पाठ 6. त्रिभुज

प्रश्नावली 6.1

Q1. कोष्ठकों में दिए शब्दों में से सही शब्दों का प्रयोग करते हुए, रिक्त स्थानों को भरिए :

(i) सभी वृत्त ....होते है | (सर्वांगसम, समरूप)

(ii) सभी वर्ग......होते हैं| (समरूप, सर्वांगसम)

(iv) सभी .... त्रिभुज समरूप होते है | (समद्विबाहु, समबाहु)

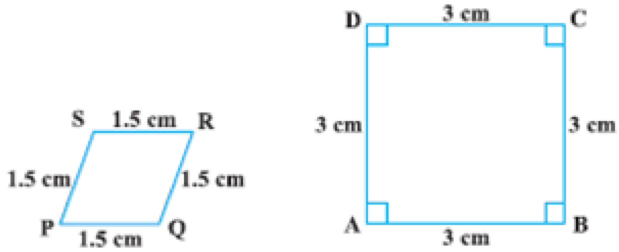
(v) भुजाओं की समान संख्या वाले दो बहुभुज समरूप होते हैं, यदि (i) उनके संगत कोण ....हो तथा (ii) उनकी संगत ......भुजाएँ हों | (बराबर, समानुपाती|

Q2. निम्नलिखित युग्मों के दो भिन्न -भिन्न उदाहरण दीजिए :

(i) समरूप आकृतियाँ

(ii) ऐसी आकृतियाँ जो समरूप नहीं हैं |

Q3. बताइए की निम्नलिखित चतुर्भुज समरूप है या नहीं :



आकृति 6.8

प्रश्नावली6.2

Q1. आकृति 6.17 (i) और (ii) में, DE || BC में AD ज्ञात कीजिए :

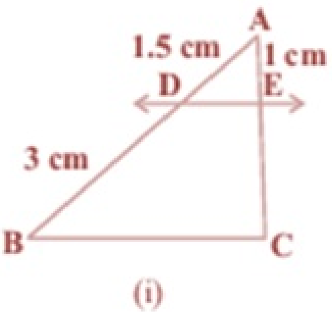
हल: (i)

Δ ABC में

DE || BC   दिया है |

अत: आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय से

$\therefore \quad \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE}$



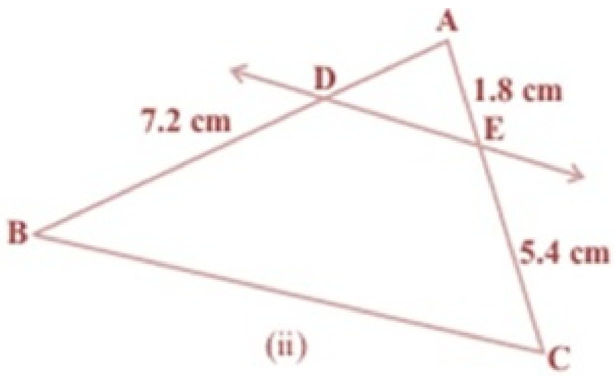
(i)

$\Rightarrow \quad \frac{1.5}{3} = \frac{1}{CE}$

$\Rightarrow \quad 1.5\ CE = 3$

$\Rightarrow \quad CE = \frac{3}{1.5} = \frac{30}{15} = 2$

$\Rightarrow \quad CE = 2$



(ii)

हल: (ii)

Δ ABC में

DE || BC दिया है |

अत: आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से

$\therefore \quad \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE}$

$\Rightarrow \quad \frac{1.5}{3} = \frac{1}{CE}$

$\Rightarrow \quad 1.5\ CE = 3$

$\Rightarrow \quad CE = \frac{3}{1.5} = \frac{30}{15} = 2$

$\Rightarrow \quad CE = 2$

Q2. किसी त्रिभुज PQR की भुजाओं PQ और PR पर क्रमशः बिन्दु E और F स्थित हैं | निम्नलिखित में से प्रत्येक स्थिति के लिए, बताइए कि क्या EF|| QR है |

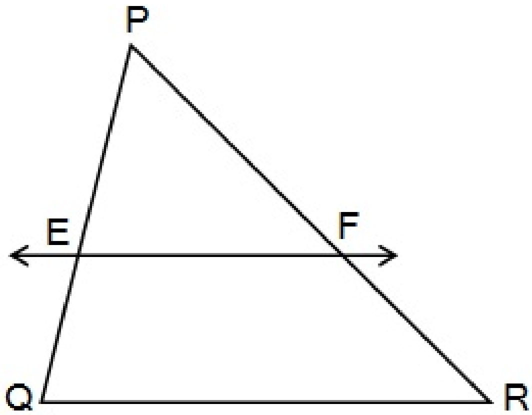
(i) PE = 3.9 cm, EQ= 3cm, PF = 3.6 और FR= 2.4 cm

(ii) PE = 4 cm, QE = 4.5 cm, PF = 8 cm और RF = 9 cm

(iii) PQ = 1.28 cm, PR = 2.56 cm, 0.18 cm और PF = 0.36 cm

हल Q2:

(i) PE = 3.9 cm, EQ= 3cm, PF = 3.6 और FR= 2.4 cm



$\therefore \frac{PE}{EQ} = \frac{PF}{FR}$

$\Rightarrow \frac{3.9}{3} = \frac{3.6}{2.4}$

$\Rightarrow \frac{39}{30} = \frac{36}{24}$

$\Rightarrow \frac{13}{10} = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow \frac{13}{10} \neq \frac{3}{2}$

इसलिए, EF|| QR नहीं है ।

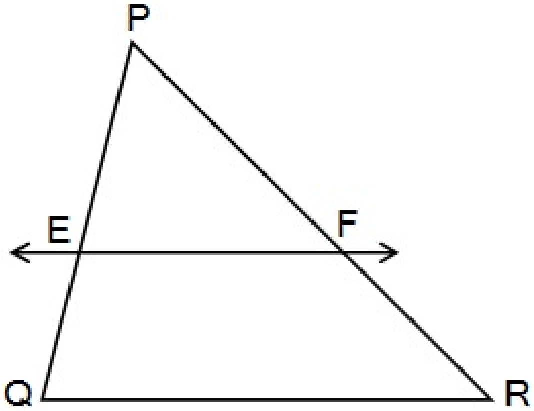
(ii) PE = 4 cm, QE = 4.5 cm, PF = 8 cm और RF = 9 cm

$\therefore \quad \frac{PE}{EQ} = \frac{PF}{FR}$

$\Rightarrow \quad \frac{4}{4.5} = \frac{8}{9}$

$\Rightarrow \quad \frac{40}{45} = \frac{8}{9}$

$\Rightarrow \quad \frac{8}{9} = \frac{8}{9}$



अत: आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय के विलोम से

इसलिए, EF|| QR है |

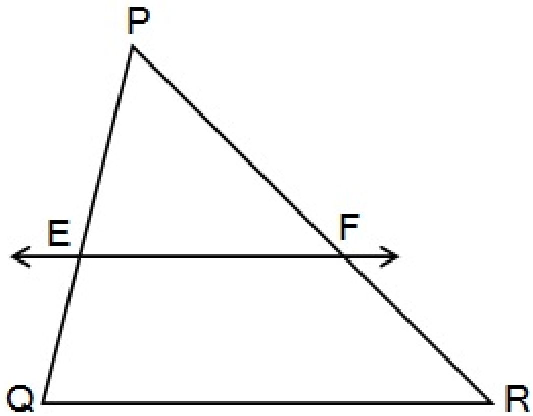
(iii) PQ = 1.28 cm, PR = 2.56 cm, PE = 0.18 cm और PF = 0.36 cm

$\therefore \quad \frac{PE}{PQ} = \frac{PF}{PR}$

$\Rightarrow \quad \frac{0.18}{1.28} = \frac{0.36}{2.56}$

$\Rightarrow \quad \frac{18}{128} = \frac{36}{256}$

$\Rightarrow \quad \frac{9}{64} = \frac{9}{64}$

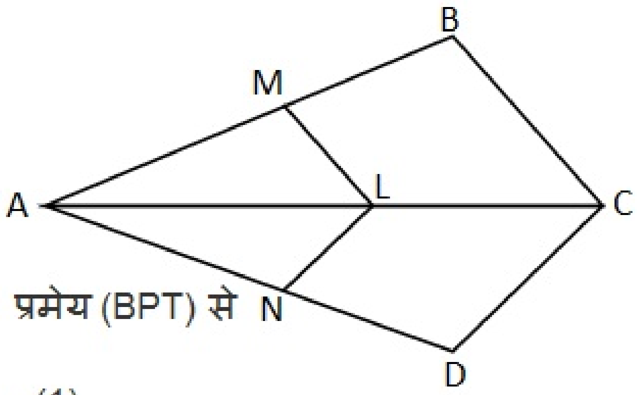


अत: आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय के विलोम से

इसलिए, EF|| QR है |

Q3. आकृति 6.18 में यदि LM || CB और LN || CD हो तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD}$ है |

हल:



Δ ABC में

ML || BC दिया है |

अत: आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से

$$\therefore \quad \frac{AM}{BM} = \frac{AL}{CL} \qquad .....(1)$$

Δ ACD में

NL || DC दिया है |

अत: आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से

$$\therefore \quad \frac{AN}{ND} = \frac{AL}{CL} \qquad .....(2)$$

समीकरण (1) तथा (2) से

$$\frac{AM}{BM} = \frac{AN}{ND}$$

व्युत्क्रमानुपाती लेने पर

$$\frac{BM}{AM} = \frac{ND}{AN}$$

दोनों तरफ 1 जोड़ने पर

$$\frac{BM}{AM} + 1 = \frac{ND}{AN} + 1$$

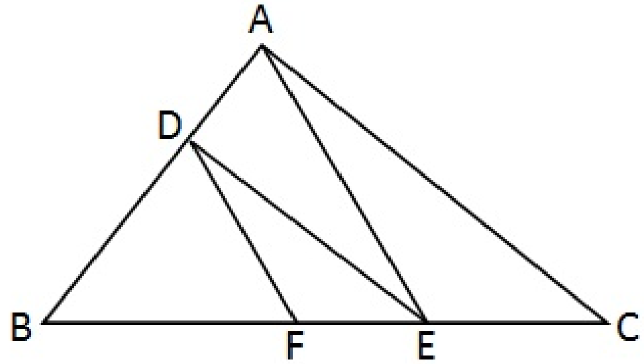
$$\frac{BM + AM}{AM} = \frac{ND + AN}{AN}$$

$$\frac{AB}{AM} = \frac{AD}{AN}$$

पुन: व्युत्क्रमानुपाती लेने पर

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD}$$ **Proved**

Q4. आकृति 6.19 में DE || AC और DF || AE है | सिद्ध कीजिए कि $\frac{BF}{FE} = \frac{BE}{EC}$ है



हल:

Δ ABC में

DE || AC दिया है |

अत: आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से

$$\therefore \quad \frac{BD}{AD} = \frac{BE}{EC} \qquad .....(1)$$

Δ ABE में

DF || AE दिया है |

अत: आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से

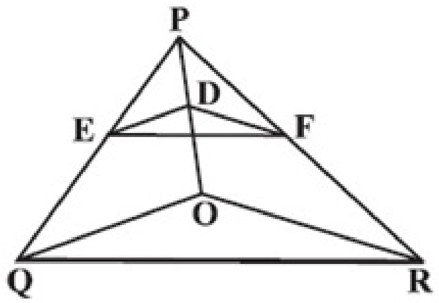
$$\therefore \quad \frac{BD}{AD} = \frac{BF}{FE} \qquad .....(2)$$

समीकरण (1) तथा (2) से

$$\frac{BF}{FE} = \frac{BE}{EC}$$

Q5. आकृति 6.20 में DE || OQ और OR है | दर्शाइए की EF || QR है |

हल:



Δ POQ में

DE || OQ दिया है |

अत: आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से

$\therefore \quad \frac{PE}{EQ} = \frac{PD}{DO}$ .....(1)

Δ POR में

DF || OR दिया है |

अत: आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से

$\therefore \quad \frac{PF}{FR} = \frac{PD}{DO}$ .....(2)

समीकरण (1) तथा (2) से

$$\frac{PE}{EQ} = \frac{PF}{FR}$$

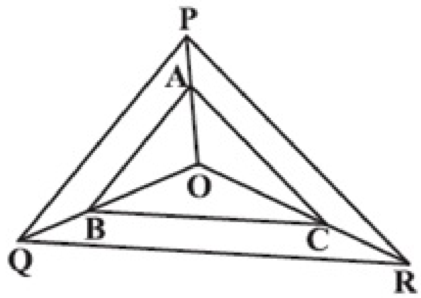
चूँकि भुजाएँ समानुपातिक है |

इसलिए, आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) के विलोम से

EF || QR **Proved**

Q6. आकृति 6.21 में क्रमशः OP, OQ और OR पर स्थित बिन्दु A,B और C इस प्रकार है कि AB || PQ और AC || PR है | दर्शाइए कि BC || QR है |

हल:



Δ POQ में,

AB || PQ दिया है |

अत: आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से

$$\therefore \quad \frac{OA}{AP} = \frac{OB}{BQ} \qquad \text{.....(1)}$$

Δ POR में

AC || PR दिया है |

अत: आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से

$$\therefore \quad \frac{OA}{AP} = \frac{OC}{CR} \qquad \text{.....(2)}$$

समीकरण (1) तथा (2) से

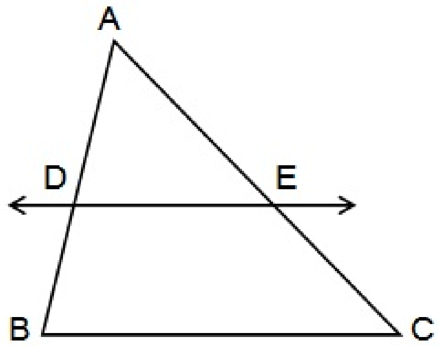
$$\frac{OB}{BQ} = \frac{OC}{CR}$$

चूँकि भुजाएँ समानुपातिक है |

इसलिए, आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) के विलोम से

BC || QR **Proved**

Q7. प्रमेय 6.1 का प्रयोग करते हुए सिद्ध कीजिए कि एक त्रिभुज की एक भुजा के मध्य -बिन्दु से होकर दूसरी भुजा के समांतर खींची गई रेखा तीसरी भुजा को समद्विभाजित करती है |(याद कीजिए की आप इसे कक्षा IX में सिद्ध कर चुके हैं|)



हल:

दिया है : ABC एक त्रिभुज है जिसकी

भुजा AB का मध्य-बिंदु D है और DE || BC है |

सिद्ध करना है : AE = EC

प्रमाण : Δ ABC में

AD = BD ………….. (1) दिया है |

DE || BC दिया है |

अत: आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से

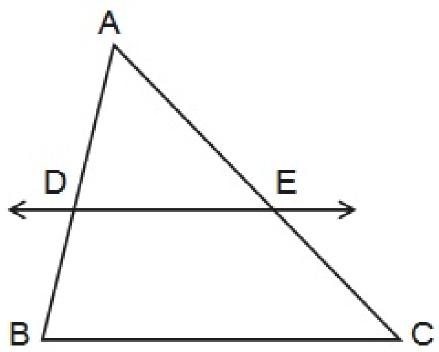
$$\therefore \quad \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE}$$

अथवा $\frac{AD}{AD} = \frac{AE}{CE}$ (समीकरण 1 से)

अथवा $\frac{1}{1} = \frac{AE}{CE}$ (Bi-cross multiplication)

$\Rightarrow$ AE = EC **Proved**

Q8. प्रमेय 6.2 का प्रयोग करते हुए सिद्ध कीजिए की एक त्रिभुज की किन्ही दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा तीसरी भुजा के समांतर होती है | (याद कीजिए की आप कक्षा IX में ऐसा कर चुके हैं) |



हल:

दिया है : ABC एक त्रिभुज है जिसकी

भुजा AB तथा AC का मध्य-बिंदु क्रमश:

D तथा E है |

सिद्ध करना है : DE || BC

प्रमाण : Δ ABC में

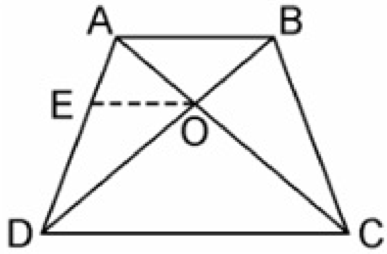
AD = BD .... (1) दिया है |

AE = EC .... (2) दिया है |

$$\therefore \quad \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE}$$

अथवा $\frac{AD}{AD} = \frac{AE}{AE} = \frac{1}{1}$ (समीकरण 1 तथा 2 से)

Q9. ABCD एक समलंब है जिसमे AB || DC है तथा इसके विकर्ण परस्पर बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते है | दर्शाइए की $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ है |



हल:

दिया है : ABCD एक समलंब है जिसमें

AB || CD है | और विकर्ण AC तथा BD एक दुसरे को बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते हैं |

सिद्ध करना है : $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$

रचना : बिंदु O से AB || EO खिंचा |

प्रमाण : AB || EO .... (1) रचना से

AB || CD .... (2) दिया है |

समीकरण (1) तथा (2) से

EO || CD ....(3)

Δ ABD में

AB || EO .... रचना से

अत: आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से

$\therefore \quad \frac{AE}{ED} = \frac{BO}{DO}$ .... (4)

इसीप्रकार, $\triangle$ ABD में

EO || CD .... (3) से

अत: आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से

$\therefore \quad \frac{AE}{ED} = \frac{AO}{CO}$ .... (5)

समीकरण (4) तथा (4) से

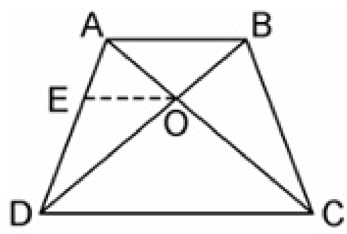
$$\frac{AO}{CO} = \frac{BO}{DO}$$

अथवा $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ [एकान्तरानुपात (alternendo) लगाने पर]

Proved

Q10. एक चतुर्भुज ABCD के विकर्ण परस्पर बिन्दु O पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते है कि $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ है | दर्शाइए कि ABCD एक समलंब है |

हल:



दिया है : ABCD एक चतुर्भुज है जिसके विकर्ण AC तथा BD एक दुसरे को बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते हैं |

और $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ है |

सिद्ध करना है : ABCD एक समलंब है |

रचना : बिंदु O से AB || EO खिंचा |

प्रमाण : Δ ABD में

AB || EO ………. रचना से

अत: आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से

$\therefore \quad \frac{AE}{ED} = \frac{BO}{DO}$ ………. (1)

जबकि, $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$

अथवा $\frac{AO}{CO} = \frac{BO}{DO}$ ……….(2) [एकान्तरानुपात (alternendo) लगाने पर]

समीकरण (1) तथा (2) से

$$\frac{AE}{ED} = \frac{AO}{CO}$$

Δ ACD की संगत खंड की भुँजायें समानुपाती हैं | इसलिए **आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT)** के विलोम प्रमेय 6.2 से

EO || CD .... (3)

और

EO || AB .... (4) रचना से

समीकरण (3) तथा (4) से

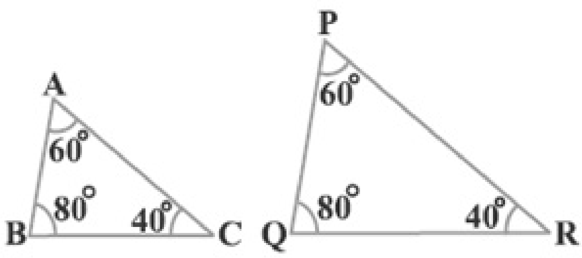
AB || CD

अत: ABCD एक समलंब है |

Proved

प्रश्नावली 6.3

Q1. बताइए कि आकृति 6.34 में दिए त्रिभुजों के युग्मों में से कौन - कौन से युग्म मरूप उस समरूपता कसौटी को लिखिए जिसका प्रयोग आपने उत्तर देनें में किया है तथा साथ ही समरूप त्रिभुजों को सांकेतिक रूप में व्यक्त कीजिए |



हल : (i)

ΔABC तथा ΔPQR में

∠ABC = ∠PQR = 80°

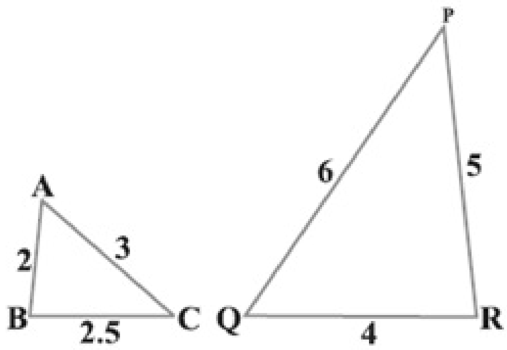
∠BAC = ∠QPR = 60°

∠ACB = ∠PRQ = 40°

∴ AAA समरूपता कसौटी से

ΔABC ~ ΔPQR

हल : (ii)



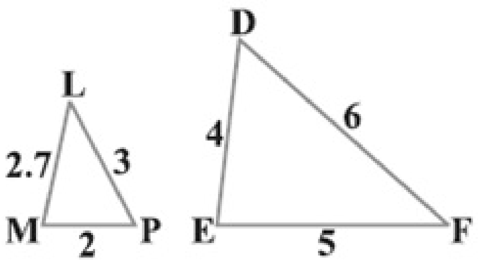
ΔABC तथा ΔQRP में

$$\frac{AB}{QR} = \frac{BC}{PR} = \frac{AC}{PQ} = \frac{1}{2}$$

∴ SSS समरूपता कसौटी से

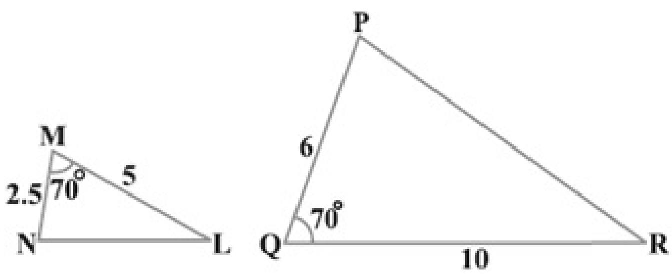
ΔABC ≅ ΔQRP

हल : (iii)



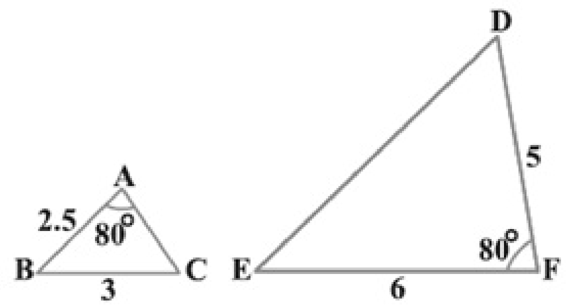
त्रिभुजों का यह युग्म समरूप नहीं है |

हल : (iv)



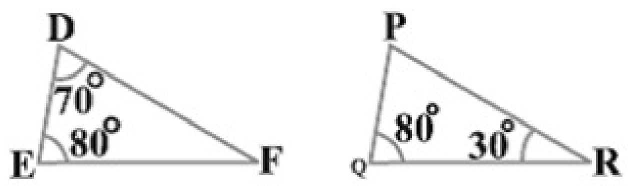
त्रिभुजों का यह युग्म समरूप नहीं है |

हल : (v)



त्रिभुजों का यह युग्म समरूप नहीं है |

हल : (vi)



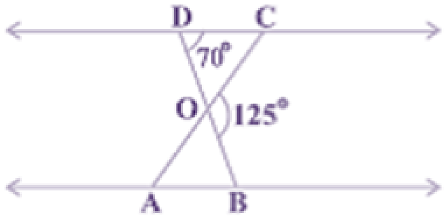
ΔABC तथा ΔQRP में

$$\frac{AB}{QR} = \frac{BC}{PR} = \frac{AC}{PQ} = \frac{1}{2}$$

∴ SSS समरूपता कसौटी से

ΔABC ≅ ΔQRP

Q2. आकृति 6.35 में, ΔODC ~ ΔOBA, ∠BOC = 125o और ∠CDO = 70o है | ∠DOC, ∠DCO और ∠OAB ज्ञात कीजिए |



आकृति 6.35

हल : ∠DOC + ∠BOC = 180° (रैखिक युग्म)

⇒ ∠DOC +125° = 180°

⇒ ∠DOC = 180° -125°

⇒ ∠DOC = 55°

अब ΔDOC में,

$\angle DOC + \angle CDO + \angle DCO = 180°$ (त्रिभुज के तीनों कोणों का योग)

$\Rightarrow 55^o + 70^o + \angle DCO = 180°$

$\Rightarrow 125^o \angle DCO = 180°$

$\Rightarrow \angle DCO = 180° - 125^o$

$\Rightarrow \angle DCO = 55^o$

$\Delta ODC \sim \Delta OBA$ (दिया है)

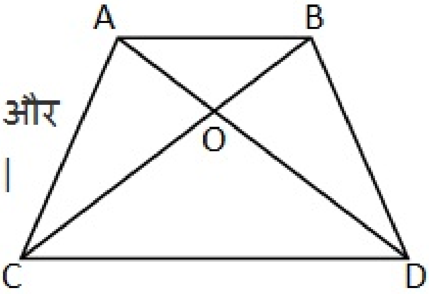
$\therefore \angle OAB = \angle DCO = 55^o$

समरूप त्रिभुज के संगत कोण बराबर होते हैं|)

Q3. समलंब ABCD, जिसमे AB || DC है, के विकर्ण AC और BD परस्पर O पर प्रतिच्छेद करते हैं | दो त्रिभुजों की समरूपता कसौटी का प्रयोग करते हुए,

दर्शाइए कि $\frac{OA}{OC} = \frac{OA}{OC}$ है |

हल :



दिया है : समलंब ABCD,

जिसमे AB || DC है, के विकर्ण AC और BD परस्पर O पर प्रतिच्छेद करते हैं |

सिद्ध करना है : $\frac{OA}{OC} = \frac{OA}{OC}$

प्रमाण: AB || CD दिया है

$\therefore$ $\angle ABO = \angle DCO$ (एकांतर कोण) ...(1)

अब ΔAOB तथा ΔCOD में

$\angle ABO = \angle DCO$ (1) से

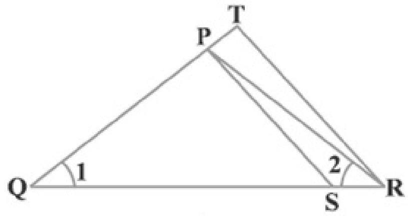
$\angle AOB = \angle COD$ (शीर्षाभिमुख कोण)

A.A समरूपता कसौटी से

$\Delta AOB \sim \Delta COD$

$\therefore \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$ (समरूप त्रिभुज के संगत भुजा समानुपाती होते हैं |)

Q4. आकृति 6.36 में, $\frac{OR}{QS} = \frac{QT}{PR}$ तथा $\angle 1 = \angle 2$ है | दर्शाइए की $\angle PQS \sim \angle TQR$ है |



हल :

दिया है : $\frac{OR}{QS} = \frac{QT}{PR}$ तथा ∠1 = ∠2 है |

सिद्ध करना है : ΔPQS ~ ΔTQR

प्रमाण : ΔPQR में,

∠1 = ∠2 (दिया है)

∴ PQ = PR (बराबर कोणों की सम्मुख भुजा) ...(1)

और $\frac{OR}{QS} = \frac{QT}{PR}$ दिया है

या $\frac{OR}{QS} = \frac{QT}{PQ}$ समी० (1) से .... (2)

ΔPQS तथा ΔTQR में

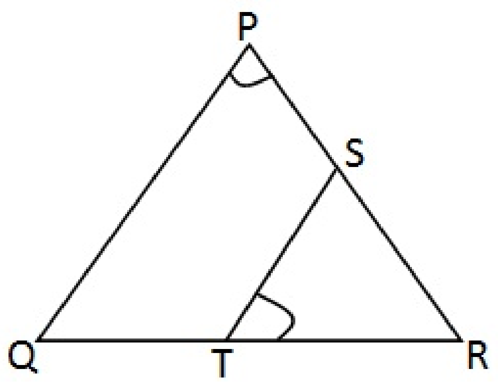
$\frac{OR}{QS} = \frac{QT}{PQ}$ समी० (2) से

∠1 = ∠1 (उभयनिष्ठ)

SAS समरूपता कसौटी से

ΔPQS ~ ΔTQR **Proved**

Q5. DPQR की भुजाओं PR और QR पर क्रमश: बिंदु S और T इस प्रकार स्थित हैं कि ∠P = ∠RTS है | दर्शाइए कि ΔRPQ ~ ΔRTS है |



हल:

दिया है : DPQR की भुजाओं PR और QR पर

क्रमशः बिंदु S और T इस प्रकार स्थित हैं

कि $\angle P = \angle RTS$ है |

सिद्ध करना है : $\Delta RPQ \sim \Delta RTS$

प्रमाण : ΔRPQ तथा ΔRTS **में,**

$\angle P = \angle RTS$ (दिया है)

$\angle R = \angle R$ (उभयनिष्ठ)

A.A समरूपता कसौटी से

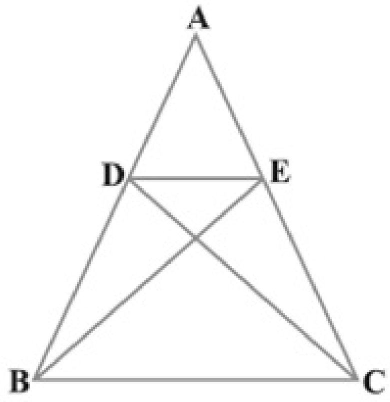
$\Delta RPQ \sim \Delta RTS$

Q6. आकृति 6.37 में, यदि $\Delta ABE \cong \Delta ACD$ है, तो दर्शाइए कि $\Delta ADE \sim \Delta ABC$ है |

हल:

दिया है : $\Delta ABE \cong \Delta ACD$ है

सिद्ध करना है : $\Delta ADE \sim \Delta ABC$



प्रमाण : $\Delta ABE \cong \Delta ACD$ (दिया है)

$\therefore \left.\begin{array}{l} AB = AC \\ AE = AD \end{array}\right\}$ By CPCT

अथवा $\dfrac{AE}{AD} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{1}{1}$ ...... (1)

ΔADE तथा ΔABC में

$\dfrac{AE}{AD} = \dfrac{AB}{AC}$ ......समी० (1) से

$\angle A = \angle A$ (उभयनिष्ठ)

S.A.S समरूपता कसौटी से

$\Delta ADE \sim \Delta ABC$ **Proved**

Q7. आकृति 6.38 में, DABC के शीर्षलंब AD और CE परस्पर बिंदु P पर प्रतिच्छेद करते हैं तो दर्शाइए कि :

(i) Δ AEP ~ Δ CDP
(ii) Δ ABD ~ Δ CBE
(iii) Δ AEP ~ Δ ADB
(iv) Δ PDC ~ Δ BEC

हल:

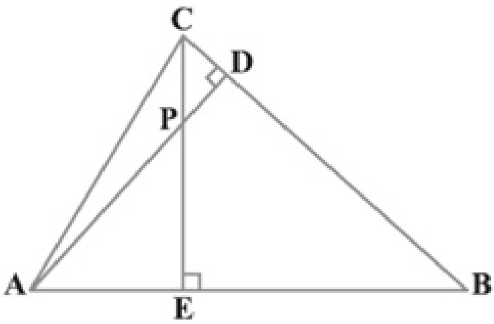
दिया है : DABC के शीर्षलंब AD और CE परस्पर बिंदु P पर प्रतिच्छेद करते हैं |

सिद्ध करना है :

(i) $\Delta AEP \sim \Delta CDP$
(ii) $\Delta ABD \sim \Delta CBE$

(iii) Δ AEP ~ Δ ADB
(iv) Δ PDC ~ Δ BEC

प्रमाण :



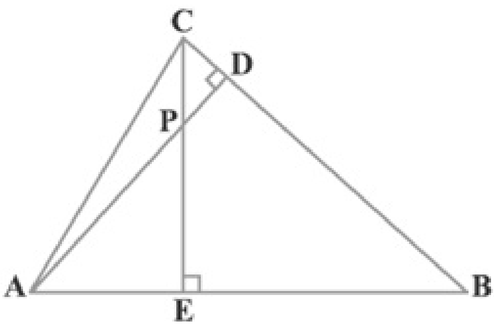
(i) Δ AEP तथा Δ CDP में,

∠AEP = ∠CDP (प्रत्येक 90°)

∠APE = ∠CPD (शीर्षाभिमुख कोण)

A.A समरूपता कसौटी से

Δ AEP ~ Δ CDP



(ii) Δ ABD तथा CBE में

∠ADB = ∠CEB (प्रत्येक 90°)

∠B = ∠B (उभयनिष्ठ)

A.A समरूपता कसौटी से

Δ ABD ~ Δ CBE

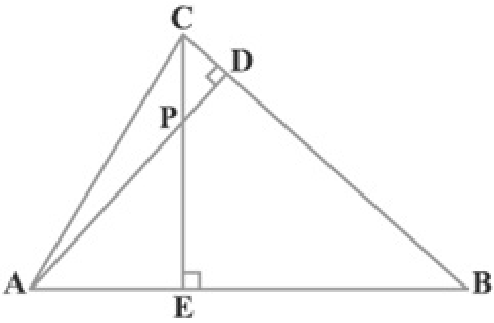
(iii) Δ AEP तथा Δ ADB में

∠AEP = ∠ADB (प्रत्येक 90°)

$\angle A = \angle A$ (उभयनिष्ठ)

A.A समरूपता कसौटी से

Δ AEP ~ Δ ADB



(iv) Δ PDC तथा Δ BEC में

$\angle PDC = \angle BEC$ (प्रत्येक 90°)

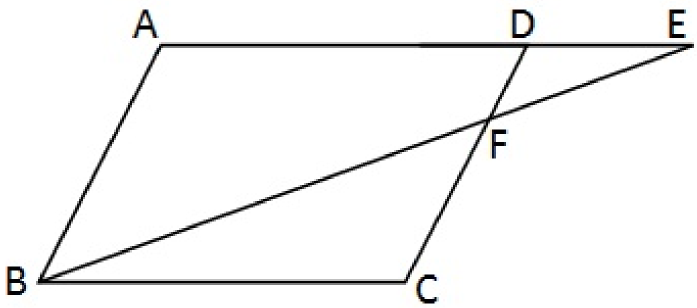
$\angle C = \angle C$ (उभयनिष्ठ)

A.A समरूपता कसौटी से

Δ PDC ~ Δ BEC

Q8. समान्तर चतुर्भुज ABCD की बढाई गई भुजा AD पर स्थित E एक बिंदु है तथा BE भुजा CD को F पर प्रतिच्छेद करती है | दर्शाइए कि Δ ABE ~ Δ CFB है |

हल:



दिया है : ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है जिसकी बढाई गई भुजा AD पर स्थित E एक बिंदु है तथा BE भुजा CD को F पर प्रतिच्छेद करती है |

सिद्ध करना है : Δ ABE ~ Δ CFB

प्रमाण : ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है |

∠AEB = ∠CBE .... (1) एकान्तर कोण

Δ ABE तथा Δ CFB में,

∠AEB = ∠CBE समी० (1) से

∠A = ∠C (समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण)

A.A समरूपता कसौटी से

Δ ABE ~ Δ CFB

Q9. आकृति 6.39 में, ABC और AMP दो समकोण त्रिभुज है, जिसके कोण B और M समकोण हैं | सिद्ध कीजिए कि :

(i) Δ ABC ~ Δ AMP

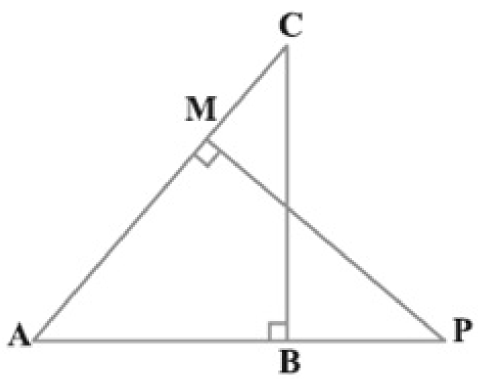
(ii) $\frac{CA}{PA} = \frac{BC}{MP}$

हल:

दिया है : ABC और AMP दो समकोण त्रिभुज है, जिसके कोण B और M समकोण हैं |

सिद्ध करना है :

(i) Δ ABC ~ Δ AMP



(ii) $\frac{CA}{PA} = \frac{BC}{MP}$

प्रमाण :

(i) Δ ABC तथा Δ AMP में

$\angle ABC = \angle AMP$ (प्रत्येक 90°)

$\angle A = \angle A$ (उभयनिष्ठ)

A.A समरूपता कसौटी से

$\Delta ABC \sim \Delta AMP$

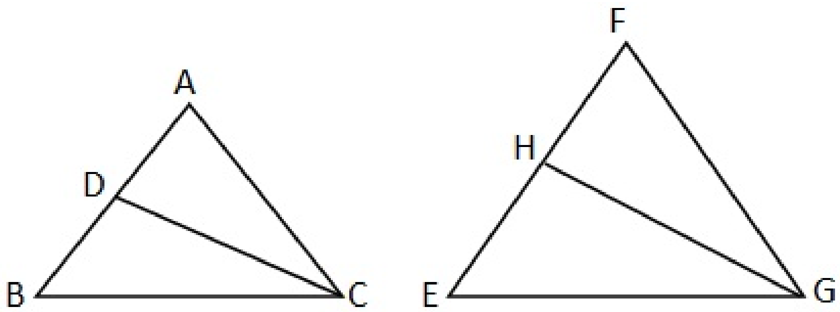
(ii) $\frac{CA}{PA} = \frac{BC}{MP}$

(चूँकि समरूप त्रिभुज के संगत भुजाएँ समानुपाती होतीं हैं |)

Q10. CD और GH क्रमशः ∠ ACB और ∠ EGF के ऐसे समद्विभाजक हैं कि बिंदु D और H क्रमशः Δ ABC और ΔFEG की भुजाओं AB और FE पर स्थित हैं | यदि Δ ABC ~ ΔFEG है, तो दर्शाइए कि :

(i) $\frac{CD}{GH} = \frac{AC}{FG}$

(ii) Δ DCB ~ Δ HGE
(iii) Δ DCA ~ Δ HGF



हल:

दिया है : CD और GH क्रमशः ∠ ACB और ∠ EGF के ऐसे समद्विभाजक हैं कि बिंदु D और H क्रमशः Δ ABC और ΔFEG की भुजाओं AB और FE पर स्थित हैं और ΔABC ~ ΔFEG है |

सिद्ध करना है :

(i) $\frac{CD}{GH} = \frac{AC}{FG}$

(ii) Δ DCB ~ Δ HGE
(iii) Δ DCA ~ Δ HGF

प्रमाण :

ΔABC ~ ΔFEG दिया है |

$$\therefore \left.\begin{array}{l} \angle A = \angle F \\ \angle B = \angle E \\ \angle C = \angle G \end{array}\right\} \begin{array}{l} \ldots(1) \\ \ldots(2) \\ \ldots(3) \end{array}$$

(समरूप त्रिभुज के संगत कोण बराबर होते हैं |)

(i) Δ ABC तथा Δ AMP में

(ii) Δ DCB तथा Δ HGE में,

$\angle B = \angle E$ समी० (2) से

$\angle BCD = \angle EGH$ [चूँकि ½$\angle C$ = ½$\angle G$ समी० (3) से]

A.A समरूपता कसौटी से

Δ DCB ~ Δ HGE

(iii) Δ DCA तथा Δ HGF में
$\angle A = \angle F$ समी० (1) से

$\angle ACD = \angle FGH$ [चूँकि ½$\angle C$ = ½$\angle G$ समी० (3) से]

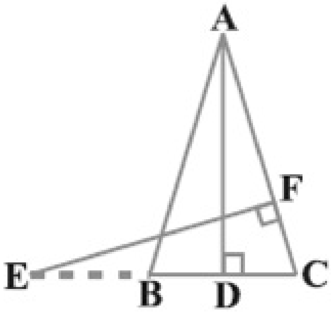
A.A समरूपता कसौटी से

Δ DCA ~ Δ HGF **Proved**

Q11. आकृति 6.40 में, AB = AC वाले, एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC की बढाई गई भुजा CB पर स्थित E एक बिन्दु है | यदि AD ⊥ BC और EF ⊥ AC है तो सिद्ध कीजिए कि ΔABD ~ ΔECF है |

हल:

दिया है : AB = AC वाले, एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC की बढाई गई भुजा CB पर स्थित E एक बिन्दु है जिसमें AD ⊥ BC और EF ⊥ AC है



सिद्ध करना है :

ΔABD ~ ΔECF

प्रमाण :

ΔABC में,

AB = AC दिया है;

∴ ∠B = ∠C .... (1) (बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण ....)

अब, ΔABD तथा ΔECF में

∠ADB = ∠EFC (प्रत्येक 90°)

∠B = ∠C समी० (1) से

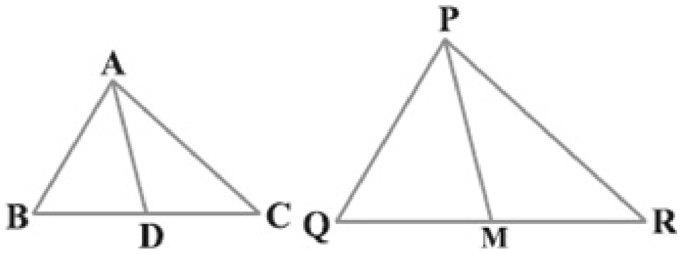
A.A समरूपता कसौटी से

ΔABD ~ ΔECF Proved

Q12. एक त्रिभुज ABC कि भुजाएँ AB और BC तथा माध्यिका AD एक अन्य त्रिभुज PQR की क्रमशः भुजाओं PQ और QR तथा माध्यिका PM के समानुपाती हैं (देखिए आकृति 6.41)| दर्शाइए कि ΔABC ~ ΔPQR है |

हल:

दिया है : त्रिभुज ABC कि भुजाएँ AB और BC तथा माध्यिका AD एक अन्य त्रिभुज PQR की क्रमशः भुजाओं PQ और QR तथा माध्यिका PM के समानुपाती हैं |



सिद्ध करना है :

ΔABC ~ ΔPQR

प्रमाण :

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AD}{PM} \text{ .... (दिया है)}$$

अथवा $$\frac{AB}{PQ} = \frac{\frac{1}{2}BC}{\frac{1}{2}QR} = \frac{AD}{PM}$$

अथवा $$\frac{AB}{PQ} = \frac{BD}{QM} = \frac{AD}{PM} \text{ ...... (1)}$$

(चूँकि माध्यिकाएँ AD तथा PM BC तथा QR को समद्विभाजित करती हैं |)

अब, ΔABD तथा ΔPQM में,

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BD}{QM} = \frac{AD}{PM}$$ समी० (1) से

S.S.S समरूपता कसौटी से

$\Delta ABD \sim \Delta PQM$

$\therefore \quad \angle B = \angle Q \quad ....\ (2)$

अब, ΔABC तथा ΔPQR में

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$$ (दिया है)

और $\angle B = \angle Q$ समी० (2) से

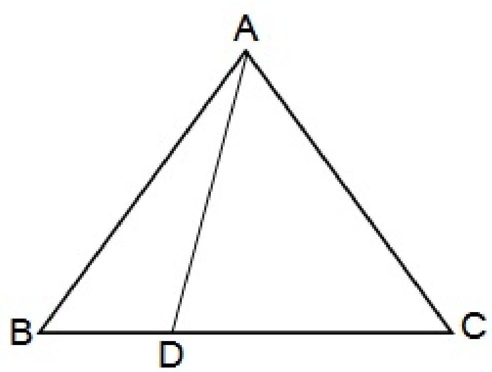
S.A.S समरूपता कसौटी से

$\Delta ABC \sim \Delta PQR$ **Proved**

Q13. एक त्रिभुज ABC की भुजा BC पर एक बिन्दु D इस प्रकार स्थित है कि $\angle ADC = \angle BAC$ है | दर्शाइए कि $CA^2 = CB.CD$ है |

हल :

दिया है : त्रिभुज ABC की भुजा BC पर एक बिन्दु D इस प्रकार स्थित है कि $\angle ADC = \angle BAC$ है |



सिद्ध करना है : $CA^2 = CB.CD$

प्रमाण :

अब, ΔADC तथा ΔBAC में

$\angle ADC = \angle BAC$ (दिया है)

$\angle C = \angle C$ (उभयनिष्ठ)

A.A समरूपता कसौटी से

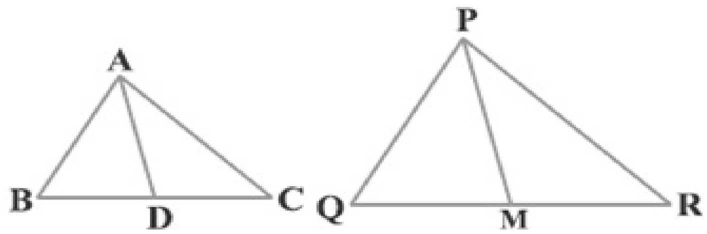
$\Delta ADC \sim \Delta BAC$

$\frac{AC}{CB} = \frac{CD}{AC}$ (चूँकि समरूप त्रिभुज के संगत भुजाएँ समानुपाती होतीं हैं |)

या $CA^2 = CB.CD$ (बाई-क्रॉस गुणा करने पर)

Proved

Q14. एक त्रिभुज ABC की भुजाएँ AB और AC तथा माध्यिका AD एक अन्य त्रिभुज की भुजाओं PQ और PR तथा माध्यिका PM के क्रमशः समानुपाती हैं | दर्शाइए कि $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ है |



हल :

दिया है : ΔABC और ΔPQR में

$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{AD}{PM}$ है और AD तथा PM माध्यिकायें हैं |

सिद्ध करना है : $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

प्रमाण : $\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{AD}{PM}$ .... (1) दिया है |

यहाँ माध्यिकाएँ समान अनुपात में हैं इसलिए समान अनुपात की माध्यिकायें जिस भुजा को समद्विभाजित करती है वह भी समानुपाती होता है |

$\therefore \quad \frac{AD}{PM} = \frac{BC}{QR}$ .... (2)

समी० (1) तथा (2) से

$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{BC}{QR}$ .... (3)

ΔABC तथा ΔPQR में

$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{BC}{QR}$.समी. (3) से

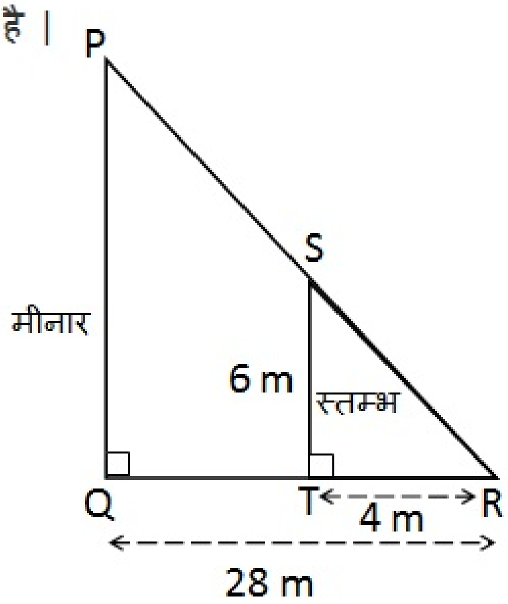
S.S.S समरूपता कसौटी से

ΔABC ~ ΔPQR **Proved**

Q15. लंबाई 6m वाले एक उध्वार्धर स्तम्भ की भूमि पर छाया की लंबाई 4m है, जबकि उसी समय एक मीनार की छाया की लंबाई 28 m है | मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए |

हल:

माना PQ मीनार है जबकि ST स्तम्भ है | TR स्तम्भ की छाया है और QR मीनार की छाया है |



ΔPQR तथा ΔSTR में,

$\angle PQR = \angle STR$ (प्रत्येक $90°$)

$\angle R = \angle R$ (उभयनिष्ठ)

A.A समरूपता कसौटी से

$\Delta PQR \sim \Delta STR$

$\therefore \quad \frac{PQ}{ST} = \frac{QR}{TR}$ (समरूप त्रिभुज के संगत भुजाएँ समानुपाती होती हैं)

या $\quad \frac{PQ}{6} = \frac{28}{4}$

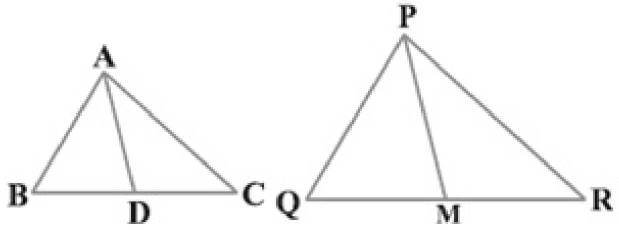
या $4\ PQ = 6 \times 28$

या $\quad PQ = \frac{6 \times 28}{4} = 42\ m$

अत: मीनार की ऊँचाई = 42 m

Q16. AD और PM त्रिभुजों ABC और PQR की क्रमशः माध्यिकाएं हैं, जबकि ΔABC ~ ΔPQR है |

सिद्ध कीजिए कि $\frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PM}$ है |



हल:

दिया है : AD और PM त्रिभुजों ABC और PQR की क्रमशः माध्यिकाएं हैं, जबकि ΔABC ~ ΔPQR है |

सिद्ध करना है : $\frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PM}$

प्रमाण : ΔABC ~ ΔPQR दिया है |

$\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$ (समरूप त्रिभुज के संगत भुजाएँ समानुपाती होती हैं)

या $\frac{AB}{PQ} = \frac{\frac{1}{2}BC}{\frac{1}{2}QR}$

या $\frac{AB}{PQ} = \frac{BD}{QM}$ ...... (1)

और ∠B = ∠Q ......(2) (समरूप त्रिभुज के संगत कोण)

ΔABD तथा ΔPQM में,

$\frac{AB}{PQ} = \frac{BD}{QM}$ ...... (1) से

∠B = ∠Q ......(2) से

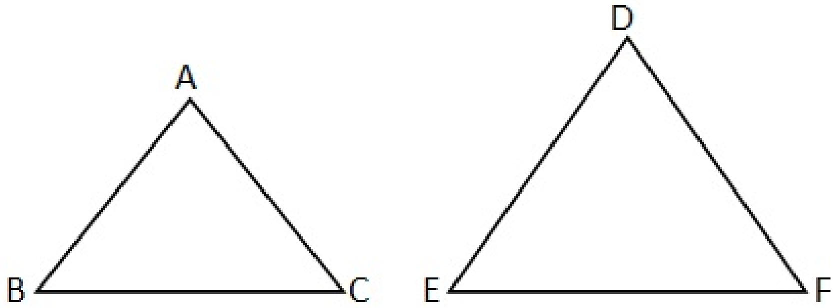
SAS समरूपता कसौटी से

ΔABD ~ ΔPQM

$\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PM}$ Proved

प्रश्नावली 6.4

Q1. मान लीजिए ΔABC ~ ΔDEF और इनके क्षेत्रफल क्रमशः 64cm^2 और 121 cm^2 हैं | यदि EF = 15.4 cm^2 हो, तो BC ज्ञात कीजिए |



हल : ΔABC ~ ΔDEF (दिया है)

∴ प्रमेय 6.6 से

$$\frac{ar(ABC)}{ar\,(\mathrm{DEF})} = \left(\frac{BC}{EF}\right)^2$$

$$\frac{64}{121} = \left(\frac{BC}{15.4}\right)^2$$

या $$\sqrt{\frac{64}{121}} = \frac{BC}{15.4}$$

या $$\frac{8}{11} = \frac{BC}{15.4}$$

11 BC = 8 × 15.4

$$BC = \frac{8 \times 15.4}{11}$$

$$= \frac{8 \times 154}{110} = \frac{8 \times 14}{10} = \frac{112}{10} = 11.2$$

Q2. एक समलंब ABCD जिसमें AB || DC हैं, के विकर्ण परस्पर बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं | यदि AB = 2 CD हो तो ΔAOB और ΔCOD के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए |

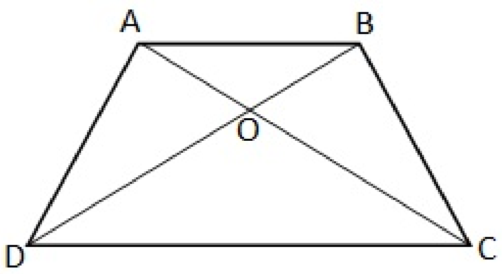
हल :

दिया है : ABCD एक समलंब है जिसमें AB || DC हैं,

के विकर्ण परस्पर बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं | और AB = 2 CD है |

AB = 2 CD (दिया है)

$\therefore \frac{AB}{CD} = \frac{2}{1}$ .... (1)



अब, AB || DC (दिया है)

$\angle ABO = \angle CDO$ .... (2) एकांतर कोण

ΔAOB और ΔCOD में,

$\angle AOB = \angle COD$ शीर्षाभिमुख कोण

$\angle ABO = \angle CDO$ समी० (2) से

A.A समरूपता कसौटी से

$\Delta AOB \sim \Delta COD$

अतः प्रमेय 6.6 से

$$\frac{ar(AOB)}{ar\,(COD)} = \left(\frac{AB}{CD}\right)^2 = \left(\frac{2}{1}\right)^2 = \frac{4}{1}$$

ΔAOB और ΔCOD के क्षेत्रफलों का अनुपात 4: 1 है |

Q3. आकृति 6.44 में एक ही आधार BC पर दो त्रिभुज ABC और DBC बने हुए हैं | यदि AD,BC कोप O पर प्रतिच्छेद करे, तो दर्शाइए की ar(ABC) /ar(DBC) AO/DO है |

Q4.यदि दो समरूप तत्रिभुजों के क्षेत्रफल बराबर हों तो सिद्ध कीजिए कि वे त्रिभुज सर्वान्गसम होते हैं|

Q5. एक त्रिभुज ABC की भुजाओं AB,BC और CA के मध्य - बिन्दु क्रमशः D, E और F हैं | त्रिभुज DEF और त्रिभुज ABC के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए|

Q6. सिद्ध कीजिए कि दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात इनकी संगत माध्यिकाओं के अनुपात का वर्ग होता है |

Q7. सिद्ध कीजिए कि दो एक वर्ग की किसी भुजा पर बनाए गए समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल उसी वर्ग के एक विकर्ण पर बनाए गए समबाहु त्रिभुज के क्षेत्रफल का आधा होता है |

Q8. ABC और BDE दो समबाहु त्रिभुज इस प्रकार हैं कोई भुजद BC का मध्य - बिन्दु है | त्रिभुजों ABC और BDE के क्षेत्रफलों का अनुपात है:

(A) 2:1 (B) 1:2 (C) 4:1 (D) 1:4

Q9. दो समरूप त्रिभुजों की भुजाएँ 4:9 के अनुपात में हैं | इन त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात है :

(A) 2:3 (B) 4:9 (C) 81:16 (D) 16: 81

प्रश्नावली 6.5

Q1. कुछ त्रिभुजों की भुजाएँ नीचे दी गई हैं। निर्धरित कीजिए कि इनमें से कौन-कौन से त्रिभुज समकोण त्रिभुज हैं। इस स्थिति में कर्ण की लंबाई भी लिखिए।

(i) 7 cm, 24 cm, 25 cm (ii) 3 cm, 8 cm, 6 cm

(iii) 50 cm, 80 cm, 100 cm (iv) 13 cm, 12 cm, 5 cm

हल :

(i) 7 cm, 24 cm, 25 cm

कर्ण^2 = लंब^2 + आधार^2

$25^2 = 7^2 + 24^2$

625 = 49 + 576

625 = 625

चूँकि वायां पक्ष और दायां पक्ष बराबर है |

इसलिए ये भुजाएँ समकोण त्रिभुज की है |

अत: कर्ण = 25 cm (सबसे बड़ी भुजा कर्ण होती है)

(ii) 3 cm, 8 cm, 6 cm

हल: निम्न मानों को पाइथागोरस प्रमेय में रखने पर

कर्ण^2 = लंब^2 + आधार^2

$8^2 = 3^2 + 6^2$

$64 = 9 + 36$

$64 = 45$

चूँकि वायां पक्ष और दायां पक्ष बराबर नहीं है |

इसलिए ये भुजाएँ समकोण त्रिभुज की नहीं है |

(iii) 50 cm, 80 cm, 100 cm

हल: निम्न मानों को पाइथागोरस प्रमेय में रखने पर

कर्ण^2 = लंब^2 + आधार^2

$100^2 = 50^2 + 80^2$

$10000 = 2500 + 6400$

$10000 = 8900$

चूँकि वायां पक्ष और दायां पक्ष बराबर नहीं है |

इसलिए ये भुजाएँ समकोण त्रिभुज की नहीं है |

(iv) 13 cm, 12 cm, 5 cm

हल: निम्न मानों को पाइथागोरस प्रमेय में रखने पर

कर्ण^2 = लंब^2 + आधार^2

$13^2 = 5^2 + 12^2$

$169 = 25 + 144$

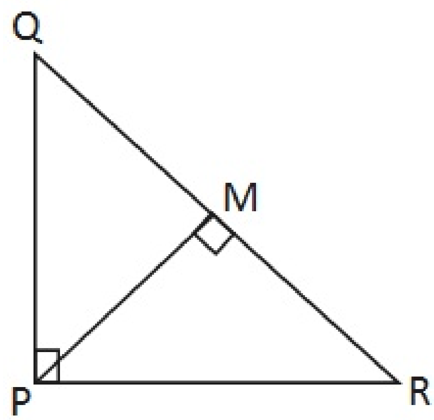
$169 = 169$

चूँकि वायां पक्ष और दायां पक्ष बराबर है |

इसलिए ये भुजाएँ समकोण त्रिभुज की है |

अत: कर्ण = 13 cm (सबसे बड़ी भुजा कर्ण होती है)

Q2. PQR एक समकोण त्रिभुज है जिसका कोण P समकोण है तथा QR पर बिंदु M इस प्रकार स्थित है कि $PM \perp QR$ है | दर्शाइए कि $PM^2 = QM \cdot MR$ है |



हल:

दिया है : PQR एक समकोण त्रिभुज है

जिसका कोण P समकोण है तथा QR

पर बिंदु M इस प्रकार स्थित है कि PM ⊥ QR है |

सिद्ध करना है : $PM^2 = QM . MR$

प्रमाण : PM ⊥ QR दिया है |

इसलिए प्रमेय 6.7 से

ΔPMQ ~ ΔPRQ   ...... (1)

इसीप्रकार,

ΔPMR ~ ΔPRQ   ...... (1)

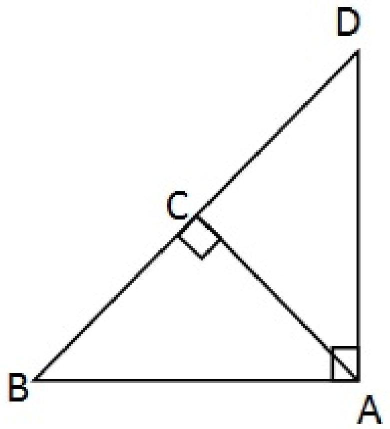
समीकरण (1) तथा (2) से

ΔPMQ ~ ΔPMR

अत: $\frac{PM}{QM} = \frac{MR}{PM}$ (समरूप त्रिभुज की संगत भुजाएँ समानुपाती होती हैं)

$\therefore PM^2 = QM . MR$

Q3. आकृति 6.53 में ABD एक समकोण त्रिभुज है | जिसका कोण A समकोण है तथा AC ⊥ BD है | दर्शाइए कि



(i) AB^2 = BC . BD

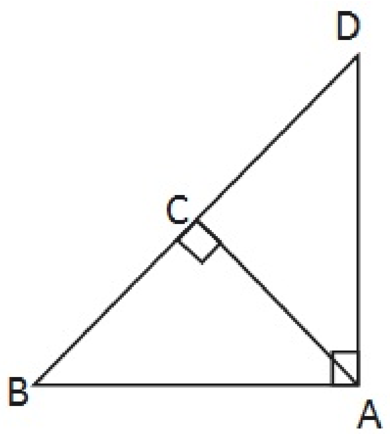
(ii) AC^2 = BC . DC

(iii) AD^2 = BD . CD

हल :

दिया है : ABD एक समकोण त्रिभुज है | जिसका कोण A समकोण है तथा AC ⊥ BD है |

सिद्ध करना है :



(i) AB^2 = BC . BD

(ii) AC^2 = BC . DC

(iii) AD^2 = BD . CD

प्रमाण : (i) ABD एक समकोण त्रिभुज है और

AC ⊥ BD दिया है |

ΔABC ~ ΔABD ...... प्रमेय 6.7

अत: $\frac{AB}{BD} = \frac{BC}{AB}$ (समरूप त्रिभुज की संगत भुजाएँ समानुपाती होती हैं)

$\therefore$ $AB^2 = BC \,.\, BD$ Proved - I

(ii) $\Delta ABC \sim \Delta ADC$ ...... प्रमेय 6.7

अत: $\frac{AC}{DC} = \frac{BC}{AC}$ (समरूप त्रिभुज की संगत भुजाएँ समानुपाती होती हैं)

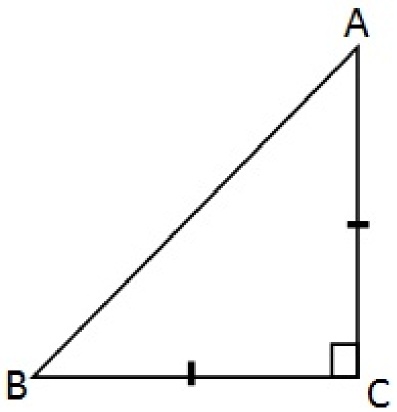
$\therefore$ $AC^2 = BC \,.\, DC$ Proved - II

(iii) $\Delta ACD \sim \Delta ABD$ ...... प्रमेय 6.7

अत: $\frac{AD}{CD} = \frac{BD}{AD}$ (समरूप त्रिभुज की संगत भुजाएँ समानुपाती होती हैं)

$\therefore$ $AD^2 = BD \,.\, CD$ Proved - III

Q4. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसका कोण C समकोण है | सिद्ध कीजिए कि $AB^2 = 2AC^2$ है |



हल :

दिया है : ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है

जिसका कोण C समकोण है |

सिद्ध करना है : $AB^2 = 2AC^2$

प्रमाण : ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है |

AC = BC .... (i)

और ABC एक समकोण त्रिभुज है |

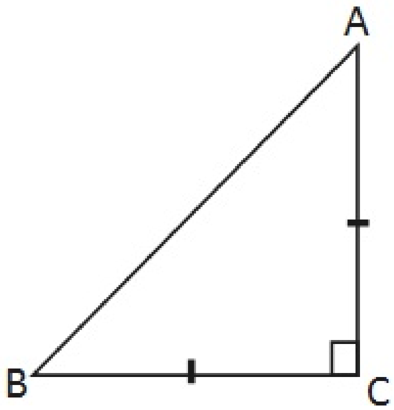
पाइथागोरस प्रमेय से

$AB^2 = BC^2 + AC^2$

अथवा $AB^2 = AC^2 + AC^2$ (समी० 1 से)

अथवा $AB^2 = 2AC^2$ **Proved**

Q5. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें AC = BC है | यदि $AB^2 = 2AC^2$ है, तो सिद्ध कीजिए कि ABC एक समकोण त्रिभुज है |



हल :

दिया है : ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है

जिसमें AC = BC है और $AB^2 = 2AC^2$ है

सिद्ध करना है : ABC एक समकोण त्रिभुज है |

प्रमाण : AC = BC ....(1) दिया है

और $AB^2 = 2AC^2$ .... (दिया है)

अथवा $AB^2 = AC^2 + AC^2$

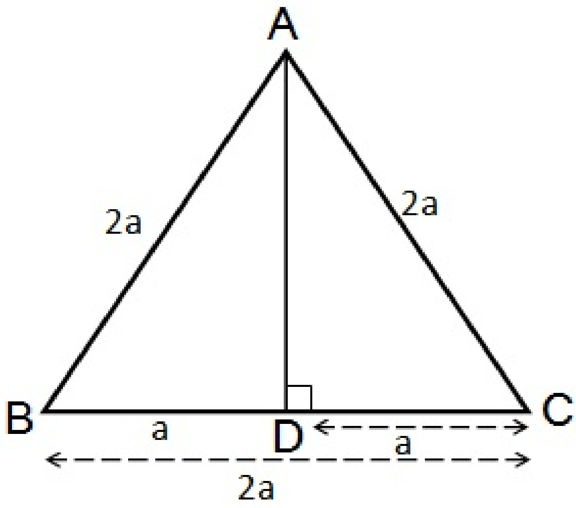
अथवा $AB^2 = BC^2 + AC^2$ (समी० 1 से)

अत: पाइथागोरस प्रमेय के विलोम (प्रमेय 6.9) से

ABC एक समकोण त्रिभुज है | **Proved**

Q6. एक समबाहु त्रिभुज ABC की भुजा 2a है। उसके प्रत्येक शीर्षलंब की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल : समबाहु त्रिभुज ABC की भुजा 2a है |



AB = BC = AC = 2a

रचना : AD ⊥ BC डाला |

अत: समकोण त्रिभुज ACD में

पाइथागोरस प्रमेय से,

$AC^2 = AD^2 + DC^2$

$(2a)^2 = AD^2 + (a)^2$

$4a^2 = AD^2 + a^2$

$AD^2 = 4a^2 - a^2$

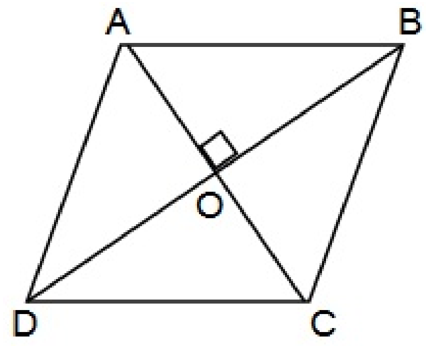
$AD^2 = 3a^2$

$AD = \sqrt{3a^2}$

$AD = a\sqrt{3}$

प्रत्येक शीर्षलंब की लंबाई = $a\sqrt{3}$

Q7. सिद्ध कीजिए कि एक समचतुर्भुज की भुजाओं के वर्गों का योग उसके विकर्णों के वर्गों के योग के बराबर होता है।



हल:

दिया है : ABCD एक समचतुर्भुज है जिसकी

भुजाएँ AB, BC, CD तथा AD है | और विकर्ण

AC तथा BD एक दुसरे को O पर प्रतिच्छेद करते हैं |

सिद्ध करना है : $AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2$

प्रमाण : समचतुर्भुज के विकर्ण एक दुसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं | इसलिए,

समकोण ΔAOB में पाइथागोरस प्रमेय से,

$AB^2 = AO^2 + BO^2$ .... (1)

इसीप्रकार ΔBOC, ΔCOD और ΔAOD में,

$BC^2 = CO^2 + BO^2$ .... (2)

$CD^2 = CO^2 + DO^2$ .... (3)

$AD^2 = AO^2 + DO^2$ .... (4)

समी० (1) (2) (3) और (4) जोड़ने पर

$AB^2+BC^2+CD^2+AD^2=AO^2+BO^2+CO^2+BO^2+CO^2+DO^2+AO^2+DO^2$

RHS $= 2AO^2 + 2BO^2 + 2CO^2 + 2DO^2$

$= 2(AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2)$

$$= 2\left[\left(\frac{1}{2}AC\right)^2 + \left(\frac{1}{2}BD\right)^2 + \left(\frac{1}{2}AC\right)^2 + \left(\frac{1}{2}BD\right)^2\right]$$

$$= 2\left[\frac{1}{4}AC^2 + \frac{1}{4}BD^2 + \frac{1}{4}AC^2 + \frac{1}{4}BD^2\right]$$

$$= 2\times\frac{1}{4}\left[AC^2 + BD^2 + AC^2 + BD^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[2AC^2 + 2BD^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\times 2\left[AC^2 + BD^2\right]$$

$$= AC^2 + BD^2$$

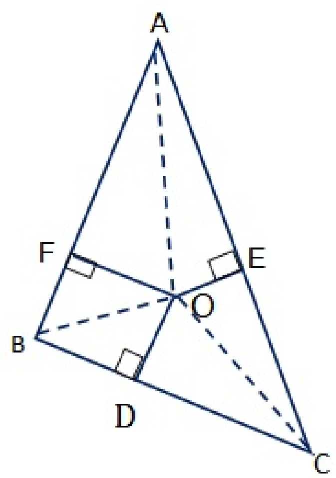
$\therefore AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2$ **Proved**

Q8. आकृति में ΔABC के अभ्यंतर में स्थित कोई बिंदु O है तथा OD⊥ BC, OE⊥AC और OF⊥ AB है |

दर्शाइए कि

(i) $OA^2 + OB^2 + OC^2 - OD^2 - OE^2 - OF^2 = AF^2 + BD^2 + CE^2$

(ii) $AF^2 + BD^2 + CE^2 = AE^2 + CD^2 + BF^2$



हल:

दिया है : ΔABC के अभ्यंतर में स्थित कोई बिंदु O है तथा OD⊥ BC, OE⊥AC और OF⊥ AB है |

सिद्ध करना है :

(i) $OA^2 + OB^2 + OC^2 - OD^2 - OE^2 - OF^2 = AF^2 + BD^2 + CE^2$

(ii) $AF^2 + BD^2 + CE^2 = AE^2 + CD^2 + BF^2$

प्रमाण:

समकोण Δ AOF में, पाइथागोरस प्रमेय से

$OA^2 = AF^2 + OF^2$ .... (I)

समकोण Δ BOD में, पाइथागोरस प्रमेय से

$OB^2 = BD^2 + OD^2$ .... (II)

समकोण Δ COE में, पाइथागोरस प्रमेय से

$OC^2 = CE^2 + OE^2$ .... (III)

समीकरण (I), (II) तथा (III) को जोड़ने पर

$OA^2 + OB^2 + OC^2 = AF^2 + OF^2 + BD^2 + OD^2 + CE^2 + OE^2$

$OA^2 + OB^2 + OC^2 - OD^2 - OE^2 - OF^2 = AF^2 + BD^2 + CE^2$ Proved I

अब, पुन:

$OA^2 + OB^2 + OC^2 - OD^2 - OE^2 - OF^2 = AF^2 + BD^2 + CE^2$

या $AF^2 + BD^2 + CE^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 - OD^2 - OE^2 - OF^2$

या $AF^2 + BD^2 + CE^2 = (OA^2 - OE^2) + (OB^2 - OF^2) + (OC^2 - OD^2)$

या $AF^2 + BD^2 + CE^2 = AE^2 + CD^2 + BF^2$ पाइथागोरस प्रमेय से

Q9.

Q10.

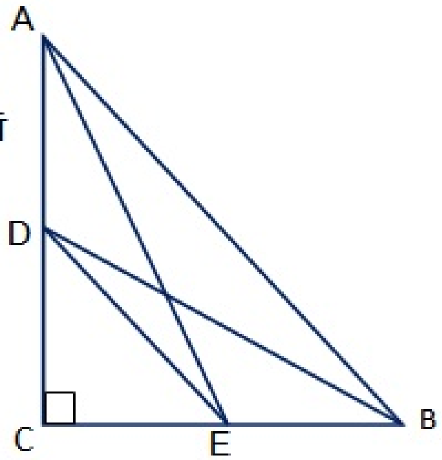
Q11.

Q12.

Q13. किसी त्रिभुज ABC जिसका कोण C समकोण है, की भुजाओं CA और CB पर क्रमश: बिंदु D औए E स्थित है |

सिद्ध कीजिए कि $AE^2 + BD^2 = AB^2 + DE^2$ है |

हल:



दिया है : त्रिभुज ABC जिसका कोण C समकोण है, की भुजाओं CA और CB पर क्रमश: बिंदु D औए E स्थित है |

सिद्ध करना है :

$AE^2 + BD^2 = AB^2 + DE^2$

रचना : D को E से मिलाया |

प्रमाण:

समकोण Δ ACE में, पाइथागोरस प्रमेय से

$AE^2 = AC^2 + CE^2$ .... (I)

इसीप्रकार,

समकोण Δ BCD में, पाइथागोरस प्रमेय से

$BD^2 = BC^2 + CD^2$ .... (I)

समीकरण (I) तथा (II) को जोड़ने पर

$AE^2 + BD^2 = AC^2 + CE^2 + BC^2 + CD^2$

$AE^2 + BD^2 = (AC^2 + BC^2) + (CE^2 + CD^2)$

$AE^2 + BD^2 = AB^2 + DE^2$ Proved

पाइथागोरस प्रमेय से

[$\because$ $AB^2 = AC^2 + BC^2$ और $DE^2 = CE^2 + CD^2$]

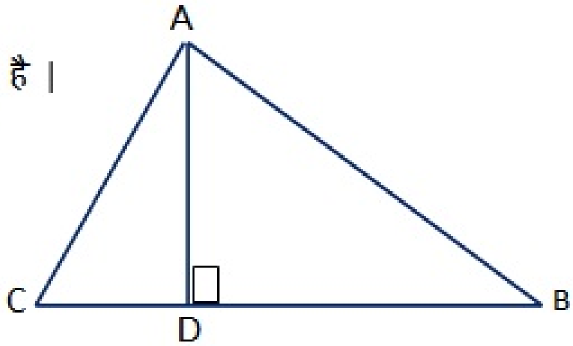
Q14. किसी त्रिभुज ABC के शीर्ष A से BC पर डाला गया लंब BC को बिंदु D पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करता है कि DB = 3CD है |

सिद्ध कीजिए कि : $2AB^2 = 2AC^2 + BC^2$ है |

हल:

दिया है : ABC एक त्रिभुज है |
जिसमें $AD \perp BC$ है तथा
$DB = 3CD$ है |

सिद्ध करना है :
$2AB^2 = 2AC^2 + BC^2$



प्रमाण:

$CD = BC - BD$

$CD = BC - 3CD$

$4CD = BC$

$CD = \frac{BC}{4}$ ………………………..(I)

$DB = 3CD$ दिया है |

$DB = \frac{3BC}{4}$ ………………………..(II)

समकोण Δ ACD में, पाइथागोरस प्रमेय से

$AC^2 = AD^2 + CD^2$

Or $AD^2 = AC^2 - CD^2$ ……………………. (III)

समकोण Δ ABD में, पाइथागोरस प्रमेय से

$AB^2 = AD^2 + BD^2$

$AB^2 = AC^2 - CD^2 + BD^2$

$AB^2 = AC^2 - \left(\frac{BC}{4}\right)^2 + \left(\frac{3BC}{4}\right)^2$

$AB^2 = AC^2 - \frac{BC^2}{16} + \frac{9BC^2}{16}$

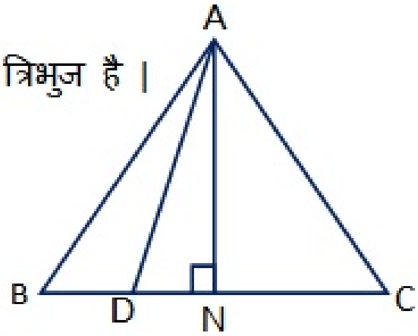
$AB^2 = AC^2 + \frac{8BC^2}{16}$

$AB^2 = AC^2 + \frac{BC^2}{2}$

$2AB^2 = 2AC^2 + BC^2$ Proved

Q15. किसी समबाहु त्रिभुज ABC की भुजा BC पर एक बिंदु D तक इस प्रकार स्थित है कि BD = $\frac{1}{3}$ BC है | सिद्ध कीजिए कि $9AD^2 = 7AB^2$ है |

हल:



दिया है : ABC एक समबाहु त्रिभुज है |

जिसमें BD = $\frac{1}{3}$ BC है |

सिद्ध करना है :

$9AD^2 = 7AB^2$

रचना : $AN \perp BC$ खिंचा |

प्रमाण:

BD = $\frac{1}{3}$ BC दिया है | ------------------ (I)

BN = $\frac{1}{2}$ BC $\left[\because AN \perp BC \text{ है ..... रचना से}\right]$ .... (II)

DN = BN - BD

$= \frac{1}{2}BC - \frac{1}{3}BC$

$= \frac{3BC - 2BC}{6} = \frac{BC}{6}$

समकोण Δ ADN में, पाइथागोरस प्रमेय से

$AD^2 = AN^2 + DN^2$

Or $AN^2 = AD^2 - DN^2$ .... (III)

समकोण Δ ABN में, पाइथागोरस प्रमेय से

$AB^2 = AN^2 + BN^2$

$AB^2 = (AD^2 - DN^2) + BN^2$ समी० (I) से

$$AB^2 = AD^2 - \left(\frac{BC}{6}\right)^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$$

$$AB^2 = AD^2 - \frac{BC^2}{36} + \frac{BC^2}{4}$$

$$AB^2 = AD^2 - \frac{BC^2 + 9BC^2}{36}$$

$$AB^2 = AD^2 + \frac{8BC^2}{36}$$

$$AB^2 = AD^2 + \frac{2BC^2}{9}$$

$$9AB^2 = 9AD^2 + 2BC^2$$

$$9AB^2 = 9AD^2 + 2AB^2$$

$$9AB^2 - 2AB^2 = 9AD^2$$

$$7AB^2 = 9AD^2$$

Q16. किसी समबाहु त्रिभुज में, सिद्ध कीजिए कि उसकी एक भुजा के वर्ग का तिगुना उसके एक शीर्षलंब के वर्ग के चार गुने के बराबर होता है |

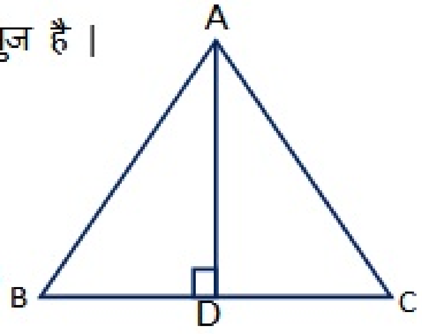
हल:

दिया है : ABC एक समबाहु त्रिभुज है |

जिसमें AD ⊥ BC हैं |

सिद्ध करना है :

$3AB^2 = 4AD^2$



प्रमाण: समकोण त्रिभुज ABD में,

पाइथागोरस प्रमेय से

$AB^2 = AD^2 + BD^2$

Or $AB^2 = AD^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$ $[\because DB = \frac{1}{2}BC]$

Or $AB^2 = AD^2 + \frac{BC^2}{4}$

Or $4AB^2 = 4AD^2 + BC^2$

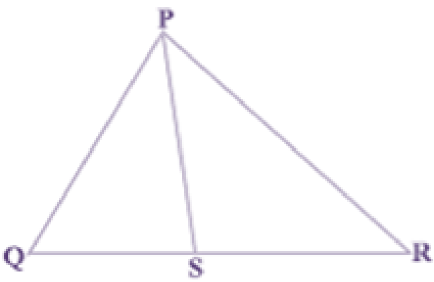
Or $4AB^2 = 4AD^2 + AB^2$ $[\because AB = BC]$

Or $4AB^2 - AB^2 = 4AD^2$

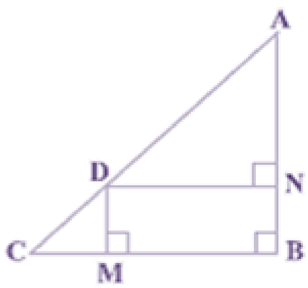
Or $3AB^2 = 4AD^2$ Proved

प्रश्नावली 6.6

Q1. आकृति 6.56 में PS कोण QPR का समद्विभाजक है | सिद्ध कीजिए कि QS/SR PQ/PR है|



आकृति 6.56



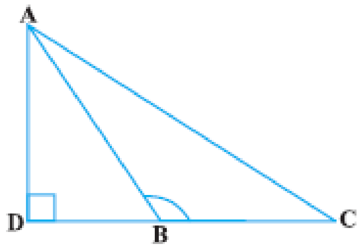
आकृति 6.57

Q2. आकृति 6.57 में D त्रिभुज ABC के कर्ण AC पर स्थित एक बिन्दु है तथा DM |BC और DN | AB है | सिद्ध कीजिए कि

(i) $DM^2 = DN.MC$

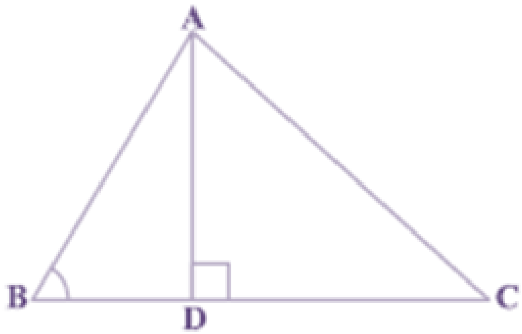
(ii) $DN^2 = DM.AN$

Q3. आकृति 6.58 में ABC एक त्रिभुज है जिसमें angle ABC >90º हा तथा AD| CB है | सिद्ध कीजिए की $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC.BD$ है |



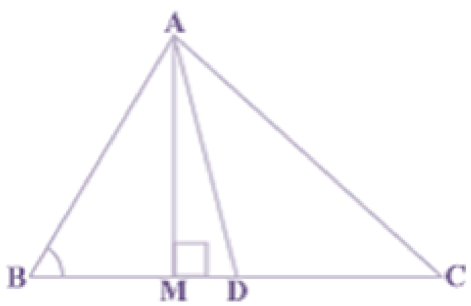
आकृति 6.58

Q4. आकृति 6.59 में ABC एक त्रिभुज है जिसमें angle ABC <90º है तथा AD| BC है | सिद्ध कीजिए कि $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\ BC.BD$ है |



आकृति 6.59

Q5. आकृति 6.60 में AD त्रिभुज ABC की एक माध्यिका है तथा AM|BC है | सिद्ध कीजिए की



आकृति 6.60

(i) $AC^2 = AD^2 + BC.\ DM + (BC/2)^2$

(ii) $AB^2 = AD^2 - BC.DM + (BC/2\ )^2$

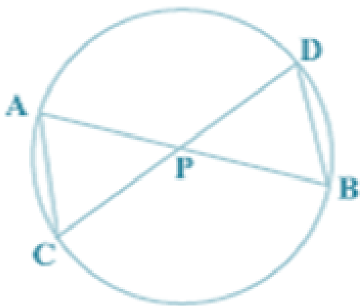
(iii) $AC^2 + AB^2 = 2AD^2 + 1/\ 2\ BC^2$

Q6. सिद्ध कीजिए कि एक समांतर चतुर्भुज के विकार्णों के वर्गों का योग उसकी भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर होता है |

Q7. **आकृति 6.61 में एक वृत्त की दो जिवाएँ AB और CD परस्पर बिन्दु प पर प्रतिच्छेद करती हैं| सिद्ध कीजिए कि**

(i) त्रिभुज APC ~ त्रिभुज DPB

(ii) AP.PB = CP.DP

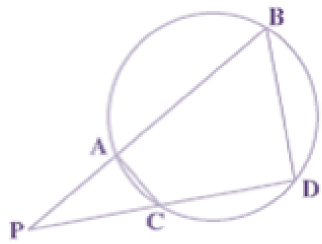


आकृति 6.61

Q8. **आकृति 6.62 में एक वृत्त की दो जिवाएँ AB और CD बढ़ाने पर परस्पर बिन्दु P पर प्रतिच्छेद करती हैं | सिद्ध कीजिए कि**

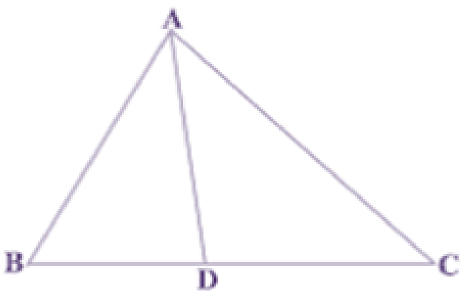
(i) त्रिभुज PAC ~ त्रिभुज PDB

(ii) PA. PB = PC.PD



आकृति 6.62

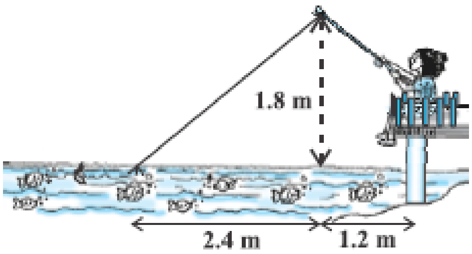
Q9. **आकृति 6.63 में त्रिभुज ABC की भुजा BC पर एक बिन्दु D इस प्रकार स्थित है कि BD/CD AB/AC है | सिद्ध कीजिए कि AD, कोण BAC का समद्विभाजक है |**



आकृति 6.63

Q10. **नाजिमा एक नदी की धारा में मछलियाँ पकड़ रही है | उसकी मछली पकड़ने वाली छड़ का सिरा पानी की सतह से 1.8 m ऊपर है तथा डोरी के निचले सिरे से लगा काँटा पानी के सतह पर इस प्रकार स्थित है कि उसकी नाजिमा से दुरी**

3.6 m है और छड़ के सिरे के ठीक नीचे पानी के सतह पर स्थित बिन्दु से उसकी दुरी 2.4m है | यह मानते हुए कि उसकी डोरी (उसकी छड़ के सिरे से काँटे तक) तनी हुई है, उसने कितनी डोरी बाहर निकाली हुई है (देखिए आकृति 6.64) ? यदि वह डोरी को 5 cm /s की दर से अन्दर खींचे, तो 12 सेकंड के बाद नाजिमा की काँटे से क्षैतिज दुरी कितनी होगी ?



आकृति 6.64