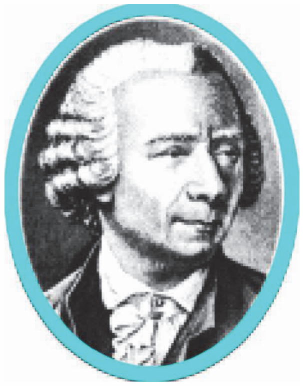
অধ্যায় ১২

ত্ৰিমাত্ৰিক জ্যামিতিৰ প্ৰাথমিক ধাৰণা
(INTRODUCTION TO THREE DIMENSIONAL GEOMETRY)

❖ *Mathematics is both the queen and the hand-maiden of all sciences–E.T. BELL* ❖

12.1 অৱতাৰণা (Introduction)

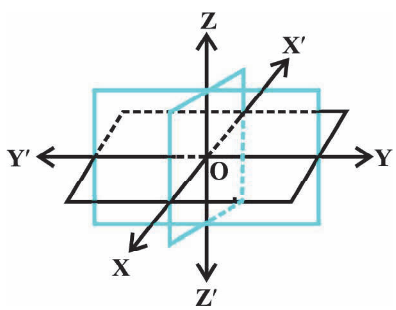


Leonhard Euler (1707-1783)

আমি জানো যে সমতল এখনত থকা বিন্দু এটাৰ অৱস্থান নিৰ্ণয়ৰ বাবে উক্ত সমতলৰ দুডাল পৰস্পৰ লম্বভাৱে কটাকটি কৰা ৰেখাৰ প্ৰয়োজন। এই ৰেখা দুডালক স্থানাংক অক্ষ আৰু বিন্দুটোৰ স্থান নিৰ্ণয়কাৰী সংখ্যা দুটাক অক্ষদ্বয় সাপেক্ষে স্থানাংক বোলা হয়। কিন্তু দৈনন্দিন জীৱনত সমতলীয় বিন্দুৰ ব্যৱহাৰতে আমাৰ কাম-কাজ সীমাবদ্ধ হৈ নাথাকে। উদাহৰণস্বৰূপে, ওপৰলৈ দলিয়াই দিয়া বল (ball) এটাৰ বিভিন্ন সময়ত অৱস্থান, অথবা আকাশীযান এখনৰ যাত্ৰাকালৰ বিভিন্ন সময়ত এখন ঠাইৰ পৰা আন এখন ঠাইলৈ উৰণৰ কথাকেই ল'ব পাৰোঁ।

সেইদৰে চিলিং এখনৰ পৰা ওলোমাই ৰখা বৈদ্যুতিক বাল্ব এটাৰ নিম্নতম বিন্দুটোৰ অৱস্থান নিৰ্ণয়ৰ বাবে, অথবা চিলিং ফেন এখনৰ তলৰ অংশৰ কেন্দ্ৰস্থান নিৰ্ণয়ৰ বাবে কোঠালিটোৰ দুখন লম্বভাৱে থকা দেৱালৰ পৰা উক্তবিন্দুলৈ দূৰত্ব নিৰ্ণয় কৰিলেই নহ'ব, কোঠালিৰ মজিয়াৰ পৰা উক্তবিন্দুলৈ দূৰত্বও উলিয়াব লাগিব। গতিকে বিন্দুটোৰ স্থান নিৰ্ণয়ৰ বাবে কোঠালিটোৰ মজিয়া আৰু ওচৰা উচৰি দুখন দেৱালৰ পৰা বিন্দুটোলৈ দূৰত্ব নিৰ্ণয়কাৰী তিনিটা সংখ্যাৰ প্ৰয়োজন, অকল দুটা সংখ্যাৰে নহয়। তিনিটা দূৰত্ব বুজোৱা এই তিনিটা সংখ্যাক তিনিখন স্থানাংক তল সাপেক্ষে বিন্দুটোৰ স্থানাংক বোলা হয়। এই অধ্যায়ত ত্ৰিমাত্ৰিক স্থানাংক জ্যামিতিৰ প্ৰাথমিক ধাৰণাবোৰ আলোচনা কৰা হ'ব।

12.2 ত্ৰিমাত্ৰিক স্থানত স্থানাংক অক্ষ আৰু স্থানাংক তল (Coordinate Axes and Coordinate planes in Three Dimensional Space)



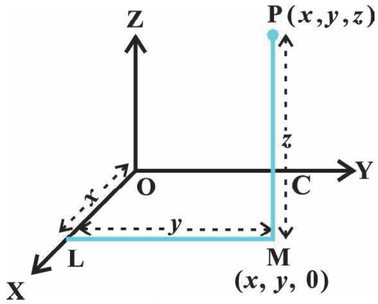
চিত্ৰ 12.1

O বিন্দুত পৰস্পৰ লম্বভাৱে ছেদ কৰা তিনিখন সমতল লোৱা হৈছে (চিত্ৰ 12.1)। এই তলতিনিখনে পৰস্পৰে ছেদ কৰা X′OX, Y′OY আৰু Z′OZ ৰেখাকেইডালক যথাক্ৰমে X, Y আৰু Z অক্ষ বোলা হয়। এই অক্ষৰেখাকেইডালেও পৰস্পৰে পৰস্পৰক লম্বভাৱে ছেদ কৰে। এইৰেখাকেইডালে আয়তীয় স্থানাংক প্ৰণালী (rectangular coordinate system) গঠন কৰে। XOY, YOZ আৰু ZOX সমতল কেইখনক যথাক্ৰমে XY-তল, YZ-তল আৰু ZX- তল বোলা হয় আৰু এই তিনিখনক স্থানাংক তল (coordinate planes) বোলা হয়। আমি কাগজখনৰ তলখনক XOY তল বুলি

লওঁ আৰু XOY তলৰ লম্বভাৱে $Z'OZ$ ৰেখাডাল লোৱা হয়। কাগজখনৰ তলখন অনুভূমিক হিচাপে ধৰি ললে, $Z'OZ$ ৰেখাডাল উলম্বৰেখা হ'ব। XY- তলৰ ওপৰফালে OZ ৰ দিশত নিৰ্ণিত দূৰত্বৰ জোখ ধনাত্মক আৰু তলৰফালে OZ' ৰ দিশত নিৰ্ণিত দূৰত্বৰ জোখ ঋণাত্মক বুলি লোৱা হয়। সেইদৰে ZX তলৰ সোঁফালে OY ৰ দিশত নিৰ্ণিত দূৰত্বৰ জোখ ধনাত্মক আৰু বাওঁফালে OY' ৰ দিশত নিৰ্ণিত দূৰত্বৰ জোখ ঋনাত্মক বুলি লোৱা হয়। YZ তলৰ সন্মুখৰ ফালে OX ৰ দিশত নিৰ্ণিত দূৰত্ব ধণাত্মক আৰু পিছফালে OX' ৰ দিশত নিৰ্ণিত দূৰত্ব ঋণাত্মক বুলি লোৱা হয়। O বিন্দুটোক স্থানাংক প্ৰণালীৰ মূলবিন্দু (origin) বোলা হয়। স্থানাংক-তল তিনিখনে ত্ৰিমাত্ৰিক স্থানক আঠটা ভাগত বিভক্ত কৰে। ইয়াৰ প্ৰতিটো ভাগক অষ্টাংশ (octant) বোলা হয়। অষ্টাংশবোৰক XOYZ, $X'OYZ$, $X'OY'Z$, $XOY'Z$, $XOYZ'$, $X'OYZ'$, $X'OY'Z$ আৰু $XOY'Z'$ বুলি নামকৰণ কৰা হয় আৰু এইবোৰক যথাক্ৰমে I, II, III, ...,VIII ৰে চিহ্নিত কৰা হয়।

12.3 *ত্ৰিমাত্ৰিক স্থানত বিন্দুৰ স্থানাংক (Coordinates of a Point in Space)*

স্থানাংক অক্ষ, স্থানাংক তল আৰু মূলবিন্দু সমন্বিতে এটা নিৰ্দিষ্ট স্থানাংক প্ৰণালী গ্ৰহণ কৰাৰ পিছত ত্ৰিমাত্ৰিক স্থানত লোৱা এটা বিন্দু সাপেক্ষে কেনেকৈ ইয়াৰ তিনিটা স্থানাংক (x, y, z) নিৰ্ণয় কৰা হয়, আৰু বিপৰীতক্ৰমে, তিনিটা নিৰ্দিষ্ট সংখ্যা (x, y, z) সাপেক্ষে কেনেকৈ এটা বিন্দুৰ স্থান নিৰ্ণয় কৰা হয়, সেই বিষয়ে এতিয়া আলোচনা কৰা হ'ব।

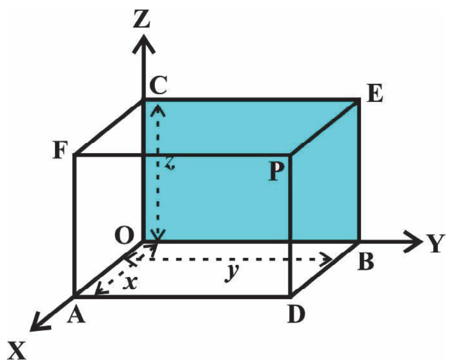


চিত্ৰ 12.2

ধৰাহ'ল ত্ৰিমাত্ৰিক স্থানত P এটা প্ৰদত্ত বিন্দু। P ৰ পৰা XY তললৈ PM লম্ব অংকন কৰা হ'ল, যাৰ পাদবিন্দু M টো XY তলত থাকে (চিত্ৰ 12.2)। M ৰ পৰা X অক্ষলৈ ML লম্ব অংকন কৰা হ'ল, যাৰ পাদবিন্দু L টো X অক্ষত থাকে। ধৰাহ'ল $OL = x$, $LM = y$ আৰু $MP = z$ । তেতিয়া x, y, z ক P বিন্দুৰ যথাক্ৰমে x, y আৰু z –স্থানাংক বোলা হয়। চিত্ৰ 12.2 ত প্ৰদৰ্শিত $P(x, y, z)$ বিন্দুটো XOYZ অষ্টাংশত আছে আৰু সেয়েহে x, y, z আটাইকেইটা ধনাত্মক। P বিন্দুটো অন্য অষ্টাংশত থাকিলে, উক্ত অষ্টাংশ সাপেক্ষে x, y, z ৰ চিন সলনি হ'ব। দেখা গ'ল যে ত্ৰিমাত্ৰিক স্থানত থকা প্ৰতিটো বিন্দু সাপেক্ষে বাস্তৱ সংখ্যাৰ এটা ক্ৰমযুক্ত ত্ৰয় (ordered triplet) (x, y, z) পোৱা যায়।

বিপৰীতক্ৰমে, এটা প্ৰদত্ত ক্ৰমযুক্ত ত্ৰয় (x, y, z) সাপেক্ষে ত্ৰিমাত্ৰিক স্থানত এটা বিন্দু P নিম্নলিখিত ধৰণে নিৰ্ণয় কৰা হয়।

প্ৰথমতে আমি x ৰ মান সাপেক্ষে X অক্ষত এটা বিন্দু L নিৰ্ধাৰণ কৰোঁ। তাৰ পিছত XY তলত M বিন্দুটো নিৰ্ধাৰণ কৰোঁ যাতে উক্ত বিন্দুটোৰ XY তলত স্থানাংক (x, y) হয়। মন কৰিব লগা যে LM ৰেখাখণ্ড X অক্ষৰ লম্ব বা Y অক্ষৰ সমান্তৰাল। M বিন্দুত অৱস্থান কৰাৰ পিছত XY তলৰ ওপৰত লম্ব MP অংকন কৰা হয় আৰু z সাপেক্ষে ইয়াৰ ওপৰত P বিন্দুৰ স্থান নিৰ্ণয় কৰা হয়। এইদৰে নিৰ্ণিত P বিন্দুটোৰ স্থানাংক হ'ব (x, y, z)। সেয়েহে, ত্ৰিমাত্ৰিক স্থানত অৱস্থিত বিন্দুবোৰ আৰু বাস্তৱ সংখ্যাৰ ক্ৰমযুক্ত ত্ৰয় (x, y, z) বোৰৰ মাজত এটা একৈকী সম্পৰ্ক আছে। বিকল্পভাৱে, P বিন্দুৰ মাজেৰে স্থানাংকতলবোৰৰ সমান্তৰাল ভাৱে আৰু X, Y, Z অক্ষক যথাক্ৰমে A, B আৰু C বিন্দুত ছেদ কৰাকৈ তিনিখন সমতল অংকন কৰা হ'ল (চিত্ৰ12.3)। ধৰাহ'ল $OA = x$, $OB = y$ আৰু $OC = z$। তেতিয়া P



চিত্ৰ 12.3

বিন্দুৰ স্থানাংক হ'ব x, y আৰু z। বিন্দুটো P(x, y, z) বুলি লিখা হয়। বিপৰীতক্ৰমে x, y আৰু z ৰ মানসাপেক্ষে অক্ষ ৰেখা তিনিডালৰ ওপৰত A, B, C বিন্দুকেইটা স্থাপন কৰি, বিন্দুকেইটাৰ মাজেৰে YZ তল, ZX তল আৰু XY তলৰ সমান্তৰালভাৱে ADPF, DBEP আৰু PECF সমতলকেইখন অংকন কৰা হ'ল। এই তলতিনিখনৰ ছেদ বিন্দু Pয়েই হ'ব প্ৰদত্ত (x, y, z) সাপেক্ষে নিৰ্দিষ্ট বিন্দুটো। মন কৰা উচিত যে ত্ৰিমাত্ৰিক স্থানত P(x, y, z) এটা যি কোনো বিন্দু হ'লে YZ, ZXআৰু XY তলৰ পৰা বিন্দুটোলৈ লম্ব-দূৰত্ব হ'ব যথাক্ৰমে x, y আৰু z।

☛ **টোকা** মূলবিন্দু O ৰ স্থানাংক হ'ল (o, o, o), X –অক্ষত অৱস্থিত যি কোনো বিন্দুৰ স্থানাংক হ'ল (x o, o) আৰু YZ তলত অৱস্থিত যি কোনো বিন্দুৰ স্থানাংক হ'ল (o, y, z)।

মন্তব্য এটা বিন্দুৰ স্থানাংকৰ চিনবোৰে বিন্দুটো কোন অষ্টাংশত থাকে, নিৰ্ণয় কৰে। নিম্নপ্ৰদত্ত সাৰণীত আঠটা অষ্টাংশত থকা বিন্দুৰ স্থানংকৰ চিনবোৰ দিয়া হৈছে।

সাৰণী 12.1

অষ্টাংশ / স্থানাংক	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
x	+	–	–	+	+	–	–	+
y	+	+	–	–	+	+	–	–
z	+	+	+	+	–	–	–	–

উদাহৰণ 1 চিত্ৰ 12.3 ত, P বিন্দুটো (2, 4, 5) হ'লে, F বিন্দুৰ স্থানাংক লিখাঁ।

সমাধান F বিন্দুটোৰ বাবে OY দিশত দূৰত্ব শূন্য। গতিকে F ৰ স্থানাংক হ'ল (2, 0, 5)।

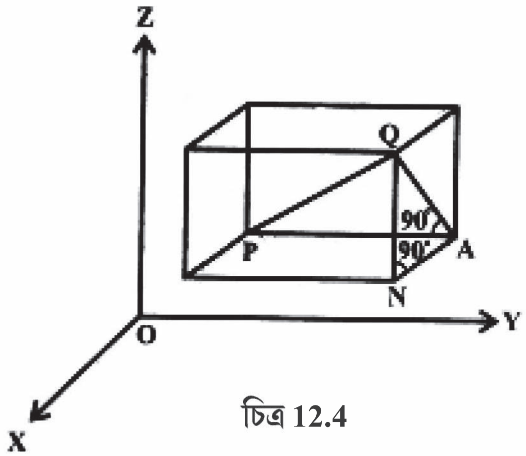
উদাহৰণ 2 (–3, 1, 2) আৰু (–3, 1, –2) বিন্দু দুটা কোণ অষ্টাংশত থাকে নিৰ্ণয় কৰাঁ।

সমাধান সাৰণী 12.1ৰ পৰা স্পষ্ট যে (–3, 1, 2) বিন্দুটো দ্বিতীয় অষ্টাংশ (II)ত আৰু (–3, 1, –2) বিন্দুটো ষষ্ঠ অষ্ঠাংশ (VI) ত থাকে।

অনুশীলনী- 12.1

1. এটা বিন্দু X অক্ষত আছে। ইয়াৰ স্থানাংক আৰু Z স্থানাংক কি হ'ব?
2. এটা বিন্দু ZX তলত আছে। ইয়াৰ Y স্থানাংক কি হ'ব?
3. নিম্ন প্ৰদত্ত বিন্দুবোৰ কোন অষ্টাংশত আছে লিখাঁঃ
   (1, 2, 3), (4, –2, 3), (4, –2, –5), (4, 2, –5), (– 4, 2, –5)
   (– 4, 2, 5), (–3, –1, 6), (2, – 4, –7)
4. খালী ঠাই পূৰ কৰাঁ ঃ
   (i) X-অক্ষ আৰু Y-অক্ষই নিৰ্ণয় কৰা সমতলখন হ'ল _____.
   (ii) XY-তলৰ বিন্দুৰ স্থানাংকৰ আৰ্হি হ'ব ______.
   (iii) স্থানাংক তলাবোৰে ত্ৰিমাত্ৰিক স্থানক______অষ্টাংশত বিভক্ত কৰে।

12.4 দুটা বিন্দুৰ মাজৰ দূৰত্ব (Distance between two points)



চিত্ৰ 12.4

আমি দ্বিমাত্রিক স্থানাংক প্রণালীত দুটা বিন্দুৰ মাজৰ দূৰত্ব উলিয়াইছোঁ। এতিয়া ত্রিমাত্রিক স্থানত দুটা বিন্দুৰ মাজৰ দূৰত্ব উলিওৱা হ'ব।

ধৰাহ'ল OX, OY আৰু OZ আয়তীয় স্থানাংক অক্ষ সাপেক্ষে P (x_1, y_1, z_1) আৰু Q(x_2, y_2, z_2) দুটা বিন্দু। P আৰু Q বিন্দুৰ মাজেৰে স্থানাংক তলৰ সমান্তৰাল ভাৱে সমতল অংকন কৰি PQ কৰ্ণ বিশিষ্ট (চিত্র 12.4) এটা আয়তীয় চৌপল (rectangular parallelopiped) অংকন কৰা হ'ল।

যিহেতু $\angle PAQ = 90^0$, ΔPAQ ৰ পৰা পোৱা যাব,

$$PQ^2 = PA^2+AQ^2 \quad ...(1)$$

আকৌ, $\angle ANQ = 90^o$ আৰু সেয়েহে, ΔAQN ৰ পৰা পোৱা যাব,

$$AQ^2 = AN^2 + NQ^2 \quad ...(2)$$

(1) আৰু (2) ৰ পৰা,

$$PQ^2 = PA^2+AN^2+NQ^2$$

কিন্তু $PA = y_2-y_1$, $AN = x_2-x_1$ আৰু $NQ = z_2 - z_1$

গতিকে, $PQ^2 = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2$

বা, $PQ = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

এই সূত্ৰটোৱে (x_1, y_1, z_1) আৰু (x_2, y_2, z_2) বিন্দু দুটাৰ মাজৰ দূৰত্ব প্ৰদান কৰে। বিশেষতঃ, $x_1 = y_1 = z_1= 0$ হ'লে P বিন্দুটো মূলবিন্দু O হ'ব আৰু তেতিয়া, $OQ = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$.

এইটোৱে মূলবিন্দু O আৰু যি কোনো বিন্দু $Q(x_2, y_2, z_2)$ ৰ মাজৰ দূৰত্ব প্ৰদান কৰে।

উদাহৰণ 3 P(1, –3, 4) আৰু Q (– 4, 1, 2) ৰ মাজৰ দূৰত্ব নিৰ্ণয় কৰাঁ।

সমাধান P(1, –3, 4) আৰু Q(– 4, 1, 2) ৰ মাজৰ দূৰত্ব PQ ৰ মান হ'ল,

$$PQ = \sqrt{(-4-1)^2+(1+3)^2+(2-4)^2}$$
$$= \sqrt{25+16+4}$$
$$= \sqrt{45}$$
$$= 3\sqrt{5} \text{ একক।}$$

উদাহৰণ 4 দেখুওৱাঁ যে P(–2, 3, 5), Q(1, 2, 3) আৰু R(7, 0, –1) বিন্দু কেইটা একৰেখীয়।

সমাধান আমি জানো যে বিন্দু কিছুমানক একৰেখীয় বোলা হয় যদিহে বিন্দুবোৰ এডাল ৰেখাৰ ওপৰত থাকে।

এতিয়া, $PQ = \sqrt{(1+2)^2+(2-3)^2+(3-5)^2} = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$

$$QR = \sqrt{(7-1)^2 + (0-2)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{36+4+16} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$$

আৰু $$PR = \sqrt{(7+2)^2 + (0-3)^2 + (-1-5)^2} = \sqrt{81+9+36} = \sqrt{126} = 3\sqrt{14}$$

দেখা গ'ল যে PQ + QR = PR । সেয়েহে P, Q আৰু R বিন্দু একৰেখীয়।

উদাহৰণ 5 A(3, 6, 9), B (10, 20, 30) আৰু C (25, – 41, 5) বিন্দুকেইটা এটা সমকোণী ত্ৰিভুজৰ শীৰ্ষবিন্দু হয়নে?

সমাধান দূৰত্ব সূত্ৰৰ সহায়ত পোৱা যাব,

$$AB^2 = (10-3)^2 + (20-6)^2 + (30-9)^2$$
$$= 49 + 196 + 441 = 686$$
$$BC^2 = (25-10)^2 + (-41-20)^2 + (5-30)^2$$
$$= 225 + 3721 + 625 = 4571$$
$$CA^2 = (3-25)^2 + (6+41)^2 + (9-5)^2$$
$$= 484 + 2209 + 16 = 2709$$

দেখাগ'লযে $CA^2 + AB^2 \neq BC^2$. সেয়েহে, ABC সমকোণী ত্ৰিভুজ নহয়।

উদাহৰণ 6 A আৰু B যথাক্ৰমে (3, 4, 5) আৰু (–1, 3, –7) বিন্দু হ'লে আৰু $PA^2 + PB^2 = 2k^2$ হ'লে, P বিন্দুবোৰৰ সংহতিটোৰ সমীকৰণ উলিওৱাঁ।

সমাধান ধৰাহ'ল P ৰ স্থানাংক (x, y, z)।

এতিয়া, $$PA^2 = (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2$$
$$PB^2 = (x+1)^2 + (y-3)^2 + (z+7)^2$$

প্ৰদত্ত চৰ্তমতে, $PA^2 + PB^2 = 2k^2$

বা $$(x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 + (x+1)^2 + (y-3)^2 + (z+7)^2 = 2k^2$$

অৰ্থাৎ, $$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x - 14y + 4z = 2k^2 - 109$$

এইটোৱেই হ'ল নিৰ্ণেয় সমীকৰণ।

অনুশীলনী 12.2

1. নিম্নপ্ৰদত্ত বিন্দু যুগলবোৰৰ মাজৰ দূৰত্ব নিৰ্ণয় কৰাঁ ঃ
   (i) (2, 3, 5) আৰু (4, 3, 1) (ii) (–3, 7, 2) আৰু (2, 4, –1)
   (iii) (–1, 3, –4) আৰু (1, –3, 4) (iv) (2, –1, 3) আৰু (–2, 1, 3)।
2. দেখুওৱাঁ যে (–2, 3, 5), (1, 2, 3) আৰু (7, 0,–1) বিন্দুকেইটা একৰেখীয়।
3. সত্যতা বিচাৰ কৰাঁ।
   (i) (0, 7, –10), (1, 6, –6) আৰু (4, 9, –6) বিন্দুকেইটা সমবাহু ত্ৰিভুজৰ শীৰ্ষবিন্দু,

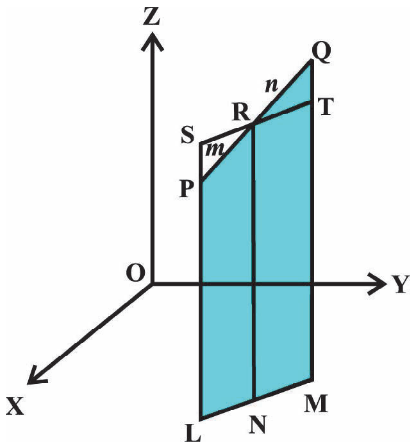
(ii) (0, 7, 10), (–1, 6, 6) আৰু (– 4, 9, 6) বিন্দুকেইটা সমকোণী ত্ৰিভুজৰ শীৰ্ষবিন্দু,

(iii) (–1, 2, 1), (1, –2, 5), (4, –7, 8) আৰু (2, –3, 4) বিন্দুকেইটা সামান্তৰিকৰ ত্ৰিভুজৰ শীৰ্ষবিন্দু।

4. (1, 2, 3) আৰু (3, 2, –1) বিন্দু দুটাৰ পৰা সমদূৰত্বত অৱস্থিত বিন্দুবোৰৰ সংহতিৰ সমীকৰণ উলিওৱা।

5. A(4, 0, 0) আৰু B(–4, 0, 0) বিন্দুদুটাৰ পৰা দূৰত্বৰ যোগফল 10 হোৱা P বিন্দুবোৰৰ সংহতিৰ সমীকৰণ উলিওৱাঁ।

12.5 ছেদাংশ সূত্ৰ (Section Formula)



চিত্ৰ 12.5

দ্বিমাত্ৰিক স্থানাংক জ্যামিতিত দুটা বিন্দু সংযোগী ৰেখাখণ্ডক নিৰ্দিষ্ট অনুপাতত অন্তৰ্বিভক্ত কৰা বিন্দুৰ স্থানাংক নিৰ্ণয়ৰ সূত্ৰ উলিওৱা হৈছে। এইটো এতিয়া ত্ৰিমাত্ৰিক স্থানাংক জ্যামিতিলৈ বিস্তাৰিত কৰা হ'ব।

ধৰাহ'ল $P(x_1, y_1, z_1)$ আৰু $Q(x_2, y_2, z_2)$ দুটা প্ৰদত্ত বিন্দু, $R(x, y, z)$ বিন্দুৰে PQ ৰেখাখণ্ডক m : n অনুপাতত অন্তৰ্বিভক্ত কৰিছে। XY সমতলৰ ওপৰত PL, QM আৰু RN লম্ব টনা হ'ল। স্পষ্টতঃ PL, RN আৰু QM সমান্তৰাল আৰু ইহঁতৰ পাদবিন্দু XY তলৰ ওপৰত থাকে। L, M আৰু N বিন্দু তিনিটা এডাল সৰল ৰেখাৰ ওপৰত থাকে আৰু এই ৰেখাডাল হ'ল PL, RN আৰু QM থকা সমতলখনৰ XY তলৰ লগত ছেদন। R বিন্দুৰ মাজেৰে LM ৰ সমান্তৰালকৈ ST ৰেখাখণ্ড অংকন কৰা হ'ল। ST ৰেখাই LP ক বৰ্হিভাৱে S বিন্দুত ছেদ কৰে আৰু MQ ক T বিন্দুত ছেদ কৰে (চিত্ৰ 12.5) মন কৰিব লগা যে LNRS আৰু NMTR দুটা আয়তক্ষেত্ৰ।

ΔPSR আৰু ΔQTR সদৃশ। সেয়েহে,

$$\frac{m}{n}=\frac{PR}{RQ}=\frac{SP}{QT}=\frac{SL-PL}{QM-TM}=\frac{NR-PL}{QM-NR}=\frac{z-z_1}{z_2-z}$$

ইয়াৰ পৰা পোৱা যায় $z=\dfrac{mz_2+nz_1}{m+n}$

সেইদৰে, ZX অৰু YZ তলৰ ওপৰত লম্ব টানি পোৱা যাব,

$$y=\frac{my_2+ny_1}{m+n} \text{ আৰু } x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n}$$

গতিকে, $P(x_1, y_1, z_1)$ আৰু $Q(x_2, y_2, z_2)$ সংযোগী ৰেখাখণ্ডক m : n অনুপাতত অন্তৰ্বিভক্ত কৰা R বিন্দুৰ স্থানাংক হ'ল

$$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}, \frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right)$$

R বিন্দুৰে PQ ৰেখাখণ্ডক $m : n$ অনুপাতত বহিৰ্বিভক্ত কৰিলে, n ৰ ঠাইত $-n$ বহুৱাই R বিন্দুৰ স্থানাংক পোৱা যাব

$$\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}, \frac{mz_2-nz_1}{m-n}\right)$$

ক্ষেত্ৰ 1 **মধ্যবিন্দুৰ স্থানাংক ঃ** R বিন্দুটো PQ ৰ মধ্যবিন্দু হ'লে, $m : n = 1 : 1$ হ'ব আৰু

সেয়েহে, $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$, $z = \frac{z_1 + z_2}{2}$ । গতিকে $P(x_1, y_1, z_1)$ আৰু $Q(x_2, y_2, z_2)$ সংযোগী ৰেখাখণ্ডৰ মধ্যবিন্দুৰ স্থানাংক হ'ল

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right) ।$$

ক্ষেত্ৰ 2 R বিন্দুৱে PQ ক $k : 1$ অনুপাতত বিভক্ত কৰিলে, $k = \frac{m}{n}$ বহুৱাই R বিন্দুৰ স্থানাংক

$\left(\frac{kx_2 + x_1}{k+1}, \frac{ky_2 + y_1}{k+1}, \frac{kz_2 + z_1}{k+1}\right)$ পোৱা যায়।

সাধাৰণতে দুটা বিন্দু সংযোগী ৰেখাৰ ওপৰত যিকোনো এটা বিন্দু ধৰিলৈ সমাধা কৰিব লগা অংকৰ বাবে বিন্দুটোৰ স্থানাংক এইদৰে লোৱা হয়।

উদাহৰণ 7 (1, –2, 3) আৰু (3, 4, –5) বিন্দু সংযোগী ৰেখা খণ্ডক 2 : 3 অনুপাতত (i) অন্তৰ্বিভক্ত, আৰু (ii) বহিৰ্বিভক্ত কৰা বিন্দুৰ স্থানাংক উলিওৱাঁ।

সমাধান (i) ধৰাহ'ল A (1, –2, 3) আৰু B (3, 4, –5) সংযোগী ৰেখা খণ্ডক P (x, y, z) বিন্দুৱে 2 : 3 অনুপাতত অন্তৰ্বিভক্ত কৰে। গতিকে,

$$x = \frac{2(3)+3(1)}{2+3} = \frac{9}{5}, \quad y = \frac{2(4)+3(-2)}{2+3} = \frac{2}{5}, \quad z = \frac{2(-5)+3(3)}{2+3} = \frac{-1}{5}$$

গতিকে নিৰ্ণেয় বিন্দুটো হ'ল $\left(\frac{9}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right)$

(ii) ধৰা হ'ল A (1, –2, 3) আৰু B (3, 4, –5) বিন্দু সংযোগী ৰেখা খণ্ডক P (x, y, z) বিন্দুৱে 2 : 3 অনুপাতত বহিৰ্বিভক্ত কৰে। তেতিয়া,

$$x = \frac{2(3)+(-3)(1)}{2+(-3)} = -3, \; y = \frac{2(4)+(-3)(-2)}{2+(-3)} = -14, \; z = \frac{2(-5)+(-3)(3)}{2+(-3)} = 19$$

গতিকে উলিয়াব লগা বিন্দুটো হ'ল (–3, –14, 19)

উদাহৰণ 8 ছেদাংশ সূত্ৰ প্ৰয়োগ কৰি প্ৰমাণ কৰাঁ যে (–4, 6, 10), (2, 4, 6) আৰু (–14, 0, – 2) বিন্দু তিনিটা একৰেখীয় ।

সমাধান ধৰা হ'ল প্ৰদত্ত বিন্দুকেইটা A(–4, 6, 10), B(2, 4, 6) আৰু C(14, 0, –2). ধৰা হ'ল P বিন্দুৱে AB ক $k : 1$ অনুপাতত বিভক্ত কৰে। P ৰ স্থানাংক হ'ব

$$\left(\frac{2k-4}{k+1}, \frac{4k+6}{k+1}, \frac{6k+10}{k+1}\right)$$

এতিয়া, k ৰ কোনো বিশেষ মানৰ বাবে P বিন্দুটো C ৰ লগত একে হয় নে নহয় পৰীক্ষা কৰা হওক।

$$\frac{2k-4}{k+1} = 14 \text{ ধৰিলে, } k=-\frac{3}{2} \text{ হয় ।}$$

$$k=-\frac{3}{2} \text{ হ'লে, } \frac{4k+6}{k+1}=\frac{4\left(-\frac{3}{2}\right)+6}{\left(-\frac{3}{2}\right)+1}=0$$

$$\text{আৰু } \frac{6k+10}{k+1}=\frac{6\left(-\frac{3}{2}\right)+10}{\left(-\frac{3}{2}\right)+1}=-2 \text{ হয় ।}$$

গতিকে C (14, 0, – 2) বিন্দুৱে ABক বহিৰ্ভাৱে 3:2 অনুপাতত বিভক্ত কৰে আৰু C বিন্দুটো P ৰ লগত একে হয়। সেয়েহে A,B আৰু C বিন্দু একৰেখীয়।

উদাহৰণ 9 (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) আৰু (x_3, y_3, z_3) শীৰ্ষ বিন্দু বিশিষ্ট ত্ৰিভুজটোৰ ভৰকেন্দ্ৰ (Centroid) উলিওৱাঁ।

সমাধান ধৰা হ'ল ABC ত্ৰিভুজটোৰ শীৰ্ষবিন্দু $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ আৰু $C(x_3, y_3, z_3)$ । ধৰা হ'ল BC ৰ মধ্যবিন্দু D. D ৰ স্থানাংক হ'ব

$$\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}, \frac{z_2+z_3}{2}\right)$$

ধৰা হ'ল ত্ৰিভুজটোৰ ভৰকেন্দ্ৰ G. G বিন্দুৱে AD মাধ্যিকাক 2:1 অনুপাতত বিভক্ত কৰে। গতিকে G ৰ স্থানাংক হ'ব

$$\left(\frac{2\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)+x_1}{2+1}, \frac{2\left(\frac{y_2+y_3}{2}\right)+y_1}{2+1}, \frac{2\left(\frac{z_2+z_3}{2}\right)+z_1}{2+1}\right)$$

$$\text{অথবা, } \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$$

উদাহৰণ 10 YZ তলে (4, 8, 10) আৰু (6, 10, – 8) বিন্দু সংযোগী ৰেখাখণ্ডক কি অনুপাতত বিভক্ত কৰে নিৰ্ণয় কৰাঁ।

সমাধান ধৰা হ'ল YZ-তলে A(4, 8, 10) আৰু B(6, 10, – 8) বিন্দু সংযোগী ৰেখাখণ্ডক P বিন্দুত k:1 অনুপাতত বিভক্ত কৰে। তেতিয়া Pৰ স্থানাংক হ'ব

$$\left(\frac{4+6k}{k+1}, \frac{8+10k}{k+1}, \frac{10-8k}{k+1}\right)$$

যিহেতু P বিন্দু YZ-তলত থাকে, ইয়াৰ x স্থানাংক শূন্য হ'ব, অৰ্থাৎ $\frac{4+6k}{k+1}=0$

বা $k=-\frac{2}{3}$

গতিকে YZ-তলে AB ক 2:3 অনুপাতত বহিৰ্বিভক্ত কৰে।

অনুশীলনী 12.3

1. $(-2, 3, 5)$ আৰু $(1, -4, 6)$ বিন্দু সংযোগী ৰেখাখণ্ডক 2:3 অনুপাতত (i) অন্তৰ্বিভক্ত, (ii) বহিৰ্বিভক্ত কৰা বিন্দুৰ স্থানাংক উলিওৱাঁ।
2. $P(3, 2, -4)$, $Q(5, 4, -6)$ আৰু $R(9, 8, -10)$ বিন্দুকেইটা একৰেখীয়। Q বিন্দুৱে PR-ক কি অনুপাতত বিভক্ত কৰে, নিৰ্ণয় কৰাঁ।
3. $(-2, 4, 7)$ আৰু $(3, -5, 8)$ বিন্দু সংযোগী ৰেখাখণ্ডক YZ-তলে কি অনুপাতত বিভক্ত কৰে, নিৰ্ণয় কৰাঁ।
4. ছেদাংশ সূত্ৰ প্ৰয়োগ কৰি দেখুওৱাঁ যে $A(2, -3, 4)$, $B(-1, 2, 1)$ আৰু $C(0, \frac{1}{3}, 2)$ বিন্দুকেইটা একৰেখীয়।
5. $P(4, 2, -6)$ আৰু $Q(10, -16, 6)$ সংযোগী ৰেখাখণ্ডক সমানে তিনিভাগত বিভক্ত কৰা বিন্দু দুটাৰ স্থানাংক উলিওৱাঁ।

বিবিধ উদাহৰণ

উদাহৰণ 11 দেখুওৱাঁ যে $A(1, 2, 3)$, $B(-1, -2, -1)$, $C(2, 3, 2)$ আৰু $D(4, 7, 6)$ বিন্দুকেইটা ABCD সামান্তৰিকৰ শীৰ্ষ বিন্দু, কিন্তু এইটো আয়ত নহয়।

সমাধান ABCD সামান্তৰিক হ'বলৈ, বিপৰীত বাহুবোৰ সমান হ'ব লাগিব। এতিয়া,

$$AB=\sqrt{(-1-1)^2+(-2-2)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{4+16+16}=6$$

$$BC=\sqrt{(2+1)^2+(3+2)^2+(2+1)^2}=\sqrt{9+25+9}=\sqrt{43}$$

$$CD=\sqrt{(4-2)^2+(7-3)^2+(6-2)^2}=\sqrt{4+16+16}=6$$

$$DA=\sqrt{(1-4)^2+(2-7)^2+(3-6)^2}=\sqrt{9+25+9}=\sqrt{43}$$

যিহেতু $AB = CD$ আৰু $BC = AD$, গতিকে ABCD এটা সামান্তৰিক।

এতিয়া, ABCD আয়ত নহয় বুলি প্ৰমাণ কৰিবলৈ আমি দেখুৱাব লাগে যে AC আৰু BD কৰ্ণ সমান নহয়।

$$AC=\sqrt{(2-1)^2+(3-2)^2+(2-3)^2}=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3},$$

$$BD=\sqrt{(4+1)^2+(7+2)^2+(6+1)^2}=\sqrt{25+81+19}=\sqrt{155}$$

যিহেতু $AC \neq BD$, ABCD আয়ত নহয়।

> ☛ টোকা AC আৰু BD কৰ্ণই পৰস্পৰ সমদ্বিখণ্ডিত কৰে বুলি প্ৰমাণ কৰিও ABCD সামান্তৰিক হয় বুলি দেখুৱাব পাৰি।

উদাহৰণ 12 P বিন্দুবোৰৰ সংহতিৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা, যদি A(3, 4, – 5) আৰু B(– 2, 1, 4) বিন্দুৰ পৰা P ৰ দূৰত্ব সমান হয়।

সমাধান ধৰা হ'ল P(x, y, z) বিন্দুৰ ক্ষেত্ৰত PA=PB

গতিকে $\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2+(z+5)^2}=\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2+(z-4)^2}$

বা, $(x-3)^2+(y-4)^2+(z+5)^2=(x+2)^2+(y-1)^2+(z-4)^2$

বা, $10x+6y-18z-29=0$

এইটোৱেই উলিয়াব লগা সমীকৰণ।

উদাহৰণ 13ABC ত্ৰিভুজৰ ভৰকেন্দ্ৰ হ'ল (1, 1, 1)। A আৰু Bৰ স্থানাংক যথাক্ৰমে (3, – 5, 7) আৰু (– 1, 7, – 6) হ'লে, Cৰ স্থানাংক উলিওৱাঁ।

সমাধান ধৰা হ'ল Cৰ স্থানাংক (x, y, z)। ভৰকেন্দ্ৰৰ স্থানাংক হ'ল (1, 1, 1), গতিকে

$$\frac{x+3-1}{3}=1,\ \frac{y-5+7}{3}=1,\ \frac{z+7-6}{3}=1$$

অৰ্থাৎ $x=1,\ y=1,\ z=2$

গতিকে Cৰ স্থানাংক হ'ল (1, 1, 2)

দ্বাদশ অধ্যায়ৰ বিবিধ অনুশীলনী

1. ABCD সামান্তৰিকৰ তিনিটা শীৰ্ষবিন্দু A(3, – 1, 2), B (1, 2, – 4) আৰু C(– 1, 1, 2) হ'লে, Dৰ স্থানাংক উলিওৱাঁ।
2. A(0, 0, 6), B(0, 4, 0) আৰু C(6, 0, 0) শীৰ্ষবিন্দু বিশিষ্ট ত্ৰিভুজটোৰ মাধ্যিকীবোৰৰ দীঘ উলিওৱা।
3. P($2a$, 2, 6), Q(– 4, $3b$, – 10) আৰু R(8, 14, $2c$) শীৰ্ষবিন্দু বিশিষ্ট ত্ৰিভুজ PQR ৰ ভৰকেন্দ্ৰ মূলবিন্দু হ'লে a, b আৰু c ৰ মান নিৰ্ণয় কৰাঁ।
4. P (3, – 2, 5) বিন্দুৰ পৰা $5\sqrt{2}$ দূৰত্বত Y-অক্ষৰ ওপৰত থকা এটা বিন্দুৰ স্থানাংক উলিওৱা।
5. x-স্থানাংক 4 বিশিষ্ট R বিন্দুটো P(2, – 3, 4) আৰু Q(8, 0, 10) বিন্দু সংযোগী ৰেখাখণ্ডৰ ওপৰত থাকে। R বিন্দুৰ স্থানাংক উলিওৱা।

[**সংকেত** ধৰা হ'ল R বিন্দুৱে PQক k:1 অনুপাতত বিভক্ত কৰে। R বিন্দুৰ স্থানাংক হ'ব $\left(\frac{8k+2}{k+1},\ \frac{-3}{k+1},\ \frac{10k+4}{k+1}\right)$]

6. A আৰু B বিন্দুৰ স্থানাংক যথাক্ৰমে (3, 4, 5) আৰু (– 1, 3, – 7) আৰু k এটা ধ্ৰুৱক। $PA^2+PB^2=k^2$ সম্পৰ্কটো সিদ্ধ কৰা P বিন্দুবোৰৰ সংহতিৰ সমীকৰণ উলিওৱা।

সাৰাংশ

- ত্ৰিমাত্ৰিক জ্যামিতিত, আয়তীয় কাৰ্টেজীয় স্থানাংক প্ৰণালী সাপেক্ষে স্থানাংক অক্ষ হ'ল পৰস্পৰ লম্বভাৱে থকা তিনিডাল সৰলৰেখা। এই অক্ষ কেইডালক X, Y আৰু Z-অক্ষ বোলা হয়।
- প্ৰতিযোৰ অক্ষই নিৰ্ধাৰণ কৰা সমতল তিনিখনক XY, YZ আৰু ZX-তল বোলা হয়।
- স্থানাংক তল তিনিখনে ত্ৰিমাত্ৰিক স্থানক আঠটা ভাগত বিভক্ত কৰে, ভাগবোৰক অষ্টাংশ বোলা হয়।
- ত্ৰিমাত্ৰিক স্থানাংক জ্যামিতত এটা বিন্দু Pৰ স্থানাংক (x, y, z) আৰ্হিত লিখা হয়। ইয়াত x,y আৰু z-এ যথাক্ৰমে P বিন্দুটোৰ YZ, ZX আৰু XY-তলৰ পৰা দূৰত্ব বুজায়।
- (i) X-অক্ষত থকা যিকোনো বিন্দুৰ স্থানাংকৰ আৰ্হি হ'ল $(x, 0, 0)$
  (ii) Y-অক্ষত থকা যিকোনো বিন্দুৰ স্থানাংকৰ আৰ্হি হ'ল $(0, y, 0)$
  (iii) Z-অক্ষত থকা যিকোনো বিন্দুৰ স্থানাংকৰ আৰ্হি হ'ল $(0, 0, z)$
- P (x_1, y_1, z_1) আৰু Q (x_2, y_2, z_2) বিন্দুৰ মাজৰ দূৰত্ব হ'ল

  $$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$
- P (x_1, y_1, z_1) আৰু Q (x_2, y_2, z_2) সংযোগী ৰেখাখণ্ডক $m:n$ অনুপাতত অন্তৰ্বিভক্ত আৰু বহিৰ্বিভক্ত কৰা R বিন্দুৰ স্থানাংক হ'ব যথাক্ৰমে

  $$\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}, \frac{mz_2 + nz_1}{m+n}\right) \text{ আৰু } \left(\frac{mx_2 - nx_1}{m-n}, \frac{my_2 - ny_1}{m-n}, \frac{mz_2 - nz_1}{m-n}\right)$$
- P (x_1, y_1, z_1) আৰু Q (x_2, y_2, z_2) সংযোগী ৰেখাখণ্ডৰ মধ্যবিন্দুৰ স্থানাংক হ'ল

  $$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$
- (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) আৰু (x_3, y_3, z_3) শীৰ্ষবিন্দু বিশিষ্ট ত্ৰিভুজটোৰ ভৰকেন্দ্ৰৰ স্থানাংক হ'ল

  $$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}\right)$$

ঐতিহাসিক টোকা

বিশ্লেষণাত্মক জ্যামিতিৰ পিতৃস্বৰূপ Rene Descartes (1596-1650) এ সঁচা অৰ্থত মৌলিকতাৰ দৃষ্টিকোণৰ পৰা 1637 চনতহে সামতলিক জ্যামিতিৰ বিষয়ে চিন্তা-চৰ্চা কৰিছিল। একেটা কথা সহ আৱিষ্কাৰক Pierre Fermat (1601-1665) আৰু La Hire (1640-1718)ৰ ক্ষেত্ৰতো প্ৰযোজ্য। যদিও তেওঁলোকৰ কৰ্মৰাজিৰ মাজত ত্ৰিমাত্ৰিক স্থানাংক জ্যামিতিৰ বিষয়ে লিখা-মেলা পোৱা যায়, বিষয়টোৰ ওপৰত বহল ব্যাখ্যা নাই। ত্ৰিমাত্ৰিক স্থানত স্থানাংকৰ ধাৰণা Descartes ৰ মনলৈ আহিছিল, কিন্তু তেওঁ এই ধাৰণাৰ কোনো গাণিতিক ৰূপ দিয়া

নাছিল। J. Bernoulli (1667-1748)এ 1715 চনত Leibnitz লৈ লিখা চিঠি এখনত আমি ব্যৱহাৰ কৰা তিনিখন স্থানাংক তলৰ উল্লেখ আছে। Antoinne Parent (1666-1716)এ 1700 চনত ফৰাচী একাডেমী (French Academy)ত দাখিল কৰা এখন গৱেষণামূলক কাকতত পোনপ্ৰথমবাৰৰ বাবে বিশ্লেষণাত্মক ত্ৰিমাত্ৰিক জ্যামিতিৰ (analytical solid geometry) ধাৰাবাহিক আৰু পদ্ধতিগত বিকাশ দাঙি ধৰে। L. Euler (1707-1783)এ তেওঁৰ 1748 চনত প্ৰকাশিত 'Introduction to Geometry' ৰ দ্বিতীয় খণ্ডৰ পৰিশিষ্টৰ পঞ্চম অধ্যায়ত ত্ৰিমাত্ৰিক স্থানাংক জ্যামিতিৰ ধাৰাবাহিক আৰু প্ৰণালীবদ্ধ বিৱৰণী প্ৰকাশ কৰে।

ঊনবিংশ শতিকাৰ মধ্যভাগৰ পৰাহে জ্যামিতি বিষয়টো তিনিটাতকৈ অধিক মাত্ৰালৈ বিস্তাৰিত কৰা হয় আৰু ইয়াৰ সুপ্ৰসিদ্ধ ব্যৱহাৰ **আইনষ্টাইন** (Einstein)ৰ 'আপেক্ষিকতাবাদ তত্ত্ব' (Theory of Relativity)ৰ 'স্থান-কাল নিৰৱচ্ছিন্নতা' (Space-time Continuum)ত দেখা যায়।