا آپ وضاحت کر سکتے ہیں کہ 1989 میں بیچی گئی کتابوں کا تخمینہ آپ کیسے لگائیں گے؟

3۔ چھ مختلف کلاسوں کے طلبا کی تعداد نیچے دی گئی ہے۔ اعداد و شمار کا بار گراف بنائیے۔

| کلاس | پانچویں | چھٹی | ساتویں | آٹھویں | نویں | دسویں |
|---|---|---|---|---|---|---|
| طلبا کی تعداد | 135 | 120 | 95 | 100 | 90 | 80 |

(a) آپ پیمانہ کا انتخاب کیسے کریں گے؟

(b) مندرجہ ذیل سوالات کے جواب دیجیے:

(i) کس کلاس میں طلبا کی تعداد سب سے زیادہ ہے؟ اور سب سے کم؟

(ii) چھٹی کلاس کے طلبا کی آٹھویں کلاس کے طلبا کے ساتھ تناسب معلوم کریں۔

4۔ پہلی ٹرم اور دوسری ٹرم میں ایک طالب علم کی کارکردگی دی گئی ہے۔ مناسب پیمانہ کا استعمال کر کے ایک دوہرا بار گراف بنائیے اور درج ذیل سوالات کے جواب دیجیے۔

| مضمون | انگریزی | ہندی | ریاضی | سائنس | سماجی علوم |
|---|---|---|---|---|---|
| پہلی ٹرم (نمبر شمار 100) | 67 | 72 | 88 | 81 | 73 |
| دوسری ٹرم (نمبر شمار 100) | 70 | 65 | 95 | 85 | 75 |

(i) کون سے مضمون میں بچے کی کارگزاری سب سے زیادہ بہتر ہوئی ہے؟

(ii) کس مضمون میں اصلاح سب سے کم ہے؟

(iii) کون سے مضمون کی کارکردگی میں تنزلی ہوئی۔

5۔ ایک کالونی کے سروے سے حاصل ہوئی معلومات کا یہ اعداد و شمار دیکھیے۔

| پسندیدہ کھیل | کرکٹ | باسکٹ بال | تیراکی | ہاکی | دوڑیں |
|---|---|---|---|---|---|
| دیکھنا | 1240 | 470 | 510 | 430 | 250 |
| کھیلنا | 620 | 320 | 320 | 250 | 105 |

(i) مناسب پیمانہ کا انتخاب کر کے دوہرا بار گراف بنائیے۔ آپ اس بار گراف سے کیا معلومات حاصل کرتے ہیں؟

(ii) کون سا کھیل سب سے زیادہ مقبول ہے؟

(iii) لوگ کھیلوں کو کھیلنا زیادہ پسند کرتے ہیں، یا دیکھنا؟

6۔ اس باب کی شروعات میں جو اعداد و شمار، مختلف شہروں کے زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم درجۂ حرارت کو دکھاتا ہے، اس کو ذرا دیکھیے۔ (جدول 3.1) اعداد و شمار کا استعمال کر کے دوہرا بار گراف بنائیے اور مندرجہ ذیل سوالات کے جواب دیجیے۔

(i) دیے گئے اعداد و شمار میں کون سے شہر میں زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم درجۂ حرارت کے درمیان کا فرق سب سے زیادہ ہے؟

(ii) کون سا شہر سب سے گرم ہے اور کون سا سب سے زیادہ ٹھنڈا ہے؟

(iii) ایسے دو شہروں کے نام بتائیے جن میں ایک کا زیادہ سے زیادہ درجۂ حرارت دوسرے شہر کے کم سے کم درجۂ حرارت سے بھی کم ہے۔

(iv) اس شہر کا نام بتائیے جس کے زیادہ سے زیادہ درجۂ حرارت اور کم سے کم درجۂ حرارت کا فرق سب سے کم ہو۔

## 3.9 امکان اور احتمال (Chance and Probability)

ہماری روزمرہ کی زندگی میں اکثر یہ الفاظ سننے کو ملتے ہیں۔ ہم اکثر کہتے ہیں ''آج بارش ہونے کا کوئی امکان نہیں''۔ ''یہ بہت ممکن ہے کہ ہندوستان ورلڈ کپ جیت جائے''۔ آئیے ان اصطلاحوں کو کچھ اور اچھے طریقے سے سمجھتے ہیں۔ بیانات پر غور کیجیے:

(i) سورج مغرب سے نکلے گا۔ (ii) ایک چیونٹی 3 میٹر لمبی ہوگی۔

(iii) اگر آپ ایک زیادہ حجم کا مکعب لیں گے تو اس کے ضلع کی لمبائی بھی زیادہ ہوگی۔

(iv) اگر آپ زیادہ رقبے والا دائرہ لیں گے تو اس کا نصف قطر بھی بڑا ہوگا۔ (v) ہندوستان اگلا کرکٹ کے میچوں کا سلسلہ جیتے گا۔

اگر ہم اوپر دیے گئے بیانات پر غور کریں تو آپ کہہ سکتے ہیں کہ سورج کا مغرب سے نکلنا ناممکن ہے۔ ایک چیونٹی کا 3 میٹر لمبا ہونا بھی ناممکن ہے۔ دوسری طرف ایک دائرہ کا رقبہ زیادہ ہے تو یقینی طور پر اس کا نصف قطر بھی زیادہ ہوگا۔ یہی بات آپ زیادہ حجم والے مکعب کے ضلع کی لمبائی بھی زیادہ ہوگی، کے لیے بھی کہہ سکتے ہیں۔ اور دوسری طرف ہندوستان اگلا کرکٹ کا سلسلہ جیت بھی سکتا ہے اور ہار بھی سکتا ہے۔ دونوں باتیں ممکن ہے۔

**کوشش کیجیے:**

کچھ ایسی صورت حالوں کے بارے میں سوچیے، ہر ایک کے لیے کم از کم تین مثالیں، جو کہ یقینی طور پر ہوں، کچھ جو ناممکن ہوں اور کچھ ایسی جو ہو بھی سکتی ہے اور نہیں بھی۔ یعنی جس کا کچھ امکان ہو

### 3.9.1 امکان (Chance)

اگر آپ ایک سکّے کو اچھالیں، کیا آپ ہمیشہ پیش گوئی کر سکتے ہیں کہ کیا آئے گا؟ ذرا ایک سکّے کو اچھالیں اور ہر بار پیش گوئی کریں کہ کیا آئے گا۔ اپنے مشاہدات کو درج ذیل جدول میں بھریے۔

| اچھال | پیش گوئی | نتیجہ |
|---|---|---|
| | | |

اس کو 10 بار کیجیے۔ آنے والے نتیجوں کو دیکھیے۔ کیا آپ کو اس میں کوئی پیٹرن نظر آ رہا ہے۔ ہر ہیڈ کے بعد کیا آتا ہے؟ کیا ہمیشہ

ہر بار آپ کا ہیڈ ہی آئے گا۔ 10 بار سکہ اور اچھالیے اور اپنے مشاہدات جدول میں لکھیے۔

آپ پائیں گے کہ ان مشاہدات کا کوئی پیٹرن نہیں ہے۔ درج ذیل جدول میں سوشیلا اور سلمٰی کے ذریعہ 25 بار سکہ اچھالنے کے نتائج دیے گئے ہیں۔ یہاں H ہیڈ اور T ٹیل کو ظاہر کرتا ہے۔

| اعداد | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| نتائج | H | T | T | H | T | T | T | H | T | T | H | H | H | H | H |
| اعداد | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | | | | | |
| نتائج | T | T | H | T | T | T | T | T | T | T | | | | | |

یہ اعداد وشمار آپ کو کیا بتا رہا ہے؟ ہیڈ اور ٹیل کی پیش گوئیوں کے لیے کیا آپ کوئی پیٹرن بتا سکتے ہیں؟ یقیناً یہاں ہیڈ اور ٹیل کے ہونے کا کوئی پیٹرن نہیں ہے۔ جب آپ ہر بار سکہ اچھالتے ہیں تو ہر بار یا تو ہیڈ آئے گا یا پھر ٹیل۔ کچھ بھی ہو سکتا ہے۔ یہ صرف امکان ہے کہ ہر بار سکہ اچھالنے پر ان دونوں میں سے کوئی ایک آئے گا۔

اوپر کے اعداد وشمار میں ہیڈ اور ٹیل کی تعداد الگ الگ گنیے۔ کچھ اور بار سکہ اچھالیے اور ریکارڈ کرتے رہیے کہ آپ کو کیا ملا۔ معلوم کیجیے کہ کل کتنی بار آپ کو ہیڈ ملا اور کتنی بار ٹیل ملا۔

آپ ایک پانسے سے بھی کھیل سکتے ہیں۔ ایک پانسے کے چھ رخ ہوتے ہیں۔ جب آپ پانسہ پھینکتے ہیں تو کیا آپ پیش گوئی کر سکتے ہیں کہ کیا آئے گا؟ لوڈو یا سانپ سیڑھی کھیلتے وقت اکثر یہ چاہتے ہوں گے کہ کوئی مخصوص نتیجہ آ جائے۔

کیا پانسے کا نتیجہ آپ کی مرضی کے مطابق ہی ہمیشہ آتا ہے؟ ایک پانسہ لیجیے اور اس کو 150 بار پھینکیے اور درج ذیل جدول کو بھریے۔

| پانسہ کا عدد | شماریاتی نشانات | کتنی بار یہ آیا |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 2 | | |

ہر بار نتیجہ آنے پر آنے والے عدد کے سامنے شماریاتی نشان لگائیے۔ مثال کے طور پر پہلی باری میں آپ کا 5 آیا۔ 5 کے سامنے ایک شماریاتی نشان لگائیے۔ اگلی باری میں 1 آیا تو 1 کے لیے نشان لگا دیجیے۔ مناسب عدد کے لیے شماریاتی نشانات لگاتے جائیے۔ اس مشق کو 150 بار کیجیے اور ہر باری میں آنے والے عدد معلوم کیجیے۔

اوپر حاصل ہوئے اعداد وشمار کے لیے بار گراف بنائیے جو یہ دکھا رہا ہو کہ کتنی بار 1، 2، 3، 4، 5، 6 آیا۔

## کوشش کیجیے:

(اس کو گروپ میں کیجیے)

**1۔** 100 مرتبہ ایک سکے کو اچھالیے اور اعداد و شمار کو ریکارڈ کر لیجیے۔ معلوم کیجیے کہ کتنی بار ہیڈ آیا اور کتنی بار ٹیل آیا۔

**2۔** آفتاب نے 250 بار ایک پانسہ پھینکا اور اس کو مندرجہ ذیل جدول حاصل ہوا۔ اس اعداد و شمار کے لیے ایک بار گراف بنائیے۔

| پانسہ کے اعداد | شماریاتی نشانات |
|---|---|
| 1 | \|\| 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |
| 2 | 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |
| 3 | \|\| 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |
| 4 | \|\| 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |
| 5 | \|\|\| 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |
| 6 | 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |

**3۔** ایک پانسہ کو 100 بار پھینکئے اور اس اعداد و شمار کو ریکارڈ کیجیے۔ دیکھیے کتنی بار 1، 2، 3، 4، 5، 6 آیا۔

## احتمال کیا ہے (What is Probability)

ہم جانتے ہیں کہ جب ہم ایک سکہ اچھالتے ہیں تو دو نتائج ممکن ہیں۔ ہیڈ یا ٹیل۔ اور ایک پانسہ کے لیے چھ نتائج ممکن ہیں۔ ہم اپنے تجربات سے یہ بھی جانتے ہیں کہ ایک سکہ میں ہیڈ یا ٹیل آنے کے برابر برابر امکان ہوتے ہیں۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ ہیڈ یا ٹیل کا احتمال برابر ہے اور ہر ایک کے لیے یہ $\frac{1}{2}$ ہے۔

پانسہ میں 1، 2، 3، 4، 5 یا 6 آنے کے برابر برابر امکان ہیں اور ہر ایک کا احتمال $\frac{1}{6}$ ہے۔ اس کے بارے میں ہم اگلی کلاسوں میں پڑھیں گے۔ لیکن جو کچھ ہم کر چکے ہیں اس سے یہ صاف ظاہر ہے کہ وہ نتائج جن کے امکانات بہت سارے ہوتے ہیں، ان کا احتمال 0 اور 1 کے درمیان ہوتا ہے۔ وہ امکان جن کا ہونا ناممکن ہے ان کا احتمال 0 ہے اور وہ امکان جو ضروری یا یقیناً ہوں گے ان کا احتمال 1 ہے۔

کسی بھی دی گئی صورت حال میں ہمیں مختلف ممکنہ نتائج کو سمجھنے کی ضرورت ہے۔ اور ہر نتیجہ کے ممکن امکانات کو بھی سمجھنے کی ضرورت ہے۔ یہ بھی ممکن ہے کہ نتائج کے ہونے کے امکانات سکہ اور پانسہ کی طرح برابر برابر نہ ہوں۔ مثال کے طور پر اگر ایک ڈبے میں 5 لال رنگ کی بال، 9 سفید رنگ کی بال ہوں اور بنا دیکھے ایک بال نکالنی ہو تو سفید بال نکالنے کے امکان زیادہ ہوں گے۔ کیا آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کیوں؟ لال بال نکالنے کے لیے کیا امکانات ہیں اور سفید بال نکالنے کے لیے کیا امکانات ہیں۔ دونوں کے احتمال 0 اور 1 کے درمیان ہی ہوں گے۔

### کوشش کیجیے:

پانچ ایسی صورت حال کے بارے میں سوچیے جہاں نتائج کے امکانات برابر برابر نہ ہوں۔

## مشق 3.4

1۔ مندرجہ ذیل میں بتائیے کہ کون سے ہونا ضروری ہیں، ناممکن ہیں، کون ہو سکتا ہے مگر ضروری نہیں ہے۔

(i) آپ آج گزرے کل سے زیادہ بڑے ہیں۔ (ii) ایک اچھالے گئے سکے میں اوپر ہیڈ آئے گا۔

(iii) ایک پانسہ کو پھینکنے سے اوپر 8 آئے گا۔ (iv) اگلی ٹریفک لائٹ ہری ہوگی۔

(v) کل بادل ہوں گے۔

2۔ ایک ڈبہ میں 6 ماربلس ہیں جن کے اوپر 1 سے 6 تک کے اعداد لکھے ہیں۔

(i) 2 نمبر لکھا عدد نکالنے کا احتمال کیا ہے۔ (ii) 5 نمبر لکھا عدد نکالنے کا احتمال کیا ہے۔

3۔ ایک سکہ کو اچھال کر یہ فیصلہ کیا گیا کہ کون سی ٹیم پہلے کھیلے گی۔ آپ کی ٹیم کھیل شروع کرے گی، اس بات کا احتمال کیا ہے۔

## ہم نے کیا سیکھا؟

1۔ اعداد وشمار کو جمع کرنے، ریکارڈ کرنے اور اس کا اظہار کرنے سے ہم کو مدد ملتی ہے۔ اپنے تجربات کو منظم کرنے میں اور ان سے نتائج اخذ کرنے میں۔

2۔ اعداد وشمار جمع کرنے سے پہلے ہم کو یہ جاننا ضروری ہے کہ اس کا کیا استعمال ہے۔

3۔ وہ اعداد وشمار جو جمع کیا گیا ہے، اس کو ضرورت ہے موزوں جدول میں منظم کرنے کی، تاکہ اس کو آسانی سے سمجھا جا سکے۔

4۔ اوسط وہ عدد ہے جو اعداد وشمار یا مشاہدات کے گروپ کے مرکزی میلان کو ظاہر کرتا ہے۔

5۔ حسابی اوسط اعداد وشمار کی نمائندہ قیمتوں میں سے ایک ہے۔

6۔ بہتا تیہ، اعداد وشمار کی نمائندہ قیمتوں یا مرکزی میلان کی ہی ایک اور قسم ہے۔ مشاہدوں کے مجموعہ کا بہتا تیہ وہ مشاہدہ ہوتا ہے جو سب سے زیادہ بار آئے۔

7۔ وسطانیہ بھی نمائندہ قیمتوں کی ایک قسم ہے۔ یہ اعداد وشمار کے درمیان میں واقع قیمت کو ظاہر کرتا ہے آدھے مشاہدے اس سے اوپر ہوتے ہیں اور آدھے نیچے ہوتے ہیں۔

8۔ بار گراف برابر چوڑائی کے بار کی مدد سے اعداد کو ظاہر کرنے کا ایک طریقہ ہے۔

9۔ دوہرا بار گراف اعداد وشمار کے دو مجموعوں کو ایک نظر میں موازنہ کرنے کا ایک آسان طریقہ ہے۔

10۔ ہماری روزمرہ کی زندگی میں اکثر ایسے حالات پیش آتے ہیں جن میں کچھ کا ہونا یقینی ہے، کچھ کا ناممکن ہے اور کچھ ہو بھی سکتی ہیں اور نہیں بھی، یعنی دونوں امکانات ہیں۔ ایک ایسی حالت جو ہو بھی سکتی ہیں اور نہیں بھی، یہ ہونے کا بس ایک امکان ہے۔

4714CH04

# سادہ مساوات

## 4.1 دماغ پڑھنے کا کھیل (A Mind Reading Game)

ٹیچر نے بتایا کہ وہ ایک نیا سبق شروع کرنے والی ہیں اور وہ ہے سادہ مساوات۔ اپّو، سریتا اور امینہ نے چھٹی کلاس میں پڑھایا گیا الجبرے کا سبق دہرالیا تھا۔ کیا آپ نے دہرالیا ہے؟ اپّو، سریتا اور امینہ بہت جوش میں تھے کیونکہ انھوں نے ایک کھیل بنایا تھا جس کا نام انھوں نے 'دماغ کو پڑھنا' رکھا تھا اور اس کو وہ اپنی پوری کلاس کے سامنے پیش کرنا چاہتے تھے۔

ٹیچر نے ان کے اس اشتیاق کو سراہا اور ان کو کلاس کے سامنے اپنا کھیل پیش کرنے کی دعوت دی۔ امینہ نے کھیل شروع کیا۔ اس نے سارہ سے کہا کہ وہ کوئی ایک عدد سوچے، اس کو 4 سے ضرب کرے اور پھر حاصل ضرب میں 5 کو جمع کر دے۔ پھر اس نے سارہ سے اس کا جواب پوچھا۔ اس نے بتایا 65۔ امینا نے فوراً ہی کہا کہ سارہ نے جو عدد سوچا ہے وہ 15 ہے۔ سارہ نے اشارہ دیا کہ ٹھیک ہے۔ سارہ سمیت پوری کلاس حیران رہ گئی۔

اب اپّو کی باری تھی۔ اس نے بالو سے ایک عدد سوچنے کے لیے کہا پھر اس کو 10 سے ضرب کرنے و جواب میں سے 20 گھٹانے کو کہا۔ پھر اس نے بالو سے پوچھا کہ تمہارا جواب کیا ہے؟ بالو نے بتایا 50۔ اپو نے فوراً کہا کہ وہ عدد ہے 7۔ بالو نے کہا کہ ہاں یہ صحیح ہے۔

ہر بچہ جاننا چاہتا تھا کہ اپو، سریتا اور امینا نے جو 'دماغ کو پڑھنے' والا کھیل بنایا ہے، یہ کیسے ہوتا ہے۔ کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ یہ کیسے ہوگا؟ یہ باب اور باب 12 پڑھنے کے بعد آپ یقینی طور پر جواب بتا سکتے ہیں۔

## 4.2 مساوات کو بنانا (Setting up of an Equation)

امینہ کی مثال لیجیے۔ امینہ نے سارہ سے ایک عدد سوچنے کے لیے کہا۔ امینا کو وہ عدد نہیں پتہ تھا۔ اس کے لیے وہ 1، 2، 3، ......، 11، ......، 100، ...... میں سے کچھ بھی ہوسکتا تھا۔ چلیے اس انجانے عدد کو حرف 'x' سے ظاہر کرتے ہیں۔ آپ x کی جگہ کوئی بھی حرف 'y' یا 't' کچھ بھی رکھ سکتے ہیں۔ اس سے کوئی فرق نہیں پڑتا کہ سارہ کے سوچے گئے عدد کو آپ کس حرف سے ظاہر کر رہے ہیں۔ جب سارہ نے

اپنے عدد کو 4 سے ضرب کیا تو اس کو $4x$ حاصل ہوا۔ پھر اس نے حاصل ضرب میں 5 جوڑا جس سے حاصل ہوا $4x+5$۔ $(4x+5)$ کی قیمت $x$ کی قیمت پر منحصر ہوگی۔ لہٰذا اگر $x=1$، تو $4x+5=4\times1+5=9$۔ اس کا مطلب ہے اگر سارہ نے اپنے دماغ میں عدد 1 سوچا تو جواب ہوا 9۔ اسی طرح، اگر اس نے 5 سوچا تو $x=5$،

$$4x + 5 = 4 \times 5 + 5 = 25$$

لہٰذا، اگر سارہ نے 5 سوچا تو جواب ہوا 25۔

سارہ کے ذریعے سوچے گئے عدد کو معلوم کرنے کے لیے آیئے ہم اس کے جواب 65 سے الٹا سوچتے ہیں۔ ہم کو $x$ معلوم کرنا ہے جب کہ

$$4x + 5 = 65 \qquad (4.1)$$

اس مساوات کا حل ہی ہم کو وہ عدد بتائے گا جو سارہ کے دماغ میں ہے۔

بالکل اسی طرح اپو کی مثال لیجیے۔ بالو نے جو عدد سوچا اس کو ہم y مانتے ہیں۔ اپو نے بالو سے عدد کو 10 سے ضرب اور پھر حاصل ضرب میں سے 20 گھٹانے کو کہا تھا۔ یعنی y سے بالو کو ملا 10y اور پھر اس سے ملا $(10y-20)$۔ جواب جو معلوم ہے 50 ہے۔

اس لیے،

$$10y - 20 = 50 \qquad (4.2)$$

اس مساوات کا جواب وہی عدد ہوگا جو بالو نے سوچا ہے۔

## 4.3 جو کچھ ہم جانتے ہیں آیئے اسے دہرائیں (Review Of What We Know)

دھیان دیجیے کہ (4.1) اور (4.2) مساوات ہیں۔ آیئے ذرا دہرایئے کہ ہم نے چھٹی کلاس میں مساوات کے بارے میں کیا پڑھا تھا۔ 'مساوات متغیر کی ایک شرط ہے'۔ مساوات 4.1 میں متغیر $x$ ہے۔ مساوات 4.2 میں متغیر y ہے۔ لفظ متغیر کے معنی ہیں وہ چیز جس کی قیمت بدلتی رہے۔ ایک متغیر کی مختلف عددی قیمتیں ہوتی ہیں۔ اس کی قیمت طے شدہ نہیں ہوتی ہے۔ متغیر کو عام طور پر انگریزی حروف تہجی $x, y, z, l, m, n, p$ وغیرہ سے ظاہر کرتے ہیں۔ متغیر کی مدد سے ہم عبارتیں بناتے ہیں۔ یہ عبارتیں ہم متغیر کے لیے مختلف بنیادی اعمال جیسے جمع، گھٹا، ضرب، تقسیم وغیرہ کی مدد سے بناتے ہیں۔ $x$ کی مدد سے ہم عبارت $(4x+5)$ بنائی۔ اس کے لیے ہم نے پہلے $x$ کو 4 سے ضرب کیا اور پھر حاصل ضرب میں 5 کو جوڑ دیا۔ اسی طرح y سے ہم نے عبارت $(10y-20)$ بنائی۔ اس کے لیے پہلے $y$ کو 10 سے ضرب کیا اور پھر حاصل ضرب میں سے 20 گھٹا دیا۔ یہ سبھی عبارتوں کی مثالیں ہیں۔

اس طرح بنائی گئی عبارتوں کی قیمت متغیر کے لیے مانی گئی قیمت پر منحصر ہوتی ہے۔ جیسا کہ ہم دیکھ چکے ہیں، کہ جب $x=1$ ہے تو $4x+5=9$ ہوگا، جب $x=5$ ہے تو $4x+5=25$ ہوگا۔ اسی طرح

جب $x = 15$ تب $4x + 5 = 4\times15 + 5 = 65;$

جب $x = 0$ تب $4x + 5 = 4 \times 0 + 5 = 5;$ اور اسی طرح آگے بھی۔

مساوات (4.1) متغیر $x$ کے لیے ایک شرط ہے۔ یہ بتا رہی ہے کہ عبارت $(4x+5)$ کی قیمت 65 ہے۔ یہ شرط اسی وقت پوری ہوگی جب $x=15$ ہوگا۔ یہ مساوات $4x+5=65$ کا حل ہے۔ جب $x=5$، $4x+5=25$ ہے اور 65 نہیں۔ لہٰذا $x=5$ اس مساوات کا حل نہیں ہوگا۔ اسی طرح $x=0$ مساوات کا حل نہیں ہے۔ $x$ کی 15 کے علاوہ کوئی بھی قیمت $4x+5=65$ کی شرط کو پورا نہیں کرتی ہے۔

**کوشش کیجیے:**

عبارت $(10y-20)$ کی قیمت y کی قیمت پر منحصر ہے۔ y کی پانچ مختلف قیمتیں لے کر $10y-20$ کی قیمتیں نکال کر اس کی جانچ کیجیے۔ $(10y-20)$ کی مختلف حاصل شدہ قیمتوں میں کیا آپ نے $10y-20=50$ کا حل بھی ملا؟ اگر یہ حل نہیں ملا تو y کی کچھ اور قیمتوں کے لیے یہ $10y-20=50$ کی شرط کو پورا کیجیے۔

## 4.4 مساوات کیا ہے؟ (What Equation is?)

ایک مساوات میں ہمیشہ ایک **برابر** کا نشان ہوتا ہے۔ برابر کا نشان یہ ظاہر کرتا ہے کہ نشان کے بائیں طرف کا کی عبارت (Left Hand Side LHS) کی قیمت، نشان کے دائیں طرف کی عبارت (Right Hand Side RHS) کی قیمت کے برابر ہوتی ہے۔ مساوات (4.1) میں LHS $(4x+5)$ ہے اور RHS 65 ہے۔ مساوات 4.2 میں LHS $10y-20$ ہے اور RHS 50 ہے۔

اگر کسی LHS اور RHS کے درمیان میں برابر کے نشان کے علاوہ کوئی اور نشان ہے، یہ ایک مساوات نہیں ہے۔ لہٰذا $4x+5>65$ ایک مساوات نہیں ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ $(4x+5)$ کی قیمت 65 سے بڑی ہے۔ اسی طرح $4x+5<65$ بھی ایک مساوات نہیں ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ $(4x+5)$ کی قیمت 65 سے کم ہے۔

مساواتوں میں، ہم اکثر دیکھتے ہیں کہ RHS صرف ایک عدد ہے۔ مساوات 4.1 میں یہ 65 ہے اور مساوات 4.2 میں یہ 50 ہے۔ لیکن ایسا ہمیشہ نہیں ہوتا ہے۔ مساوات کی RHS متغیر کی ایک عبارت بھی ہوسکتی ہے۔ مثال کے طور پر مساوات

$$4x + 5 = 6x - 25$$

کی برابر کے نشان کی LHS میں عبارت $4x+5$ ہے اور RHS میں عبارت $6x-25$ ہے۔

**مختصراً، ایک مساوات متغیر کے لیے ایک شرط ہے۔ شرط یہ ہے کہ برابر کے نشان کے دونوں اطراف کی عبارتوں کی قیمتیں برابر ہوں۔ دھیان دیجیے کہ ان دونوں عبارتوں میں سے کم از کم ایک بیان میں متغیر ضرور ہوگا۔**

ہم مساوات کی ایک آسان اور بہت کار آمد خصوصیت کو بھی دیکھیں گے۔ مساوات $4x+5=65$ اور $65=4x+5$ ایک ہی ہیں۔ اسی طرح، مساوات $6x-25=4x+5$ اور $4x+5=6x-25$ دونوں ایک ہی ہیں۔ **ایک مساوات بالکل ویسی ہی رہتی ہے اگر اس کی LHS اور RHS کو آپس میں ادل بدل دیں۔** اس خصوصیت کا استعمال ہم اکثر مساوات کو حل کرنے میں کرتے ہیں۔

**مثال 1** مندرجہ ذیل بیانات کو مساوات کی شکل میں لکھیے۔

(i) $x$ کے تین گنے اور 11 کا جوڑ 32 ہے۔

(ii) کسی عدد کے 6 گنے میں سے 5 گھٹانے پر 7 حاصل ہوتا ہے۔

(iii) $m$ کے ایک چوتھائی سے 3 زیادہ 7 ہے۔

(iv) ایک عدد کے ایک تہائی میں 5 جوڑنے پر 8 آتا ہے۔

**حل** (i) $x$ کا تین گنا $3x$ ہے۔

$3x$ اور 11 کا جوڑ ہوا $3x+11$۔ جوڑ 32 ہے۔

مساوات ہے $3x+11=32$

(ii) مان لیا عدد z ہے، $z$ کو 6 سے ضرب کرنے پر $6z$ آیا۔ 6z میں سے 5 گھٹانے پر $6z-5$ حاصل ہوگا۔ نتیجہ 7 ہے۔

مساوات ہوگی $6z-5=7$

(iii) $m$ کا ایک چوتھائی $\frac{m}{4}$ ہے۔

یہ 7 سے 3 زیادہ ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ فرق $(\frac{m}{4}-7)$ 3 ہے۔

مساوات ہوگی $\frac{m}{4}-7=3$

(iv) مان لیا عدد $n$ ہے۔ $n$ کا ایک تہائی $\frac{n}{3}$ ہوا۔

یہ ایک تہائی میں 5 جوڑنے سے ہوگیا

یہ ہوا 8۔ مساوات ہے $\frac{n}{3}+5=8$

**مثال 2** مندرجہ ذیل مساوات کو بیان کی شکل میں لکھیے:

(i) $x-5=9$ (ii) $5p=20$ (iii) $3n+7=1$ (iv) $\frac{m}{5}-2=6$

**حل** (i) $x$ میں سے 5 نکالنے پر 9 ملتا ہے۔

(ii) ایک عدد $p$ کا پانچ گنا 20 ہے۔

(iii) $n$ کے تین گنے میں 7 جوڑنے پر 1 حاصل ہوتا ہے۔

(iv) ایک عدد $m$ کے ایک بٹا پانچ حصہ میں سے 2 گھٹانے پر 6 ملتا ہے۔

نوٹ کرنے کی یہ ضروری بات ہے کہ ایک دی گئی مساوات کے لیے **صرف ایک ہی نہیں بلکہ بہت سارے** بیانات بنائے جا سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر اوپر دی گئی مساوات (i) کے لیے آپ کہہ سکتے ہیں کہ $x$ میں سے 5 گھٹانے پر آپ کو 9 ملتا ہے۔

یا ایک عدد $x$، 9 سے 5 زیادہ ہے۔

یا $x$ اور 5 کے درمیان کا فرق 9 ہے اور آگے بھی ایسے ہی۔

**مثال 3** مندرجہ ذیل صورت حال کو دیکھیے:

راجو کے والد کی عمر راجو کی عمر کے 3 گنے سے 5 سال زیادہ ہے۔ راجو کے والد 44 سال کے ہیں۔ راجو کی عمر معلوم کرنے کے لیے ایک مساوات بنائیے۔

**حل** ہم کو راجو کی عمر نہیں معلوم۔ مان لیا یہ $y$ سال ہے۔ راجو کی عمر کا 3 گنا ہو گیا $3y$ سال۔ راجو کے والد کی عمر $3y$ سے 5 سال زیادہ ہے، یعنی راجو کے والد $(3y+5)$ سال کے ہیں۔ یہ بھی دیا گیا ہے کہ راجو کے والد 44 سال کے ہیں۔

اس لیے، $3y+5=44$ (4.3)

یہ $y$ میں ایک مساوات ہے۔ اس کو حل کرنے پر راجو کی عمر معلوم ہو جائے گی۔

**مثال 4** ایک دکاندار دو طرح کے ڈبوں میں آم بیچتا ہے۔ ایک چھوٹا اور ایک بڑا ڈبہ۔ ایک بڑے ڈبے میں اتنے ہی آم آتے ہیں جتنے 8 چھوٹے ڈبوں میں آتے ہیں اور ان کے علاوہ 4 آم اور۔ ایک مساوات بنائیے جو آپ کو ہر چھوٹے ڈبے میں آموں کی تعداد بتائے۔ بڑے ڈبے میں 100 آم آتے ہیں۔

**حل** مان لیا ایک چھوٹے ڈبے میں $m$ آم آتے ہیں۔ ایک بڑے ڈبے میں $m$ کے 8 گنے سے 4 زیادہ آم آتے ہیں۔ یعنی $8m+4$ آم۔ لیکن یہ 100 کے برابر دیے گئے ہیں۔ لہٰذا

$8m+4=100$ (4.4)

اس کو حل کرنے پر آپ کو چھوٹے ڈبے میں آموں کی تعداد مل جاتی ہے۔

## مشق 4.1

1۔ جدول کی آخری عمودی قطار مکمل کیجیے:

| نمبر شمار | مساوات | قیمت | بتائیے، کیا یہ مساوات کو مطمئن کرتی ہے۔ (ہاں/نہیں) |
|---|---|---|---|
| (i) | $x + 3 = 0$ | $x = 3$ | |
| (ii) | $x + 3 = 0$ | $x = 0$ | |
| (iii) | $x + 3 = 0$ | $x = -3$ | |
| (iv) | $x - 7 = 1$ | $x = 7$ | |
| (v) | $x - 7 = 1$ | $x = 8$ | |
| (vi) | $5x = 25$ | $x = 0$ | |
| (vii) | $5x = 25$ | $x = 5$ | |
| (viii) | $5x = 25$ | $x = -5$ | |
| (ix) | $\frac{m}{3} = 2$ | $m = -6$ | |
| (x) | $\frac{m}{3} = 2$ | $m = 0$ | |
| (xi) | $\frac{m}{3} = 2$ | $m = 6$ | |

2۔ جانچ کیجیے کہ کیا بریکٹ میں دی گئی قیمتیں دی گئی مساوات کے حل ہیں یا نہیں۔

(a) $n + 5 = 19$ $(n = 1)$ (b) $7n + 5 = 19$ $(n = -2)$ (c) $7n + 5 = 19$ $(n = 2)$

(d) $4p - 3 = 13$ $(p = 1)$ (e) $4p - 3 = 13$ $(p = -4)$ (f) $4p - 3 = 13$ $(p = 0)$

3۔ مندرجہ ذیل مساوات کی آزمائش تجربات کی مدد سے حل کیجیے:

(i) $5p + 2 = 17$ (ii) $3m - 14 = 4$

4۔ مندرجہ ذیل بیانات کے لیے مساوات لکھیے۔

(i) عدد $x$ اور 4 کا جوڑ 9 ہے۔

(ii) $y$ سے 2 گھٹانے پر 8 حاصل ہوتا ہے۔

(iii) a کا دس گنا 70 ہے۔

(iv) عدد $b$ کو 5 سے تقسیم کرنے پر 6 حاصل ہوتا ہے۔

(v) $t$ کا تین چوتھائی 15 ہے۔

(vi) $m$ کے سات گنے میں 7 جوڑنے پر 77 ملتا ہے۔

(vii) ایک عدد $x$ کے ایک چوتھائی میں سے 4 گھٹانے پر 4 حاصل ہوتا ہے۔

(viii) $y$ کے 6 گنے میں سے 6 لینے پر آپ کو 60 ملے گا۔

(ix) اگر آپ z کے ایک تہائی میں 3 جمع کریں تو آپ کو 30 ملے گا۔

5۔ مندرجہ ذیل مساوات کے لیے بیانات بنائیے:

(i) $p + 4 = 15$ (ii) $m - 7 = 3$ (iii) $2m = 7$ (iv) $\frac{m}{5} = 3$

(v) $\frac{3m}{5} = 6$ (vi) $3p + 4 = 25$ (vii) $4p - 2 = 18$ (viii) $\frac{p}{2} + 2 = 8$

6۔ مندرجہ ذیل صورت حال کے لیے مساوات بنائیے:

(i) عرفان نے کہا کہ اس کے پاس پرمت کے ماربل کے پانچ گنے سے 7 ماربل زیادہ ہیں۔ عرفان کے پاس 37 ماربل ہیں۔ (پرمت کے ماربل کی تعداد کو m مان لیجیے)

(ii) لکشمی کے والد کی عمر 49 سال ہے۔ وہ لکشمی کی عمر کے تین گنے سے 4 سال زیادہ ہے۔ (لکشمی کی عمر y سال ہے)

(iii) ٹیچر نے کلاس میں بتایا کہ کلاس میں جس بچے کے سب سے زیادہ مارکس آئے ہیں وہ کلاس میں آنے والے سب سے کم مارکس کے دوگنے میں 7 جمع کر کے حاصل کیے جا سکتے ہیں۔ سب سے زیادہ مارکس 87 ہیں۔ (سب سے کم مارکس کو $l$ سے ظاہر کیجیے)

(iv) ایک مساوی الساقین مثلث میں راس پر بنا زاویہ قاعدہ پر بنے دونوں زاویوں میں سے ہر ایک کا دوگنا ہے۔ (مان لیجیے قاعدہ پر بنا زاویہ b ڈگری میں ہے۔ یاد رکھیے کہ کسی مثلث کے تینوں زاویوں کا جوڑ 180 ڈگری ہوتا ہے۔)

## 4.4.1 مساوات کا حل (Solving an Equation)

ایک برابری والے بیان کو دیکھیے $8 - 3 = 4 + 1$ (4.5)

برابری کا بیان (4.5) بالکل درست ہے کیونکہ اس کی دونوں اطراف برابر ہیں۔ (دونوں 5 کے برابر ہیں)

- آیئے دونوں طرف 2 کو جوڑتے ہیں، نتیجے کے طور پر

$LHS = 8 - 3 + 2 = 5 + 2 = 7$ $RHS = 4 + 1 + 2 = 5 + 2 = 7.$

اب بھی برابری کا بیان درست ہے۔ (یعنی اس کی LHS اور RHS دونوں برابر ہیں)۔

لہٰذا اگر ہم برابری کے دونوں اطراف ایک ہی عدد جوڑتے ہیں تو بھی برابری کا بیان درست رہتا ہے۔

- اب دونوں طرف 2 کو گھٹا کر دیکھتے ہیں، نتیجہ کے طور پر

$LHS = 8 - 3 - 2 = 5 - 2 = 3$ $RHS = 4 + 1 - 2 = 5 - 2 = 3$

اب بھی یہ برابری کا بیان درست ہے۔ (یعنی LHS اور RHS دونوں برابر ہیں)

لہٰذا، اگر ہم برابری کے دونوں اطراف ایک ہی عدد گھٹاتے ہیں تو بھی برابری کا بیان درست رہتا ہے۔

- بالکل اسی طرح، اگر ہم برابری کے دونوں اطراف ایک ہی عدد سے ضرب یا تقسیم کرتے ہیں تو برابری پر کوئی اثر نہیں پڑتا۔

مثال کے طور پر، برابری کے دونوں اطراف 3 سے ضرب کرنے پر ہم کو حاصل ہوتا ہے

$LHS = 3 \times (8 - 3) = 3 \times 5 = 15,$ $RHS = 3 \times (4 + 1) = 3 \times 5 = 15$

برابری کا بیان درست ہے۔

اب ہم برابری کے دونوں اطراف 2 سے تقسیم کرتے ہیں۔

$$LHS = (8 - 3) \div 2 = 5 \div 2 = \frac{5}{2}$$

$$RHS = (4+1) \div 2 = 5 \div 2 = \frac{5}{2} = LHS$$

اب بھی بیان درست ہے۔

اگر ہم کوئی دوسری برابری لیں تو بھی ہم انہی نتائج پر پہنچیں گے۔

مان لیجیے، ہم نے یہ اصول ابھی نہیں دیکھے ہیں۔ خصوصی طور پر مان لیجیے ہم برابری کے دونوں اطراف مختلف اعداد کو جوڑتے ہیں۔ اس صورت حال میں ہم دیکھیں گے کہ برابری کا بیان درست نہیں رہ پاتا۔ (یعنی دونوں اطراف برابر نہیں ہیں)۔ مثال کے طور پر ایک بار پھر برابری (4.5) لیجیے۔

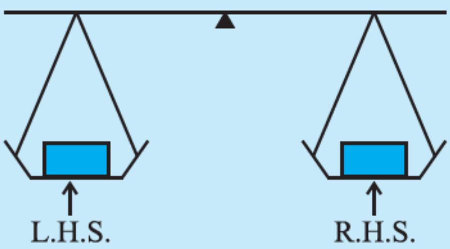
$$8 - 3 = 4 + 1$$

LHS پر 2 اور RHS پر 3 جوڑیے۔ اب جو نیا LHS بنا وہ ہے $8 - 3 + 2 = 5 + 2 = 7$ اور نیا RHS ہوا $4 + 1 + 3 = 5 + 3 = 8$ برابری درست نہیں ہے۔ کیونکہ نیا LHS اور RHS برابر نہیں ہے۔

لہٰذا اگر ہم برابری کے دونوں اطراف ایک ہی ریاضیائی عمل ایک ہی عدد کے ساتھ کرنے میں ناکام ہوتے ہیں تو بھی برابری درست نہیں رہ پائے گی۔

ایسی برابری جس میں متغیر شامل ہوتے ہیں مساوات کہلاتے ہیں۔

**یہ تمام نتائج مساوات کے لیے بھی قابل قبول ہیں کیونکہ ہر مساوات میں متغیر صرف ایک عدد کو ظاہر کرتا ہے۔**




ایک مساوات بالکل ایک ترازو کی طرح ہوتی ہے، جس کے دونوں پلڑوں میں برابر وزن ہو۔

اکثر موقعوں پر ہم کہتے ہیں کہ **مساوات ایک ترازو کی طرح ہے**۔ کوئی ریاضیائی عمل کسی مساوات کے لیے بالکل ایسا ہی ہے جیسے ہم ترازو میں وزن بڑھاتے اور گھٹاتے ہیں۔

ایک مساوات ایک ترازو کی طرح ہے، جس کے دونوں پلڑوں پر برابر وزن رکھا ہو۔ ایسی حالت میں ترازو متوازی رہتا ہے اگر ہم دونوں پلڑوں میں برابر وزن رکھیں تو ہمیشہ متوازی رہتا ہے۔ اسی طرح اگر ہم ایک ہی وزن دونوں پلڑوں میں سے ہٹا دیں تو بھی ہمیشہ متوازی رہتا ہے۔ دوسری طرف اگر ہم دو مختلف وزن کو دونوں پلڑوں میں بڑھائیں یا گھٹائیں تو ترازو ایک طرف کو جھک جاتا ہے۔ یعنی ترازو ہمیشہ افقی نہیں رہتا ہے۔

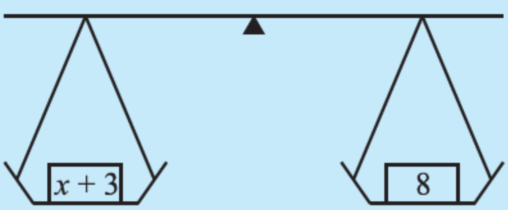
ہم اس اصول کو مساوات کو حل کرنے کے لیے بھی استعمال کرتے ہیں۔

یہاں پر یقیناً، ترازو خیالی ہے اور اعداد کو وزن کی طرح استعمال کیا جا سکتا ہے، جو کہ ایک دوسرے کو حقیقی طور پر متوازن کر رہے ہیں۔ اس اصول کو پیش کرنے کا یہی اصل مقصد ہے۔ آیئے کچھ مثالیں لیتے ہیں۔

- مساوات کو دیکھیے $\quad x + 3 = 8 \quad$ (4.6)

ہم اس مساوات کے دونوں اطراف میں سے 3 کو گھٹاتے ہیں۔

نئی LHS ہے $x + 3 - 3 = x$ اور نئی RHS ہے $8 - 3 = 5$




ہم نے 3 کو ہی کیوں گھٹایا، کوئی اور عدد کیوں نہیں لیا؟ 3 کو جمع کر کے دیکھیے۔ کیا اس سے کوئی مدد ملتی ہے؟ یوں نہیں؟ یہ اس لیے ہے کیونکہ 3 کو گھٹانے سے LHS میں صرف $x$ بچتا ہے۔

کیونکہ یہ توازن کوئی خلل نہیں ڈالتا ہے، اس لیے

نئی LHS = نئی RHS　　یا　　$x=5$

یہ مساوات (4.6) کا حل ہے اور یہی تو ہم چاہتے ہیں۔

یہ جانچنے کے لیے کہ کیا ہم درست ہیں، ہم ابتدائی مساوات میں $x=5$ رکھیں گے۔ ہم کو حاصل ہوگا۔

$LHS = x + 3 = 5 + 3 = 8$ جو کہ RHS کے برابر ہے اور ہم کو یہی چاہیے بھی تھا۔

مساوات کے دونوں اطراف میں صحیح ریاضیاتی عمل کرنے سے (یعنی 3 گھٹانے پر) ہم مساوات کے حل پر پہنچ جاتے ہیں۔

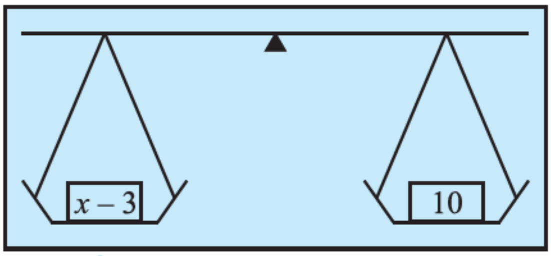
- آیئے ایک اور مساوات کو دیکھتے ہیں　　$x - 3 = 10$　　(4.7)

یہاں ہم کو کیا کرنا چاہیے؟ ہم کو دونوں اطراف 3 کو جوڑنا چاہیے۔ ایسا کرنے سے نہ صرف توازن درست رہے گا بلکہ LHS پر صرف $x$ بھی بچے گا۔

نئی LHS ہوئی　$x - 3 + 3 = x$ اور نئی RHS ہوگی　$RHS = 10 + 3 = 13$۔

اس لیے $x=13$ جو کہ مطلوبہ حل ہے۔

ابتدائی مساوات (4.7) میں $x=13$ رکھنے پر ہم اس حل کی جانچ کر سکتے ہیں۔




ابتدائی مساوات کی LHS ہے

$LHS = x - 3 = 13 - 3 = 10$

جو کہ RHS کے برابر ہے اور یہی ہم کو چاہیے۔

- اسی طرح، مساوات کو دیکھیے

$$5y=35 \quad (4.8)$$

$$\frac{m}{2} = 5 \quad (4.9)$$

پہلی صورت حال میں، ہم دونوں اطراف کو 5 سے تقسیم کریں گے۔ اس سے آپ کو نئی LHS ملے گی۔

$$LHS = \frac{5y}{5} = \frac{5 \times y}{5} = y$$

اور نئی RHS ہوگی

$$RHS = \frac{35}{5} = \frac{5 \times 7}{5} = 7$$

اس لیے $y=7$

یہی مطلوبہ حل ہے۔ ہم مساوات (4.8) میں $y=7$ رکھیں اور جانچ کریں کہ کیا یہ جواب صحیح ہے۔

دوسری صورت حال میں ہم دونوں اطراف میں 2 سے ضرب کریں گے۔ اس سے ہم کو LHS میں صرف $m$ ملے گا۔

نئی LHS ہوگی

$$\text{LHS} = \frac{m}{2} \times 2 = m$$

اور نئی RHS ہوگی

$$\text{RHS} = 5 \times 2 = 10$$

لہٰذا $m=10$ (یہی مطلوبہ حل ہے، آپ اس کی جانچ کر سکتے ہیں کہ یہ جواب درست بھی ہے یا نہیں؟)

اس کو دیکھا جا سکتا ہے کہ اوپر دی گئی مثالوں میں، ہم کو جو عمل کرنا ہوتا ہے وہ مساوات پر ہی منحصر ہوتا ہے۔ ہمارا مقصد مساوات میں متغیر کو الگ کرنا ہوتا ہے۔ کبھی کبھی ایسا کرنے میں ہم ایک سے زیادہ ریاضیائی عمل بھی کرتے ہیں۔

آیئے، ان باتوں کا دھیان رکھتے ہوئے ہم کچھ اور مساواتوں کو حل کرتے ہیں۔

**مثال 5** حل کیجیے (a) $3n + 7 = 25$ (4.10)

(b) $2p - 1 = 23$ (4.11)

**حل**

(a) مساوات کی LHS میں متغیر $x$ کو الگ کرنے کے لیے ہم قدم بہ قدم آگے بڑھتے ہیں۔ LHS ہے، $3x+7$۔ پہلے ہم 7 کو گھٹائیں گے تو ہم کو $3x$ ملے گا۔ اس سے ہم اگلے قدم میں $x$ حاصل کرنے کے لیے 3 سے تقسیم کریں گے۔ یاد رکھیے کہ ہم کو ایک ہی عمل دونوں اطراف میں کرنا ہے۔ اس لیے دونوں طرف 7 گھٹانے پر

$$3n + 7 - 7 = 25 - 7$$ (پہلا قدم)

یا $3n = 18$

اب دونوں طرف 3 سے تقسیم کیجیے

$$\frac{3x}{3} = \frac{18}{3}$$ (دوسرا قدم)

یا $x=6$ جو کہ حل ہے

(b) یہاں ہم کیا کریں؟ پہلے ہم کو دونوں طرف 1 کو جوڑنا چاہیے۔

$$2p - 1 + 1 = 23 + 1$$ (پہلا قدم)

یا $2p = 24$

اب دونوں طرف 2 سے تقسیم کیجیے۔ ہم کو ملا

$$\frac{2p}{2} = \frac{24}{2}$$ (دوسرا قدم)

یا $p = 12$ جو کہ حل ہے

آپ ایک اچھی عادت ضرور ڈالیں کہ جو حل آپ کو حاصل ہوا ہے اس کی جانچ کریں، حالانکہ ہم نے یہ مثال (a) کے لیے نہیں کیا ہے۔ آیئے ہم اس مثال کے لیے یہ کرتے ہیں۔

آیئے جواب $p = 12$ کو واپس مساوات میں رکھتے ہیں۔

$$\text{LHS} = 2p - 1 = 2 \times 12 - 1 = 24 - 1 = 23 = \text{RHS}$$

اس طرح حل کی بھی جانچ ہوگئی کہ وہ درست ہے بھی یا نہیں۔

کیا آپ (a) کے حل کے لیے اس کی جانچ کیوں نہیں کر لیتے ہیں؟

اب ہم اس حالت میں آچکے ہیں کہ ہم اپو، سریتا، امینا کے 'دماغ کو پڑھنے، والے کھیل پر واپس جاسکتے ہیں اور یہ سمجھ سکتے ہیں کہ ان کے پاس جواب کیسے آیا۔ اس کے لیے، آیئے مساوات (4.1) اور (4.2) کو دیکھتے ہیں جو بالترتیب امینا اور اپو کی مثال کے لیے ہے۔

- پہلے مساوات $4x + 5 = 65$ کو دیکھیے۔ (4.1)

دونوں طرف 5 گھٹانے سے، $4x + 5 - 5 = 65 - 5$

یعنی $4x = 60$

دونوں طرف 4 سے گھٹانے پر $x$ الگ ہو جائے گا۔ ہم کو ملا $\frac{4x}{4} = \frac{60}{4}$

یا $x=15$ جو کہ مطلوبہ حل ہے۔ (اس کی جانچ کیجیے کہ کیا یہ درست ہے؟)

- اب دیکھیے $10y - 20 = 50$ (4.2)

دونوں طرف 20 جوڑنے پر، ہم کو ملا $10y - 20 + 20 = 50 + 20$ یا $10y = 70$

دونوں طرف 10 سے تقسیم کرنے پر، ہم کو ملا $\frac{10y}{10} = \frac{70}{10}$ یا $y=7$ جو کہ حل ہے۔ (اس کی جانچ کیجیے کہ یہ صحیح ہے یا نہیں)

آپ کو یہ محسوس ہوگا کہ یہ وہی جوابات ہیں جو اپو، سریتا اور امینہ نے دیے تھے۔ انہوں نے مساوات بنانا اور ان کو حل کرنا سیکھ لیا تھا۔ اسی لیے انھوں نے اپنا 'دماغ پڑھنے والا' کھیل بنایا اور پوری کلاس پر اپنا تاثر چھوڑا۔ ہم اس پر دوبارہ حصہ 4.7 میں آئیں گے۔

## مشق 4.2

1۔ پہلے وہ قدم بتایئے جس کی مدد سے آپ متغیر کو علیحدہ کریں گے اور پھر مساوات کو حل کیجیے:

(a) $x - 1 = 0$ (b) $x + 1 = 0$ (c) $x - 1 = 5$ (d) $x + 6 = 2$

(e) $y - 4 = -7$ (f) $y - 4 = 4$ (g) $y + 4 = 4$ (h) $y + 4 = -4$

2۔ پہلے وہ قدم بتایئے جس کی مدد سے آپ متغیر کو علیحدہ کریں گے اور پھر مساوات کو حل کیجیے:

(a) $3L = 42$ (b) $\frac{b}{2} = 6$ (c) $\frac{p}{7} = 4$ (d) $4x = 25$

(e) $8y = 36$ (f) $\frac{z}{3} = \frac{5}{4}$ (g) $\frac{a}{5} = \frac{7}{15}$ (h) $20t = -10$

3۔ وہ قدم بتائیے جس کے استعمال سے آپ متغیر کو علیحدہ کریں گے اور پھر مساوات کو حل کیجیے:

(a) $3n - 2 = 46$ (b) $5m + 7 = 17$ (c) $\frac{20p}{3} = 40$ (d) $\frac{3p}{10} = 6$

4۔ مندرجہ ذیل مساوات کو حل کیجیے:

(a) $10p = 100$ (b) $10p + 10 = 100$ (c) $\frac{p}{4} = 5$ (d) $\frac{-p}{3} = 5$

(e) $\frac{3p}{4} = 6$ (f) $3s = -9$ (g) $3s + 12 = 0$ (h) $3s = 0$

(i) $2q = 6$ (j) $2q - 6 = 0$ (k) $2q + 6 = 0$ (l) $2q + 6 = 12$

## 4.5 اور زائد مساواتیں (More Equation)

آیئے کچھ اور مساوات کو حل کرنے کی مشق کرتے ہیں۔ جب ان مساوات کو حل کریں گے، تو ہم ایک عدد پر عمل ابدال کریں گے یعنی اس کو ایک طرف سے دوسری طرف لے جائیں گے۔ ہم ایک عدد کا عمل ابدال کر سکتے ہیں بجائے اس کے کہ مساوات کی دونوں طرف ایک عدد کو جوڑیں یا گھٹائیں۔

**مثال 6** حل کیجیے $12p - 5 = 25$ (4.12)

**حل**

- مساوات کے دونوں طرف 5 کو جوڑنے پر

$12p - 5 + 5 = 25 + 5$ یا $12p = 30$

- دونوں طرف 12 سے تقسیم کیجیے

$\frac{12p}{12} = \frac{30}{12}$ یا $p = \frac{5}{2}$

**جانچ** مساوات 4.12 کی LHS میں $p = \frac{5}{2}$ رکھنے پر

$$\text{LHS} = 12 \times \frac{5}{2} - 5 = 6 \times 5 - 5 = 30 - 5 = 25 = \text{RHS}$$

> نوٹ کیجیے کہ 5 کو دونوں طرف جوڑنا ایسا ہی ہے جیسے (5–) کی جگہ (side) بدل دی جائے
>
> $12p - 5 = 25$
>
> $12p = 25 + 5$
>
> اطراف بدلنے کو عمل ابدال کہتے ہیں جس کو ایک عدد سے عمل ابدال میں نشان بدل دیا جاتا ہے۔

جیسا کہ ہم نے دیکھا، مساوات کو حل کرنے کے لیے ایک عمل جو عام طور پر استعمال کیا جاتا ہے، ایک عدد کا عمل ابدال کرنا (یعنی عدد کو ایک طرف سے دوسری طرف لے جانا) بالکل ایسا ہی ہے جیسے ایک ہی عدد کو دونوں طرف جوڑنا یا گھٹانا۔ ایسا کرنے پر عدد کا نشان بدل جاتا ہے۔ جو کچھ اعداد کے لیے قابل اطلاق ہے وہی عبارتوں کے لیے بھی قابل اطلاق ہے۔ آیئے عمل ابدال کی دو اور مثالیں لیتے ہیں۔

| دونوں طرف جوڑنا یا گھٹانا | عمل ابدال |
|---|---|
| $3p - 10 = 5$ (i) | $3p - 10 = 5$ (i) |
| دونوں طرف 10 جوڑنا | LHS سے RHS کی طرف (–10) کا عمل ابدال |
| $3p - 10 + 10 = 5 + 10$ | (عمل ابدال سے –10، +10 بن جائے گا) |
| یا $3p = 15$ | $3p = 5 + 10$ or $3p = 15$ |
| $5x + 12 = 27$ (ii) | $5x + 12 = 27$ (ii) |
| دونوں طرف 12 گھٹانا | +12 کا عمل ابدال |
| | (عمل ابدال سے +12، –12 بن جائے گا) |
| $5x + 12 - 12 = 27 - 12$ | $5x = 27 - 12$ |
| یا $5x = 15$ | یا $5x = 15$ |

اب ہم دو اور مثال لیں لیتے ہیں۔ جیسا کہ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ان دونوں میں بریکیٹ بھی ہیں، جن کو سب سے پہلے حل کیا جاتا ہے۔

**مثال 7** حل کیجیے

(a) $4(m + 3) = 18$ (b) $-2(x + 3) = 8$

**حل**

(a) $4(m + 3) = 18$

پہلے دونوں طرف 4 سے تقسیم کرتے ہیں۔ اس سے LHS کا بریکیٹ ہٹ جائے گا۔ ہم کو ملے گا

$$m + 3 = \frac{18}{4} \quad \text{یا} \quad m + 3 = \frac{9}{2}$$

یا $m = \frac{9}{2} - 3$ (3 کو RHS پر لے گئے)

یا $m = \frac{3}{2}$ (مطلوبہ حل) $\left(\frac{9}{2} - 3 = \frac{9}{2} - \frac{6}{2} = \frac{3}{2}\right)$

**جانچ:** ($m = \frac{3}{2}$ رکھنے پر) $\text{LHS} = 4\left[\frac{3}{2} + 3\right] = 4 \times \frac{3}{2} + 4 \times 3 = 2 \times 3 + 4 \times 3$

$$= 6 + 12 = 18 = \text{RHS}$$

(b) $-2(x + 3) = 8$

ہم دونوں طرف (–2) سے تقسیم کریں گے، ہمیں LHS کے بریکیٹ ہٹانے ہیں۔ ہم کو ملے گا

$x + 3 = -\frac{8}{2}$ یا $x + 3 = -4$ (RHS پر 3 لے گئے)

یعنی، $x = -4 - 3$ یا $x = -7$ (مطلوبہ جواب)

جانچ: LHS= $-2(-7+3) = -2(-4)$
$= 8 =$ RHS

## 4.6 حل سے مساوات تک (From Solution to Equation)

اتل ہمیشہ مختلف انداز میں سوچتا ہے۔ایک مساوات کو حل کرنے کے لیے جو اقدام اٹھائے جاتے ہیں، اتل نے ان اقدام کو دیکھا۔ وہ حیران ہوا کہ الٹا راستہ کیوں نہیں استعمال کرتے۔

مساوات ⟵ حل (سیدھا راستہ)

حل ⟵ مساوات (الٹا راستہ)

اس نے مندرجہ ذیل راستہ اختیار کیا:

| | | |
|---|---|---|
| شروع کیا | $x = 5$ | |
| دونوں طرف 4 سے ضرب کی ↓ | $4x = 20$ | ↑ دونوں طرف 4 سے تقسیم کیا |
| دونوں طرف سے 3 گھٹایا ↓ | $4x - 3 = 17$ | ↑ 3 کو دونوں طرف جوڑا |

**کوشش کیجیے:**

قدم $x=5$ سے ہی شروع کیجیے اور دو مختلف مساوات بنائیے۔ اپنے کلاس کے دو ساتھیوں سے کہیے کہ ان مساوات کو حل کیجیے۔ جانچ کیجیے کہ کیا جواب $x = 5$ ہے۔

اس سے ایک مساوات حاصل ہوئی۔ اگر ہم ہر قدم پر الٹا راستہ اختیار کریں جیسا کہ بائیں طرف دکھایا گیا ہے تو ہم کو مساوات کا حل مل جائے گا۔

اتل کو اس میں مزہ آیا۔ اس نے اسی پہلے قدم سے شروع کیا اور یہ ایک دوسری مساوات بنائی۔

$x=5$

دونوں طرف 3 سے ضرب کی $3x=15$

دونوں طرف 4 کو جوڑا $3x=4=19$

$y=4$ سے شروع کیجیے اور دو مختلف مساوات بنائیے۔ اپنے تین دوستوں سے بھی ایسا ہی کرنے کو کہیے۔ کیا ان کی مساوات آپ سے مختلف ہیں؟

**کوشش کیجیے:**

دو عددی معمہ بنانے کی کوشش کیجیے، ایک کا جواب 11 ہے اور دوسرے کا 100

کیا یہ مزیدار بات نہیں ہے کہ آپ صرف مساوات حل ہی نہیں کر سکتے بلکہ مساوات بنا بھی سکتے ہیں؟ ساتھ ہی کیا آپ نے یہ محسوس کیا ہے کہ ایک دی گئی مساوات میں، آپ کو ایک حل ملتا ہے لیکن دیے گئے حل کی آپ بہت سی مساوات بنا سکتے ہیں؟

اب سارا اپنی کلاس کو بتانا چاہتی ہے کہ وہ کیا سوچ رہی ہے۔ اس نے کہا ''میں اتل کی مساوات لیتی ہوں اور اس کے لیے ایک بیان بتاتی ہوں اور یہ ایک معمہ ہوگا۔ مثال کے طور پر ایک عدد سوچیے، اس کو 3 سے ضرب کیجیے اور حاصل ضرب میں 4 جوڑیے۔ جو کچھ آپ کے پاس آیا ہے وہ جواب بتائیے۔

اگر جوڑ 19 ہے تو اتل کی مساوات اس معمہ کا جواب ہم کو بتا دے گی۔ دراصل ہم جانتے ہیں کہ یہ 5 ہے، کیونکہ اتل نے اس سے ہی شروع کیا تھا۔''

پھر وہ اپو، امینا اور سریتا کی طرف مڑی، یہ دیکھنے کے لیے کہ کیا وہ بھی ایسا معمہ بنا سکتے ہیں یا نہیں۔ ان تینوں نے کہا ''ہاں!''

اب ہم جانتے ہیں کہ کیسے عودی معمہ یا ایسی ہی دوسرے مسائل بنائے جا سکتے ہیں۔

## مشق 4.3

1۔ مندرجہ ذیل مساوات کو حل کیجیے:

(a) $2y + \frac{5}{2} = \frac{37}{2}$ (b) $5t + 28 = 10$ (c) $\frac{a}{5} + 3 = 2$ (d) $\frac{q}{4} + 7 = 5$

(e) $\frac{5}{2}x = -10$ (f) $\frac{5}{2}x = \frac{25}{4}$ (g) $7m + \frac{19}{2} = 13$ (h) $6z + 10 = -2$

(i) $\frac{3l}{2} = \frac{2}{3}$ (j) $\frac{2b}{2} - 5 = 3$

2۔ مندرجہ ذیل مساوات کو حل کیجیے:

(a) $2(x + 4) = 12$ (b) $3(n - 5) = 21$ (c) $3(n - 5) = -21$

(d) $-4(2 + x) = 8$ (e) $4(2 - x) = 8$

3۔ مندرجہ ذیل مساوات کو حل کیجیے:

(a) $4 = 5(p - 2)$ (b) $-4 = 5(p - 2)$ (c) $16 = 4 + 3(t + 2)$

(d) $4 + 5(P - 1) = 34$ (e) $0 = 16 + 4(m - 6)$

4۔ (a) $x=2$ سے شروع کر کے 3 مساوات بنائیے۔

(b) $x=-2$ سے شروع کر کے 3 مساوات بنائیے۔

## 4.7 سادہ مساوات کا عملی صورت حال میں استعمال

## (Applications of Simple Equations to Practical Situations)

ہم ایسی مثالیں دیکھ چکے ہیں جن میں ہم نے روزمرہ کی زبان کے بیانات استعمال کیے ہیں اور ان کو سادہ مساوات میں بدلا ہے۔ ہم

نے یہ بھی سیکھا ہے کہ سادہ مساوات کو کیسے حل کریں۔ اس طرح ہم عملی صورت حال کے مسائل یا معمّوں کو حل کرنے کے لیے تیار ہیں۔
اس کا طریقہ ہے کہ ہم پہلے صورت حال کے مطابق مساوات بناتے ہیں اور پھر اس کو حل کرتے ہیں جس سے ہم کو اس مسئلہ یا معمہ کا حل
مل جاتا ہے۔ ہم (سیکشن 4.2 کی مثال نمبر (i) اور (ii) میں ہم نے جو کچھ دیکھا ہے اس سے شروعات کرتے ہیں۔

**مثال 8** ایک عدد کا تین گنا اور 11 کا جوڑ 32 ہے عدد بتائیے۔

**حل**

یہ مساوات سیکشن 4.2 کی مثال 1 میں پہلے سے ہی دی گئی ہے۔

اگر نا معلوم عدد کو $x$ مان لیا جائے تو عدد کا تین گنا $3x$ ہوا اور $3x$ اور 11 کا جوڑ 34 ہے۔

$$3x + 11 = 32$$

اس مساوات کو حل کرنے کے لیے ہم 11 کو RHS کی طرف لے جاتے ہیں۔ اس لیے

$3x = 32 - 11$ یا $3x = 21$

اب دونوں طرف 3 سے تقسیم کیجیے۔

اس لیے

مطلوبہ عدد 7 ہے۔ (ہم اس کو 7 کے دوگنے میں 11 کو جمع کر کے جانچ بھی سکتے ہیں۔)

**کوشش کیجیے:**

(i) جب آپ ایک عدد کو 6 سے ضرب کر کے حاصل ضرب سے 5 گھٹاتے ہیں تو آپ کو 7 ملے گا۔ کیا بتا سکتے ہیں کہ عدد کیا ہے؟

(ii) وہ عدد کون سا ہے جس کے ایک تہائی میں 5 جوڑنے سے عدد 8 آتا ہے۔

**مثال 9** ایک ایسا عدد معلوم کیجیے جس کا ایک چوتھا 7 سے زیادہ ہے؟

**حل**

- نا معلوم عدد کو $y$ لیجیے۔ $y$ کا ایک چوتھائی ہوا

یہ عدد $\frac{y}{4}$ 7 سے 3 زیادہ ہے

اس لیے ہم کو $y$ کے لیے مساوات ملی $\frac{y}{4} - 7 = 3$

- اس مساوات کا حل کرنے کے لیے ہم 7 کو RHS پر لے جائیں گے تو ہم کو ملے گا،

$$= \frac{y}{4} = 3+7=10$$

پھر ہم مساوات کے دونوں طرف 4 سے ضرب کریں گے تو ہم کے ملے گا،

$\frac{y}{4} \times 4 = 10 \times 4$ یا $y=40$

جو مساوات بنی ہے آیئے اب اس کی جانچ کرتے ہیں۔ مساوات میں $y$ کی قیمت رکھیے،

$$= \frac{40}{4} - 7 = 10 - 7 = 3 = \text{RHS}$$

**مثال 10** راجو کے والد کی عمر راجو کی عمر کے تین گنے سے 5 سال زیادہ ہے۔ اگر اس کے والد کی عمر 44 سال ہے تو راجو کی عمر بتائیے۔

**حل**

- جیسا کہ پہلے دی گئی مثال نمبر 3 میں دیا گیا ہے وہ مساوات جو راجو کی عمر بتاتی ہے۔

$3y+5=44$

- اس کو حل کرنے کے لیے ہم پہلے 5 کے لیے عمل ابدال کریں گے، ہم کو ملے گا، $3y = 44 - 5 = 39$
- دونوں طرف 3 سے تقسیم کرنے پر ہم کو ملے گا۔ $y = 13$

یعنی، راجو کی عمر 13 سال ہے (آپ جواب کی جانچ کر سکتے ہیں)

## کوشش کیجیے:

دو طرح کے ڈبوں میں آم بھرے گئے۔ ہر بڑے ڈبے میں 8 چھوٹے ڈبوں کے برابر آموں سے 4 زیادہ آم آئیں گے۔ ہر بڑے ڈبے میں 100 آم ہیں۔ چھوٹے ڈبوں میں آم کی تعداد بتائیے۔

## مشق 4.4

1۔ مندرجہ ذیل ہر ایک صورت حال کے لیے مساوات بنائیے اور پھر نامعلوم عدد کے لیے ان کو حل کیجیے۔

(a) ایک عدد کے آٹھ گُنے میں 4 جمع کیجیے آپ کو 60 ملے گا۔

(b) ایک عدد کے 5 ویں حصہ میں سے 4 گھٹانے پر 3 ملے گا۔

(c) اگر میں ایک عدد کا تین چوتھائی لوں اور اس میں 3 جوڑ دوں تو 21 ملے گا۔

(d) کسی عدد کے دو گنے میں سے 11 گھٹانے پر مجھے 15 ملے گا۔

(e) منا کے پاس جتنی کاپیاں تھیں اس کے تین گنے کو 50 میں سے گھٹانے پر اس کو 8 ملا۔

(f) ایلا نے ایک عدد سوچا اگر اس نے اس میں 19 جوڑ دیا اور جواب کو 5 سے تقسیم کر دیا تو اس کو 8 ملا۔

(g) انور نے ایک عدد سوچا۔ اگر وہ اس عدد کے $\frac{5}{2}$ حصہ میں سے 7 نکال لے تو اس کو 23 ملے گا۔

2۔ مندرجہ ذیل کو حل کیجیے۔

(a) ٹیچر نے کلاس میں بتایا کہ ان کی کلاس میں سب سے زیادہ مارکس سب سے کم مارکس کے دوگنے میں 7 جوڑنے کی برابر ہیں۔ سب سے زیادہ مارکس 87 ہیں سب سے کم مارکس بتائیے۔

(b) ایک مساوی الساقین مثلث میں قاعدہ پر بنے زاویے برابر ہوتے ہیں۔ راس پر بنا زاویہ 40° کا ہے۔ مثلث کے قاعدہ پر بنے زاویے کیا ہیں؟ یاد کیجیے کہ مثلث کے تینوں زاویوں کا جوڑ 180° ہے۔

(c) راہل نے جتنے رن بنائے سچن نے اس کے دو گنے رن بنائے۔ دونوں کے رن ملا کر دو سیکڑوں سے دو رن کم ہیں۔ دونوں نے کتنے کتنے رن بنائے۔

3۔ مندرجہ ذیل کو حل کیجیے۔

(i) عرفان نے کہا کہ اس کے پاس پرمت کے ماربل کے پانچ گنے سے 7 ماربل زیادہ ہیں۔ عرفان کے پاس 37 ماربل ہیں۔ پرمت کے پاس کتنے ماربل ہیں۔

(ii) لکشمی کے والد 49 سال کے ہیں۔ وہ لکشمی کی عمر کے تین گنے سے 4 سال زیادہ ہیں۔ لکشمی کی عمر بتایئے۔

(iii) سندر گرام کے لوگوں نے گاؤں کے ایک باغیچہ میں پیڑ لگائے۔ ان میں سے کچھ پیڑ پھلوں کے ہیں۔ بغیر پھل والے پیڑوں کی کل تعداد پھل والے پیڑوں کی تعداد کے تین گنے سے دو زیادہ ہے۔ اگر بغیر پھل والے 77 پیڑ لگائے گئے تھے تو پھل دار پیڑوں کی تعداد بتایئے۔

4۔ مندرجہ ذیل پہیلی کو حل کیجیے۔

میں ہوں ایک عدد
میری بتا شناخت!
کر و سات گنا میرا
اور اس میں جوڑو پچاس!
پھر تین سو پورے کرنے کو
تم کو چاہیے چالیس!

## ہم نے کیا گفتگو کی؟

1۔ مساوات ایک متغیر کے لیے ایک شرط ہے جس میں متغیر کی دو عبارتوں کی ایک ہی قیمت ہوتی ہے۔

2۔ متغیر کی وہ قیمت جو مساوات کو مطمئن کرے مساوات کا حل کہلاتی ہے۔

3۔ اگر کسی مساوات کی LHS اور RHS کو آپس میں ادل بدل دیا جائے تو مساوات وہی رہتی ہے۔

4۔ ایک متوازن مساوات کے لیے، اگر ہم،

(i) دونوں طرف ایک ہی عدد جوڑتے ہیں۔ یا (ii) دونوں طرف ایک ہی عدد کو گھٹاتے ہیں یا (iii) دونوں طرف ایک ہی عدد سے ضرب کرتے ہیں یا (iv) دونوں طرف ایک ہی عدد سے تقسیم کرتے ہیں۔ تو اس کے توازن پر کوئی فرق نہیں پڑتا۔ یعنی LHS کی قیمت ہمیشہ RHS کی قیمت کے برابر ہی رہتی ہے۔

5۔ اوپر دی گئی خصوصیت مساوات کو حل کرنے کا ایک باقاعدہ/باضابطہ طریقہ ہے، ہم ایک سے ریاضیائی اعمال کا سلسلہ کسی مساوات کے دونوں اطراف اس طرح کر سکتے ہیں کہ کسی ایک طرف حرف متغیر ہی بچے۔ آخری قدم مساوات کا حل ہوگا۔

6۔ عمل ابدال کے معنی ایک طرف سے دوسری طرف جانے کے ہیں۔ ایک عدد کے عمل ابدال کا وہی اثر ہوتا ہے۔ جو کہ ایک ہی عدد

کا مساوات کے دونوں طرف جوڑے (یا گھٹائے) کا ہوتا ہے جب آپ ایک عدد مساوات کی ایک طرف سے دوسری طرف لے جاتے ہیں تو آپ اس کا نشان بدل دیتے ہیں۔ مثال کے طور پر مساوات $x + 3 = 8$ میں $+3$ کو .L.H.S سے .R.H.S لے جانے پر $x = 8 - 3 \ (= 5)$ حاصل ہوتا ہے۔ ہم ایک عبارت کا عمل ابدال بھی بالکل ایک عدد کے عمل ابدال کی طرح کر سکتے ہیں۔

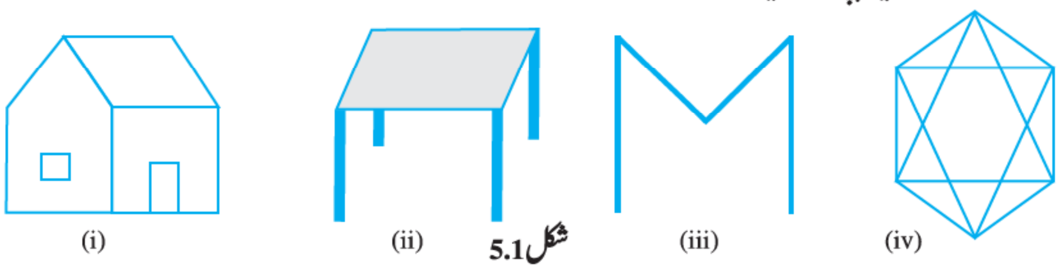
7۔ ہم نے یہ بھی سیکھا کہ عملی صورت حال کے مطابق ہم ایک سادہ الجبرائی عبارت کیسے بنا سکتے ہیں۔

8۔ ہم نے یہ بھی سیکھ لیا ہے کہ کیسے دونوں اطراف ایک سے ریاضیائی اعمال کرتے ہوئے (مثلاً) ایک سے اعداد جوڑنے پر ہم حل سے شروع کر کے ایک مساوات بنا سکتے ہیں۔ ساتھ ہی ہم نے یہ بھی سیکھ لیا ہے کہ ہم کسی دی گئی مساوات کو کس مناسب عملی صورت حال سے ملا سکتے ہیں اور کسی مساوات سے ایک عملی مسئلہ / معمہ بنا سکتے ہیں۔

# خطوط اور زاویے

## 5.1 تعارف (Introduction)

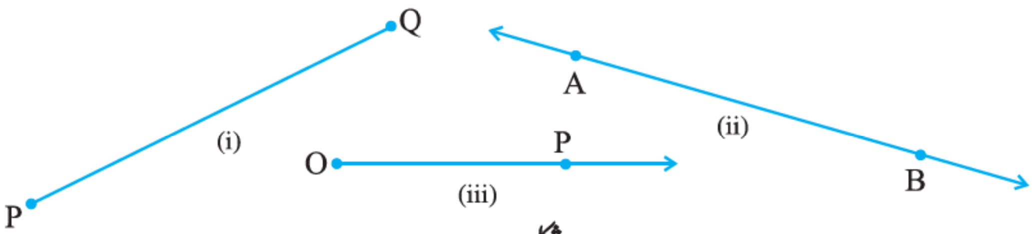
آپ یہ جانتے ہیں کہ کسی دی گئی شکل میں خط، قطعہ خط یا زاویے کو کیسے پہچانا جاتا ہے۔ کیا آپ مندرجہ ذیل اشکال (تصویر 5.1) میں مختلف خطوط اور زاویے پہچان سکتے ہیں؟




شکل 5.1

کیا آپ یہ بھی پہچان سکتے ہیں کہ یہ زاویے حادہ یا منفرجہ یا قائمہ ہیں؟

دہرائیے کہ ایک قطعہ خط میں دو آخری نقطے ہوتے ہیں۔ اگر ہم ان آخری نقطوں دونوں کو اطراف میں بنا خاتمہ کے بڑھاتے چلے جائیں تو ہم کو ایک خط حاصل ہوتا ہے۔ اس طرح ہم کہہ سکتے ہیں خط کا کوئی آخری نقطہ / سرا نہیں ہوتا ہے۔ دوسری طرف یاد کیجیے کہ شعاع کا صرف ایک ہی آخری نقطہ ہوتا ہے۔ (جس کو ابتدائی نقطہ کہتے ہیں)۔ مثال کے طور پر، درج ذیل تصاویر کو دیکھیے۔




شکل 5.2

یہاں، تصویر 5.2(i) میں ایک **قطعہ خط** (Segment) دکھایا گیا ہے۔ تصویر 5.2(ii) میں ایک **خط** (Line) دکھایا گیا ہے۔ اور تصویر 5.2(iii) میں ایک **شعاع** (Ray) ہے۔ ایک قطعہ خط PQ کو عام طور پر علامت $\overline{PQ}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ خط AB کی علامت $\overleftrightarrow{AB}$ سے ظاہر کرتے ہیں اور شعاع OP کو علامت $\overrightarrow{OP}$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ اپنی روزمرہ کی زندگی سے قطعہ خط اور شعاع کی کچھ

مثالیں دیکھیے اور ان کے بارے میں اپنے دوستوں سے بات کیجیے۔

پھر دہرائیے کہ دو خطوط یا دو قطعہ خط کے ملنے سے ایک زاویہ (Angle) بنتا ہے۔ تصویر 5.1 میں کونوں کا مشاہدہ کیجیے کونے تب ہی بنتے ہیں جب دو خط یا قطعہ خط کسی ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔ مثال کے طور پر، نیچے دی گئی تصاویر کو دیکھیے۔

شکل 5.3

تصویر 5.3(i) میں قطعہ خط AB اور BC ایک دوسرے کو B پر کاٹ رہے ہیں اور زاویہ ABC بنا رہے ہیں، اور پھر قطعہ خط BC اور AC نقطہ C پر ایک دوسرے کو کاٹ رہے ہیں زاویہ ACB بنانے کے لیے اور اسی طرح اور جب کہ تصویر 5.3(ii) میں خط PQ اور RS ایک دوسرے کو نقطہ O پر کاٹ رہے ہیں اور چار زاویے بنا رہے ہیں یہ زاویہ ہیں POS، SOQ، QOR اور ROP۔ ایک زاویہ ABC کو علامت ∠ABC سے ظاہر کرتے ہیں۔ لہٰذا، تصویر 5.3(i) میں بننے والے زاویے ∠ABC ، ∠BCA اور ∠BAC اور شکل 5.3(ii) میں چار زاویے ∠POS, ∠SOQ, ĐQOR اور ∠POR ہیں۔ یہ آپ پہلے ہی پڑھ چکے ہیں کہ زاویہ حادہ، منفرجہ یا زاویہ قائمہ کی درجہ بندی کیسے کی جاتی ہے۔

**کوشش کیجیے:**

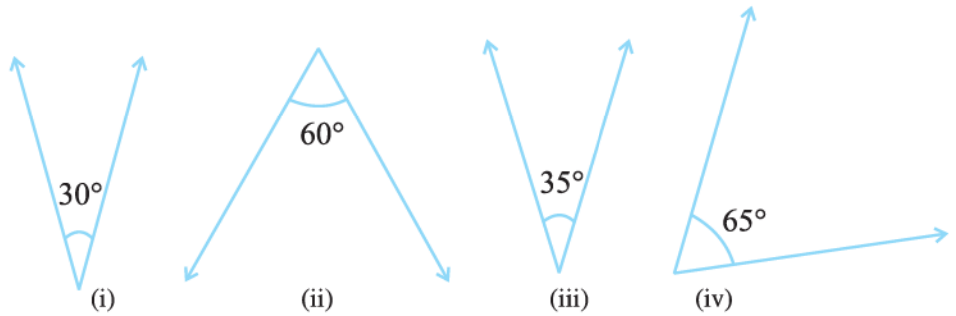
آس پاس سے دس اشکال کی فہرست بنائیے اور اس میں زاویہ حادہ منفرجہ اور زاویہ قائمہ معلوم کیجیے۔

نوٹ: زاویہ ABC کی پیمائش کے لئے ہم علامت m∠ABC لکھتے ہیں یا خالی ∠ABC بھی لکھ دیتے ہیں۔ یہ عبارت سے ہی معلوم ہوتا ہے کہ یہ زاویہ کو ظاہر کر رہی ہے یا پیمائش کے لیے ہے۔

## 5.2 ہم رشتہ زاویے (Related Angles)

### 5.2.1 اتمامی زاویے (Complementary Angles)

جب دو زاویوں کی پیمائش کا جوڑ 90° ہوتا ہے تو اپنے زاویوں کو اتمامی زاویے کہتے ہیں۔




کیا یہ زاویے دونوں اتمامی زاویے ہیں؟

ہاں

کیا یہ زاویے دونوں (ii) اتمامی زاویے

نہیں

شکل 5.4

جب کبھی دو زاویے اتمامی زاویے ہوتے ہیں تو وہ ایک دوسرے کے تتمہ کہلاتے ہیں۔ اوپر دی گئی تصویر (تصویر 5.4) میں 30° کا زاویہ 60° کے زاویے کا تتمہ ہے اور 60°، 30° کا۔

## سوچیے، بحث کیجیے اور لکھیے

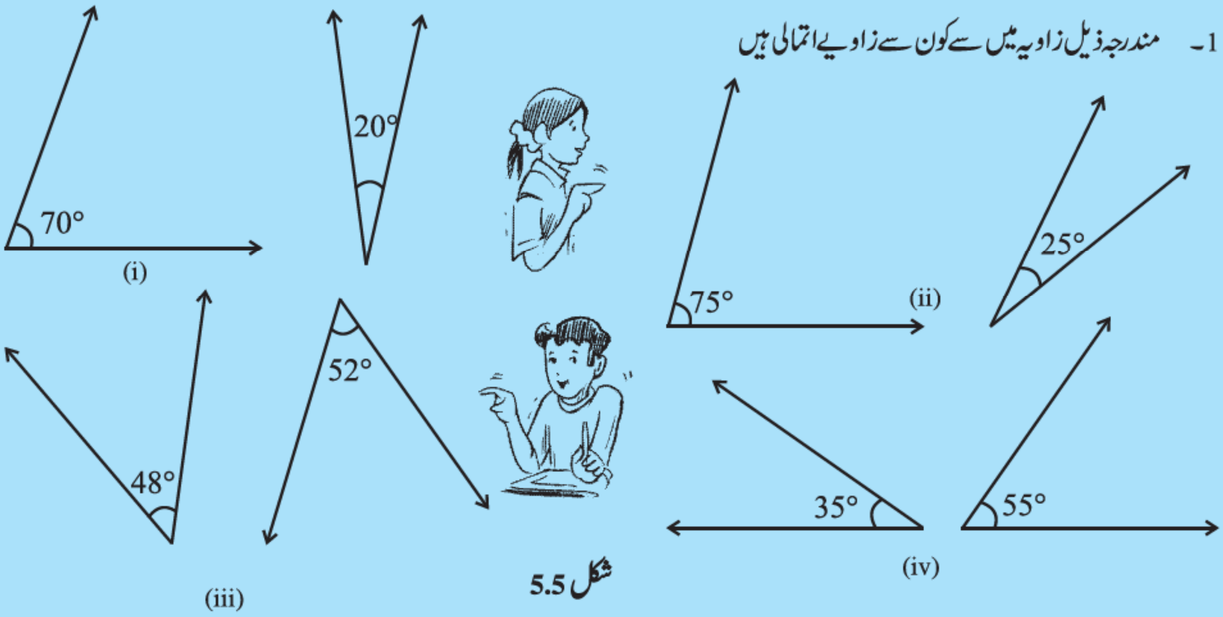
1۔ کیا دو زاویہ حادہ ایک دوسرے کے تتمہ ہو سکتے ہیں؟

2۔ کیا دو زاویہ منفرجہ ایک دوسرے کے تتمہ ہو سکتے ہیں؟

3۔ کیا دو زاویہ قائمہ ایک دوسرے کے تتمہ ہو سکتے ہیں؟

## کوشش کیجیے:

1۔ مندرجہ ذیل زاویہ میں سے کون سے زاویے اتمامی ہیں



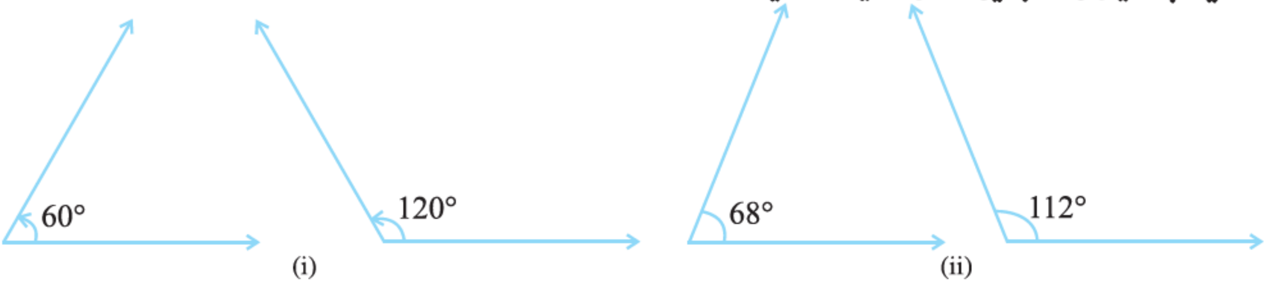

شکل 5.5

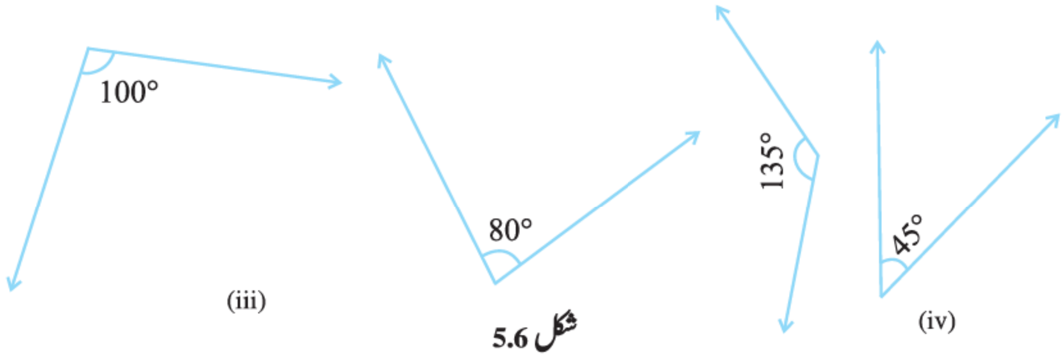
2۔ مندرجہ ذیل زاویوں میں سے ہر ایک کے (i)450 ، (ii)650، (iii)410، (iv)540 تتمہ کی پیمائش بتائیے؟

3۔ دو اتمامی زاویوں کا فرق 12° ہے۔ زاویوں کی پیمائش بتائیے۔

## 5.2 تکمیلی زاویے (Supplementary Angles)

آئیے اب زاویوں کی مندرجہ ذیل جوڑوں کو دیکھیے۔ (تصویر 5.6)






شکل 5.6

کیا آپ نے اس بات پر دھیان دیا ہے کہ اوپر دیے جوڑوں میں سے ہر ایک جوڑے کی پیمائش کا جوڑ °180 ہے۔ زاویوں کے ایسے جوڑے تکمیلی زاویے کہلاتے ہیں۔ جب دو زاویے تکمیلی زاویے ہوتے ہیں تو وہ دونوں ایک دوسرے کا **تکملہ** کہلاتے ہیں۔

## سوچیے، بحث کیجیے اور لکھیے

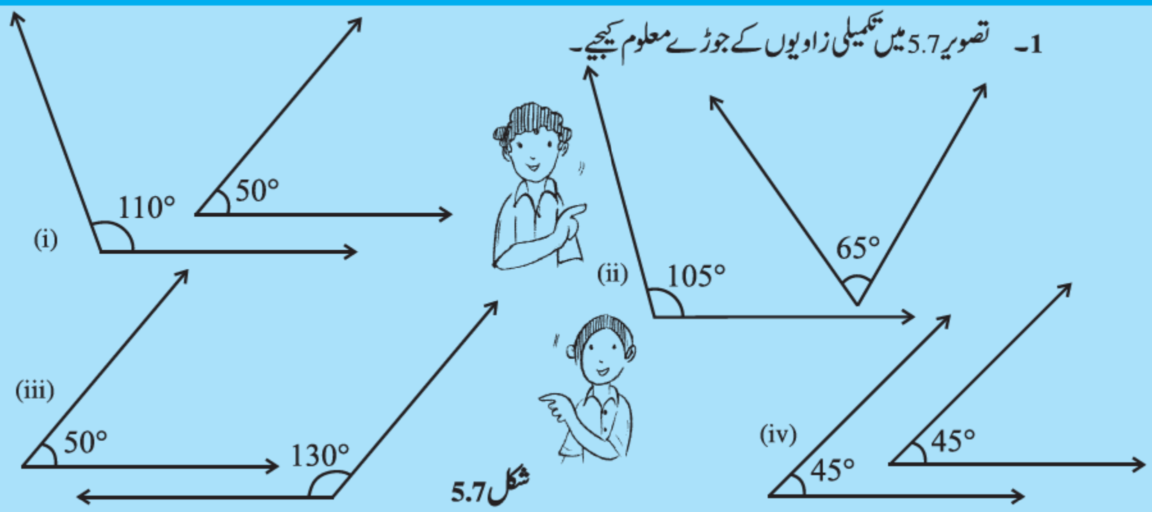
1۔ کیا دو زاویے منفرجہ تکمیلی زاویے ہو سکتے ہیں؟

2۔ کیا دو زاویہ حادہ تکمیلی زاویے ہو سکتے ہیں؟

3۔ کیا دو زاویہ قائمہ تکمیلی زاویے ہو سکتے ہیں؟

## کوشش کیجیے:

1۔ تصویر 5.7 میں تکمیلی زاویوں کے جوڑے معلوم کیجیے۔




شکل 5.7

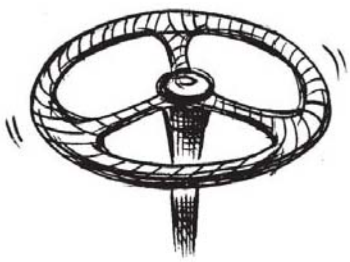
2۔ مندرجہ ذیل زاویوں میں سے ہر ایک زاویے کے تکملہ کی پیمائش بنائیے۔

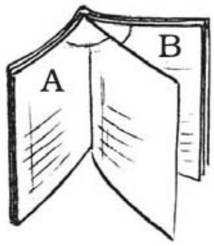
(i) 100° (ii) 90° (iii) 55° (iv) 125°

3۔ دو تکمیلی زاویوں میں سے بڑے زاویے کی پیمائش چھوٹے سے °44 زیادہ ہے۔ ان کی پیمائش بتائیے۔

### 5.2.3 متصل زاویے (Adjacent Angles)

مندرجہ ذیل تصویروں کو دیکھیے۔






ایک کار موڑنے کے پہیے کو دیکھیے ۔ پہیہ کے مرکز پر آپ کو تین زاویے بنتے نظر آئیں گے ۔ جو کہ ایک دوسرے کے بغل میں ہیں ۔

جب ہم ایک کتاب کو کھولتے ہیں تو وہ اوپر بنی تصویر جیسی لگتی ہے A اور B کی شکل میں ہمیں ایسے زاویوں کا جوڑ نظر آ رہا ہے جو آپ کو دوسرے کے بغل میں ہیں ۔

شکل 5.8

راس A اور B پر ہمیں ایسے زاویے نظر آ رہے ہیں جو ایک دوسرے کے برابر برابر ہیں ۔ یہ زاویے ایسے ہیں جس میں

(i) جن کا راس مشترک ہے ۔

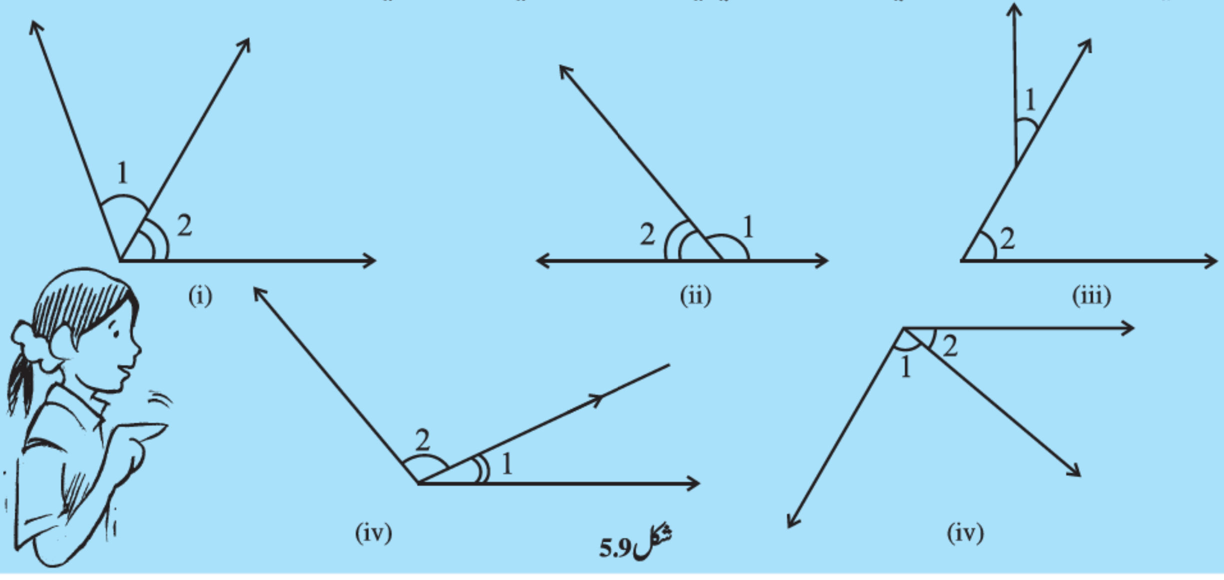
(ii) جن کا ایک بازو مشترک ہے ۔

(iii) دونوں زاویوں کے غیر مشترک بازو، مشترک بازو کے الگ الگ سمت میں ہیں ۔

زاویوں کے ایسے جوڑوں کو **متصل زاویے** کہتے ہیں ۔ متصل زایوں کا مشترک راس اور ایک بازو مشترک ہوتا ہے ۔ مگر ان کا کوئی اندرونی نقطہ مشترک نہیں ہوتا ہے ۔

## کوشش کیجیے :

1۔ کیا تصویر 5.10 میں نشان لگے زاویے 1 اور 2 متصل زاویے ہیں؟ اگر وہ متصل نہیں ہیں تو کیوں نہیں ہیں؟



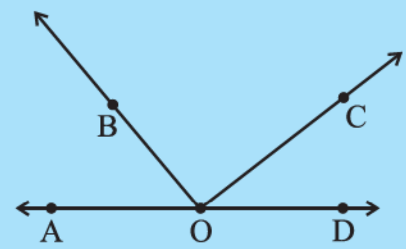

شکل 5.9

2۔ دی گئی تصویر 5.10 میں کیا مندرجہ ذیل زاویے متصل زاویے ہیں۔

(a) $\angle AOB$ اور $\angle BOC$

(b) $\angle BOD$ اور $\angle BOC$

اپنے جواب کی وضاحت بھی کیجیے۔



شکل 5.10

## سوچیے بحث کیجیے اور لکھیے

1۔ کیا دو متصل زاویے تکمیلی زاویے ہو سکتے ہیں؟

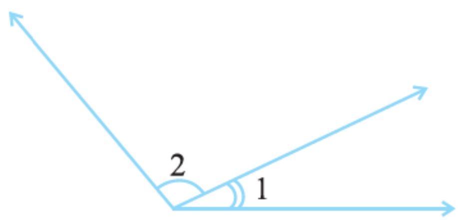
2۔ کیا دو متصل زاویے اتمامی زاویے ہو سکتے ہیں؟

3۔ کیا دو زاویے منفرجہ متصل زاویے ہو سکتے ہیں؟

4۔ کیا ایک زاویہ حادہ ایک زاویہ منفرجہ کا متصل ہو سکتا ہے؟

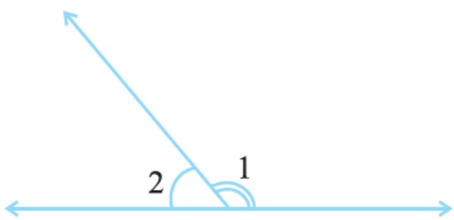
### 5.2.4 خطی جوڑا (Linear Pair)

خطی جوڑا متصل زاویوں کا ایک ایسا جوڑا ہوتا ہے جن کے غیر مشترک بازو مقابل شعاعیں ہوں۔



کیا $\angle 1$، $\angle 2$ خطی جوڑا ہے۔؟ نہیں (کیوں)

(i)



کیا $\angle 2$، $\angle 1$ خطی جوڑا ہے؟ ہاں

(ii)

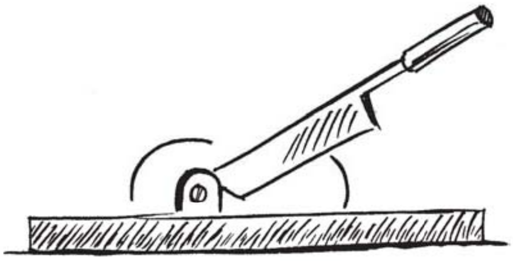
شکل 5.11

اوپر دی گئی تصویر (i) 5.11 میں دیکھیے کہ مقابل شعاعیں (جو کہ $\angle 1$ اور $\angle 2$ کی غیر مشترک اضلاع ہیں) ایک خط بنا رہی ہیں۔ لہٰذا $\angle 1 + \angle 2$ کی پیمائش $180°$ ہوگی۔

خطی جوڑے کے زاویے تکمیلی زاویے ہوتے ہیں۔

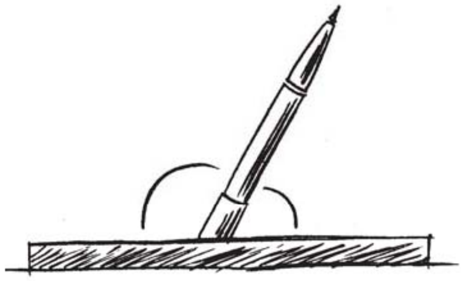
دھیان سے دیکھیے کہ تکمیلی زاویوں کا ایک جوڑا اس وقت خطی جوڑا بنتا ہے جب ان کو ایک دوسرے کے متصل رکھا جاتا ہے۔ کیا آپ اپنے اطراف میں خطی جوڑوں کی کچھ اور مثالیں دیکھتے ہیں۔

سبزی کاٹنے کے ایک بورڈ کو دھیان سے دیکھیے۔ (شکل 5.12)



سبزی کاٹنے والا بورڈ

سبزی کاٹنے والا چاقو، بورڈ کے ساتھ متصل زاویوں کا ایک جوڑا بنا رہا ہے۔



ایک پین اسٹینڈ

پین، اسٹینڈ کے ساتھ متصل زاویوں کا ایک جوڑا بنا رہا ہے

شکل 5.12

## سوچیے، بحث کیجیے اور لکھیے

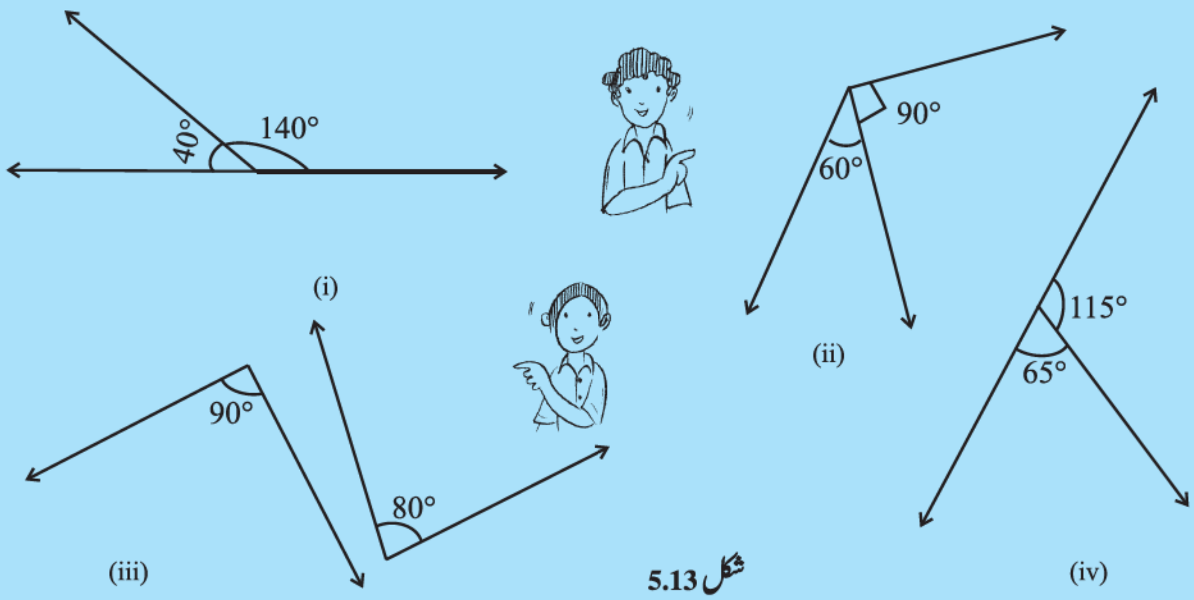
1۔ کیا دو زاویہ حادہ ایک خطی جوڑا بنا سکتے ہیں؟

2۔ کیا دو زاویہ منفرجہ کا ایک خطی جوڑا بنا سکتے ہیں؟

3۔ کیا دو زاویہ قائمہ ایک خطی جوڑا بنا سکتے ہیں؟

## کوشش کیجیے:

جانچ کیجیے کہ مندرجہ ذیل زاویوں کے کون سے جوڑے متصل زاویے بنا رہے ہیں؟




شکل 5.13

## 5.2.5 متقابل راسی زاویے (Vertically Opposite Angles)

دو پنسلیں لیجیے اور ان کو درمیان میں سے ربر بینڈ کی مدد سے باندھ دیجیے (تصویر 5.14) تصویر میں بنے چار زاویوں 3∠ ,2∠ ,1∠ اور 4∠ کو دیکھیے۔

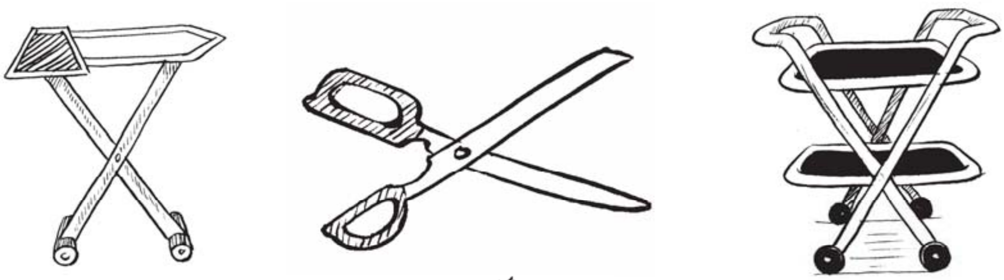
شکل 5.14

1∠، کا 3∠ متقابل راس ہے۔

2∠ اور 4∠ کا کا متقابل راس ہے۔

ہم زاویے 1∠ اور 3∠ کو متقابل راس زاویوں کا ایک جوڑا کہہ سکتے ہیں۔ کیا آپ متقابل راس زاویوں کے دوسرے جوڑے کا نام بتا سکتے ہیں؟ کیا 1∠، 3∠ کے برابر ہے؟ کیا 2∠، 4∠ کے برابر ہے؟

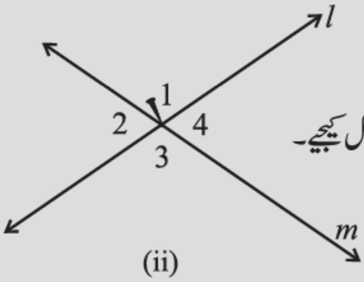
اس کی جانچ کرنے سے پہلے آیئے ہم اصل زندگی میں متقابل راسی زاویوں کی کچھ مثالیں دیکھتے ہیں۔ (شکل 5.15)


شکل 5.15

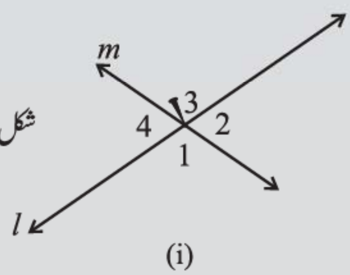
### خود کریں

دو خطوط l اور m کھینچیے جو کہ ایک دوسرے کو ایک ہی نقطہ پر کاٹیں اب آپ تصویر (5.16) میں دکھائے گئے 3∠ ,2∠ ,1∠ اور 4∠ کی طرح زاویوں پر نشان لگائیں آر پار دکھائی نے والے کاغذ پر تصویر کی ایک نقل بنا لیجیے۔

اب نقل والے کاغذ کو اصل تصویر پر اس طرح رکھیے کہ 1∠، 1∠ پر ہی پڑے، 2∠، 2∠ پر ہی پڑے وغیرہ نقطہ تقاطع پر ایک پن لگا دیجیے۔ اب نقل والے کاغذ کو 180o کے زاویے سے گھمائیے۔ کیا خطوط پھر سے ایک بار منطبق ہو رہے ہیں۔




شکل 5.16 (i) کو گھما کر شکل 5.16 (ii) حاصل کیجیے۔




شکل 5.16

آپ نے پایا کہ 1∠ اور 3∠ نے اپنے مقام آپس میں بدل لیے ہیں۔ اور اسی طرح 2∠ اور 4∠ نے بھی یہ سب خطوط کے

مقاماتِ کو منتشر کیے بنا ہی ہوا ہے۔ لہٰذا $\angle 3 = \angle 1$ اور $\angle 4 = \angle 2$

ہم نے یہ نتیجہ اخذ کیا کہ **جب دو خطوط ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں تو بننے والے متقابل راس زاویے آپس میں برابر ہوتے ہیں۔**

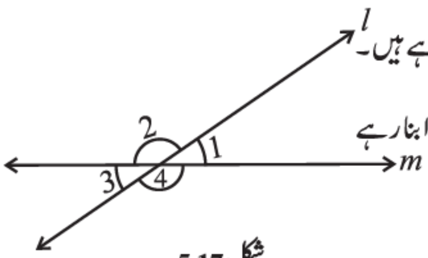
آیئے اب ہم اس کو جیومیٹری کی مدد سے ثابت کرتے ہیں۔

مان لیجیے دو خطوط l اور m میں

ہم اس نتیجہ پر منطقی استدلال کی مدد سے پہنچیں گے۔

مان لیجیے l اور m دو خطوط ہیں جو ایک دوسرے کو نقطہ O پر کاٹتے ہیں اور $\angle 1$، $\angle 2$، $\angle 3$ اور $\angle 4$ کے بنا رہے ہیں۔

ہم ثابت کرنا چاہتے ہیں $\angle 1 = \angle 3$ اور $\angle 2 = \angle 4$




شکل 5.17

اب $\angle 1 = 180^\circ - \angle 2$ ( کیونکہ $\angle 1$ اور $\angle 2$ خطی زاویوں کا ایک جوڑا بنا رہے ہیں۔

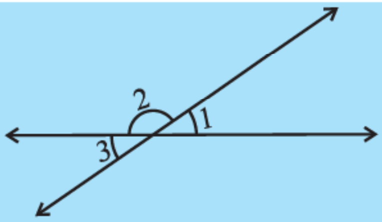
اس لیے $(\angle 1+\angle 2=180^\circ)$ (i)

اسی طرح، $\angle 3 = 180^\circ - \angle 2$ ( کیونکہ $\angle 2$ اور $\angle 3$ خطی زاویوں کا ایک جوڑا بنا رہے ہیں۔ اس لیے، $(\angle 3=180^\circ-\angle 2)$ (ii)

اس لیے $\angle 3 = \angle 1$ [(i) اور (ii) کی مدد سے]

اس طرح ہم $\angle 4 = \angle 2$ کو بھی ثابت کر سکتے ہیں (کوشش کریں!)

## کوشش کیجیے:




1۔ دی گئی تصویر میں، اگر $\angle 1=30^\circ$ ہے تو $\angle 2$ اور $\angle 3$ معلوم کیجیے۔

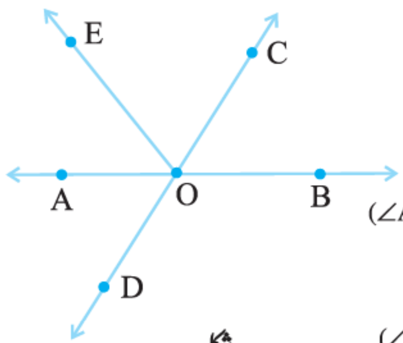
2۔ اپنے اطراف سے متقابل راس زاویوں کی ایک مثال دیجیے۔

**مثال 1** تصویر (5.18) میں پہچانیے

(i) متصل زاویوں کے پانچ جوڑے

(ii) تین خطی جوڑے

(iii) متقابل راس زاویوں کے دو جوڑے۔




شکل 5.18

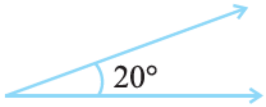
**حل** (i) متصل زاویوں کے پانچ جوڑے ہیں۔ $(\angle AOE, \angle EOC)$, $(\angle EOC, \angle COB)$, $(\angle AOC, \angle COB)$, $(\angle COB, \angle BOD)$, $(\angle EOB, \angle BOD)$

(ii) خطی جوڑے ہیں۔ $(\angle AOE, \angle EOB)$, $(\angle AOC, \angle COB)$, $(\angle COB, \angle BOD)$

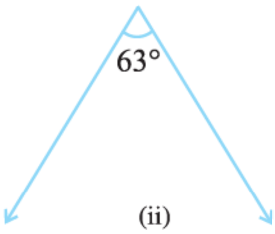
(iii) متقابل راس زاویے ہیں۔ $(\angle COB, \angle BOD)$ اور $(\angle AOC, \angle BOD)$

## مشق 5.1

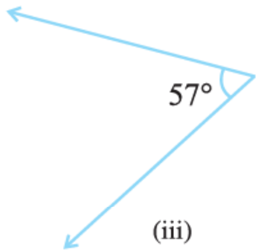
1۔ مندرجہ ذیل میں ہر ایک کے لیے تتمہ معلوم کیجیے۔




(i)

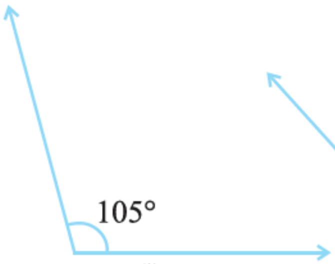



(ii)

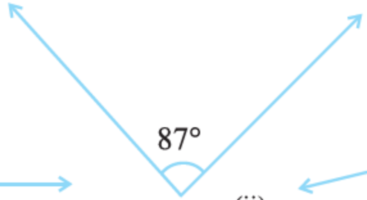



(iii)

2۔ مندرجہ ذیل میں ہر ایک کے لیے تکملہ بنایئے۔




(i)




(ii)

(iii)

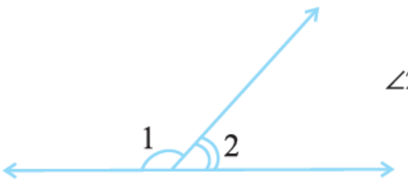
3۔ زاویوں کے دیے گئے مندرجہ ذیل جوڑوں میں سے اتمائی اور تکمیلی زاویوں کو پہچانیے۔

(i) 65°, 115° (ii) 63°, 27° (iii) 112°, 68°

(iv) 130°, 50° (v) 45°, 45° (vi) 80°, 10°

4۔ وہ زاویہ بنایئے جو اپنے تمہ کے برابر ہو۔

5۔ وہ زاویہ بنایئے جو اپنے تکملیہ کے برابر ہو۔

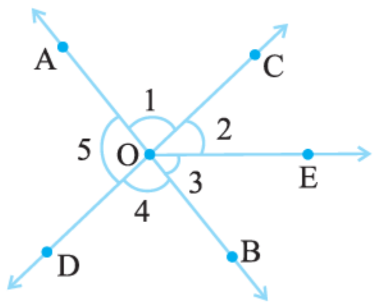



6۔ دی گئی تصویر میں 1∠ اور 2∠ تکمیلی زاویے ہیں اگر 1∠ کو کم کیا جائے تو 2∠ میں تبدیلی آئے گی تاکہ دونوں زاویے تکمیلی زاویے بنے رہے ہیں۔

7۔ کیا دو زاویے تکمیلی زاویے ہو سکتے ہیں اگر دونوں (i) حادہ ہوں؟ (ii) منفرجہ ہوں؟ (iii) قائمہ ہوں؟

8۔ ایک زاویہ 45° سے بڑا ہے۔ کیا یہ 45° سے بڑے، 45° سے چھوٹے یا 45° کے برابر زاویے کا اتمائی زاویہ ہو سکتا ہے۔

9۔ سامنے دی گئی تصویر میں:




(i) کیا 1∠، 2∠ کا متصل ہے؟

(ii) کیا AOC∠، AOE∠ کا متصل ہے؟

(iii) کیا COE∠ اور EOD∠ خطی جوڑا بنا رہے ہیں؟

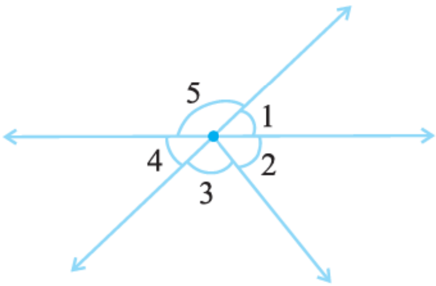
(iv) کیا BOD∠ اور DOA∠ تکمیلی جوڑا بنا رہے ہیں؟

(v) کیا 1∠، 4∠ کا متقابل راسی زاویہ ہے؟

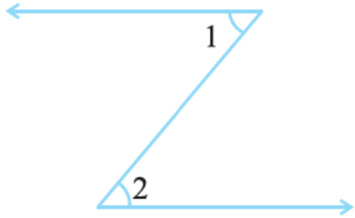
(vi) 5∠ کا متقابل راسی زاویہ کون سا ہے؟

10۔ بتائیے کون سے زاویے ہیں:

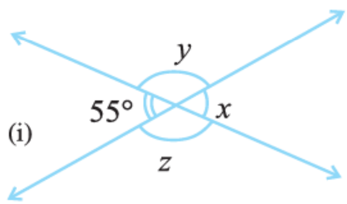
(i) متقابل راسی زاویے (ii) خطی جوڑے

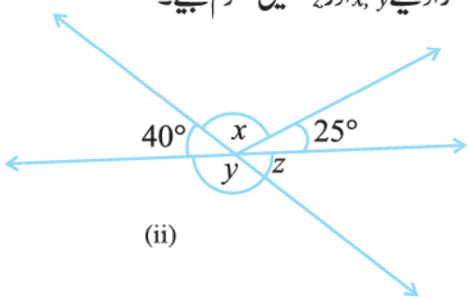



11۔ مندرجہ ذیل تصویر میں کیا ∠1، ∠2 کا متصل زاویہ ہے۔ کیا وجہ بتائیے۔




12۔ زاویے $x, y$ اور $z$ قیمتیں معلوم کیجیے۔




13۔ خالی جگہیں بھریے۔

(i) اگر دو زاویے اتمائی زاویے ہیں تو ان کی پیمائش کا جوڑ ہے ________

(ii) اگر دو زاویے تکمیلی زاویے ہیں تو ان کی پیمائش کا جوڑ ہے ________

(iii) خطی جوڑا بنانے والے دو زاویے ہیں ________

(iv) اگر دو متصل زاویے تکمیلی ہیں تو وہ بتاتے ہیں ایک ________

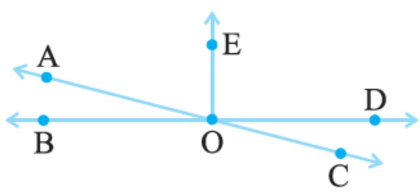
(v) اگر دو خطوط ایک دوسرے کو ایک نقطہ پر کاٹتے ہیں تو متقابل راس زاویے ہمیشہ ________ ہوتے ہیں۔

(vi) اگر دو خطوط ایک دوسرے کو ایک نقطہ پر کاٹتے ہیں اور اگر متقابل راس زاویوں کا ایک جوڑا حادہ زاویہ کا ہے تو دوسرا جوڑا ________ ہوگا۔

14۔ سامنے دی گئی تصویر میں زاویوں کے مندرجہ ذیل جوڑے بنائیے۔

(i) منفرجہ متقابل راس زاویے۔

(ii) متصل اتمائی زاویے۔



(iii) برابر تکمیلی زاویے۔

(iv) نابرابر تکمیلی زاویے۔

(v) ایسے متصل زاویے جو کہ خطی جوڑ انہیں بنا رہے ہوں۔

## 5.3 خطوط کے جوڑے (Pais of Lines)

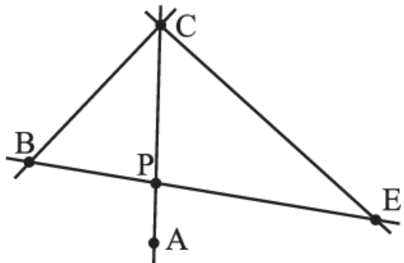
### 5.3.1 قطع کرنے والے خطوط (Intersecting Lines)

اپنے اسٹینڈ پر کھڑا تختہ سیاہ، قطعہ خطوط سے بننے والے حرف y اور دروازے یا کھڑکی جالی (تصویر پر 5.19)۔ ان سب میں کیا مشترک ہے؟ یہ **قطع کرنے والے خطوط** کی مثالیں ہیں۔

دو خطوط l اور m ایک دوسرے کا قطع کرتے ہیں اگر ان میں ایک نقطہ مشترک ہوتا ہے اور اس نقطۂ مشترک کو **نقطۂ تقاطع** کہتے ہیں۔

شکل 5.19

## سوچیے، بحث کیجیے اور لکھیے




شکل 5.20

تصویر 5.20 میں AC اور BE ایک دوسرے کو P پر کاٹ رہے ہیں۔

AC اور BC ایک دوسرے کو C پر کاٹ رہے ہیں۔ AC اور EC ایک دوسرے کو C پر کاٹ رہے ہیں۔ قطع کرنے والے خطوط کے دس اور جوڑے ڈھونڈ ھنے کی کوشش کیجیے۔

کیا یہ ضروری ہے کہ دو خط یا دو قطعہ خط ایک دوسرے کو کاٹیں؟ کیا آپ تصویر میں قطعہ خط کے دو ایسے جوڑے بتا سکتے ہیں جو ایک دوسرے کو قطع نہ کرتے ہوں۔

کیا دو خط ایک دوسرے کو ایک نقطہ سے زیادہ نقطوں پر کاٹ سکتے ہیں؟ اس کے بارے میں سوچیے۔

## کوشش کیجیے:

1۔ اپنے آس پاس سے دو ایسی مثالیں ڈھونڈیے جہاں دو خطوط ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ پر قطع کر رہے ہوں۔

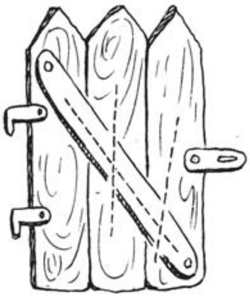
2۔ کسی مساوی الاضلاع مثلث کے تینوں راسوں پر قطع کرنے والے خطوط سے بننے والے زاویوں کی پیمائش بتائیے۔

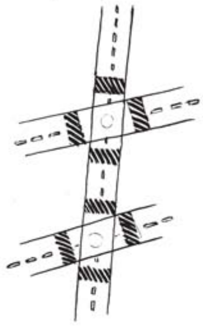
3۔ ایک مستطیل بنائیے اور اس کے چاروں راسوں پر قطع کرنے والے خطوط سے بننے والے زاویوں کی پیمائش کیجیے۔

4۔ اگر دو خطوط ایک دوسرے کو کاٹ رہے ہوں تو کیا وہ ہمیشہ ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ پر کاٹیں گے؟

## 5.3.2 خط قاطع (Transversal)

آپ نے اکثر کسی سڑک کو دو یا دو سے زیادہ سڑکوں کو کاٹ کر گزرتے ہوئے دیکھا ہوگا، یا ایک ریلوے لائن کو دوسری بہت سی لائنوں کو کاٹ کر گزرتے دیکھا ہوگا۔ ان سے خط قاطع کا تصور ملتا ہے۔

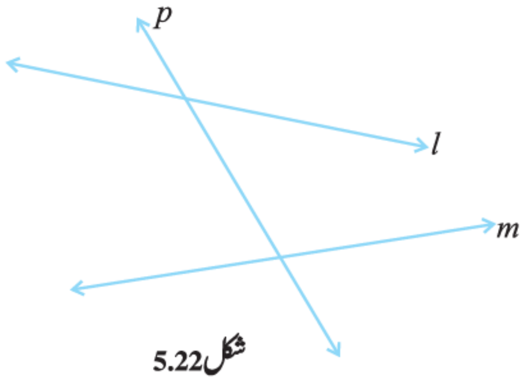

(i)


(ii)

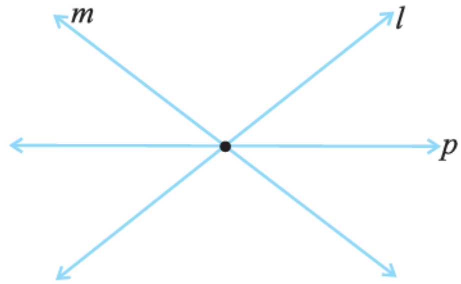
شکل 5.21

ایک خط جو دو یا دو سے زیادہ خطوط کو **مختلف** نقطوں پر کاٹتا ہے **خط قاطع** کہلاتا ہے۔

تصویر 5.22 میں خطوط l اور m کے لیے p ایک خط قاطع ہے



شکل 5.22



شکل 5.23

تصویر 5.23 میں خط قاطع نہیں ہے حالانکہ یہ دو خطوط l اور m کو کاٹ رہا ہے کیا آپ بتا سکتے ہیں کیوں؟

### کوشش کیجیے:

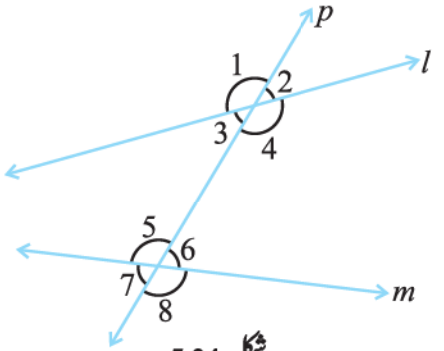
1۔ مان لیجیے دو خطوط دیے گئے ہیں۔ ان خطوط کے لیے کتنے خط قاطع کھینچ سکتے ہیں؟

2۔ اگر ایک خط تین خطوط کے لئے قاطع ہے تو کل کتنے نقطہ تقاطع ہوں گے؟

3۔ اپنے آس پاس کچھ قاطع خطوط کو پہچاننے کی کوشش کیجیے۔

## 5.3.3 خط قاطع سے بننے والے زاویے
## (Angles made by a Transversal)

تصویر 5.24 میں آپ نے خطوط l اور m کو قاطع p سے کٹتے ہوئے دیکھا ہے۔ آٹھ زاویے جن کے نام 1 سے 8 تک رکھے گئے ہیں، کے کچھ خاص نام بھی ہیں۔



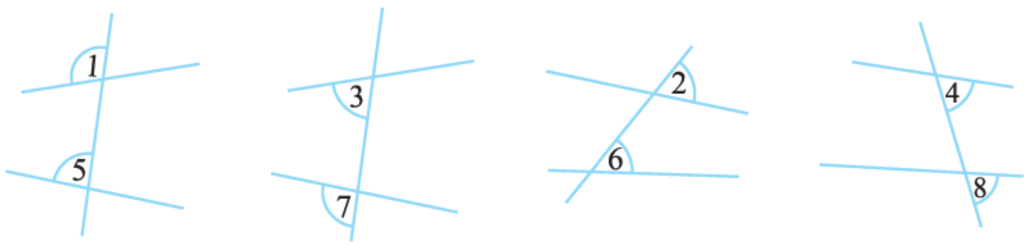

شکل 5.24

| | | |
|---|---|---|
| (1) | اندرونی زاویے/داخلی زاویے (Interior angles) | $\angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6$ |
| (2) | باہری زاویے/بیرونی زاویے (Exterior angles) | $\angle 1, \angle 2, \angle 7, \angle 8$ |
| (3) | نظیری زاویوں کے جوڑے (Pairs of corresponding angles) | $\angle 1$ اور $\angle 5$, $\angle 2$ اور $\angle 6$, $\angle 3$ اور $\angle 7$, $\angle 4$ اور $\angle 8$ |
| (4) | متبادل داخلی زاویوں کے جوڑے (Pairs of alternate interior angles) | $\angle 3$ اور $\angle 6$, $\angle 4$ اور $\angle 5$ |
| (5) | متبادل بیرونی زاویوں کے جوڑے (Pairs of alternate exterior angles | $\angle 1$ اور $\angle 8$, $\angle 2$ اور $\angle 7$ |
| (6) | قاطع کے ایک ہی جانب بننے والے داخلی زاویوں کے جوڑے Pairs of interior angles on the same side of the transversal) | $\angle 3$ اور $\angle 5$, $\angle 4$ اور $\angle 6$ |

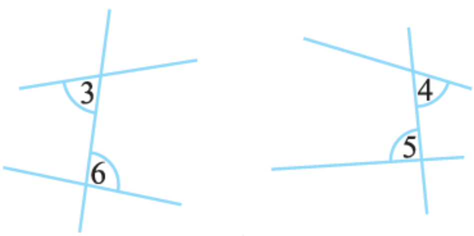
**نوٹ:** نظیری زاویوں (جیسے شکل 5.25 میں $\angle 1$ اور $\angle 5$) میں شامل ہیں:

(i) مختلف راسیں (ii) قاطع کے ایک ہی جانب اور

(iii) دوخطوط کی متعلقہ نظیری حالت (اوپر یا نیچے، دائیں یا بائیں) میں ہیں۔




شکل 5.25




شکل 5.26

متبادل داخلی زاویے (جیسا کہ تصویر 5.26 میں $\angle 3$ اور $\angle 6$ ہیں)

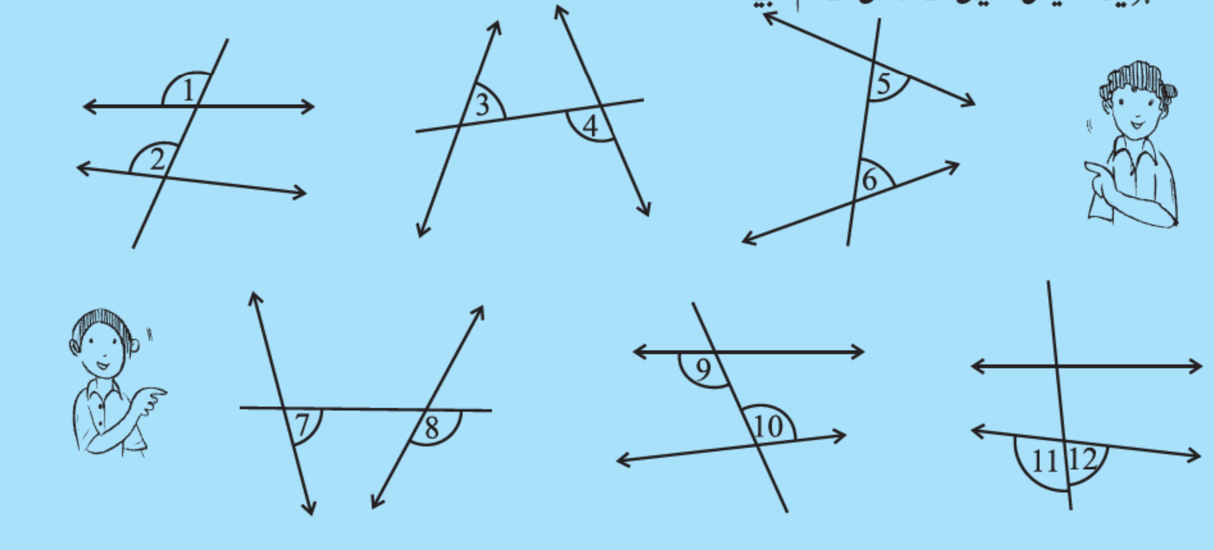
(i) مختلف راسیں ہیں۔

(ii) قاطع کے متقابل اطراف میں ہیں۔اور

(iii) دوخطوط کے درمیان میں ہیں۔

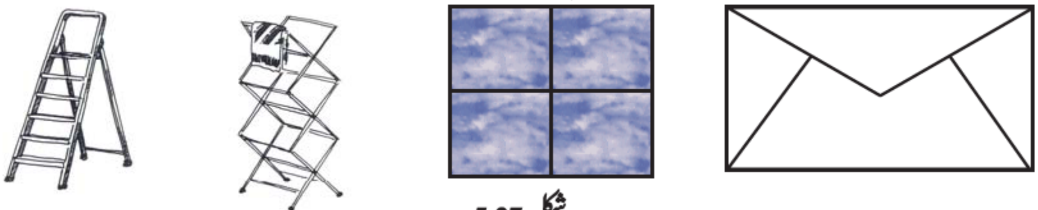
## کوشش کیجیے:

ہر ایک تصویر میں زاویوں کے جوڑوں کے نام دیجیے۔




### 5.3.4 متوازی خطوط کا قاطع (Transversal of Parallel Lines)

کیا آپ کو یاد ہے کہ متوازی خطوط کون سے خطوط ہوتے ہیں؟ یہ ایک مستوی میں بننے والے ایسے خطوط ہوتے ہیں جو کہیں پر بھی نہیں ملتے ہیں۔ کیا آپ مندرجہ ذیل تصاویر میں متوازی خطوط کو پہچان سکتے ہیں؟ (شکل 5.25)



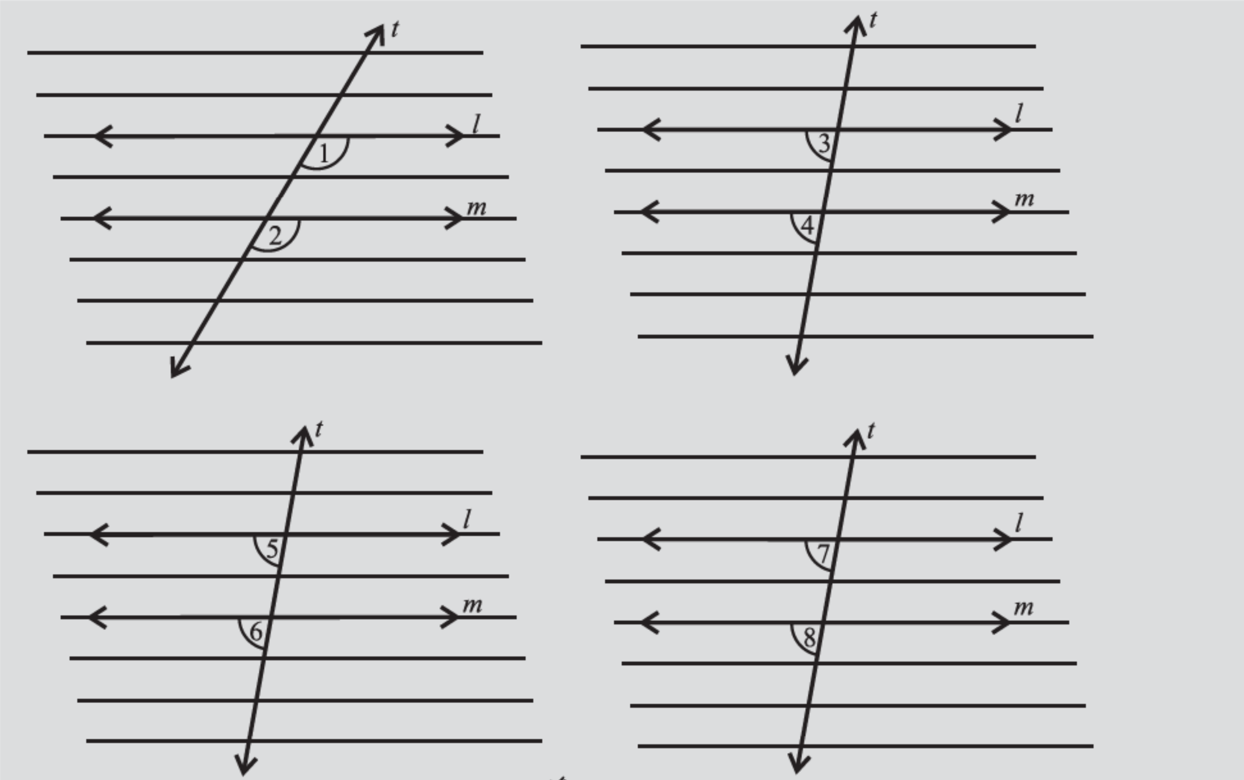
شکل 5.27

متوازی خطوط کے قاطع بہت سے دلچسپ نتائج سامنے لاتے ہیں۔

## خود کریں

ایک لائن دار صفحہ لیجیے۔ (گہرے رنگ سے) دو متوازی خطوط $l$ اور $m$ بنائیے۔ خطوط $l$ اور $m$ پر ایک قاطع t بنائیے۔ دکھائے گئے طریقے سے $\angle 1$ اور $\angle 1$ کی نشاندہی کیجیے۔ (تصویر (i)5.28) بنائی گئی تصویر پر ایک شفاف کاغذ رکھیے خطوط $l$، $m$ اور $t$ کی نقل اتاریے۔ $t$ کے سہارے شفاف کاغذ کو دھیرے دھیرے کھسکائیے جب تک کہ $l$ اور $m$ نہ مل جائیں۔ آپ نے دیکھا کہ چھاپی گئی تصویر کا $\angle 1$، ابتدائی تصویر کے $\angle 2$ پر منطبق ہوتا ہے۔ دراصل آپ مندرجہ ذیل میں دیے گئے سبھی نتائج مشابہ نقل اتارنے اور کھسکانے والی سرگرمی کے ذریعے دیکھ سکتے ہیں۔

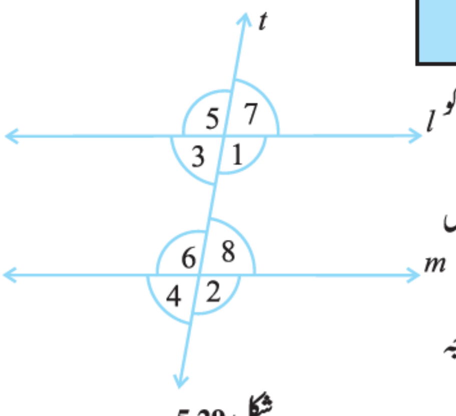
(i) $\angle 1 = \angle 2$ (ii) $\angle 3 = \angle 4$ (iii) $\angle 5 = \angle 6$ (iv) $\angle 7 = \angle 8$




شکل5.28

یہ سرگرمی مندرجہ ذیل حقیقت کو ظاہر کر رہی ہے۔

اگر دو متوازی خطوط کو ایک قاطع کاٹ رہا ہے تو نظیری زاویوں کے ہر جوڑے کی پیائش آپس میں برابر ہوگی۔




شکل 5.29

ہم اس نتیجہ کی مدد سے ایک اور دلچسپ نتیجہ اخذ کرتے ہیں تصویر 5.29 کو دیکھیے۔

جب متوازی خطوط $l$ اور $m$ کو $t$ کاٹے گا تو $\angle 7 = \angle 3$ ہوگا۔ (متقابل راس زاویے) لیکن $\angle 8 = \angle 7$ نظیری زاویے) اس لیے $\angle 8 = \angle 3$

بالکل اسی طرح آپ دکھا سکتے ہیں کہ $\angle 6 = \angle 1$ ہے۔ لہٰذا ہمیں مندرجہ ذیل نتیجہ حاصل ہوگا۔

اگر دو متوازی خطوط کو ایک قاطع کاٹتا ہے تو متبادل داخلی زاویوں کا ہر جوڑا آپس میں برابر ہوگا۔

یہ دوسرا نتیجہ ایک اور دلچسپ خصوصیت کی طرف لے جاتا ہے۔ ایک بار پھر شکل 5.29 سے

$\angle 3 + \angle 1 = 180°$ ($\angle 1$ اور $\angle 3$ خطی جوڑا بناتے ہیں)

$\angle 6 = \angle 1$ (متبادل داخلی زاویوں کا ایک جوڑا) اس لئے ہم کہہ سکتے ہیں

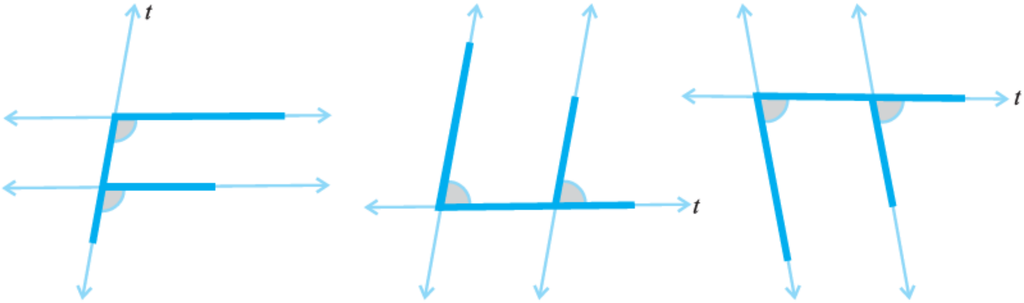
$\angle 3 + \angle 6 = 180°$

اسی طرح $\angle 1 + \angle 8 = 180°$

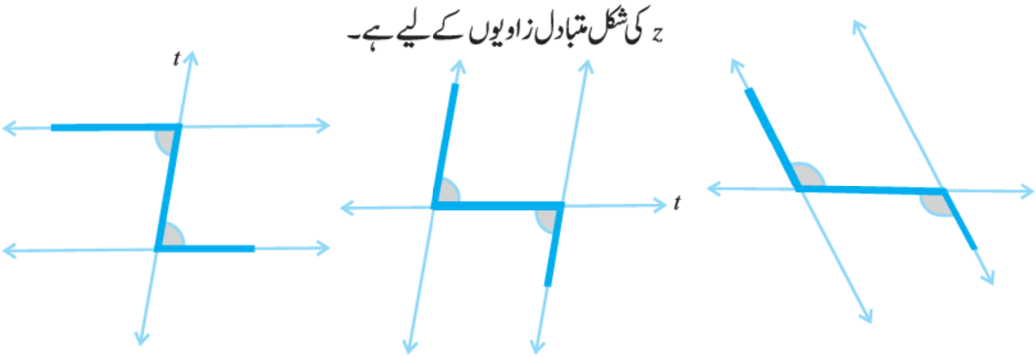
> اگر دو متوازی خطوط کو کوئی ایک قاطع کاٹ رہا ہے تو قاطع کے ایک ہی جانب کے داخلی زاویے تکمیلی ہوتے ہیں۔

آپ بہت آسانی سے ان نتائج کو یاد کر سکتے ہیں اگر آپ متعلقہ اشکال کو دیکھ سکتے ہیں۔

F کی شکل نظیری زاویوں کے لیے ہے۔



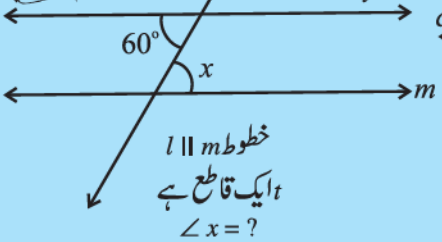

z کی شکل متبادل زاویوں کے لیے ہے۔

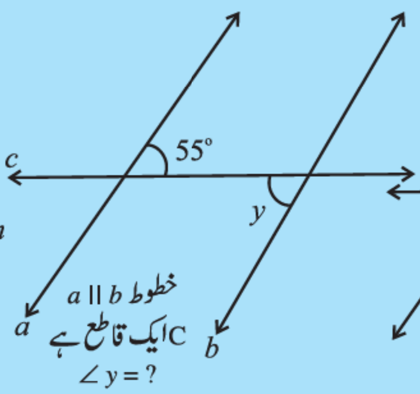


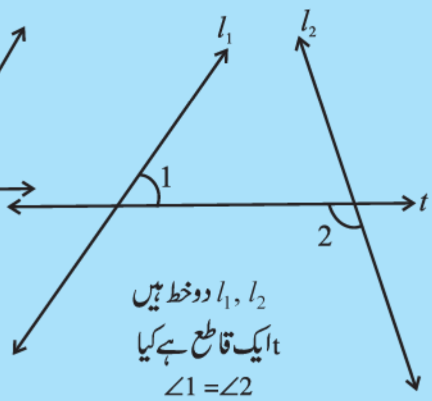

## خود کریں

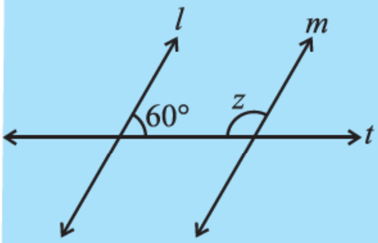
متوازی خطوط کا ایک جوڑا اور ایک قاطع بنائیے۔ اوپر دیے گئے نتائج کو جانچنے کے لیے زاویوں کی پیمائش کیجیے۔

## کوشش کیجیے:



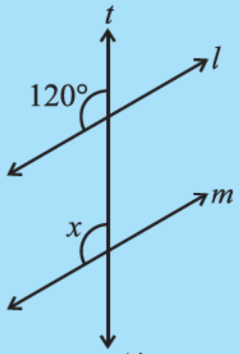






خطوط $l \parallel m$

$t$ ایک قاطع ہے

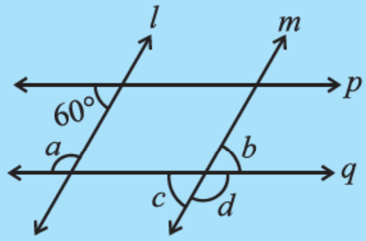
$\angle z = ?$




خطوط $l \parallel m$;

$t$ ایک قاطع ہے

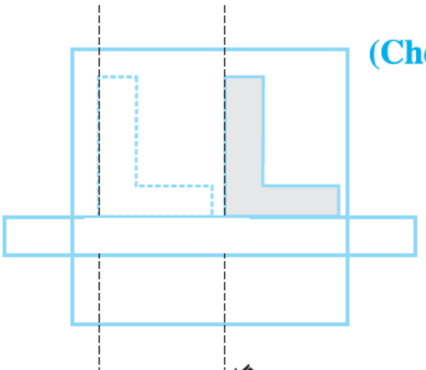
$\angle x = ?$



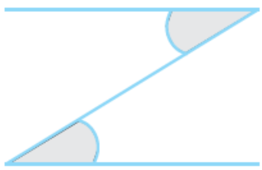

خطوط $l \parallel m, \; p \parallel q$;

$a, b, c, d$ معلوم کیجیے

## 5.4 متوازی خطوط کی جانچ (Checking for Parallel Lines)



شکل 5.30



شکل 5.31

اگر دو خطوط متوازی ہیں تو آپ جانتے ہیں کہ ایک خط قاطع کے بننے سے ہمارے سامنے نتائج آتے ہیں۔ نظیری زاویوں کے جوڑے برابر ہوتے ہیں، متبادل داخلی زاویے برابر ہیں۔ اور قاطع کے ایک ہی طرف بننے والے داخلی زاویے تکمیلی ہوتے ہیں۔

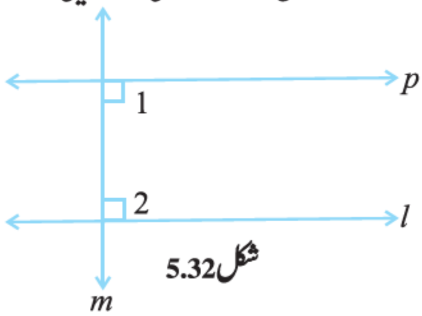
جب دو خطوط دیے جاتے ہیں تو کیا یہ جانچنے کا کوئی طریقہ ہے کہ وہ خطوط متوازی ہیں یا نہیں ؟ آپ کو اس ہنر کی ضرورت بہت سے روز مرہ حالات میں پڑ سکتی ہے۔

دستاویز نویس، بڑھئی کا مربع اور ایک سیدھا کنارہ (فِتا) کے استعمال سے قاطع خطوط بناتا ہے (تصویر 5.30) اس کا دعویٰ ہے کہ خطوط متوازی ہیں۔ کیسے؟

کیا آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس نے نظیری زاویوں کو برابر رکھا ہے؟ (یہاں قاطع کون سا ہے؟) لہٰذا، جب ایک قاطع دو خطوط کو اس طرح کاٹتا ہے کہ نظیری زاویوں کے جوڑے برابر ہوں تو وہ خطوط متوازی ہوتے ہیں۔

حرف z کو دیکھیے (تصویر 5.31 میں) یہاں افقی خطوط متوازی ہیں۔ کیونکہ متبادل زاویے برابر ہیں۔

جب ایک قاطع دو خطوط کو اس طرح کاٹتا ہے کہ متبادل داخلی زاویوں کے جوڑے برابر ہوں تو خطوط متوازی ہوتے ہیں۔




شکل 5.32

ایک خط $l$ بنائیے (تصویر 5.32)

ایک خط p بنائیے جو کہ m پر عمودی ہو۔

ایک خط m بنائیے جو خط l پر عمودی ہو۔

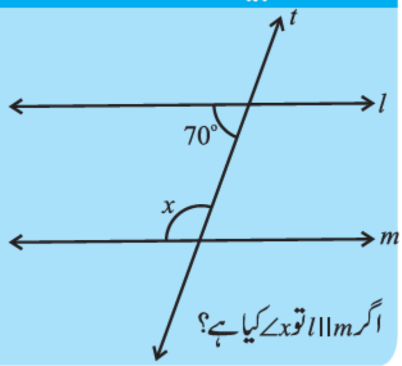
لہٰذا، p، l پر کھینچے گئے عمودی کے عمودی ہے۔

آپ نے پایا p||l کیسے؟ یہ اس لئے کہ آپ نے p کو اس طرح بنایا کہ

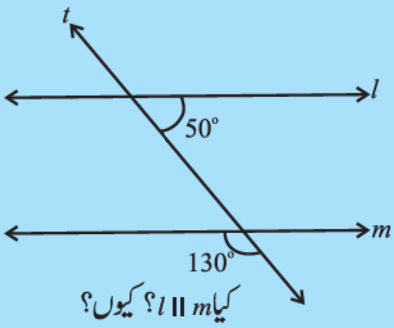
$\angle 1 + \angle 2 = 180^{o}$

**لہٰذا، جب ایک قاطع دو خطوط کو اس طرح کاٹتا ہے کہ قاطع کے ایک ہی سمت پر بننے والے داخلی زاویے تکمیلی ہوں تو یہ خطوط متوازی ہوں گے۔**

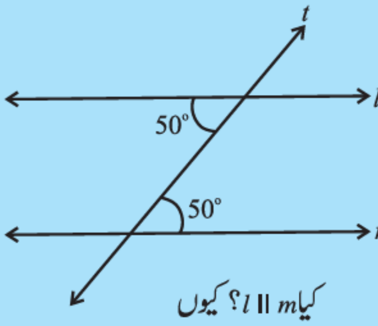
## کوشش کیجیے:




اگر $m \parallel l$ تو $\angle x$ کیا ہے؟




کیا $m \parallel l$؟ کیوں؟




کیا $m \parallel l$؟ کیوں

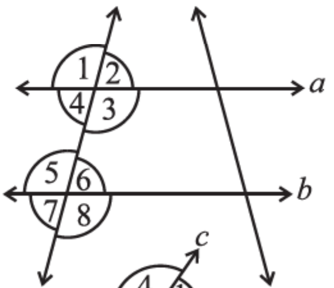
## مشق 5.2

**1۔** مندرجہ ذیل بیانات کے لیے استعمال کی گئی خصوصیت لکھیے۔

(i) اگر $a \parallel b$، تو $\angle 1 = \angle 5$

(ii) اگر $\angle 4 = \angle 6$، تو $a \parallel b$

(iii) اگر $\angle 4 + \angle 5 = 180^{\circ}$ تو $a \parallel b$



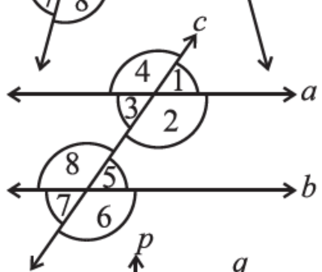

**2۔** برابر میں دی گئی تصویروں میں بتائیے:

(i) نظیری زاویوں کا جوڑا

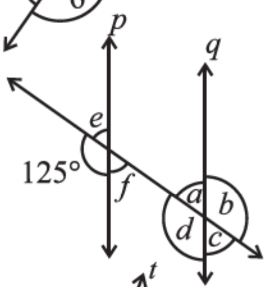
(ii) متبادل داخلی زاویوں کا جوڑا

(iii) قاطع کے ایک ہی سمت میں بننے والے داخلی زایوں کا جوڑا

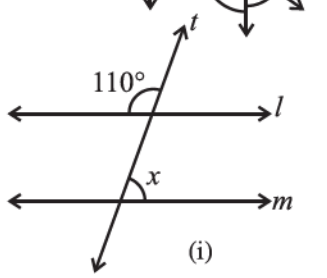
(iv) متقابل راس زاویے۔



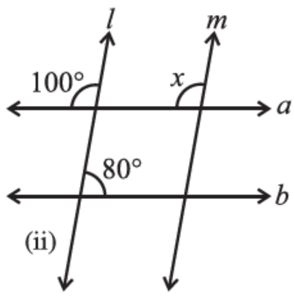

**3۔** برابر میں دی گئی تصویر میں $p \parallel q$، ہے۔ نامعلوم زاویے بتائیے۔



**4۔** مندرجہ ذیل اشکال میں اگر $l \parallel m$ ہے تو $x$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

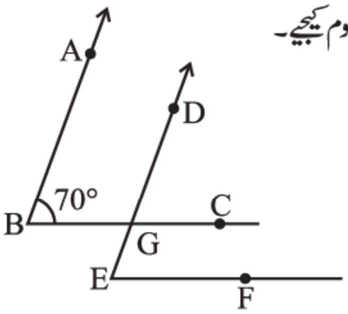



(i)




(ii)

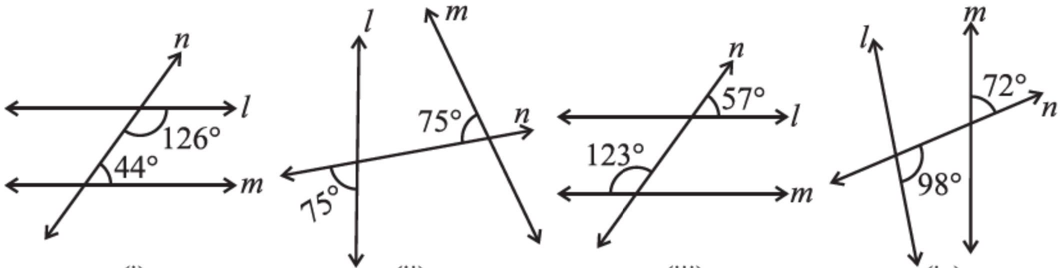
5۔ دی گئی شکل میں دو زاویوں کے بازو متوازی ہیں۔ اگر $\angle ABC = 70^\circ$ ہے تو معلوم کیجیے۔




(i) $\angle DGC$

(ii) $\angle DEF$

6۔ نیچے دی گئی شکل میں فیصلہ کیجیے کہ کیا $l$ اور $m$ متوازی ہیں یا نہیں۔




(i) (ii) (iii) (iv)

## ہم نے کیا سیکھا؟

1۔ ہم نے دہرایا کہ (i) ایک قطعہ خط کے دو آخری نقطے ہوتے ہیں۔

(ii) ایک شعاع کا صرف ایک آخری نقطہ ہوتا ہے۔ اس کا نقطۂ آغاز اور

(iii) ایک خط کے دونوں جانب کوئی آخری نقطہ نہیں ہوتا ہے۔

2۔ جب دو خطوط (یا شعاعیں یا قطعہ خط) ملتے ہیں تو ایک زاویہ بنتا ہے۔

| زاویوں کے جوڑے | بشرط |
|---|---|
| دو اتمامی زاویے | جوڑ 90° کے برابر ہو |
| دو تکمیلی زاویے | جوڑ 180° کے برابر ہو |
| دو متصل زاویے | جس کا ایک راس مشترک ہو اور ایک بازو مشترک ہو۔ لیکن کوئی اندرون مشترک نہ ہو۔ |
| خطی زاویوں کا جوڑا | متصل اور تکمیلی |

3۔ جب دو خطوط $l$ اور $m$ ملتے ہیں تو ہم کہتے ہیں کہ ایک دوسرے کو کاٹ رہے ہیں، جس نقطہ پر وہ ملتے ہیں اس کو نقطہ تقاطع کہتے ہیں۔

جب کاغذ پر ایسے خطوط بنے ہوں جو ایک دوسرے سے نہیں ملتے ہیں چاہے ہم ان کو کتنا ہی بڑھا لیں، انہیں ہم متوازی خطوط کہتے ہیں۔

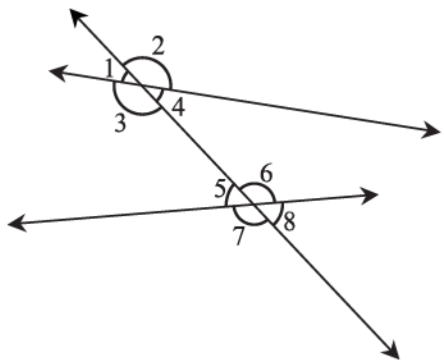
4۔ (i) جب دو خطوط ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں (حرف X کی طرح) تو ہم کو متقابل زاویوں کے دو جوڑے ملتے ہیں۔ ان کو

متقابل راسی زاویے کہتے ہیں۔ ان کی پیمائش آپس میں برابر ہوتی ہے۔

(ii) خط قاطع وہ خط ہوتا ہے جو دو یا زیادہ خطوط کو مختلف نقطوں پر کاٹے۔

(iii) ایک خط قاطع مختلف طرح کے زاویے بناتا ہے۔

(iv) تصویر میں، ہمارے پاس ہیں:




| زاویوں کی قسمیں | دکھائے گئے زاویے |
|---|---|
| داخلی | $\angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6$ |
| باہری | $\angle 1, \angle 2, \angle 7, \angle 8$ |
| نظیری | $\angle 1$ اور $\angle 5$, $\angle 2$ اور $\angle 6$, $\angle 3$ اور $\angle 7$, $\angle 4$ اور $\angle 8$ |
| متبادل داخلی | $\angle 3$ اور $\angle 6$, $\angle 4$ اور $\angle 5$ |
| متبادل بیرونی | $\angle 1$ اور $\angle 8$, $\angle 2$ اور $\angle 7$ |
| ایک ہی سمت پر بننے والے داخلی زاویے | $\angle 3$ اور $\angle 5$, $\angle 4$ اور $\angle 6$ |

(v) جب ایک قاطع دو متوازی خطوط کو کاٹتا ہے تو ہمارے سامنے مندرجہ ذیل دلچسپ نتائج حاصل ہوتے ہیں۔

نظیری زاویوں کے ہر جوڑے کے زاویے آپس میں برابر ہوتے ہیں۔

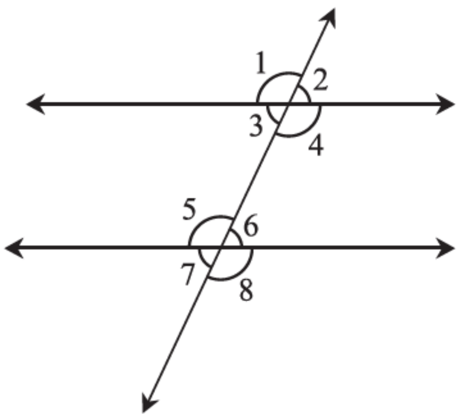
$\angle 1 = \angle 5, \angle 3 = \angle 7, \angle 2 = \angle 6, \angle 4 = \angle 8$

متبادل داخلی زاویوں کے ہر جوڑے کے زاویے آپس میں برابر ہوتے ہیں۔

$\angle 3 = \angle 6, \angle 4 = \angle 5$

خط قاطع کے ایک ہی سمت کے داخلی زاویے تکمیلی زاویے ہوتے ہیں۔

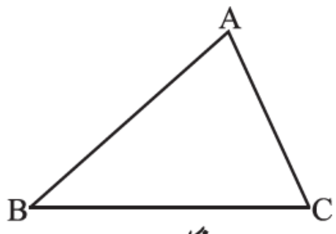
$\angle 3 + \angle 5 = 180°, \angle 4 + \angle 6 = 180°$



باب 6

# مثلث اور اس کی خصوصیات

4714CH06



شکل 6.1

## 6.1 تعارف (Introduction)

آپ نے دیکھا ہے کہ ایک مثلث تین قطعات خط کی ایک سادہ بند شکل ہوتی ہے۔

اس میں تین راسیں تین اضلاع اور تین زاویے ہوتے ہیں۔

یہاں $\Delta ABC$ دیا گیا ہے۔(تصویر 6.1) اس میں

**اضلاع:** $\overline{AB}$، $\overline{BC}$، $\overline{CA}$

**زاویے:** $\angle BAC, \angle ABC, \angle BCA$

**راسیں:** A, B, C

راس A کا متقابل ضلع BC ہے۔ کیا آپ ضلع AB کا متقابل زاویہ بتا سکتے ہیں؟

آپ مثلث کی مختلف قسمیں بھی جانتے ہیں۔

(i) ضلعوں کے اعتبار سے مختلف الاضلاع، مساوی الساقین اور مساوی االاضلاع

(ii) اوپر دیے گئے مثلثوں کی طرح کے کچھ ماڈل کاٹ کر بنائیے۔ اپنے ماڈل کا موازنہ اپنے دوستوں کے ماڈل سے کیجیے۔ اور اس پر بحث کیجیے۔

### کوشش کیجیے:

1۔ $\Delta ABC$ کے 6 حصے لکھیے۔ (یعنی تین اضلاع اور تین زاویے)۔

2۔ لکھیے:

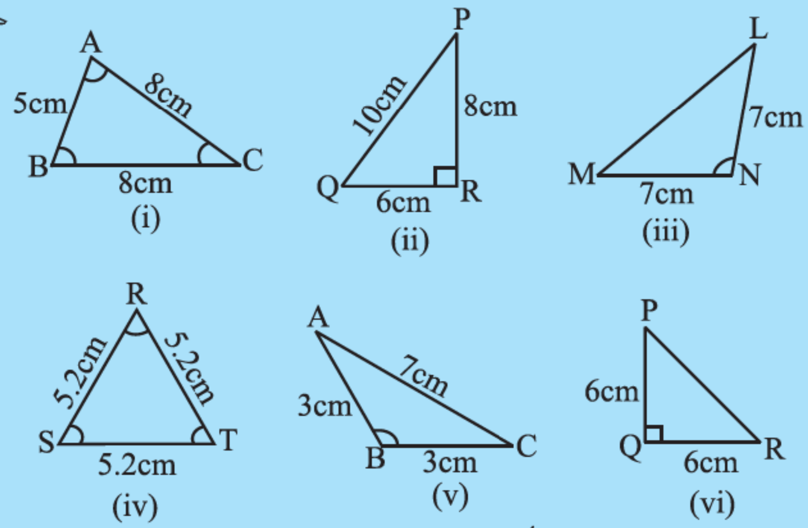
(i) $\Delta PQR$ میں راس Q کا متقابل ضلع۔

(ii) $\Delta LMN$ میں ضلع LM کا متقابل راس۔

3۔ تصویر 6.2 کو دیکھیے ہر مثلث کی درجہ بندی کیجیے۔

(i) ضلعوں کے اعتبار سے

(ii) زاویوں کے اعتبار سے

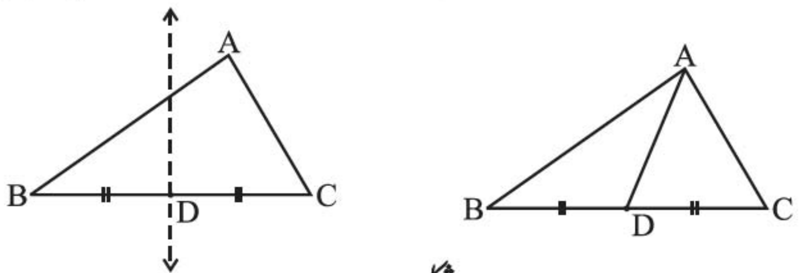



شکل 6.2

آیئے مثلثوں کے متعلق مزید کچھ جانتے ہیں۔

## 6.2 ایک مثلث کے وسطانیے (Medians of a Triangle)

آپ جانتے ہیں کہ ایک دی گئی قطعہ خط کا عمودی ناصف، کاغذ موڑ کر کیسے بنایا جاسکتا ہے۔ ایک کاغذ کا ABC کاٹیے (تصویر 6.3) کوئی بھی ایک ضلع لیجیے۔ مان لیجیے $\overline{BC}$ کاغذ موڑ کر $\overline{BC}$ کا عمودی ناصف بنایئے۔ کاغذ کا موڑ $\overline{BC}$ سے اس کے بیچ کا نقطہ D پر مل رہا ہے۔ $\overline{AD}$ کو ملایئے۔




شکل 6.3

قطعہ خط AD، $\overline{BC}$ کے درمیانی نقطہ کو متقابل راس A سے، ملانے پر، مثلث کا ایک وسطانیہ کہلاتا ہے۔

ضلع $\overline{AB}$ اور $\overline{CA}$ کو دیکھیے اور مثلث کے دو اور وسطانیے معلوم کیجیے۔

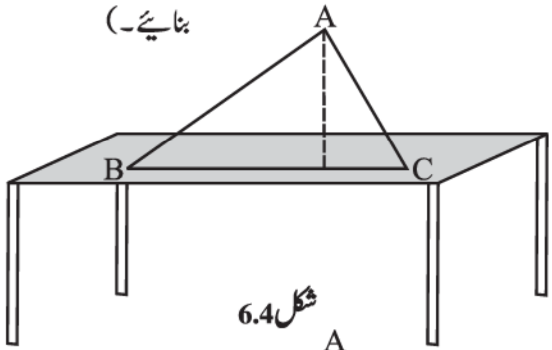
**مثلث کے کسی بھی راس کو اس کے متقابل ضلع کے درمیانی نقطہ سے جوڑنے والے خط کو وسطانیہ کہتے ہیں۔**

## سوچیے، بحث کیجیے اور لکھیے

1۔ ایک مثلث کے کتنے وسطانیے ہوسکتے ہیں؟

2۔ کیا ایک وسطانیہ پوری طرح سے مثلث کے اندر پایا جاتا ہے؟ (اگر آپ کو لگتا ہے کہ یہ درست نہیں ہے تو ایسی کسی حالت کی شکل بنائیے۔)

## 6.3 مثلث کا ارتفاع (Altitudes of a Triangle)

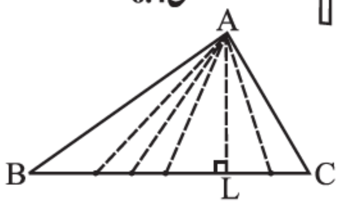


شکل 6.4

گتے کا ایک مثلث نما ABC بنائیے۔ اس کو ایک میز پر کھڑا کر دیجیے۔ مثلث کتنا اونچا ہے؟ یہ اونچائی راس سے قاعدہ BC کے درمیان کا فاصلہ ہے۔

A سے $\overline{BC}$ ہر آپ بہت سے خطوط کھینچ سکتے ہیں (شکل 6.5 دیکھیے)۔ ان میں سے کون سا خط اس کی اونچائی دکھا رہا ہے۔

A سے شروع کر کے سیدھا نیچے $\overline{BC}$ پر آنے والا اور $\overline{BC}$ پر عمود ہوا ایسا قطعۂ خط $\overline{AL}$ اونچائی ظاہر کرتا ہے۔ یہ $\overline{AL}$ مثلث کا **اِرتفاع** ہے۔



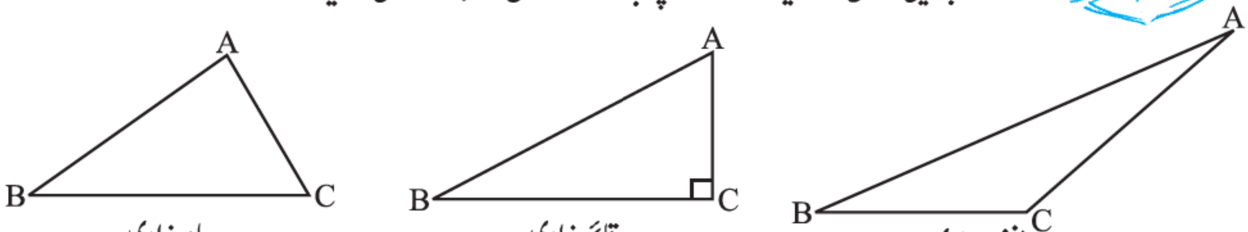
شکل 6.5

کسی ارتفاع کا ایک سرا مثلث کے راس پر ہوتا ہے اور دوسرا سرا متقابل ضلع پر ہوتا ہے۔ ہر راس سے ایک ارتفاع کھینچا جا سکتا ہے۔

### سوچیے، بحث کیجیے اور لکھیے

1۔ ایک مثلث کے کتنے ارتفاع ہو سکتے ہیں؟

2۔ مندرجہ ذیل مثلثوں کے لیے A سے $\overline{BC}$ پر بننے والے ارتفاع کے کچھ رف اسکیچ بنائیے۔




حادہ زاوی (i) | قائمہ زاوی (ii) | منفرجہ زاوی (iii)

شکل 6.6

3۔ کیا کسی مثلث کا ارتفاع اس کے اندرون میں پایا جاتا ہے؟ اگر آپ سمجھتے ہیں کہ یہ درست نہیں ہے تو ایسی صورت حال کو دکھانے لیے ایک رف اسکیچ بنائیے۔

4۔ کیا آپ ایسا کوئی مثلث سوچ سکتے ہیں جس کے دو ارتفاع اس کے دو ضلعے ہوں؟

5۔ کیا کسی مثلث کا ارتفاع اور وسطانیہ ایک ہو سکتا ہے؟ (اشارہ: سوال نمبر 4 اور 5 کے لیے مثلث کی ہر قسم میں ارتفاع بنائیے اور جانچیے)۔

### خود کریں

درج ذیل میں ہر ایک کے کئی اشکال کاٹیے۔

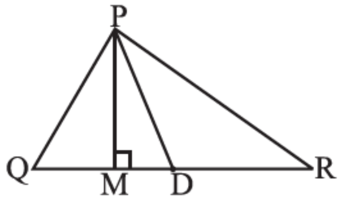
(i) مساوی الاضلاع مثلث (ii) مساوی الساقین مثلث

(iii) مختلف الاضلاع مثلث

ان کے وسطانیے اور ارتفاع معلوم کیجیے۔ کیا آپ نے ان میں کوئی خاص بات دیکھی؟ اپنے دوستوں سے اس بارے میں بات کیجیے۔

## مشق 6.1

1۔ $\Delta PQR$، میں $\overline{QR}$ کا درمیانی نقطہ D ہے۔




$\overline{PM}$ ____________ ہے۔

PD ____________ ہے۔

کیا $QM = MR$ ہے؟

2۔ مندرجہ ذیل کی رف شکلیں بنائیے۔

(a) $\Delta ABC$، $\overline{BE}$ ایک وسطانیہ ہے۔

(b) $\Delta PQR$ میں $\overline{PR}$ اور $\overline{PQ}$ مثلث کے ارتفاع ہیں۔

(c) $\Delta XYZ$ میں، YL مثلث کے بیرون میں ایک ارتفاع ہے۔

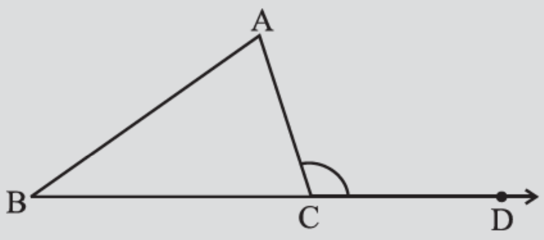
3۔ ڈائیگرام بنا کر تصدیق کیجیے کہ کیا کسی مساوی الساقین مثلث کا ارتفاع اور وسطانیہ ایک سے ہو سکتے ہیں۔

## 6.4 مثلث کا بیرونی زاویہ اور اس کی خصوصیت

## (Exterior Angle of a Triangle and its Property)

### خود کریں

1۔ $\Delta ABC$ بنائیے اور اس کے کسی ایک ضلع، مان لیجیے BC۔ کو تصویر 6.7 میں دکھائے گئے طریقے سے بڑھائیے۔ نقطہ C پر بنے زاویہ ACD پر دھیان دیجیے۔ یہ زاویہ $\Delta ABC$ کے بیرون میں واقع ہے۔ اس کو ہم $\Delta ABC$ کے راس C پر بننے والا **بیرونی زاویہ** کہتے ہیں۔

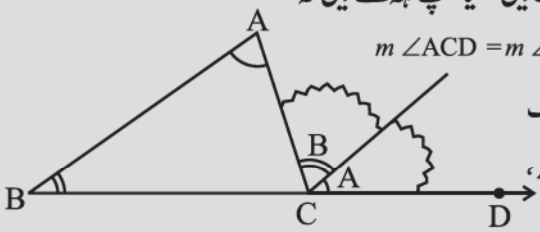



شکل 6.7

صاف ظاہر ہوتا ہے کہ $\angle BCA$، $\angle ACD$ کا متصل زاویہ ہے۔ مثلث کے باقی زاویوں کے نام $\angle A$ اور $\angle B$ ہیں اور ان زاویوں کو **متقابل داخلی زاویے** کہتے ہیں، یا $\angle ACD$ کے دور یموٹ داخلی زاویے کہلاتے ہیں۔ اب $\angle A$ اور $\angle B$ کو کاٹ لیجیے (یا ان کی نقل بنا لیجیے۔) اور تصویر 6.8 میں دکھائے گئے طریقے سے ایک دوسرے سے ملا کر رکھیے۔

کیا یہ دونوں ٹکڑے $\angle ACD$ کو پوری طرح ڈھک پا رہے ہیں؟ کیا آپ کہہ سکتے ہیں کہ

$m\angle ACD = m\angle A + m\angle B$?



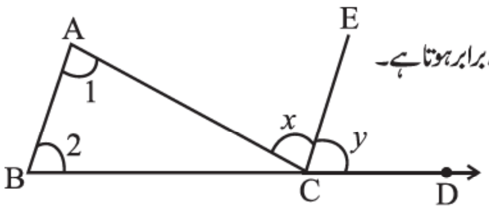

شکل 6.8

2۔ جیسا کہ پہلے بھی کیا ہے، ایک مثلث ABC بنائیے اور ایک بیرونی زاویہ ACD بنائیے اب چاندہ کی مدد سے $\angle ACD$، $\angle A$ اور $\angle B$ کو ناپیے۔

$\angle A+\angle B$ کا جوڑ معلوم کیجیے اور اس کا موازنہ $\angle ACD$ سے کیجیے۔ کیا آپ نے مشاہدہ کیا کہ $\angle ACD$، $\angle A+\angle B$ کے برابر ہے (یا تقریباً برابر ہے۔ اگر ناپنے میں کوئی غلطی ہوگئی)؟

آپ کچھ اور مثلث اور ان کے بیرونی زاویے بنا کر یہ عمل دہرا بھی سکتے ہیں۔ ہر بار آپ پائیں گے کہ مثلث کا بیرونی زاویہ متقابل داخلی زاویوں کے جوڑ کے برابر ہے۔

قدم بہ قدم منطقی استدلال اس حقیقت کو مزید ثابت کر سکتا ہے۔




شکل 6.9

کسی ایک مثلث کا ایک بیرونی زاویہ اپنے متقابل داخلی زاویوں کے جوڑ کے برابر ہوتا ہے۔

**دیا گیا ہے:** $\Delta ABC$ پر دھیان دیجیے۔

$\angle ACD$ ایک بیرونی زاویہ ہے۔

**ثابت کرنا ہے:** $m\angle ACD = m\angle A + m\angle B$

C سے $\overline{BA}$ کے متوازی $\overline{CE}$ بنائیے۔

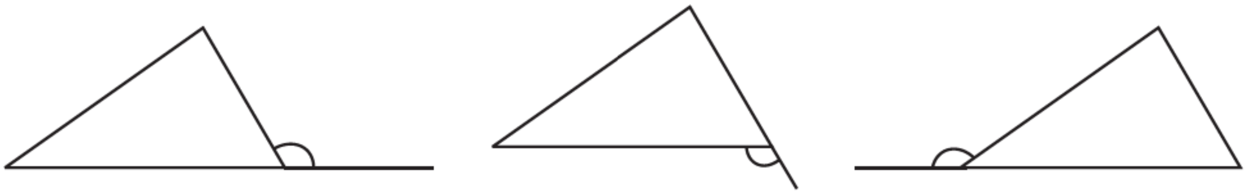
| وضاحت | وجوہات |
| --- | --- |
| (a) $\angle 1 = \angle x$ | $\overline{BA} \parallel \overline{CE}$ اور $\overline{AC}$ ایک خط قاطع ہے۔ اس لیے متبادل زاویوں کو برابر ہونا چاہیے۔ |
| (b) $\angle 2 = \angle y$ | $\overline{BA} \parallel \overline{CE}$ اور $\overline{BD}$ ایک خط قاطع ہے۔ اس لیے نظیری زاویوں کو برابر ہونا چاہیے۔ |
| (c) $\angle 1 + \angle 2 = \angle x + \angle y$ | |
| (d) اب $\angle x + \angle y = m\angle ACD$ | تصویر 6.9 ہے۔ |

لہٰذا $\angle 1 + \angle 2 = \angle ACD$

مثلث کے بیرونی زاویے اور متقابل داخلی زاویوں کے اس تعلق کو مثلث کے **بیرونی زاویے کی خصوصیت** کہا جاتا ہے۔

## سوچیے، بحث کیجیے اور لکھیے

1۔ کسی مثلث کے بیرونی زاویے مختلف طریقوں سے بنائے جا سکتے ہیں۔ ان میں سے تین یہاں (تصویر 6.10) دکھائے جا رہے ہیں۔

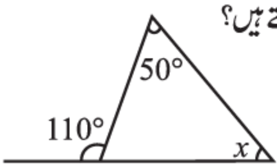


شکل 6.10

اس کے علاوہ، بیرونی زاویے بنانے کے تین اور بھی طریقے ہیں۔ ان کے رف اسکیچ بنانے کی کوشش کیجیے۔

2۔ کیا کسی مثلث کی ہر ایک راس پر بنائے گئے بیرونی زاویے برابر ہیں؟

3۔ آپ کسی مثلث کے بیرونی زاویہ اور اس کے متصل داخلی زاویہ کے جوڑ کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟




شکل 6.11

**مثال 1** تصویر 6.11 میں زاویہ $x$ معلوم کیجیے۔

**حل** متقابل داخلی زاویوں کا جوڑ بیرونی زاویہ

یا $50° + x = 110°$

یا $x = 60°$

## سوچیے، بحث کیجیے اور لکھیے

1۔ آپ متقابل داخلی زاویوں کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں اگر بیرونی زاویے ہوں:

(i) ایک زاویہ قائمہ؟ (ii) ایک زاویہ منفرجہ؟ (iii) ایک زاویہ حادہ؟

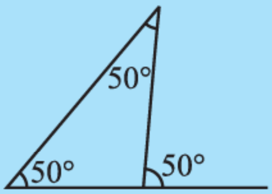
2۔ کیا کسی مثلث کا بیرونی زاویہ، زاویہ مستقیم ہو سکتا ہے؟

## کوشش کیجیے:

1۔ کسی مثلث کے ایک بیرونی زاویے کی پیائش 70° ہے اور متقابل داخلی زاویوں میں سے ایک زاویے کی پیائش 25° ہے۔ دوسرے متقابل داخلی زاویے کی پیائش معلوم کیجیے؟

2۔ کسی مثلث کے بیرونی زاویہ کے متقابل داخلی زاویے 60° اور 80° کے ہیں۔ بیرونی زاویہ کی پیائش معلوم کیجیے۔

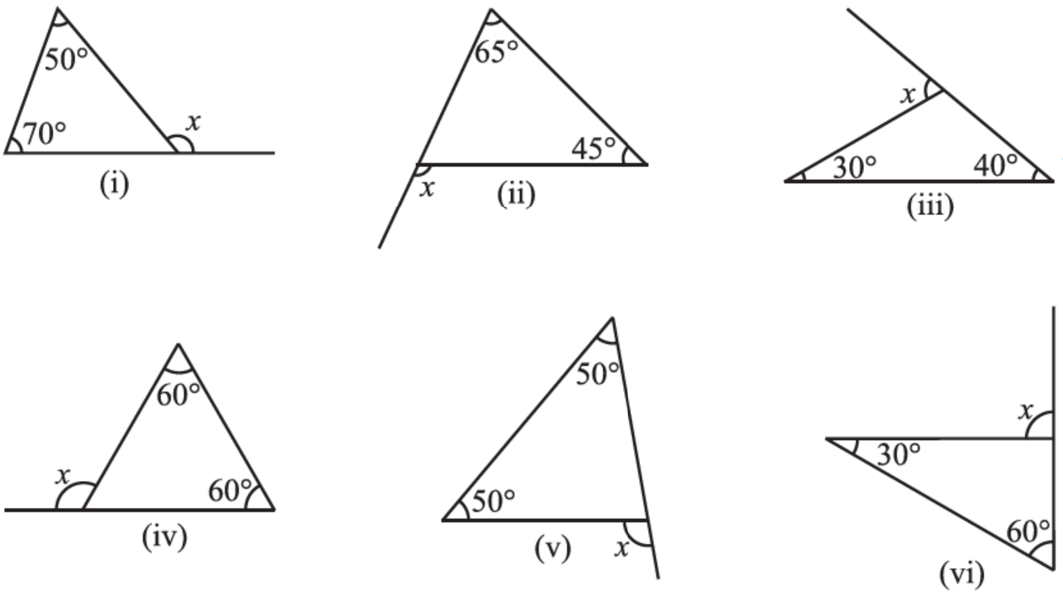
3۔ کیا اس ڈائیگرام (تصویر 6.12) میں کچھ غلط ہے؟



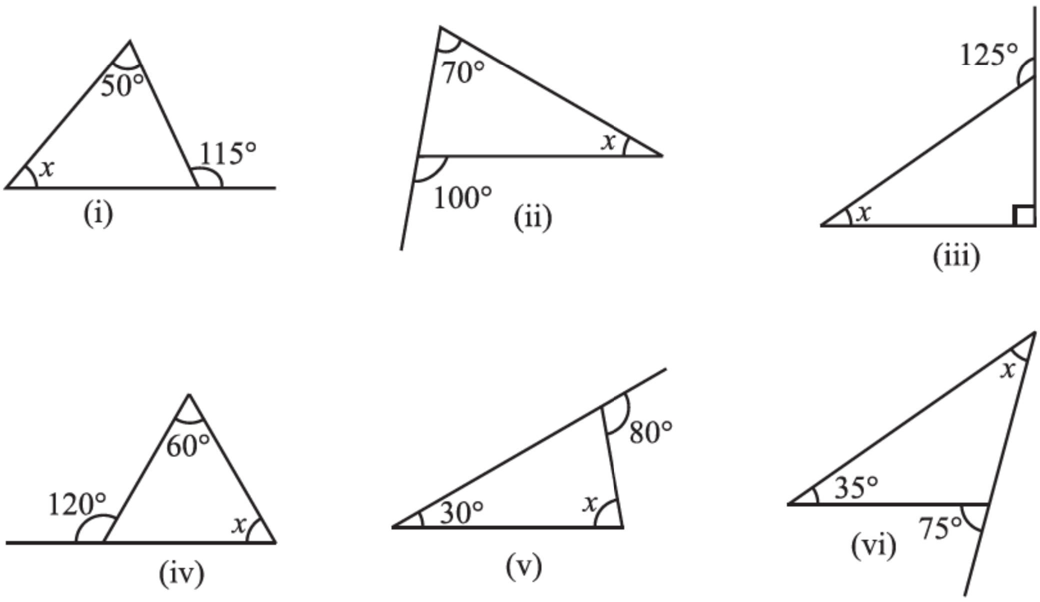

شکل 6.12

## مشق 6.2

1۔ مندرجہ ذیل ڈائیگراموں میں نامعلوم بیرونی زاویہ $x$ کی قیمت معلوم کیجیے۔



2۔ مندرجہ ذیل اشکال میں نامعلوم متقابل داخلی زاویہ کی قیمت معلوم کیجیے۔

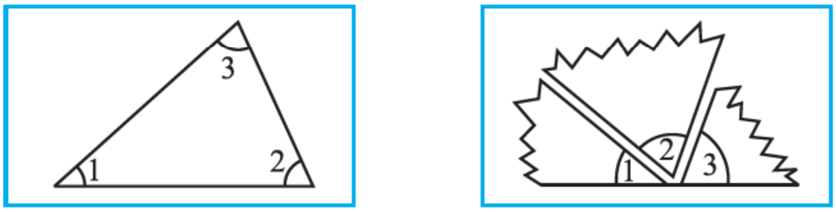



## 6.5 کسی مثلث کے زاویوں کے جوڑ کی خصوصیت

## (Angle Sum Property of a Triangle)

کسی مثلث کے تینوں زاویوں کے جوڑ سے متعلق یہ ایک بہت اہم خصوصیت ہے۔ مندرجہ ذیل چار سرگرمیوں کی مدد سے آپ اس خصوصیت کو سمجھ سکیں گے۔

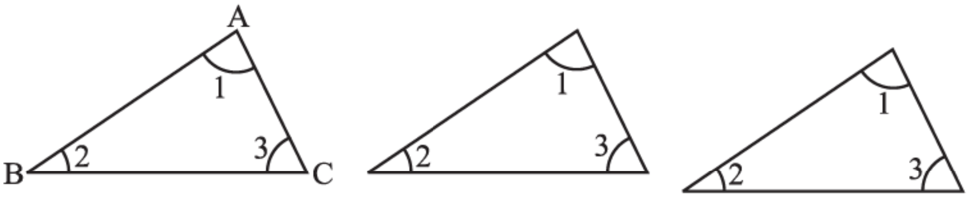
1۔ ایک مثلث بنائیے۔اس کے تینوں زاویے کاٹ لیجیے۔شکل 6.13 (i), (ii) میں دکھائے گئے طریقہ سے اس کو ترتیب دے دیجیے۔ان تینوں زاویوں سے مل کر اب ایک زاویہ بن گیا ہے۔یہ زاویہ مستقیم ہے اور اس کی پیمائش 180° ہے۔




شکل 6.13

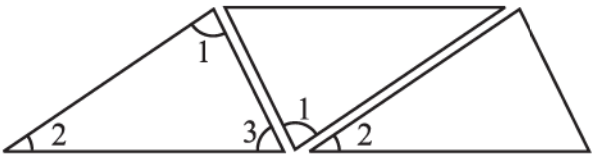
لہٰذا کسی مثلث کے تینوں زاویوں کا جوڑ 180° ہوتا ہے۔

2۔ اس حقیقت کو آپ مختلف طریقے سے دیکھ سکتے ہیں۔کسی مثلث کی تین کاپیاں لیجیے، مان لیجیے ΔABC کی (شکل 6.14)




شکل 6.14

تصویر 6.15 کی طرح اس کو ترتیب دیجیے۔∠1+∠2+∠3 کے بارے میں آپ نے کیا مشاہدہ کیا؟ (کیا آپ نے بیرونی زاویے کی خصوصیت کو دیکھا)؟

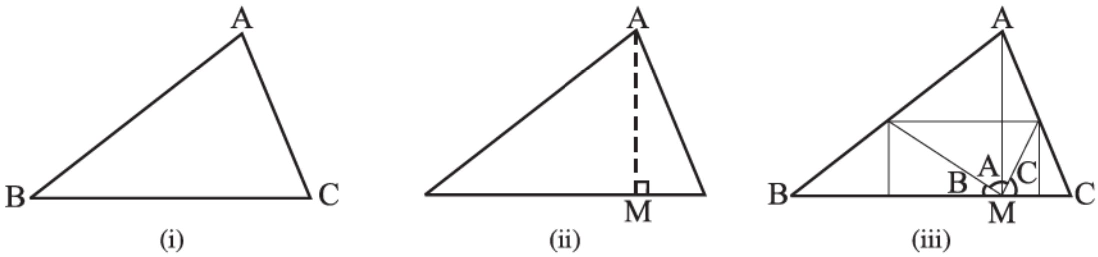



شکل 6.15

3۔ ایک کاغذ لیجیے اور یک مثلث ، مثلاً ΔABC، کاٹ لیجیے۔(شکل 6.16)

ΔABC کو موڑ کر ایک ایسا ارتفاع AM بنائیے جو A سے گزرے۔

اب مثلث کے تینوں کونوں کو اس طرح موڑیے کہ تینوں راس A، B اور C سے M کو چھوئیں۔




شکل 6.16

آپ پائیں گے کہ تینوں زاویے مل کر ایک زاویہ مستقیم بناتے ہیں۔یہ پھر اسی بات کو ظاہر کرتا ہے کہ کسی مثلث کے تینوں

زاویوں کا جوڑ °180 کے برابر ہوتا ہے۔

4۔ کوئی تین مثلث ΔABC، ΔPQR اور ΔXYZ اپنی کاپی پر بنائیے۔

چاندے کی مدد سے ان مثلثوں کے تینوں زاویوں کی پیائش کیجیے۔ اپنے نتائج کو جدول میں بھریے۔

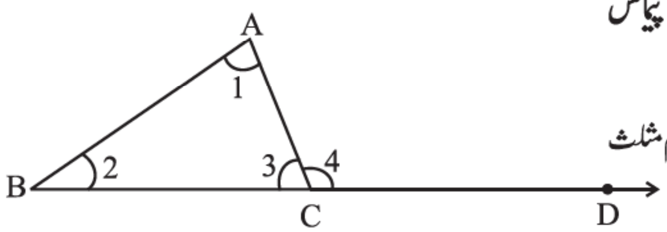
| مثلث کا نام | زاویوں کی پیائش | تینوں زاویوں کی پیائش کا جوڑ |
|---|---|---|
| ΔABC | $m\angle A =$ ___ , $m\angle B =$ ___ , $m\angle C =$ ___ | $m\angle A + m\angle B + m\angle C =$ ____ |
| ΔPQR | $m\angle P =$ ___ , $m\angle Q =$ ___ , $m\angle R =$ ___ | $m\angle P + m\angle Q + m\angle R =$ ____ |
| ΔXYZ | $m\angle X =$ ___ , $m\angle Y =$ ___ , $m\angle Z =$ ___ | $m\angle X + m\angle Y + m\angle Z =$ ____ |

پیائش میں تھوڑی بہت غلطی ممکن ہے، آپ دیکھیں گے آخری کالم میں ہمیشہ °180 (یا تقریباً °180) آتا ہے۔

جب بالکل درست پیائش ممکن ہو گی تو یہ دکھائے گا کہ تینوں زاویوں کی پیائش کا جوڑ °180 کے برابر ہوتا ہے۔

اب آپ اس قابل ہو گئے ہیں کہ اپنے اس نتیجہ کو منطقی استدلال کی مدد سے ثابت کر سکیں۔

**بیان: کسی مثلث کے تینوں زاویوں کی کل پیائش °180 کے برابر ہے۔**




شکل 6.17

اس بیان کی صداقت کو ثابت کرنے کے لیے ہم مثلث کے بیرونی زاویے کی خصوصیت کا استعمال کرتے ہیں۔

دیا گیا ہے ΔABC کے زاویے ∠1، ∠2 اور ∠3 ہیں

جب BC کو D تک بڑھایا گیا تو ∠4، بیرونی زاویہ ہے۔

صداقت کی وضاحت $\angle 4 = \angle 2 + \angle 1$ (بیرونی زاویہ کی خصوصیت)

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle 4 + \angle 3$ (دونوں طرف ∠3 جوڑ دیا)

لیکن ∠4 اور ∠3 تو ایک خطی جوڑا بنا رہے ہیں۔ جس کا جوڑ °180 کے برابر ہوتا ہے۔ اس لیے

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$

آئیے اب ہم دیکھتے ہیں، ہم اس خصوصیت کا استعمال مختلف طرح سے کیسے کر سکتے ہیں۔

**مثال 2** دی گئی شکل (تصویر 6.18) میں m∠P معلوم کیجیے۔

**حل** کسی مثلث کے زاویوں کے جوڑ کی خصوصیت کی مدد سے

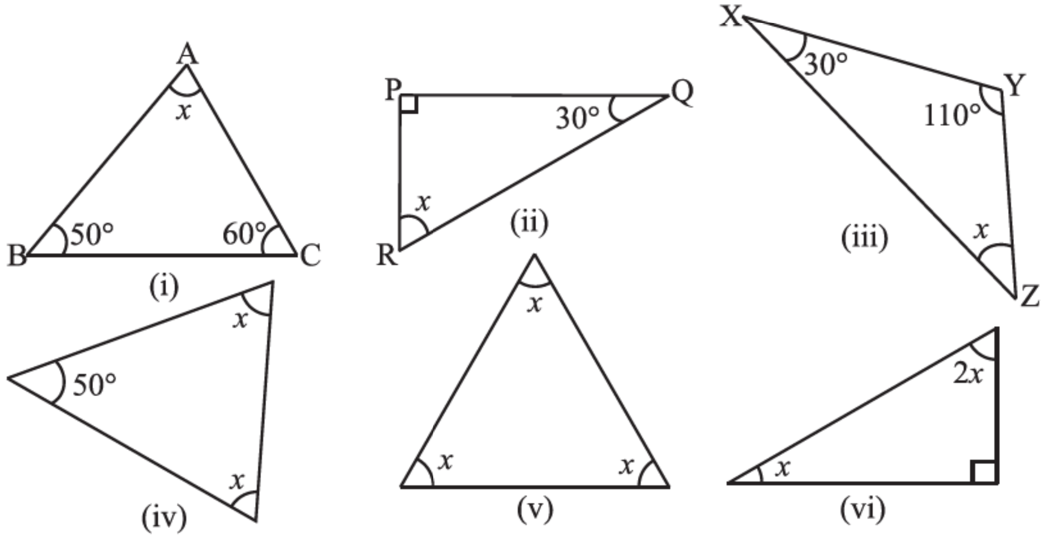
$m\angle P + 47° + 52° = 180°$

اس لیے $m\angle P = 180° - 47° - 52°$

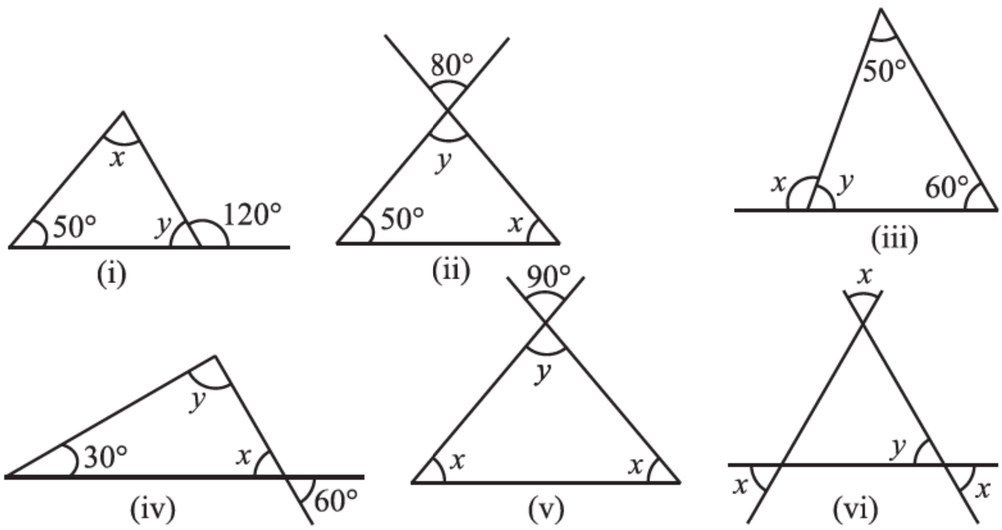
$= 180° - 99° = 81°$

## مشق 6.3

1۔ مندرجہ ذیل ڈائیگراموں میں نامعلوم $x$ کی قیمت معلوم کیجیے۔




2۔ مندرجہ ذیل ڈائیگراموں میں نامعلوم $x$ اور $y$ کی قیمت معلوم کیجیے۔




### کوشش کیجیے:

1۔ کسی مثلث کے دو زاویے 30° اور 80° ہیں۔ تیسرا زاویہ معلوم کیجیے۔

2۔ کسی مثلث کا ایک زاویہ 80° کے برابر ہے اور باقی زاویے آپس میں برابر ہیں۔ برابر زاویوں میں سے ہر زاویے کی قیمت معلوم کیجیے۔

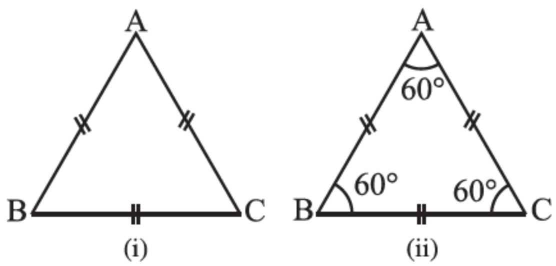
3۔ کسی مثلث کے تینوں زاویوں کا تناسب 1:2:1 ہے مثلث کے تینوں زاویے معلوم کیجیے۔ مثلث کی درجہ بندی دو مختلف طریقوں سے کیجیے۔

## سوچیے بحث کیجیے اور لکھیے

1۔ کیا آپ کے پاس کوئی ایسا مثلث ہوسکتا ہے جس کے دو زاویے، زاویہ قائمہ ہوں؟
2۔ کیا آپ کے پاس کوئی ایسا مثلث ہوسکتا ہے جس کے دو زاویے، زاویہ منفرجہ ہوں؟
3۔ کیا آپ کے پاس کوئی ایسا مثلث ہوسکتا ہے جس کے دو زاویے، زاویہ حادہ ہوں؟
4۔ کیا آپ کے پاس کوئی ایسا مثلث ہوسکتا ہے جس کے تینوں زاویے 60° سے بڑے ہوں؟
5۔ کیا آپ کے پاس کوئی ایسا مثلث ہوسکتا ہے جس تینوں زاویے 60° کے برابر ہوں؟
6۔ کیا آپ کے پاس کوئی ایسا مثلث ہوسکتا ہے جس کے تینوں زاویے 60° سے کم ہوں؟

## 6.6 دو مخصوص مثلث: مساوی الاضلاع اور مساوی الساقین
## (Two Special Triangles : Equilateral and Isosceles)

**وہ مثلث جس کے تینوں اضلاع برابر ہوتے ہیں مساوی الاضلاع مثلث کہلاتا ہے۔**




شکل 6.19

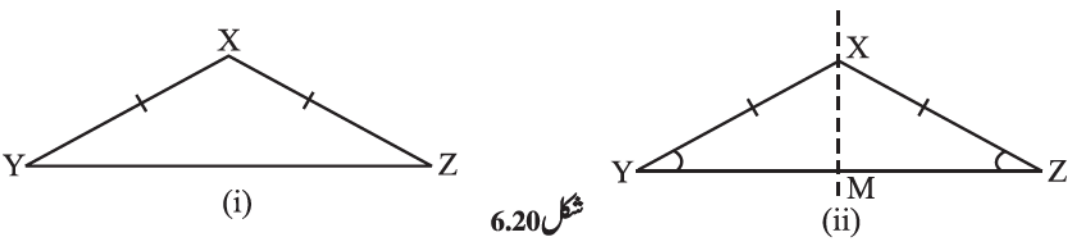
کسی مساوی الاضلاع مثلث ABC کی دو ہم شکل تصویریں لیجیے (شکل 6.19) ان میں سے ایک کو ایک جگہ چپکا دیجیے اور دوسری کو اس کے اوپر رکھ دیجیے۔ یہ پوری طرح سے پہلے مثلث کو ڈھک لے گی۔ اس کو کسی بھی طرح سے گھمایئے یہ پھر ایک دوسری کو پوری طرح ڈھک لیتے ہیں۔ آپ نے یہ دیکھا کہ جب تینوں اضلاع برابر ہوتے ہیں تو تینوں زاویوں کی پیائش بھی ایک سی ہوتی ہے؟

ہم نے یہ نتیجہ اخذ کیا کہ مساوی الاضلاع مثلث میں؛

(i) تمام اضلاع کی لمبائی برابر ہے۔

(ii) ہر زاویہ کی پیائش 60° ہے۔

**ایسا مثلث جس کے دو اضلاع برابر ہوتے ہیں مساوی الساقین مثلث کہلاتا ہے۔**




شکل 6.20

کاغذ کا ایک مساوی الساقین مثلث XYZ کاٹیے جس کی XY=XZ ہو۔ (شکل 6.20) اس کو اس طرح موڑیے کہ Z، Y پر آجائے۔ X سے گذرنے والا خط XM اب خط تشاکل ہے۔ (جس کے بارے میں آپ باب 14 میں پڑھیں گے۔) آپ دیکھیں کہ Y∠ اور Z∠ ایک دوسرے کے اوپر پوری طرح سے فٹ آتے ہیں۔ XY اور XZ مساوی اضلاع کہلاتے ہیں۔ YZ قاعدہ کہلاتا ہے۔ Y∠ اور Z∠ کو قاعدہ پر بنے زاویے کہتے ہیں یہ آپس میں برابر ہوتے ہیں۔

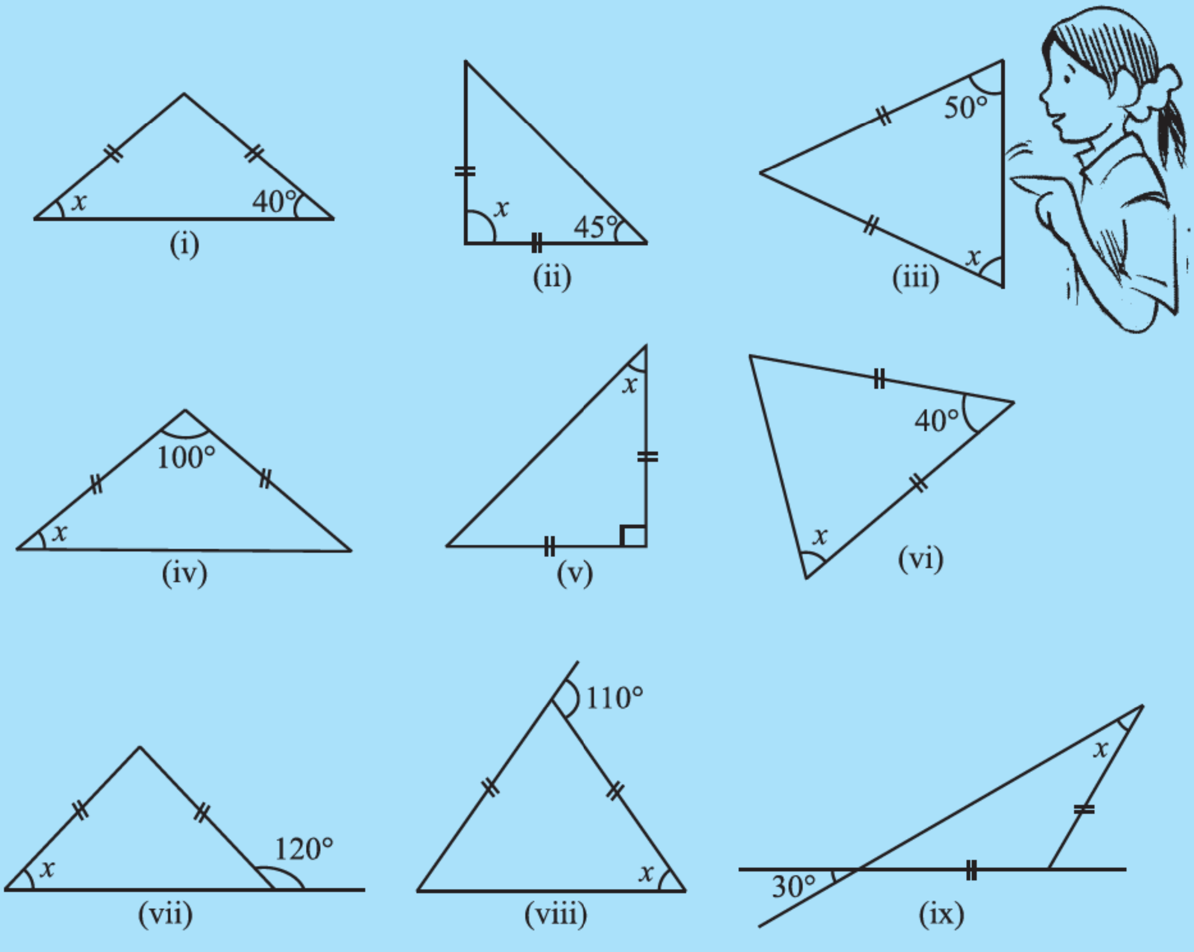
لہٰذا، ایک مساوی الساقین مثلث میں:

(i) دو اضلاع کی لمبائی آپس میں برابر ہوتی ہے۔

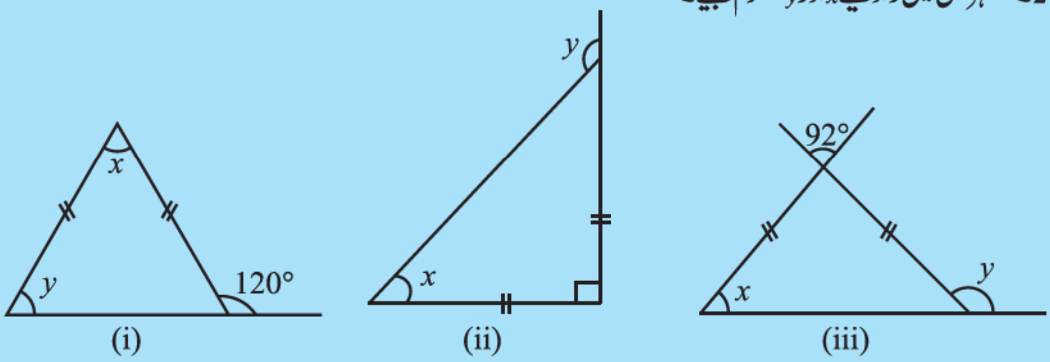
(ii) برابر لمبائی والے اضلاع کے متقابل زاویے، جو کہ قاعدہ پر بنے ہوتے ہیں، بھی آپس میں برابر ہوتے ہیں۔

## کوشش کیجیے:

1۔ ہر شکل میں زاویہ $x$ معلوم کیجیے۔

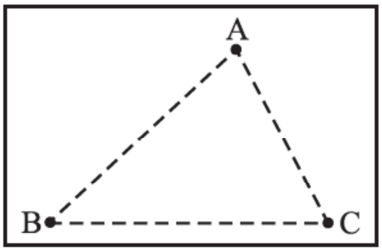


2۔ ہر شکل میں زاویے $x$ اور $y$ معلوم کیجیے۔




## 6.7 کسی مثلث کے دو اضلاع کی لمبائیوں کا جوڑ

### (Sum of the Lengths of Two Sides of a Triangle)




شکل 6.21

1۔ اپنے کھیل کے میدان میں تین غیر ہم خط نشانات A، B اور C لگائیے۔ چونے کی مدد سے راستوں AB، BC اور AC پر نشان لگائیے۔

اپنی دوست سے کہیے کہ وہ A سے شروع کر کے، ایک یا زیادہ راستوں سے گزر کر C پر پہنچے۔ مثال کے طور پر وہ پہلے $\overline{AB}$ سے اور پھر $\overline{BC}$ سے ہو کر C پر پہنچے۔ یا وہ سیدھی $\overline{AC}$ کے ذریعے بھی C پر پہنچ سکتی ہے۔ یقیناً وہ AC والا سیدھا راستہ ہی اپنائے گی۔ اگر وہ دوسرا راستہ اپناتی ہے۔ (پہلے $\overline{AB}$ پر $\overline{BC}$) تو اس کو زیادہ چلنا پڑتا ہے۔

دوسرے الفاظ میں

$$AB + BC > AC$$

اس طرح، اگر کسی کو B سے شروع کر کے A پر پہنچنا ہے تو وہ $\overline{BC}$ اور $\overline{CA}$ والا راستہ نہ اپنا کر $\overline{BA}$ والا راستہ چننا زیادہ پسند کرے گی/ گا۔ کیونکہ

$$BC + CA > AB$$

بالکل اسی وجہ سے، آپ معلوم کر سکتے ہیں

کہ $CA + AB > BC$

ان مشاہدات سے پتہ چلتا ہے کہ کسی بھی مثلث کے دو اضلاع کا جوڑ تیسرے ضلع کی پیمائش سے زیادہ ہوتا ہے۔

2۔ مختلف پیمائشوں کی 15 چھوٹی چھوٹی لکڑیاں جمع کیجیے (یا پٹیاں) جیسے، 7 سینٹی میٹر، 8 سینٹی میٹر، 9 سینٹی میٹر، .....20 سینٹی میٹر۔ ان میں سے کوئی بھی تین لکڑیاں لیجیے اور ان سے ایک مثلث بنانے کی کوشش کیجیے۔ تین تین لکڑیوں کے مختلف مجموعے لے کر اس سرگرمی کو دہرائیے۔

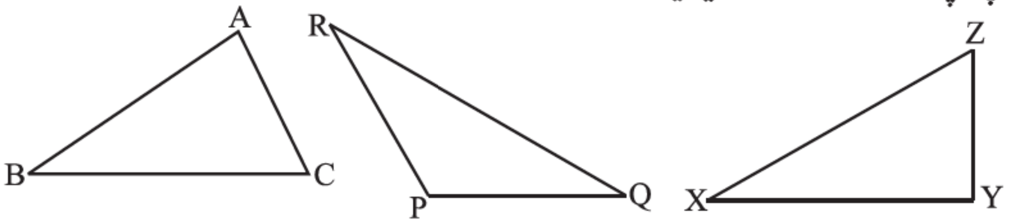
مان لیجیے پہلے آپ نے 6 سم اور 12 سم لمبی دو لکڑیاں لیں تو آپ کی تیسری لکڑی کی لمبائی $12–6=6$ سم سے ہر حال میں زیادہ

اور 18=12+6 سم سے کم ہونی چاہیے۔ اس کو کر دیکھیے اور بتایئے کہ ایسا کیوں ہے۔

ایک مثلث بنانے کے لیے آپ کو تین ایسی لکڑیوں کی ضرورت ہوگی جن میں سے کوئی بھی دو کی لمبائیوں کا جوڑ تیسری لکڑی کی لمبائی سے زیادہ ہوگا۔

اس سے یہ بات سامنے آتی ہے کہ ایک مثلث کے دو اضلاع کا جوڑ تیسرے ضلع کی لمبائی سے زیادہ ہوتا ہے۔

3۔ اپنی کاپی میں کوئی بھی تین مثلث بنایئے جیسے ΔABC، ΔPQR اور ΔXYZ (شکل 6.22)




**شکل 6.22**

پھر اپنے نتائج کو جدول میں دیے گئے طریقے سے بھر دیجیے۔

| Δ کا نام | اضلاع کی لمبائیاں | کیا یہ صحیح ہے | |
|---|---|---|---|
| Δ ABC | AB ___ | AB – BC < CA<br>___ + ___ > ___ | ہاں / نہیں |
| | BC ___ | BC – CA < AB<br>___ + ___ > ___ | ہاں / نہیں |
| | CA ___ | CA – AB < BC<br>___ + ___ > ___ | ہاں / نہیں |
| PQR | PQ ___ | PQ – QR < RP<br>___ + ___ > ___ | ہاں / نہیں |
| | QR ___ | QR – RP < PQ<br>___ + ___ > ___ | ہاں / نہیں |
| | RP ___ | RP – PQ < QR<br>___ + ___ > ___ | ہاں / نہیں |
| Δ XYZ | XY ___ | XY – YZ < ZX<br>___ + ___ > ___ | ہاں / نہیں |
| | YZ ___ | YZ – ZX < XY<br>___ + ___ > ___ | ہاں / نہیں |
| | ZX ___ | ZX – XY < YZ<br>___ + ___ > ___ | ہاں / نہیں |

اس سے ہمارے پہلے لگائے گئے اندازے کوتقویت ملتی ہے۔اس لیے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ،**ایک مثلث کے دواضلاع کی لمبائی کا جوڑ تیسرے ضلع کی لمبائی سے زیادہ ہوتا ہے۔**

ہم نے یہ بھی دیکھا ہے کہ ایک مثلث کے کوئی بھی دو اضلاع کی لمبائیوں کا فرق تیسرے ضلع کی لمبائی سے چھوٹا ہوتا ہے۔

**مثال3** کیا کوئی مثلث ایسا ہوسکتا ہے،جس کے اضلاع کی لمبائیاں10.2 سینٹی میٹر،5.8 سینٹی میٹر،اور 4.5 سینٹی میٹر ہوں؟

**حل** مان لیجیے ایک مثلث ممکن ہے۔تو کوئی بھی دو اضلاع کی لمبائیوں کا جوڑ تیسرے ضلع کی لمبائی سے زیادہ ہوتا۔آیئے اس کی جانچ کریں۔

کیا؟ $4.5 + 5.8 > 10.2$ ہاں

کیا؟ $5.8 + 10.2 > 4.5$ ہاں

کیا؟ $10.2 + 4.5 > 5.8$ ہاں

اس لیے یہ مثلث ممکن ہے۔

**مثال4** ایک مثلث کے دو اضلاع کی لمبائیاں 6 سم اور 8 سینٹی میٹر ہیں۔تیسرے ضلع کی لمبائی کن دو اعداد کے درمیان ہوسکتی ہے؟

**حل** ہم جانتے ہیں مثلث کے دو اضلاع کا لمبائیوں کی جوڑ ہمیشہ تیسرے ضلع کی لمبائی سے زیادہ ہوتا ہے۔

اس لیے تیسرے ضلع کی لمبائی دونوں ضلوں کی لمبائیوں کے جوڑ سے کم ہونی چاہئے یعنی $6+8=14$ سینٹی میٹر سے کم۔تیسرے ضلع کی لمبائی اضلاع کی لمبائیوں کے فرق سے کم نہیں ہونی چاہیے۔اس لیے تیسرے ضلع کی لمبائی $8-6=2$ سینٹی میٹر سے زیادہ ہوتی۔

اس لیے تیسرے ضلع کی لمبائی 14 سینٹی میٹر سے کم اور 2 سینٹی میٹر سے زیادہ ہوگی۔

## مشق 6.4

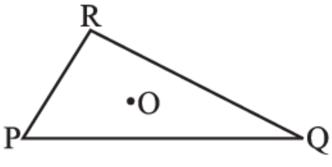
1۔ کیا یہ ممکن ہے کہ کسی مثلث کے اضلاع کی لمبائیاں مندرجہ ذیل ہوں۔

(i) 2 cm, 3 cm, 5 cm

(ii) 3 cm, 6 cm, 7 cm

(iii) 6 cm, 3 cm, 2 cm

2۔ کوئی نقطہ O مثلث PQR کے اندرون میں لیجیے۔کیا



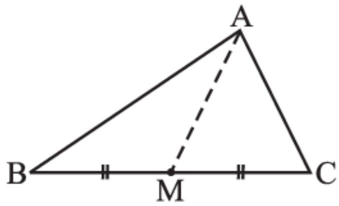

(i) $OP + OQ > PQ$?

(ii) $OQ + OR > QR$?

(iii) $OR + OP > RP$?

3۔ AM مثلث ABC کا وسطانیہ ہے۔

کیا؟ $AB + BC + CA > 2\ AM$

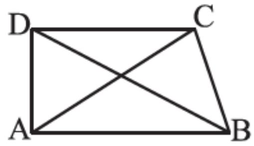



(مثلث کے ΔABM اور ΔAMC کے اضلاع کو دیکھیے۔)

4۔ ABCD ایک چار ضلعی ہے۔ کیا

کیا $AB + BC + CD + DA > AC + BD$?

5۔ ABCD ایک چار ضلعی ہے۔ کیا




$AB + BC + CD + DA < 2\,(AC + BD)$?

6۔ مثلث کے دو اضلاع کی لمبائیاں 12 سم اور 15 سم ہیں۔ تیسرے ضلع کی لمبائی کن دو پیمائشوں کے درمیان ہونی چاہیے۔

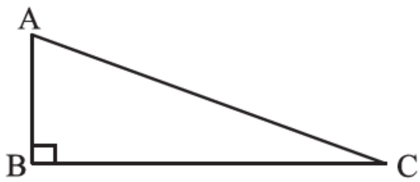
## سوچیے، بحث کیجیے اور لکھیے

1۔ کیا کسی مثلث کے دو زاویوں کا جوڑ ہمیشہ تیسرے زاویہ سے بڑا ہوتا ہے؟

## 6.8 زاویہ قائمہ مثلث اور فیثاغورث کی خصوصیت

## (Right-angled Triangles and Pythagoras Property)

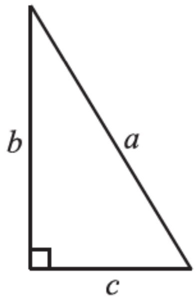
اس حصہ میں زاویہ قائمہ مثلث کی ایک بہت اہم اور کارآمد خصوصیت دی گئی ہے۔ جس کا پتہ یونانی فلسفی فیثاغورث نے چھٹی صدی ق۔ م۔ نے لگایا تھا۔ لہٰذا اس خصوصیت کا نام انہیں کے نام پر رکھا گیا ہے۔ درحقیقت اس خصوصیت کے بارے میں دوسرے ممالک کے لوگ بھی جانتے تھے۔ ہندوستانی ریاضی دیاں بودھان نے بھی اس خصوصیت کی معادل شکل پیش کی تھی۔ اب ہم فیثاغورث کی اس خصوصیت کی وضاحت کرنے کی کوشش کرتے ہیں۔




شکل 6.23

زاویہ قائمہ مثلث میں اضلاع کے کچھ مخصوص نام ہوتے ہیں۔ وہ ضلع جو زاویہ قائمہ کے متقابل ہوتا ہے **وتر** کہلاتا ہے؛ باقی دو اضلاع زاویہ قائمہ مثلث کے **بازو** کہلاتے ہیں۔

ΔABC میں (تصویر 6.23) زاویہ قائمہ B پر ہے، اس لیے AC اس کا وتر ہے۔ $\overline{AB}$ اور $\overline{BC}$، ΔABC کے دو بازو ہیں۔



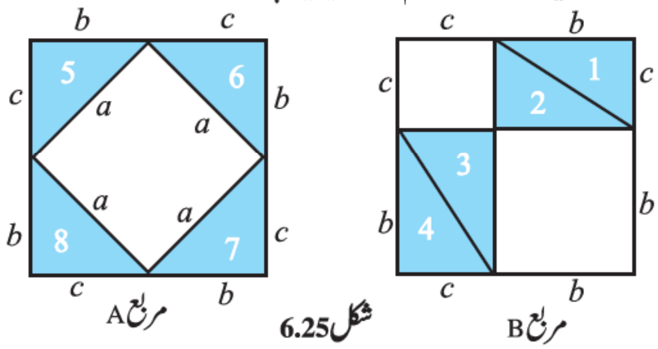

شکل 6.24

زاویہ قائمہ مثلث کے کسی بھی پیمائش کی آٹھ معادل اشکال بنالیجیے۔ مثال کے طور پر آپ ایک قائمہ زاوی مثلث بنائیے جس کا وتر a اکائی لمبائی ہو۔ اور باقی دونوں بازوؤں کی لمبائیاں b اکائی اور c اکائی ہو۔ (تصویر 6.24)

ایک کاغذ پر دو معادل مربع بنائیے جن کے اضلاع $b+c$ لمبائی کے ہوں۔

آپ کو ایک مربع میں چار مثلث رکھنے ہیں اور باقی کے چار مثلث

دوسرے مربع میں رکھتے ہیں جیسا کہ ڈائیگرام میں دکھایا گیا ہے (شکل 6.25)۔




شکل 6.25

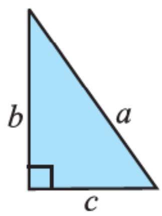
مربعے معادل ہیں اور آٹھ مثلث بھی معادل ہیں۔ لہٰذا مربع A کا خالی حصہ = مربع B کا خالی حصہ

یعنی مربع A کے اندرونی مربع کا رقبہ = مربع B کے اندر خالی جگہ پر بننے والے دونوں مربعوں کا کل رقبہ

$$a^2 = b^2 + c^2$$

یہ فیثا غورث کا مسئلہ ہے۔ اس کو مندرجہ ذیل طریقے سے بیان کیا جاسکتا ہے۔

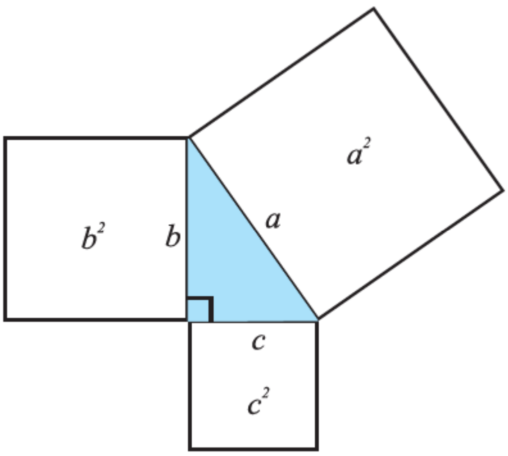
> ایک قائمہ زاوی مثلث میں
> وتر کا مربع = دونوں بازوؤں کے مربعوں کا جوڑ




ریاضی میں فیثا غورث کی خصوصیت بہت کارآمد آلہ کی طرح ہے۔ بعد میں آنے والی جماعتوں میں اس کو ایک مسئلہ کی طرح ثابت کیا جائے گا۔ آپ کو اس کا مطلب اچھی طرح سمجھ لینا چاہیے۔

اس میں کہا گیا ہے کہ کسی زاویہ قائمہ مثلث میں وتر پر بننے والا مربع کا رقبہ، اس کے بازو پر بننے والے مربعوں کے رقبوں کے جوڑ کے برابر ہوتا ہے۔

ایک زاویہ قائمہ مثلث بنایئے، اگر ایک گراف پیپر پر بنائیں تو زیادہ اچھا ہے۔ اس کے اضلاع پر الگ الگ مربع بنایئے۔ ان مربعوں کا رقبہ نکالیے اور اس مسئلہ کو عملی طور جانچیے۔ (شکل 6.26)




شکل 6.26

اگر آپ کے پاس ایک قائمہ زاویہ مثلث ہے تو فیثا غورث کی خصوصیت اس پر لاگو ہوگی، اور اگر فیثا غورث کی خصوصیت کسی مثلث پر لاگو ہو رہی ہے تو کیا وہ مثلث قائمہ زاویہ مثلث ہوگا؟ (اس طرح کے مسئلہ کو معکوس مسئلہ کہتے ہیں۔) ہم اس کا جواب دینے کی کوشش کریں گے۔ اب ہم دکھائیں گے کہ اگر ایک مثلث ایسا ہے اس کے دو اضلاع پر

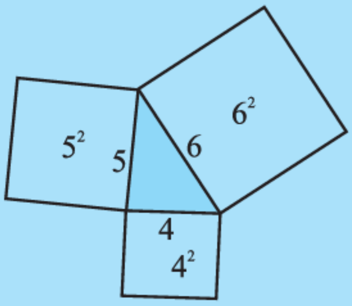
بنے مربعوں کے رقبوں کا جوڑ تیسرے ضلع پر بنے مربع کے رقبے کے برابر ہو، تو یہ مثلث لازمی طور پر زاویہ قائمہ مثلث ہوگا۔

## کوشش کیجیے:

1۔ تین ایسے مربعے کاٹیے جن کے اضلاع بالترتیب 4 سم، 5 سم اور 6 سم لمبے ہوں۔ (شکل 6.27) میں دکھائے گئے طریقے سے ان مربعوں کی ترتیب اس طرح دیجیے کہ ان سے ایک مثلث نما شکل بن کر سامنے آئے۔ اس طرح بنے مثلث کی نقل اتار لیجیے۔ مثلث کے ہر زاویہ کی پیمائش کیجیے۔ آپ پائیں گے کہ ان میں سے کوئی زاویہ قائمہ نہیں ہے۔

درا صل اس صورت حال میں ہر زاویہ حادہ ہے۔ نوٹ کیجیے کہ

$5^2+6^2 \neq 4^2$, $4^2+5^2 \neq 6^2$ اور $6^2+4^2 \neq 5^2$




شکل 6.27

2۔ اس سرگرمی کو 4 سم، 5 سم اور 7 سم کی لمبائیوں کے ساتھ دہرائیے۔ آپ کو ایک منفرجہ زاویہ مثلث ملے گا۔ نوٹ کیجیے۔

$4^2+5^2 \neq 7^2$

اس سے یہ بات ثابت ہوتی ہے کہ فیثا غورث کی خصوصیت صرف اور صرف اسی وقت لاگو ہوتی ہے جب مثلث ایک زاویہ قائمہ مثلث ہو۔ لہٰذا ہم کو یہ حقیقت ملتی ہے:

> اگر فیثا غورث کی خصوصیت لاگو ہوتی ہے تو مثلث ضروری طور پر قائمہ زاویہ مثلث ہوگا۔

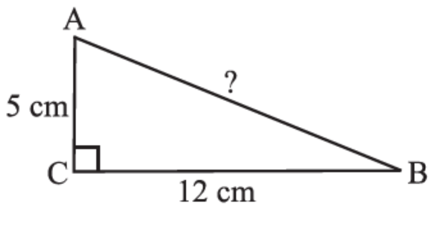
**مثال 5** معلوم کیجیے کہ کیا ایک ایسا مثلث جس کی اضلاع کی لمبائیاں 3 سم، 4 سم، اور 5 سم ہوں تو وہ ایک قائمہ زاویہ مثلث ہے۔

**حل** $3^2=3\times3=9;\ 4^2=4\times4=16;\ 5^2=5\times5=25$

ہم نے دیکھا کہ $3^2+4^2=5^2$

اس لیے مثلث، قائمہ زاویہ ہے۔

**نوٹ:** ہر قائمہ زاویہ مثلث میں وتر ہمیشہ سب سے لمبا ضلع ہوتا ہے اس مثال میں وہ ضلع جس کی لمبائی 5 سم ہے وہ وتر ہے۔




شکل 6.28

**مثال 6** ΔABC ایک قائمہ زاویہ مثلث ہے جس کا زاویہ قائمہ C پر ہے۔ اگر AC=5 سم BC=12 سم ہے۔ تو AB کی لمبائی معلوم کیجیے۔

**حل** ایک رف شکل ہماری مدد کرے گی (شکل 6.28)

فیثاغورث کی خصوصیت سے $AB^2 = AC^2 + BC^2$

$= 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$

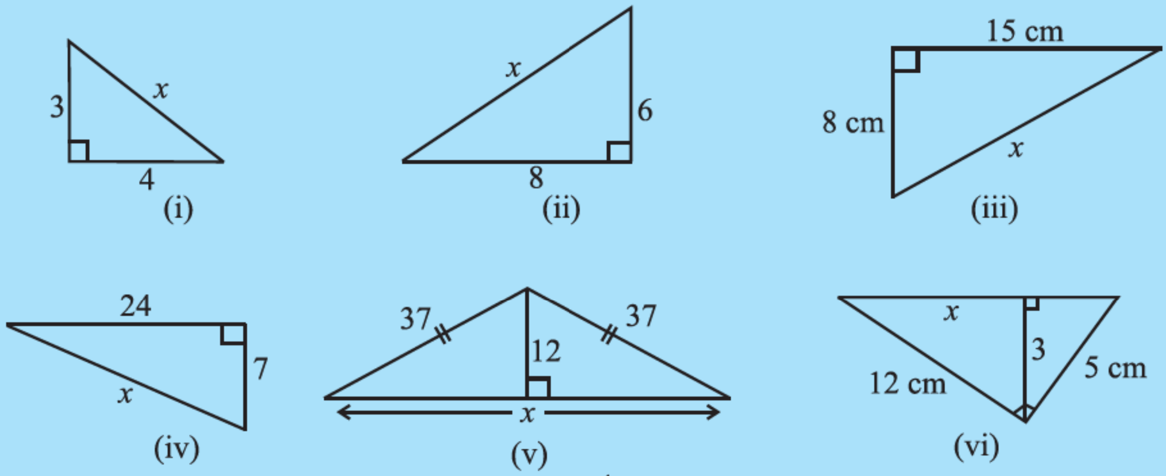
یا $AB^2 = 13^2$

اس لیے $AB = 13$ – یا AB کی لمبائی 13 سم ہے۔

**نوٹ:** بکمل مربع معلوم کرنے کے لیے آپ ابتدائی تقسیم اجزاء کی تکنیک اپنا سکتے ہیں۔

## کوشش کیجیے:

مندرجہ ذیل اشکال میں نامعلوم لمبائی $x$ معلوم کیجیے۔ (شکل 6.29)

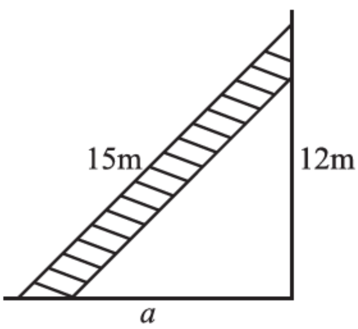



**شکل 6.29**

## مشق 6.5

**-1** PQR ایک مثلث ہے جس میں P پر زاویہ قائمہ بن رہا ہے۔
اگر PQ = 10cm اور PR = 24 cm ہے تو QR معلوم کیجیے۔

**-2** ABC ایک مثلث ہے جس میں C پر زاویہ قائمہ بن رہا ہے
اگر AB = 25 سم اور AC = 7 cm ہو تو BC معلوم کیجیے۔




**-3** ایک 15 میٹر لمبی سیڑھی، 12 میٹر اونچی کھڑکی پر دیوار کے سہارے لگائی گئی ہے۔ زمین پر سیڑھی کا دیوار سے فاصلہ a ہے۔ سیڑھی کے نچلے حصے کا دیوار سے فاصلہ بتائیے۔

**-4** درج ذیل میں سے کون سے قائمہ زاوی مثلث کے اضلاع کی لمبائیاں ہوسکتی ہیں؟

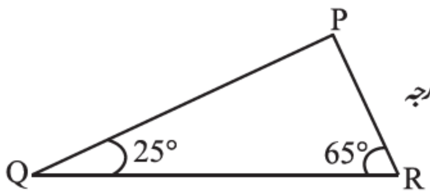
(i) 2.5 سم، 6.5 سم، 6 سم

(ii) 2 سم، 2 سم، 5 سم

(iii) 1.5 سم، 2 سم، 2.5 سم

قائمہ زاوی مثلث کے کیس میں زاویہ قائمہ معلوم کیجیے۔

5۔ ایک پیڑ زمین سے 5 میٹر کی اونچائی سے ٹوٹتے گیا اور اس کا اوپری سرا زمین کو پیڑ کی جڑ سے 12 میٹر کی دوری پر چھو رہا ہے۔ پیڑ کی اصلی اونچائی بتائیے۔




6۔ ΔPQR کے Q اور R زاویے بالترتیب 25° اور 65° کے ہیں۔ لکھیے مندرجہ ذیل میں سے کون سے درست ہیں :

(i) $PQ^2 + QR^2 = RP^2$

(ii) $PQ^2 + RP^2 = QR^2$

(iii) $RP^2 + QR^2 = PQ^2$

7۔ اس مستطیل کا احاطہ بتائیے جس کی لمبائی 40 سم اور وتر 41 سم ہے۔

8۔ ایک معین کے وتروں کی پیمائش 16 سم اور 30 سم ہے اس کا احاطہ بتائیے۔

## سوچیے، بحث کیجیے اور لکھیے

1۔ مثلث PQR کا سب سے لمبا ضلع کون سا ہے جس کا زاویہ قائمہ P پر ہے؟

2۔ مثلث ABC کا سب سے لمبا ضلع کون سا ہے جس کا زاویہ قائمہ B پر ہے؟

3۔ ایک قائمہ زاوی مثلث کا سب سے لمبا ضلع کون سا ہے؟

4۔ کسی مستطیل کے وتر کے ذریعے حاصل ہوا رقبہ وہی ہوگا جو رقبہ اس کی لمبائی اور چوڑائی کے ذریعہ حاصل ہوگا۔ یہ بودھیان کا مسئلہ ہے۔ اس کا موازنہ فیثاغورث کی خصوصیت سے کیجیے۔

## خود کریں

### متمول سرگرمی

قطع و برید اور ترتیب نو کے ذریعے فیثاغورث کے مسئلہ کے بہت سارے ثبوت دیے گئے ہیں۔ ان میں سے کچھ کو جمع کیجیے اور ان کی وضاحت کے لیے چارٹ بنائیے۔

## ہم نے کیا سیکھا؟

1۔ کسی مثلث کے **6 حصے** (elements) ہوتے ہیں۔ **3 اضلاع** اور **3 زاویے**۔

2۔ کسی مثلث کے ایک راس کو اس کے متقابل ضلع کے درمیان وسطی نقطے سے ملانے والے قطعہ خط کو مثلث کا وسطانیہ کہتے ہیں۔ ایک مثلث کے تین وسطانیے ہوتے ہیں۔

3۔ کسی مثلث کے ایک راس سے اس کے متقابل ضلع پر کھینچا جانے والا عمودی خط ارتفاع کہلاتا ہے۔ ایک مثلث کے تین ارتفاع ہوتے ہیں۔

4۔ جب ایک مثلث کے کسی ایک ضلع کو بڑھایا جاتا ہے۔ تو بیرونی زاویہ بنتا ہے۔ ہر ایک راس پر بیرونی زاویے بنانے کے دو طریقے ہیں۔

5۔ بیرونی زاویوں کی ایک خصوصیت:

کسی مثلث کے بیرونی زاویہ کی پیمائش اس کے دونوں متقابل داخلی زاویوں کی پیمائش کے جوڑ کے برابر ہوتی ہے۔

6۔ مثلث کے زاویوں کے جوڑ والی خصوصیت۔ مثلث کے تینوں زاویوں کی کل پیمائش $180°$ کے برابر ہوتی ہے۔

7۔ ایک مثلث مساوی الاضلاع مثلث کہلاتا ہے اگر اس کے ہر ضلع کی لمبائی ایک ہی ہے۔ مساوی الاضلاع مثلث کے ہر ایک زاویہ کی پیمائش $60°$ ہوتی ہے۔

8۔ ایک مثلث مساوی الساقین مثلث کہلاتا ہے، اگر اس کے کسی بھی دو اضلاع کی لمبائی برابر ہو۔

مساوی الساقین مثلث کی غیر برابر ضلع کو اس کا قاعدہ کہتے ہیں۔ ایک مساوی الساقین مثلث کے قاعدہ پر بنے دونوں زاویوں کی پیمائش آپس میں برابر ہوتی ہے۔

9۔ مثلث کے اضلاع کی لمبائی کی خصوصیت:

ایک مثلث کے کسی بھی دو اضلاع کی لمبائیوں کا جوڑ تیسرے ضلع کی لمبائی سے بڑا ہوتا ہے۔

مثلث کے کسی بھی دو اضلاع کی لمبائیوں کا فرق تیسرے ضلع کی لمبائی سے چھوٹا ہوتا ہے۔

اس خصوصیت کا استعمال یہ جاننے کے لیے کیا جاتا ہے کہ اگر تین اضلاع کی لمبائیاں معلوم ہیں تو کیا ان اضلاع کی مدد سے مثلث بن سکتا ہے یا نہیں۔

10۔ زاویہ قائمہ مثلث کے زاویہ قائمہ کے متقابل ضلع کو وتر کہتے ہیں اور باقی دو ضلعوں کو بازو کہتے ہیں۔

11۔ **فیثاغورث کی خصوصیت:**

قائمہ زاوی مثلث میں

وتر پر بنا مربع = دونوں بازوؤں پر بنے مربعوں کا جوڑ

اگر مثلث قائمہ زاوی مثلث نہیں ہے تو یہ خصوصیت لاگو نہیں ہوتی۔ اس خصوصیت کا استعمال یہ طے کرنے کے لیے بھی کیا جا سکتا ہے کہ دیا گیا مثلث قائمہ زاوی مثلث ہے بھی یا نہیں۔

باب 7

# مثلثوں کی مماثلت

## 7.1 تعارف (Introduction)

اب آپ جیومیٹری کا ایک بہت اہم تصور پڑھنے کے لیے تیار ہیں، مماثلت (Congruence)۔ خاص طور پر آپ مثلثوں کی مماثلت کے بارے میں بہت کچھ پڑھیں گے۔

یہ سمجھنے کے لیے کہ مماثلت ہوتی کیا ہے، ہم کچھ سرگرمیاں کریں گے

### خود کریں

ایک ہی اکائی یا قیمت عرفیت کے دو ٹکٹ لیجیے (تصویر 7.1)۔ ایک ٹکٹ کو دوسرے پر رکھ دیجیے۔ آپ نے کیا دیکھا؟

شکل 7.1

ایک ٹکٹ نے دوسرے کو مکمل طور پر صحیح طرح ڈھک لیا۔ اس کا مطلب ہے کہ یہ دونوں ٹکٹ ایک ہی شکل (Shape) اور ایک ہی سائز کے ہیں۔ ایسی چیزیں مماثل کہلاتی ہیں۔ آپ نے جو دو ٹکٹ استعمال کیے ہیں وہ ایک دوسرے کے مماثل ہیں۔ مماثل چیزیں ایک دوسرے کی پوری طرح سے نقل ہوتی ہیں۔

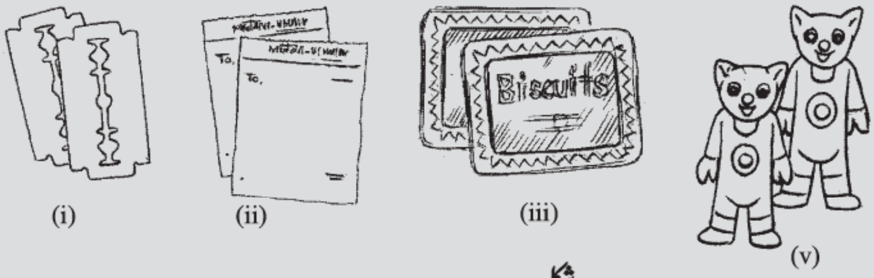
کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ مندرجہ ذیل چیزیں مماثل ہیں یا نہیں۔

1۔ ایک ہی کمپنی کے شیونگ بلیڈ (شکل (7.2(i)

2۔ ایک ہی لیٹر پیڈ کے اوراق [شکل (7.2(ii)

3۔ ایک ہی پیکٹ کے بسکٹ [شکل (7.2(iii)

4۔ ایک ہی سانچے سے بنے کھلونے [شکل (7.2(iv)




شکل 7.2

دو چیزوں کے مماثل ہونے کے رشتے کو مماثلت کہتے ہیں۔ ابھی ہم صرف مستوی اشکال کے لیے دیکھیں گے، حالانکہ مماثلت کا تصور سہ ابعادی اشکال پر بھی لاگو ہوتا ہے۔ ہم صرف ان مستوی اشکال کے لیے مماثلت کے تصور کو سمجھنے کی کوشش کریں گے جن کو ہم جانتے ہیں۔

## 7.2 مستوی اشکال کی مماثلت (Congruence of Plane Figures)

یہاں دی گئی دو اشکال کو دیکھیے (تصویر 7.3)۔ کیا یہ مماثل ہیں؟

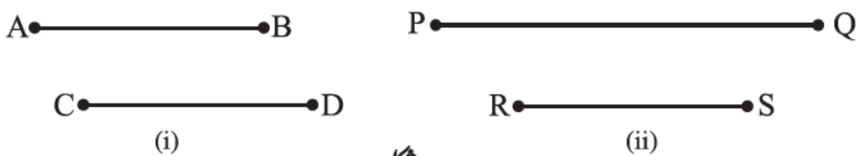
شکل 7.3

آپ انطباق کا طریقہ استعمال کر سکتے ہیں۔ ان میں سے کسی ایک کی نقل اتار لیجیے اور اس کو دوسرے کے اوپر رکھیے۔ اگر اشکال ایک دوسرے کو پوری طرح سے ڈھک لیتی ہیں تو یہ مماثل ہیں۔ یا پھر آپ ان میں سے ایک کو کاٹ لیجیے اور اس کو دوسرے پر رکھ دیجیے۔ دھیان رکھیے کہ آپ کاٹی گئی یا نقل بنائی گئی شکل کو موڑ، مروڑ یا کھینچ نہیں سکتے ہیں۔

تصویر 7.3 میں اگر شکل $F_1$ شکل $F_2$ کے مماثل ہے تو اس کو ہم $F_1 \cong F_2$ لکھتے ہیں۔

## 7.3 قطعۂ خطوط کی مماثلت (Congruence Among Line Segments)

دو قطعہ خط کب مماثل ہونگے؟ یہاں دیے گئے قطعہ خطوط کے دو جوڑوں پر دھیان دیجیے۔ (تصویر 7.4)




شکل 7.4

تصویر [7.4 (i)] میں قطعہ خطوط کے جوڑے کے لیے انطباق کا طریقہ استعمال کرنے کے لیے چھاپی ہوئی نقل کا استعمال کیجیے۔ $\overline{CD}$ کی نقل بنائیے اور اس کو $\overline{AB}$ پر رکھ دیجیے۔ آپ دیکھیں گے کہ $\overline{CD}$ ، $\overline{AB}$ کو اس طرح ڈھک لیتی ہے کہ C، A پر اور D،

B پر ہو جاتی ہے۔لہٰذا، قطعۂ خطوط مماثل ہیں۔اس کو ہم لکھیں گے $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

تصویر [7.4(ii)] میں دیے گئے قطعۂ خطوط کے لیے بھی آپ یہی سرگرمی دہرا سکتے ہیں۔آپ نے کیا معلوم کیا؟ یہ مماثل نہیں ہیں۔آپ کو کیسے پتہ چلا؟ ایسا اس لیے ہے کہ جب ان کو ایک دوسرے پر رکھا جاتا ہے تو یہ دونوں منطبق نہیں ہوتے۔

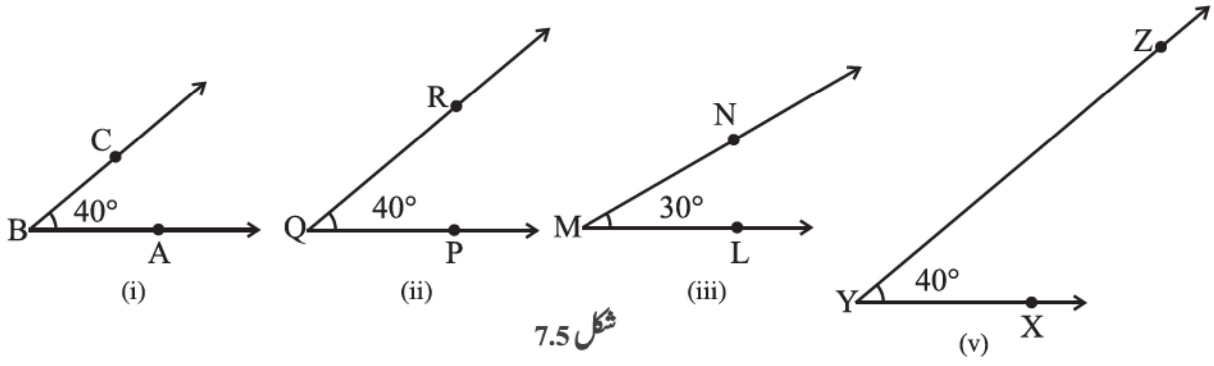
اب آپ یہ بھی دیکھ سکتے ہیں کہ (شکل 7.4(i)) میں دیے گئے قطعات ایک دوسرے سے ملتے جلتے ہیں کیونکہ لمبائی برابر ہے۔ جب کہ (شکل 7.4 (ii)) میں ایسا نہیں ہے۔

اگر دو قطعات کی لمبائی ایک جیسی (یعنی برابر) ہے تو وہ مماثل ہیں اور اگر دو قطعات مماثل ہیں تو ان کی لمبائی برابر ہو گی۔

اوپر دی گئی حقیقت کے مطابق جب دو قطعات مماثل ہوتے ہیں تو ہم اکثر کہتے ہیں کہ یہ قطعات برابر ہیں اور اس کو ہم لکھتے ہیں $AB = CD$ ۔ (دراصل اس سے ہمارا مطلب ہوتا ہے $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ ۔

## 7.4 زاویوں کی مماثلت (Congruence of Angles)

یہاں دیے گئے چار زاویوں کو دیکھیے (شکل 7.5)




شکل 7.5

$\angle PQR$ کو چھاپ کر اس کی ایک نقل بنائیے۔اس کو $\angle ABC$ سے منطبق کرنے کی کوشش کیجیے۔اس کے لیے پہلے Q کو B اور $\overrightarrow{QP}$ کو $\overrightarrow{BA}$ پر رکھیے۔ $\overrightarrow{QR}$ کہاں پڑے گی؟ یہ $\overrightarrow{BC}$ پر پڑے گی اس لیے $\angle PQR$، $\angle ABC$ سے پوری طرح سے میل کھا گیا۔یعنی $\angle ABC$ اور $\angle PQR$ مماثل ہیں۔

(نوٹ کیجیے ان دونوں مماثل زاویوں کی پیائش بھی برابر ہے)

ہم لکھتے ہیں $\angle ABC \cong \angle PQR$ (i)

یا $mABC = mPQR$ (یہاں پیائش 40° ہے)

اب آپ $\angle LMN$ کو چھاپ کر ایک نقل بنائیے۔اس کو $\angle ABC$ پر انطباق کرنے کی کوشش کیجیے۔M کو B پر اور کو $\overline{BA}$ پر رکھیے۔کیا $\overline{MN}$ ، $\overline{BC}$ پر آ رہا ہے؟ نہیں، یہاں ایسا نہیں ہو رہا ہے۔آپ نے دیکھا کہ $\angle ABC$ اور $\angle LMN$ ایک دوسرے کو پوری طرح نہیں ڈھک رہے ہیں۔اس لیے یہ مماثل نہیں ہیں (نوٹ کیجیے کہ یہاں $\angle ABC$ اور $\angle LMN$ کی پیائش برابر نہیں ہے)۔

$\angle XYZ$ اور $\angle ABC$ کے بارے میں کیا خیال ہے؟ (شکل (i) 7.5) میں شعاع $\overrightarrow{YX}$ اور $\overrightarrow{YZ}$ بالترتیب $\overrightarrow{BA}$ اور سے لمبی ہیں۔ آپ یہ بھی سوچ سکتے ہیں کہ $\angle ABC$ ، $\angle XYZ$ سے چھوٹا ہے۔ لیکن یاد کیجیے کہ شکل میں شعاع صرف سمت کو ظاہر کرتی ہے لمبائی کو نہیں۔ انطباق کرنے پر آپ کو پتہ چلے گا کہ یہ دونوں زاویے مماثل ہیں۔

اس کو ہم لکھیں گے $\angle ABC \cong \angle XYZ$ (ii)

یا

$$m\angle ABC = m\angle XYZ$$

(i) اور (ii) کو دیکھنے کے بعد ہم لکھ سکتے ہیں کہ

$\angle ABC \cong \angle PQR \cong \angle XYZ$

اگر دو زاویوں کی پیائش ایک جیسی ہے تو وہ مماثل ہونگے۔ اگر دو زاویے مماثل ہونگے تو ان کی پیائش برابر ہوگی۔

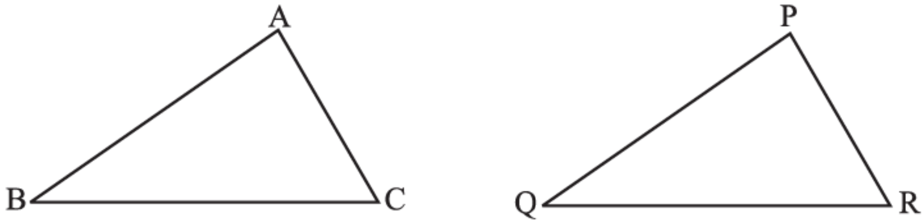
قطعہ خط کی طرح ہی زاویوں کی مماثلت بھی پوری طرح ان کی پیائش کی برابری پر منحصر ہے۔ اس لیے، یہ کہنے کے لیے دو زاویے مماثل ہیں، ہم اکثر کہتے ہیں کہ زاویے برابر ہیں اور اس کو ہم لکھتے ہیں

$\angle ABC = \angle PQR$ (یعنی $\angle ABC \cong \angle PQR$ )

## 7.5 مثلثوں کی مماثلت (Congruence of Triangles)

ہم نے دیکھا کہ جب دو قطعۂ خط مماثل ہوتے ہیں تو ان میں سے ایک، دوسرے کی پوری طرح نقل ہوتا ہے۔ اسی طرح دو زاویہ مماثل ہوتے ہیں اگر ان میں سے ایک دوسرے کی پوری طرح نقل ہو۔ ہم اس خیال کو اب مثلث تک لے کر جاتے ہیں۔

دو مثلث مماثل ہیں اگر وہ ایک دوسرے کی نقل ہوں اور جب ان کو انطباق کیا جائے تو وہ ایک دوسرے کو پوری طرح ڈھک لیں۔




شکل 7.6

$\Delta ABC$ اور $\Delta PQR$ کی شکل (Shape) اور سائز ایک جیسا ہے۔ یہ مماثل ہیں۔ اس لیے اس کو ہم ایسے ظاہر کر سکتے ہیں:

$$\Delta ABC \cong \Delta PQR$$

اس کا مطلب ہے کہ جب آپ $\Delta PQR$ کو $\Delta ABC$ پر رکھیں گے تو P،A پر Q،B پر اور R،C کے اوپر آئے گا اور ساتھ ہی ساتھ $\overline{AB}$ ، $\overline{PQ}$ پر $\overline{BC}$ ، $\overline{QR}$ پر $\overline{AC}$ ، $\overline{PR}$ پر آئے گا۔ اگر ایک دی گئی مطابقت کے تحت مثلث مماثل ہیں تو ان کے متناظر حصے (یعنی زاویے اور اضلاع) جو ایک دوسرے کے ثانی ہیں وہ برابر ہوں گے۔ لہٰذا، ان دونوں مماثل مثلثوں میں:

متناظر راسیں : A اور P، B اور Q، C اور R

متناظر اضلاع : $\overline{AB}$ اور $\overline{PQ}$ ، $\overline{BC}$ اور $\overline{QR}$ ، $\overline{AC}$ اور

متناظر زاویے : $\angle A$ اور $\angle P$ ، $\angle B$ اور $\angle Q$ ، $\angle C$ اور

اگر آپ $\Delta PQR$ کو $\Delta ABC$ پر اس طرح رکھیں گے کہ P،B پر آئے تو دوسرے راس بھی صحیح طریقے سے متناظر ہوں گے؟

یہ ضروری نہیں ہے! مثلث کی چھاپے سے کی گئی نقل لیجیے اور اس کو معلوم کرنے کی کوشش کیجیے۔

یہ ظاہر کرتا ہے کہ جب مثلثوں کی مماثلت کی جاتی ہے تو صرف زاویوں اور اضلاع کی پیمائش ہی کافی نہیں ہوتی ہے بلکہ راسوں کا ملنا بھی ضروری ہے۔ مندرجہ بالا صورت میں مطابقت ہے

$$A \leftrightarrow P,\ B \leftrightarrow Q,\ C \leftrightarrow R$$

اس کو ہم ایسے بھی لکھ سکتے ہیں $ABC \leftrightarrow PQR$

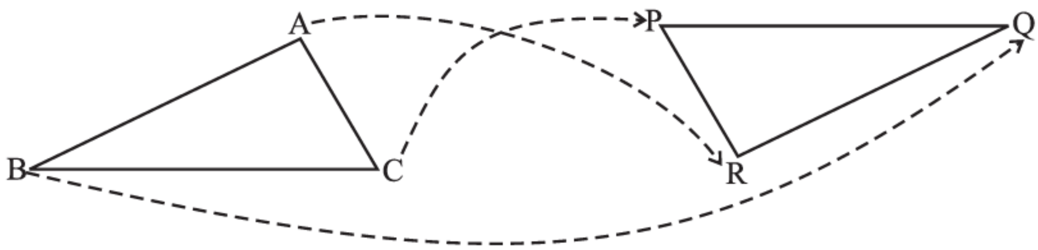
**مثال 1** $\Delta ABC$ اور $\Delta PQR$ مندرجہ ذیل مطابقت کے تحت مماثل ہیں:

$$ABC \leftrightarrow RQP$$

$\Delta ABC$ کے وہ حصے لکھیے جو مطابقت رکھتے ہوں:

(i) $\angle P$ سے (ii) $\angle Q$ سے (iii) $\overline{RP}$ سے

**حل** مطابقت کو بہتر طور پر سمجھنے کے لیے آیئے ایک ڈائیگرام (شکل 7.7) کا استعمال کرتے ہیں۔




شکل 7.7

مطابقت ہے $ABC \leftrightarrow RQP$ ۔ اس کا مطلب ہے

$A \leftrightarrow R$ ؛ $B \leftrightarrow Q$ اور

اس لیے، (i) $\overline{PQ} \leftrightarrow \overline{BC}$ (ii) $\angle Q \leftrightarrow \angle B$ اور (iii) $\overline{RP} \leftrightarrow \overline{AC}$

## سوچیے، بحث کیجیے اور لکھیے:

جب دو مثلث، جیسے ABC اور PQR دیے گئے ہوں تو اس میں کل ملا کر چھ ممکنہ مطابقتیں ہیں۔ ان میں سے دو ہیں

(i) $ABC \leftrightarrow PQR$ اور (ii) $ABC \leftrightarrow QRP$

کاغذ کے دو مثلث کاٹ لیجیے اور ان کی مدد سے باقی چاروں کی مطابقت لکھیے۔ کیا تمام مطابقتیں مماثلت کی طرف لے جاتی ہیں؟ اس کے بارے میں سوچیے۔

## مشق 7.1

1۔ مندرجہ ذیل بیانات مکمل کیجیے:

(a) دو قطعات مماثل ہیں اگر..................

(b) دو مماثل زاویوں میں سے ایک کی پیمائش $70°$ ہے تو دوسرے زاویے کی پیمائش کیا ہوگی..................۔

(c) جب ہم $\angle A = \angle B$ لکھتے ہیں، دراصل ہمارا مطلب ہوتا ہے...........۔

2۔ مماثل اشکال کے لیے روزمرہ کی زندگی سے کوئی دو مثالیں دیجیے۔

3۔ اگر مطابقت $ABC \leftrightarrow FED$ کے تحت $\Delta ABC \cong \Delta FED$ ہیں تو مثلث کے تمام متناظر حصے لکھیے۔

4۔ اگر $\Delta DEF \cong \Delta BCA$ تو $\Delta BCA$ کے وہ حصے لکھیے جو مطابقت رکھتے ہوں:

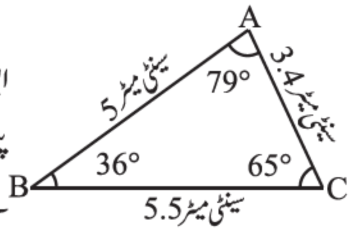
(i) $\angle E$ سے (ii) $\overline{EF}$ سے (iii) $\angle F$ سے (iv) $\overline{DF}$ سے

## 7.6 مثلث کی مماثلت کے معیار (Criteria for Congruence of Triangles)

ہم روزمرہ کی زندگی میں اگر مثلث نما ساخت اور مثلث کے پیٹرن کا استعمال کرتے ہیں، اس لیے یہ جاننا فائدہ مند ہوگا کہ کب دو مثلث مماثل ہوتے ہیں۔ اگر آپ کی کاپی میں دو مثلث بنے ہیں اور آپ یہ جانچنا چاہتے ہیں کہ کیا وہ مماثل ہیں تو آپ ان میں سے ایک کو ہمیشہ یا ہر بار کاٹ کر انطباق کا طریقہ استعمال نہیں کر سکتے ہیں۔ اس کے بجائے اگر ہم مماثلت کو مناسب پیمائش کی مدد سے دیکھیں تو یہ زیادہ کارآمد ہوگا۔ آیئے اس کو کر کے دیکھتے ہیں۔

### کھیل:

اپو اور ٹیپو ایک کھیل کھیل رہے ہیں۔ اپو نے ایک مثلث ABC بنایا (شکل 7.8) اور اس کے ہر ضلع اور زاویہ کی پیمائش پیمائش کو اس کے اوپر لکھ لیا۔ ٹیپو نے یہ نہیں دیکھا تھا۔ اپو نے ٹیپو کو چیلنج کیا کہ کیا وہ اس کے مثلث کی ایک نقل بنا سکتا ہے اگر اپو اس کو کچھ تھوڑی بہت معلومات دے دے۔ ٹیپو نے اپو کے ذریعے دی گئی معلومات کی مدد سے $\Delta ABC$ کا مماثل مثلث بنانے کی کوشش کی۔ کھیل شروع ہوتا ہے۔ دھیان سے ان کی باتیں اور کھیل کو دیکھیے۔

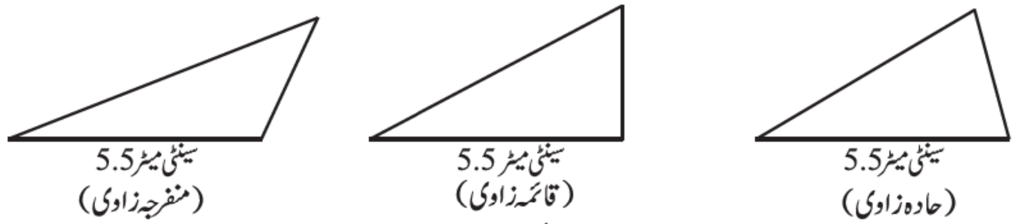



شکل 7.8

### SSS کھیل

**اپو:** $\Delta ABC$ کا ایک ضلع 5.5 سینٹی میٹر ہے۔

**ٹیپو:** اس معلومات سے تو میں بہت سارے مثلث بنا سکتا ہوں (شکل 7.9)۔ لیکن یہ ضروری نہیں ہے کہ وہ اپو کے $\Delta ABC$ کی نقل ہی ہوں۔ جو مثلث میں بنا سکتا ہوں وہ منفرجہ زاوی یا قائمہ زاوی یا حادہ زاوی مثلث ہو سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر یہاں پر کچھ بناتا ہوں۔



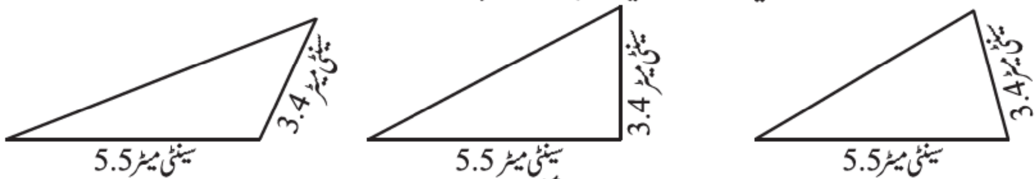

شکل 7.9

دوسرے اضلاع کے لیے میں کچھ من چاہی لمبائیاں لے لیتا ہوں۔ اس سے مجھے ایسے بہت سارے مثلث مل جائیں گے جن کے قاعدہ کی لمبائی 5.5 سنٹی میٹر ہو۔

اس لیے صرف ایک ضلع کی لمبائی سے میں $\Delta ABC$ کی نقل نہیں بنا سکتا ہوں۔

**اپو:** ٹھیک ہے، میں تم کو ایک اور ضلع کی لمبائی بھی بتا دیتا ہوں۔ $\Delta ABC$ کی دو اضلاع کی لمبائیاں 5.5 سنٹی میٹر اور 3.4 سنٹی میٹر ہیں۔

**ٹیپو:** یہ جانکاری بھی اس مقصد کو پورا کرنے کے لیے ناکافی ہے۔ میں اس جانکاری کی مدد سے بھی بہت سارے مثلث بنا سکتا ہوں جو $\Delta ABC$ کی نقل نہیں بھی ہو سکتے ہیں۔ اس کے لیے میں چند مثالیں یہاں بناتا ہوں۔

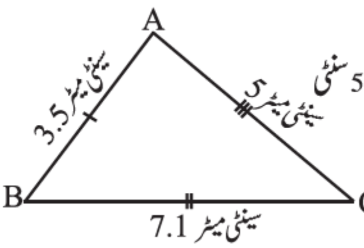



شکل 7.10

اگر صرف دو اضلاع کی لمبائیاں دی جائیں تو کوئی تمہارے مثلث کی صحیح نقل نہیں بنا سکتا ہے۔

**اپو:** ٹھیک ہے چلو میں تمہیں تینوں اضلاع کی لمبائیاں بتا دیتا ہوں $\Delta ABC$ میں AB=5 سنٹی میٹر، BC=5.5 سنٹی میٹر اور AC=3.4 سنٹی میٹر ہے۔

**ٹیپو:** میرے خیال میں اب ممکن ہے۔ میں کوشش کرتا ہوں۔




شکل 7.11

پہلے میں ایک رف تصویر بناتا ہوں جس سے مجھے یہ لمبائیاں یاد رکھنے میں آسانی ہوگی۔ میں $\overline{BC}$ کو 5.5 سنٹی میٹر لمبا بناتا ہوں۔

B کو مرکز مان کر میں 5 سنٹی میٹر نصف قطر کی ایک قوس لگاتا ہوں۔ نقط A اسی قوس پر کہیں ہونا چاہیے۔ C کو مرکز مان کر 3.4 نصف قطر کی قوس لگاتا ہوں۔ نقطہ A کو اس قوس پر بھی ہونا چاہیے۔

اس لیے، A دونوں قوس پر ہوگا۔ اس کا مطلب ہوا A دونوں قوسوں کا نقطہ تقاطع ہوگا۔ اب مجھے A، B اور C تینوں نقطوں کی جگہ معلوم ہوگئی ہے۔ ارے واہ! اب میں ان کو ملاؤں گا اور مجھے $\Delta ABC$ مل گیا۔ (شکل 7.11)

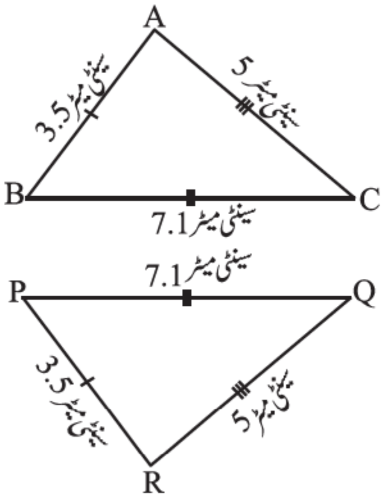
**اپو:** بہت اچھے، اس لیے کسی دیے گئے $\Delta ABC$ کی نقل بنانے کے لیے (یعنی $\Delta ABC$ کا مماثل مثلث بنانے کے لیے)، ہم کو تینوں اضلاع کی لمبائیوں کی ضرورت ہوتی ہے۔ کیا ہم اس شرط کو ضلع، ضلع، ضلع معیار کہہ سکتے ہیں؟

**ٹیپو:** کیوں نہیں، ہم اس کو چھوٹا کر کے SSS معیار ہی کہیں گے۔

## SSS مماثلت کا معیار

> اگر دی گئی مطابقت کے تحت ایک مثلث کے تین اضلاع دوسرے مثلث کے متناظر اضلاع کے برابر ہوں گے تو وہ مثلث مماثل کہلائیں گے۔

**مثال 2** مثلث ABC اور مثلث PQR میں 3.5=AB سنٹی میٹر، 7.1=BC سنٹی میٹر، 5=AC سنٹی میٹر، 7.1=PQ سنٹی میٹر، 5=QR سنٹی میٹر اور 3.5=PR سنٹی میٹر ہے۔ جانچ کیجیے کیا یہ دونوں مثلث مماثل ہیں یا نہیں۔ اگر ہاں، تو مماثلت کے اس تعلق کو علامتی شکل میں لکھیے۔



شکل 7.12

**حل** یہاں AB=PR (=3.5 سنٹی میٹر)

BC=PQ (=7.1 سنٹی میٹر)

اور AC=QR (=5 سنٹی میٹر)

یہ دکھا رہا ہے کہ ایک مثلث کے تین اضلاع دوسرے مثلث کے تین ضلعوں کے برابر ہیں۔ اس لیے، SSS مماثلت کے اصول کے ذریعے یہ دونوں مثلث مماثل ہیں۔ اوپر دیے گئے تین برابری کے تعلق سے یہ آسانی سے دیکھا جا سکتا ہے کہ $A \leftrightarrow R$ ، $B \leftrightarrow P$ اور

اس لیے $\Delta ABC \cong \Delta RPQ$

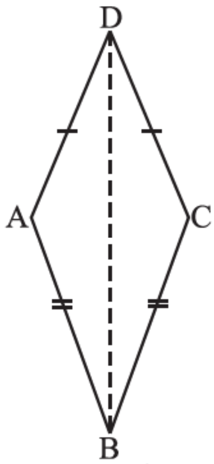
**ضروری نوٹ:** مماثل مثلث کے ناموں میں استعمال ہونے والے حروف کی ترتیب ان کے مطابقت کے رشتے کو ظاہر کرتی ہے۔ لہٰذا جب آپ لکھیں گے $\Delta ABC \cong \Delta RPQ$ تو آپ جانیں گے کہ A پر R، B پر P اور C پر Q آئے گا، اور ساتھ ہی ساتھ $\overline{AB}$ ، $\overline{RP}$ پر، $\overline{BC}$ ، $\overline{PQ}$ پر اور $\overline{AC}$ ، $\overline{RQ}$ پر آئے گا۔

**مثال 3** شکل 7.13 میں AD=CD اور AB=CB ہے۔

(i) $\Delta ABD$ اور $\Delta CBD$ کے برابر حصوں کے جوڑوں کو لکھیے۔

(ii) کیا $\Delta ABD \cong \Delta CBD$ ؟ کیوں اور کیوں نہیں؟

(iii) کیا BD، $\angle ABC$ کا ناصف ہے۔ وجہ بتائیے۔



شکل 7.13

**حل** (i) $\Delta ABD$ اور $\Delta CBD$ میں برابر حصوں کے تین جوڑے نیچے دیے گئے ہیں۔

AB=CB (دیا گیا ہے)

AD=CD (دیا گیا ہے)

اور $BD = BD$ (دونوں میں مشترک ہے)

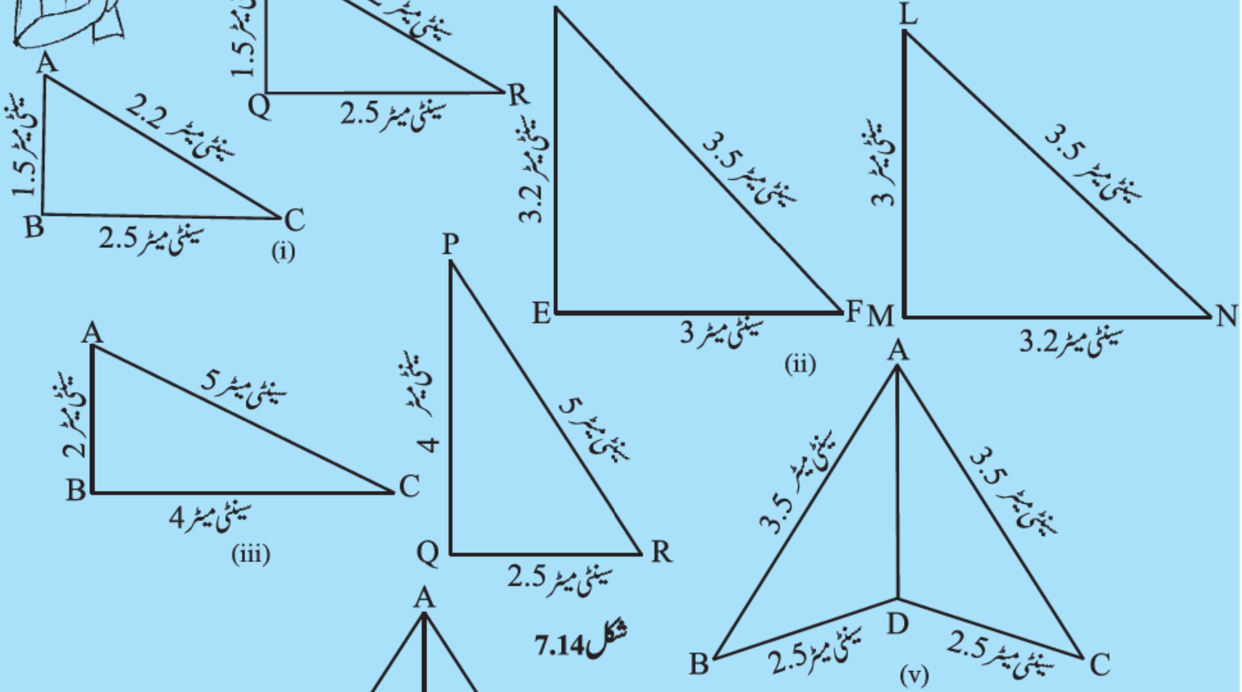
(ii) اوپر (i) کی مدد سے، $\Delta ABD \cong \Delta CBD$ (SSS مماثلت کا اصول)

(iii) $\angle ABD = \angle CBD$ (مماثل مملث کے متناظر حصے)

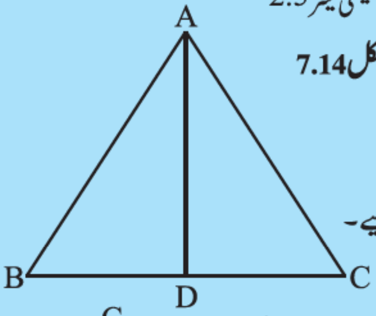
اس لیے، BD، $\angle ABC$ کا ناصف ہے

## کوشش کیجیے:

-1 شکل 7.14 میں مثلث کے اضلاع کی لمبائیاں دی گئی ہیں۔ SSS مماثلت کے اصول کا استعمال کر کے بتائیے کہ مثلثوں کا کون سا جوڑا مماثل ہے۔ مماثل کے لیے نتائج کو علامتی شکل میں لکھیے۔




شکل 7.14



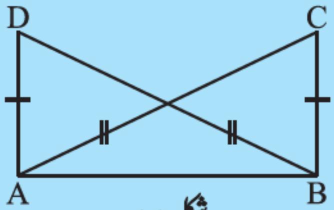
شکل 7.15

-2 شکل 7.15 میں AB=AC ہے اور $\overline{BC}$ کا وسطی نقطہ D ہے۔

(i) $\Delta ADB$ اور $\Delta ADC$ کے برابر حصوں کے تین جوڑے لکھیے۔

(ii) کیا $\Delta ADB \cong \Delta ADC$ ؟ وجہ بتائیے۔

(iii) کیا $\angle B = \angle C$ ؟ کیوں؟



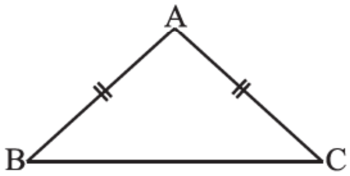
شکل 7.16

-3 شکل 7.16 میں $AC = BD$ اور $AD = BC$ ہے۔ مندرجہ ذیل بیانات میں سے کون سا بیان صحیح مطلب کے ساتھ لکھا گیا ہے۔

(i) $\Delta ABC \cong \Delta ABD$ (ii) $\Delta ABC \cong \Delta BAD$

## سوچیے، بحث کیجیے اور لکھیے :

ABC ایک مساوی الساقین مثلث ہے جس میں AB=AC ہے۔(تصویر 7.17)۔ $\Delta ABC$ کو چھاپ کر ایک نقل بنایئے اور اس کا نام بھی $\Delta ABC$ لکھیے۔




شکل 7.17

(i) $\Delta ABC$ اور $\Delta ACB$ کے برابر حصوں کے تین جوڑے لکھیے۔

(ii) کیا $\Delta ABC \cong \Delta ACB$ ؟ کیوں یا کیوں نہیں؟

(iii) کیا $\angle B = \angle C$ ؟ کیوں یا کیوں نہیں؟

اپو اور ٹیپو نے اپنے کھیل کو پھر تھوڑے بدلاؤ کے ساتھ دوبارہ شروع کیا۔

## SAS کھیل

اپو: آؤ اب مثلث کی نقل بنانے کے اصولوں کو تھوڑا بدل لیتے ہیں۔

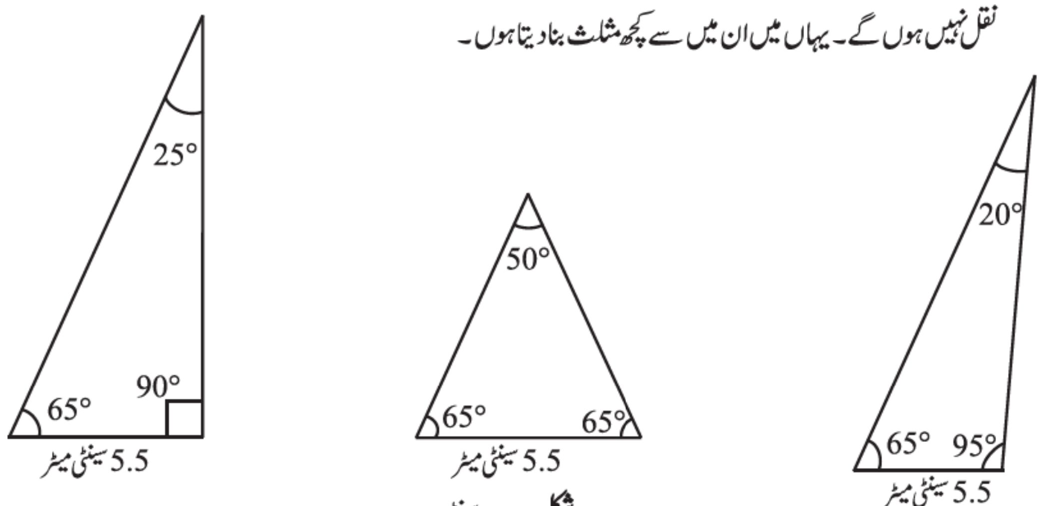
ٹیپو: ٹھیک ہے! چلو شروع کرو۔

اپو: تم یہ تو پہلے ہی دیکھ چکے ہو کہ خالی ایک ضلع کی لمبائی معلوم ہونا بیکار ہے۔

ٹیپو: یقیناً! ہاں۔

اپو: اس صورت حال میں، میں تم کو بتاتا ہوں کہ $\Delta ABC$ کے ایک ضلع کی لمبائی 5.5 سنٹی میٹر ہے اور ایک زاویہ $65°$ کا ہے۔

ٹیپو: یہ پھر نامکمل جانکاری دی ہے۔ تمہاری دی گئی جانکاری کی مدد سے میں بہت سارے مثلث بنا سکتا ہوں لیکن وہ $\Delta ABC$ کی نقل نہیں ہوں گے۔ یہاں میں ان میں سے کچھ مثلث بنا دیتا ہوں۔




شکل 7.18 سینٹی میٹر

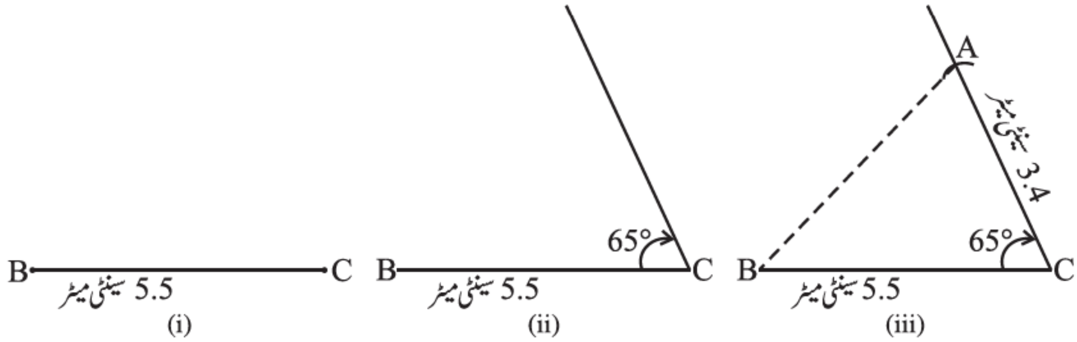
اپو: تو، اب ہم کیا کریں؟

ٹیپو: کچھ اور جانکاری کی ضرورت ہوگی۔

اپو: تو پھر مجھے اپنے اس بیان کو مزید درست کرنا ہوگا۔ $\Delta ABC$ میں دو اضلاع کی لمبائی 5.5 سنٹی میٹر اور 3.4 سنٹی میٹر ہے اور ان

کے درمیان کا زاویہ $65°$ ہے۔

ٹیپو: اس جانکاری سے مجھے مدد ملے گی۔ میں کوشش کرتا ہوں۔ سب سے پہلے میں 5.5 سنٹی میٹر لمبی $\overline{BC}$ بناتا ہوں۔ (شکل (7.19(i))۔ اب میں C پر $65°$ کا زاویہ بناتا ہوں۔ (شکل (7.19(ii))۔




شکل 7.19

ہاں، اب میں کر سکتا ہوں، A کو C سے 3.4 سنٹی میٹر کی دوری پر ہونا چاہیے۔ اسی زاویہ بنانے والے خط پر C کو مرکز مان کر 3.4 سینٹی میٹر سے میں ایک قوس لگاتا ہوں۔ یہ $65°$ کے خط کو A پر کاٹے گی۔

اب میں AB کو ملاتا ہوں اور مجھے $\Delta ABC$ مل گیا۔ (شکل (7.19(iii))

اپو: آپ نے ضلع۔ زاویہ۔ ضلع (side-angle-side) کا استعمال کیا، جس میں زاویہ دونوں اضلاع کے درمیان کا ہے۔

ٹیپو: ہاں! ہم اس معیار کا کیا نام رکھیں گے۔

اپو: SAS اصول۔ کیا تمہاری سمجھ میں آیا؟

ٹیپو: ہاں! یقیناً۔

### SAS مماثلت کا اصول

اگر ایک مطابقت کے تحت، ایک مثلث کے دو اضلاع اور ان کے درمیان کا زاویہ دوسرے مثلث کے متناظر اضلاع اور ان کے درمیان کا زاویہ برابر ہو تو یہ مثلث مماثل ہوں گے۔

**مثال 4** نیچے دو مثلثوں کے کچھ حصوں کی پیمائش دی گئی ہے۔ SAS مماثلت کے اصول سے جانچ کیجیے کہ دونوں مثلث مماثل ہیں یا نہیں۔ اگر مثلث مماثل ہیں تو ان کو علامتی شکل میں لکھیے۔

| | $\Delta ABC$ | $\Delta DEF$ |
|---|---|---|
| (a) | AB=7 سینٹی میٹر، BC=5 سینٹی میٹر، $\angle B = 50°$ | DE=5 سینٹی میٹر، EF=7 سینٹی میٹر، $\angle E = 50°$ |
| (b) | AB=4.5 سینٹی میٹر، AC=4 سینٹی میٹر، $\angle A = 60°$ | DE=4 سینٹی میٹر، FD=4.5 سینٹی میٹر، $\angle D = 55°$ |
| (c) | BC=6 سینٹی میٹر، AC=4 سینٹی میٹر، $\angle B = 35°$ | DF=4 سینٹی میٹر، EF=6 سینٹی میٹر، $\angle E = 35°$ |

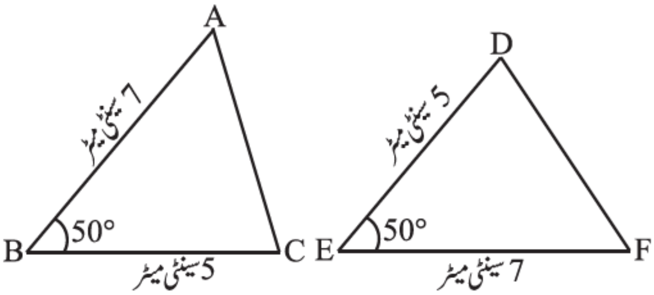
(رف شکل بنانا ہمیشہ ہی مددگار رہتا ہے، پیمائش کو لکھئے اور پھر سوال کو پورا کیجیے)

## حل

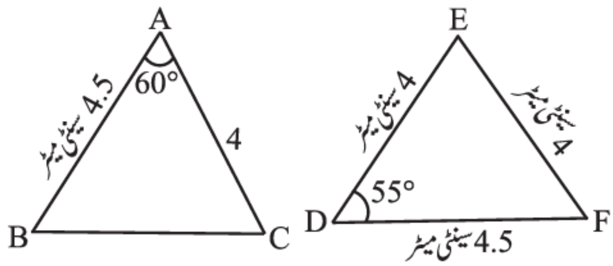
(a) یہاں AB=EF (=7 سینٹی میٹر)، BC=DE (=5 سینٹی میٹر)

اور ملفوف ∠B = ملفوف (=50°)، اور A ↔ F، B ↔ C، C ↔ D

اس لیے ΔABC ≅ ΔFED (SAS مماثلت کا اصول) (شکل 7.20)




(شکل 7.20)




(شکل 7.21)

(b) یہاں AB=FD اور AC=DE (شکل 7.21)

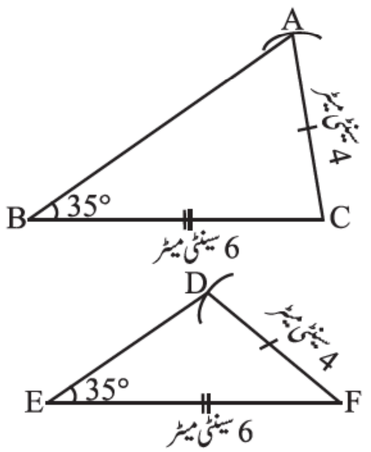
لیکن ملفوف ∠A ≠ ملفوف ∠D ۔ اس لیے ہم یہ نہیں کہہ سکتے کہ دونوں مثلث مماثل ہیں۔

(c) یہاں BC=EF، AC=DF اور ∠B = ∠E (شکل 7.22)

لیکن ∠B، اضلاع AC اور BC کے بیچ کا زاویہ نہیں ہے۔

اسی طرح ∠E، اضلاع $\overline{EF}$ اور $\overline{DF}$ کے بیچ کا زاویہ نہیں ہے۔

اس لیے SAS مماثلت کا اصول کو لاگو نہیں کیا جا سکتا ہے اور ہم یہ نتیجہ اخذ نہیں کر سکتے کہ دونوں مثلث مماثل ہیں۔




شکل 7.22

**مثال 5** شکل 7.23 میں AB=AC اور AD، ∠BAC کا ناصف ہے۔

(i) مثلث ADB اور مثلث ADC کے برابر حصوں کے تین جوڑوں کے نام لکھیے۔

(ii) کیا ΔADB ≅ ΔADC ؟ وجہ بتائیے۔

(iii) کیا ∠B = ∠C ہے؟ وجہ بتائیے۔

## حل

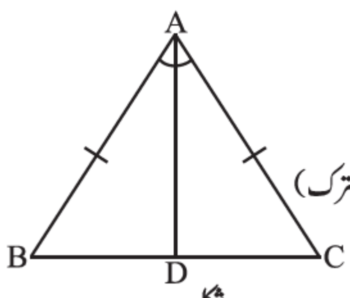
(i) برابر حصوں کے تین جوڑے ہیں۔

AB=AC (دیا گیا ہے)

∠BAD = ∠CAD (AD، ∠BAC کا ناصف ہے) اور AD=AD (مشترک)

(ii) ہاں، ΔADB ≅ ΔADC (SAS مماثلت کا اصول)

(iii) ∠B=∠C (مماثل مثلثوں کے متناظر حصے)



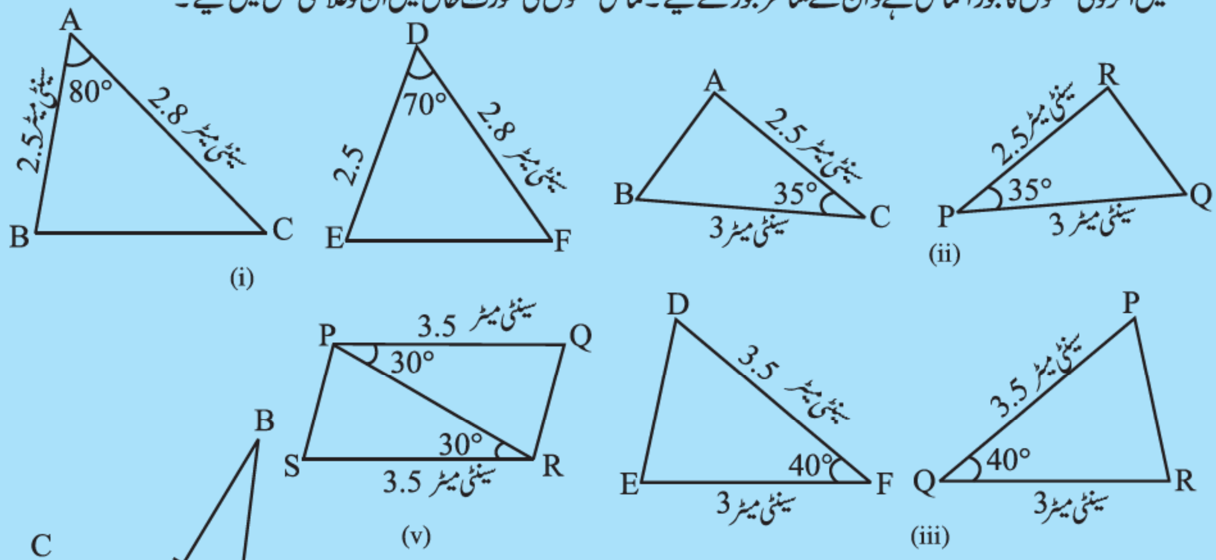

شکل 7.23

## کوشش کیجیے:

1۔ $\Delta DEF$ کے اضلاع $\overline{DE}$ اور $\overline{EF}$ کے درمیان میں کون سازاویہ ہے؟

2۔ SAS مماثلت کے اصول کی مدد سے آپ کو یہ ثابت کرنا ہے کہ $\Delta PQR \cong \Delta FED$ ۔ یہ دیا گیا ہے کہ PQ=FE اور RP=DF ۔ مماثلت کو ثابت کرنے کے لیے اور کس جانکاری کی ضرورت ہوگی؟

3۔ شکل 7.24 میں مثلثوں کے کچھ حصوں کی پیائش دی گئی ہے۔ SAS مماثلت کے اصول کی مدد سے دیکھیے کہ ہر ایک صورت حال میں اگر کوئی مثلثوں کا جوڑا مماثل ہے تو ان کے متناظر جوڑے لکھیے۔ مماثل مثلثوں کی صورت حال میں ان کو علامتی شکل میں لکھیے۔




شکل 7.24

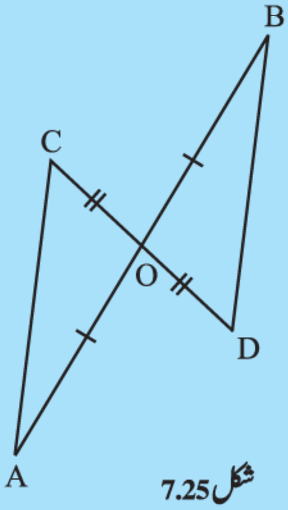
4۔ شکل 7.25 میں $\overline{AB}$ اور $\overline{CD}$ ایک دوسرے کو O پر تنصیف کر رہی ہیں۔

(i) دو مثلثوں AOC اور BOD میں برابر حصوں کے تین جوڑے لکھیے۔

(ii) مندرجہ ذیل بیانات میں سے کون سے درست ہیں؟

(a) $\Delta AOC \cong \Delta DOB$

(b) $\Delta AOC \cong \Delta BOD$




شکل 7.25

## ASA کھیل:

کیا آپ ABC کا مثلث بنا سکتے ہیں، اگر آپ کو معلوم ہو

(i) اس کا صرف ایک زاویہ؟ (ii) اس کے زاویوں میں سے صرف دو؟

(iii) دو زاویے اور کوئی بھی ایک ضلع؟ (iv) دو زاویے اور ان کے درمیان کا ضلع ؟

اوپر دیے گئے سوالات کو حل کرنے کی کوشش کیجیے۔ یہ ہمیں مندرجہ ذیل معیار تک پہنچائیں گے:

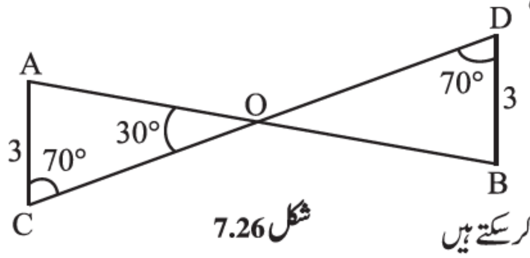
**ASA مماثلت کا اصول (ASA Congruence criterion)**
اگر کسی مطابقت کے تحت ایک مثلث کے دو زاویے اور ان کے درمیان کا ضلع دوسرے مثلث کے متناظر دو زاویوں اور ان کے درمیان کے ضلع کے برابر ہیں تو مثلث مماثل ہوں گے۔

**مثال 6** ASA مماثلت کے اصول کی مدد سے، ہم کو یہ ثابت کرنا ہے کہ $\Delta ABC \cong \Delta QRP$ اور یہ دیا گیا ہے کہ BC=RP۔ مماثلت قائم کرنے کے لیے اس کے علاوہ اور کون سی جانکاری کی ضرورت ہوگی؟

**حل** ASA مماثلت کے اصول کے لیے ہمیں ایسے دو دو زاویے جن کے درمیان اضلاع BC اور RP ملفوف ہیں، اس لیے باقی جانکاری جس کی ہمیں ضرورت ہے، درج ذیل دی گئی ہے۔

$\angle B = \angle R$

اور $\angle C = \angle P$



**شکل 7.26**

**مثال 7** شکل 7.26 میں کیا آپ ASA مماثلت کا اصول استعمال کر سکتے ہیں اور نتیجتاً کہہ سکتے ہیں کہ $\Delta AOC \cong \Delta BOD$ ؟

**حل** دو مثلثوں AOC اور BOD میں، $\angle C = \angle D$ (دونوں 70° ہیں)

اور $\angle AOC = \angle BOD = 30°$ (متقابل راسی زاویے)

اس لیے $\Delta AOC$ کا $\angle A$ برابر ہوگا۔

$\angle A = 180° - (70° + 30°) = 80°$ (مثلث کے زاویوں کے جوڑ کے اصول سے)

اسی طرح $\Delta BOD$ کا $\angle B$ برابر ہوگا۔

$\angle B = 180° - (70° + 30°) = 80°$

لہٰذا $\angle A = \angle B$، $AC = BD$ اور $\angle C = \angle D$

اب، $\angle A$ اور $\angle C$ کے درمیان میں ضلع AC ہے اور $\angle B$ اور $\angle D$ کے درمیان میں ضلع BD ہے۔

اس لیے، ASA مماثلت اصول کے تحت $\Delta AOC \cong \Delta BOD$

## ریمارک

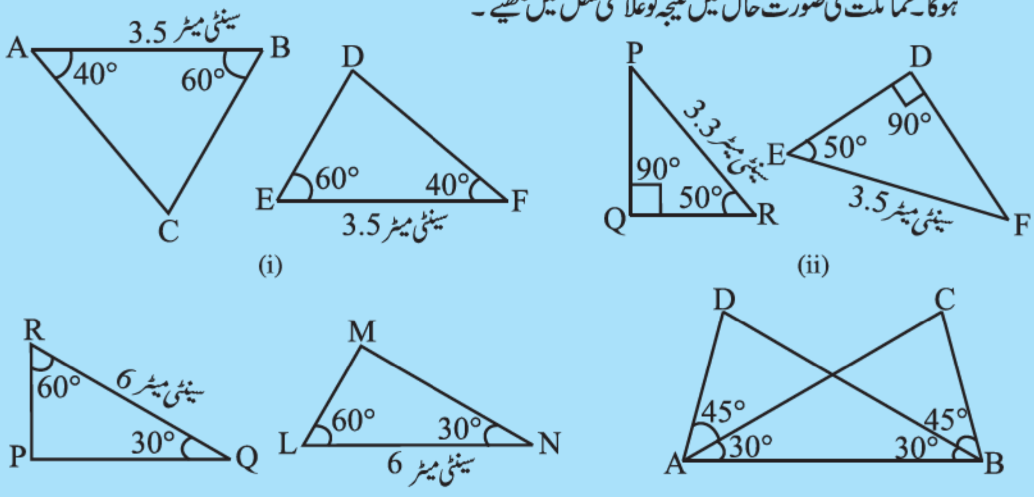
ایک مثلث میں اگر دو زاویے، دیے گئے ہوں تو آپ ہمیشہ تیسرا زاویہ معلوم کر سکتے ہیں۔ اس لیے جب کبھی بھی ایک مثلث کے دو زاویے اور ایک ضلع دوسرے مثلث کے متناظر دو زاویوں اور ایک ضلع کے برابر ہو تو آپ اس کو دو زاویوں اور ملفوف ضلع میں بدل سکتے ہیں اور پھر اس میں ASA مماثلت کا اصول لاگو کر سکتے ہیں۔

## کوشش کیجیے:

1۔ ΔMNP کے زاویے M اور N کے درمیان کا ضلع کون سا ہے؟

2۔ آپ ASA مماثلت کے اصول کے تحت $\Delta DEF \cong \Delta MNP$ کو ثابت کرنا چاہتے ہیں۔ آپ کو دیا گیا ہے کہ $\angle D = \angle M$ اور $\angle F = \angle P$ مماثلت ثابت کرنے کے لیے اور کون سی جانکاری کی ضرورت ہے؟ (ایک رف شکل بنائیے اور پھر کوشش کیجیے)

3۔ شکل 7.27 میں کچھ حصوں کی پیمائش دی گئی ہے۔ ASA مماثلت کا اصول لاگو کر کے بتائیے کہ مثلثوں کا کون سا جوڑا مماثل ہوگا۔ مماثلت کی صورت حال میں نتیجہ کو علامتی شکل میں لکھیے۔

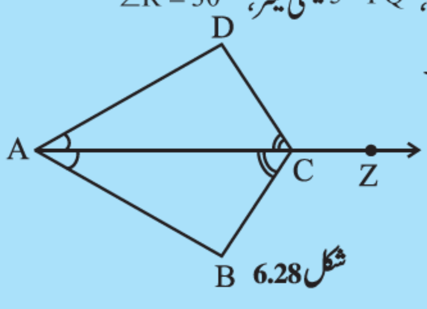



شکل 6.27

4۔ دو مثلثوں کے کچھ حصوں کی پیمائش درج ذیل ہے۔ جانچ کیجیے کیا دونوں مثلث ASA مماثلت کے اصول کے تحت مماثل ہیں یا نہیں۔ مماثلت کی صورت حال میں اس کو علامتی شکل میں لکھیے۔

| | ΔDEF | ΔPQR |
|---|---|---|
| (i) | $\angle D = 60°$ ، $\angle F = 80°$ ، DF=5 سینٹی میٹر | $\angle Q = 60°$ ، $\angle R = 80°$ ، QR= 5 سینٹی میٹر |
| (ii) | $\angle D = 60°$ ، $\angle F = 80°$ ، DF= 6 سینٹی میٹر | $\angle Q = 60°$ ، $\angle R = 80°$ ، QP= 6 سینٹی میٹر |
| (iii) | $\angle E = 80°$ ، $\angle F = 30°$ ، EF= 6 سینٹی میٹر | $\angle P = 80°$ ، PQ= 5 سینٹی میٹر، $\angle R = 30°$ |

5۔ شکل 7.28 میں شعاع AZ ، $\angle DAB$ اور $\angle DCB$ کی ناصف ہے۔




شکل 6.28

(i) مثلث BAC اور DAC میں برابر حصوں کے تین جوڑے لکھیے۔

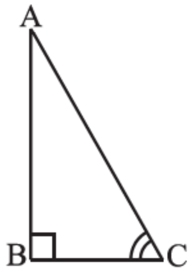
(ii) کیا $\Delta BAC \cong \Delta DAC$ ؟ وجہ بتائیے۔

(iii) کیا $AB = AD$ ؟ اپنے جواب کی وضاحت کیجیے۔

(iv) کیا $CD = CB$ ؟ وجہ بتائیے۔

## 7.7 قائمہ زاوی مثلثوں کے درمیان مماثلت
## (Congruence Among Right-angled Triangles)

دو قائمہ زاوی مثلثوں کی مماثلت کے لیے مخصوص توجہ کی ضرورت ہے۔اس طرح کے مثلثوں میں یقیناً زاویہ قائمہ تو برابر ہوتے ہی ہیں۔اس لیے مماثلت کا معیار آسان ہو جاتا ہے۔



شکل 6.29

کیا آپ $\Delta ABC$ بنا سکتے ہیں۔(شکل 7.29 میں دکھایا گیا ہے) جس میں $\angle B = 90°$ ہے۔اگر

(i) صرف BC دیا گیا ہو؟ (ii) صرف $\angle C$ دیا گیا ہو؟

(iii) $\angle A$ اور $\angle C$ دیے گئے ہوں؟ (iv) AB اور BC دیے گئے ہوں؟

(v) AC اور AB یا BC میں سے کوئی ایک دیا گیا ہو؟

ان کے رف اسکیچ بنا کر کرنے کی کوشش کیجیے۔آپ کو معلوم ہوگا کہ (iv) اور (v) کی مدد سے آپ مثلث بنا سکتے ہیں۔لیکن (iv) میں سیدھے سیدھے SAS اصول لگتا ہے۔جب کہ (v) میں کچھ نیا ہے۔یہ ہم کو مندرجہ ذیل معیار تک لے جاتا ہے۔

> **RHS مماثلت کا معیار (RHS Congruence criterion)**
>
> اگر ایک مطابقت کے تحت قائمہ زاوی مثلث کا وتر اور اس کا ایک ضلع بالترتیب دوسرے قائمہ زاوی مثلث کا وتر اور اس کا ایک ضلع برابر ہوں تو وہ مثلث مماثل ہوں گے۔

اس کو ہم RHS مماثلت کا اصول کیوں کہتے ہیں؟ اس کے بارے میں سوچیے۔

**مثال 8** دو مثلثوں کے کچھ حصوں کی پیمائش درج ذیل ہے RHS مماثلت کے اصول سے جانچ کیجیے کہ کیا دو مثلث مماثل ہیں یا نہیں۔مماثل مثلثوں کی صورت حال میں نتیجہ کو علامتی شکل میں لکھیے۔

| | $\Delta ABC$ | $\Delta PQR$ |
|---|---|---|
| (i) | $\angle B = 90°$ ، AC = 8 سینٹی میٹر، AB = 3 سینٹی میٹر | $\angle P = 90°$ ، PR = 3 سینٹی میٹر، QR = 8 سینٹی میٹر |
| (ii) | $\angle A = 90°$ ، AC = 5 سینٹی میٹر، BC = 9 سینٹی میٹر | $\angle Q = 90°$ ، PR = 8 سینٹی میٹر، PQ = 5 سینٹی میٹر |

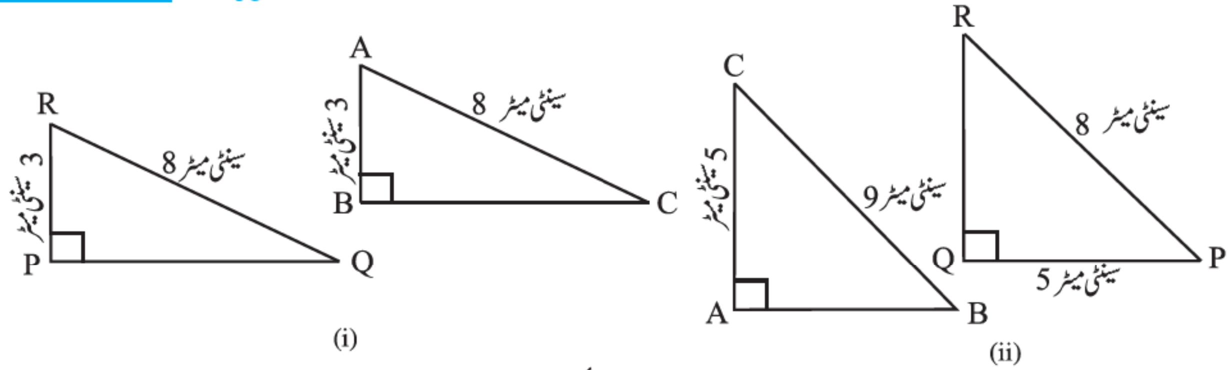
**حل**

(i) یہاں، $\angle B = \angle P = 90°$

وتر، AB= وتر، RQ (=8 سینٹی میٹر) اور

ضلع AB= ضلع RP (=3 سینٹی میٹر)

اس لیے، $\Delta ABC \cong \Delta RPQ$ (RHS مماثلت کے اصول سے)۔(شکل 7.30(i))



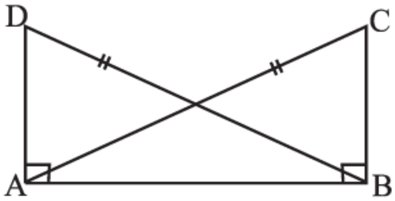

شکل 7.30

(ii) یہاں، $\angle A = \angle Q (= 90°)$ اور

ضلع $AC =$ ضلع $PQ$ (=5 سنٹی میٹر)

لیکن وتر $BC \neq$ وتر $PR$ (تصویر (7.30(ii))

اس لیے، یہ مثلث مماثل نہیں ہیں۔




شکل 7.31

**مثال 9** شکل 7.31 میں، $\overline{DA} \perp \overline{AB}$ ، $\overline{CB} \perp \overline{AB}$ اور $AC = BD$ ۔ $\Delta ABC$ اور $\Delta DAB$ کے برابر حصوں کے تین جوڑے لکھیے۔ مندرجہ ذیل بیانات میں سے کون سے درست ہیں؟

(i) $\Delta ABC \cong \Delta BAD$ (ii) $\Delta ABC \cong \Delta ABD$

**حل** برابر حصوں کے تین جوڑے ہیں:

$\angle ABC = \angle BAD$ (=90°)

$AC = BD$ (دیا گیا ہے)

$AB = BA$ (مشترک ضلع)

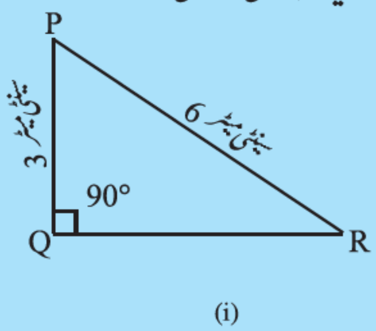
اوپر سے، $\Delta ABC \cong \Delta BAD$ (RHS مماثلت کے اصول سے)

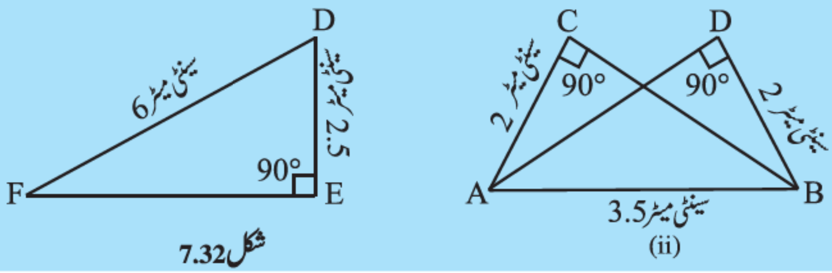
اس لیے، بیان (i) درست ہے۔

بیان (ii) بامعنی نہیں ہے۔ کیونکہ راسوں کے درمیان مطابقت نہیں ہے۔

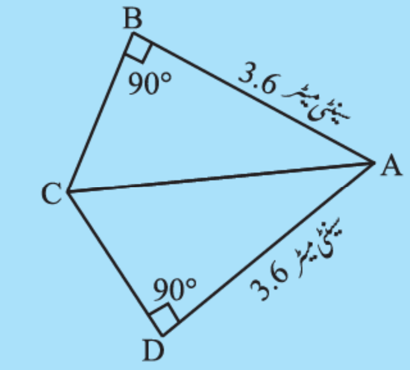
## کوشش کیجیے:

1۔ شکل 7.32 میں مثلثوں کے کچھ حصوں کی پیمائش دی گئی ہے۔ RHS مماثلت کے اصول کی مدد سے بتائیے کہ مثلثوں کے کون سے جوڑے مماثل ہیں۔ مماثل مثلثوں کی صورت میں نتیجہ کو علامتی شکل میں لکھئے۔

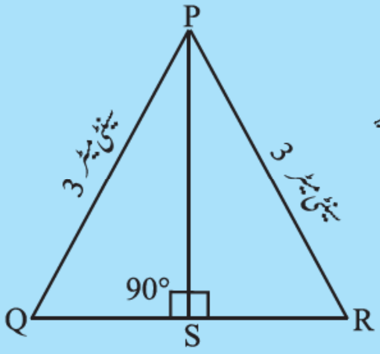



شکل 7.32




(iii)

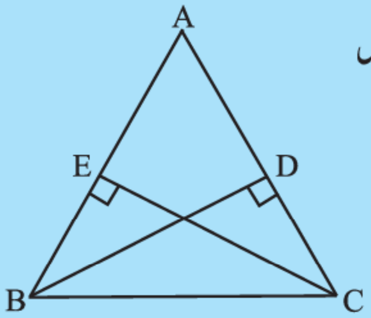



(v)

شکل 7.32

2۔ RHS مماثلت کے اصول کے تحت ہم کو یہ ثابت کرنا ہے کہ $\Delta ABC \cong \Delta RPQ$ ۔اگر ہمیں مندرجہ ذیل جانکاریاں دی گئی ہیں تو ہمیں اور کون کون سی جانکاری کی ضرورت ہوگی؟

$\angle B = \angle P = 90°$ اور $AB = RP$



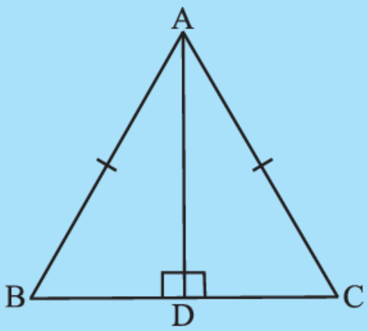

شکل 7.33

3۔ شکل 7.33 میں BD اور CE، $\Delta ABC$ کے ارتفاع ہیں جب کہ $BD = CE$ ۔

(i) $\Delta CBD$ اور $\Delta BCE$ میں برابر حصوں کے تین جوڑے لکھیے۔

(ii) کیا $\Delta CBD \cong \Delta BCE$ ؟ کیوں یا کیوں نہیں؟

(iii) کیا $\angle DCB = \angle EBC$ ؟ کیوں یا کیوں نہیں؟




شکل 7.34

4۔ ABC ایک مساوی الساقین مثلث ہے جس میں $AB = AC$ ہے اور AD اس کا ارتفاع ہے۔(شکل 7.34)

(i) $\Delta ADB$ اور $\Delta ADC$ کے برابر حصوں کے تین جوڑے لکھیے۔

(ii) کیا $\Delta ADB \cong \Delta ADC$ ؟ کیوں یا کیوں نہیں؟

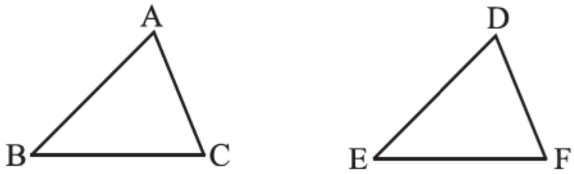
(iii) کیا $\angle B = \angle C$ ؟ کیوں یا کیوں نہیں؟

(iv) کیا $BD = CD$ ؟ کیوں یا کیوں نہیں؟

آیئے اب ہم ایسی مثالوں اور سوالوں کو دیکھتے ہیں جواب تک دیکھے گئے معیاروں پر منحصر ہیں۔

## مشق 7.2

1۔ مندرجہ ذیل میں آپ مماثلت کے کون سے اصول کا استعمال کریں گے؟

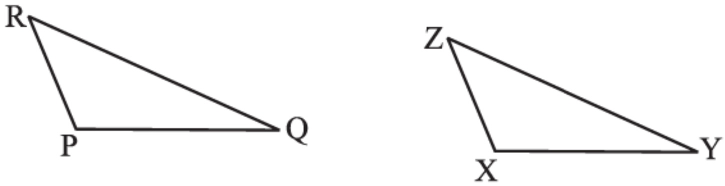



(a) دیا گیا ہے: $AC = DF$

$AB = DE$

$BC = EF$

اس لیے، $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

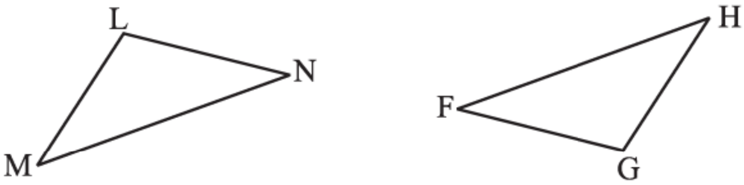



(b) دیا گیا ہے: $ZX = RP$

$RQ = ZY$

$\angle PRQ = \angle XZY$

اس لیے، $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$

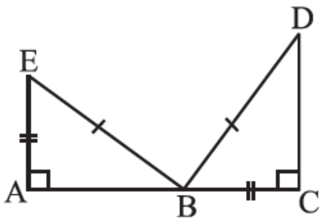



(c) دیا گیا ہے: $\angle MLN = \angle FGH$

$\angle NML = \angle GFH$

$ML = FG$

اس لیے، $\Delta LMN \cong \Delta GFH$



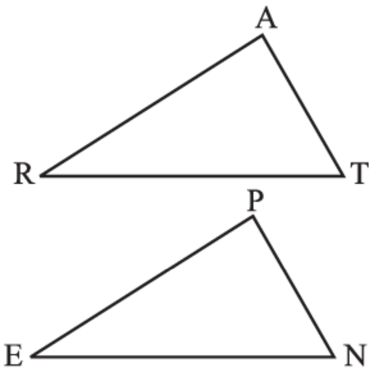

(d) دیا گیا ہے: $EB = DB$

$AE = BC$

$\angle A = \angle C = 90°$

اس لیے، $\Delta ABE \cong \Delta CDB$

2۔ آپ ثابت کرنا چاہتے ہیں کہ $\Delta ART \cong \Delta PEN$




(a) اگر آپ SSS مماثلت کا اصول لگانا چاہتے ہیں تو آپ کو یہ دکھانا ہوگا

(i) AR=   (ii) RT=   (iii) AT=

(b) اگر یہ دیا گیا ہے کہ $\angle T = \angle N$ اور آپ کو SAS اصول کا استعمال کرنا ہے، تو آپ دکھائیں گے

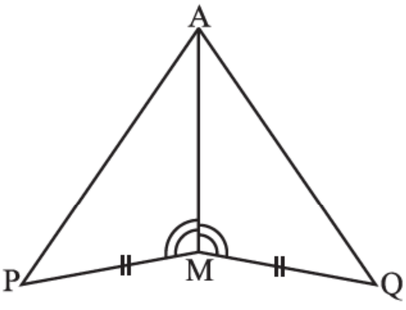
(i) RT=   اور   (ii) PN=

(c) اگر یہ دیا گیا ہے کہ AT=PN اور آپ کو ASA اصول کا استعمال کرنا ہے تو آپ کو ضرورت ہے

(i) ؟   (ii) ؟

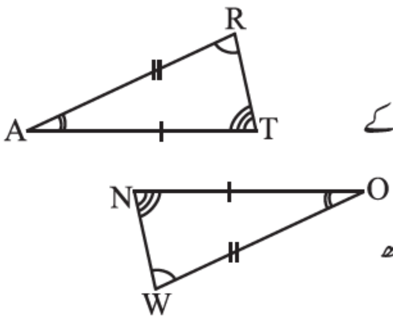
3۔ آپ کو دکھانا ہے $\Delta AMP \cong \Delta AMQ$

مندرجہ ذیل ثبوتوں میں چھوٹ گئے جوابات لکھیے۔



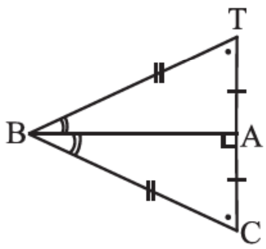

| اقدام | وجوہات |
|---|---|
| (i) PM = QM | (i) ... |
| (ii) ∠PMA = ∠QMA | (ii) ... |
| (iii) AM = AM | (iii) ... |
| (iv) ΔAMP ≅ ΔAMQ | (iv) ... |

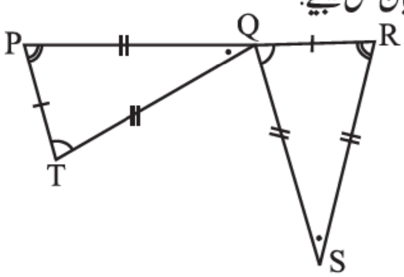
4۔ ΔABC میں $\angle A = 30^\circ$ ، $\angle B = 40^\circ$ اور $\angle C = 110^\circ$
ΔPQR میں $\angle P = 30^\circ$ ، $\angle Q = 40^\circ$ اور $\angle R = 110^\circ$
ایک طالب علم نے کہا کہ ΔABC ≅ ΔPQR ، AAA مماثلت کے اصول کے تحت ہوگا۔ کیا یہ مناسب ہے؟ کیوں یا کیوں نہیں؟




5۔ شکل میں دو مثلث مماثل ہیں۔ متناظر حصوں پر نشان لگے ہیں۔ ہم کیا لکھ سکتے ہیں۔ ? ≅ ΔRAT

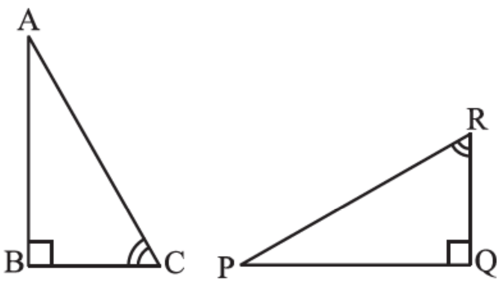
6۔ مماثلت کا بیان مکمل کیجیے:



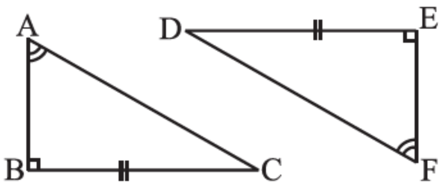

ΔQRS ≅ ?    ΔBCA ≅ ?

7۔ چوکور خانے والے کاغذ پر، برابر رقبوں والے دو مثلث بنائیے۔ جب کہ
(i) دونوں مثلث مماثل ہوں
(ii) دونوں مثلث مماثل نہ ہوں
آپ ان کے احاطوں کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟




8۔ دو مثلثوں کے رف اسکیچ بنائیے۔ جب کہ ان کے حصوں کے پانچ جوڑے مماثل ہوں لیکن پھر بھی یہ مثلث مماثل نہ ہوں۔

9۔ ΔABC اور ΔPQR مماثل مثلث ہیں۔ متناظر حصوں کا ایک اور جوڑا بتائیے۔ آپ اس میں کون سا اصول استعمال کریں گے؟




10۔ وضاحت کیجیے، کیوں
ΔABC ≅ ΔFED